

2021 年云南省第一次高中毕业生复习统一检测

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. C 2. D 3. C 4. D 5. B 6. A
7. B 8. B 9. C 10. D 11. A 12. B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 210; 14. 216; 15. $(1, -4)$ 或 $(1, 4)$; 16. $(-\infty, \frac{3}{e}]$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. (12 分)

$$\begin{aligned}\text{解：(1) } \because K^2 &= \frac{220(70 \times 20 - 40 \times 90)^2}{110 \times 110 \times 160 \times 60} \\ &= \frac{55}{6} \\ &= 9\frac{1}{6} < 10.828. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}\end{aligned}$$

$\therefore$ 在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下，不能认为“社区住户对饲养宠物的管理规定的态度与家里是否有宠物有关系”。 $\dots\dots\dots 5$ 分

(2) 在由 18 户住户组成的样本 T 中，设家里没有宠物的住户有 x 户，家里有宠物的

$$\text{住户有 } y \text{ 户，根据分层抽样的概念得 } \begin{cases} \frac{x}{18} = \frac{20}{60}, \\ \frac{y}{18} = \frac{40}{60}, \end{cases} \text{ 解方程组得 } \begin{cases} x = 6, \\ y = 12. \end{cases}$$

$\therefore$ 样本 T 中的住户，家里没有宠物的有 6 户，家里有宠物的有 12 户. $\dots\dots\dots 7$ 分

$\therefore$ 从样本 T 中随机抽取 6 户的事件数为 C_{18}^6 ，这 6 户都是家里有宠物的事件数

为 C_{12}^6 ，这 6 户至少有 1 户家里没有宠物的事件数为 $C_{18}^6 - C_{12}^6$. $\dots\dots\dots 10$ 分

$$\therefore \frac{C_{18}^6 - C_{12}^6}{C_{18}^6} = \frac{210}{221}, \quad \therefore P = \frac{210}{221}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. (12 分)

解: (1) $\because a_n = 2 - 2S_n$,

$$\therefore a_{n+1} = 2 - 2S_{n+1} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2 - 2S_{n+1} - (2 - 2S_n) = -2(S_{n+1} - S_n).$$

$$\therefore S_{n+1} - S_n = a_{n+1},$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = -2a_{n+1}, \text{ 即 } a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n.$$

$$\therefore a_n = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a_n = 2 - 2S_n, \quad S_1 = a_1 \text{ 得 } a_1 = 2 - 2S_1 = 2 - 2a_1, \text{ 解得 } a_1 = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^n}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } a_n = \frac{2}{3^n}.$$

$$\therefore -\log_3 a_n = -\log_3 \frac{2}{3^n} = -\log_3 2 + \log_3 3^n = n - \log_3 2. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \log_3 2 \in (0, 1),$$

$$\therefore n-1 < n - \log_3 2 < n.$$

$$\therefore b_n = [n - \log_3 2] = n. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

(1) 证明: $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore PD \perp BC.$$

$\because ABCD$ 是矩形,

$$\therefore BC \perp CD.$$

$\because PD \cap CD = D$, $PD \subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD ,

$$\therefore BC \perp \text{平面 } PCD.$$

$$\because DE \subset \text{平面 } PCD, \therefore BC \perp DE. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又 $\because DE \perp PC$, $BC \cap PC = C$, $BC \subset \text{平面 } PBC$, $PC \subset \text{平面 } PBC$,

$\therefore DE \perp \text{平面 } PBC$.

$\because PB \subset \text{平面 } PBC$,

$\therefore DE \perp PB$.

又 $\because EF \perp PB$, $EF \cap DE = E$, $EF \subset \text{平面 } EFD$, $DE \subset \text{平面 } EFD$,

$\therefore PB \perp \text{平面 } EFD$6 分

(2) 解: 分别以射线 DA , DC , DP 为 x 轴, y 轴, z 轴的非负半轴, 建立如图所示

的空间直角坐标系 $D-xyz$, 设 $PD = DC = DA = a$,

$\because PD = DC$, $DE \perp PC$, 垂足为 E ,

$\therefore E$ 是 PC 的中点.

由题意可得 $D(0,0,0)$, $B(a,a,0)$, $C(0,a,0)$,

$P(0,0,a)$, $E(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

$\therefore \overrightarrow{BP} = (-a, -a, a)$, $\overrightarrow{DB} = (a, a, 0)$, $\overrightarrow{DE} = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

由 (1) 知: $\overrightarrow{BP} = (-a, -a, a)$ 是平面 EFD 的一个

法向量.8 分

设平面 DEB 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = ax + ay = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = 0. \end{cases}$$

取 $z = 1$, 得 $y = -1$, $x = 1$.

$\therefore \vec{n} = (1, -1, 1)$ 是平面 DEB 的一个法向量.10 分

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| |\vec{n}|} = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ 二面角 $F-DE-B$ 的平面角的取值范围为 $(0, \pi)$,

$\therefore$ 二面角 $F-DE-B$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$12 分

20. (12 分)

解: (1) $\because f(x) = e^x + \sin x - 2x$,

$\therefore g(x) = f'(x) = e^x + \cos x - 2$, $g(0) = f'(0) = 0$2 分

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = 0(x - 0)$,

即 $y - 1 = 0$4 分

(2) 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 0]$5 分

$\because g(x) = f'(x) = e^x + \cos x - 2$, 对任意 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, 都有 $x \cdot g(x) \geq x^2 + m$,

即对任意 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, 都有 $xe^x + x \cos x - 2x - x^2 \geq m$.

$\therefore 0e^0 + 0 \cos 0 - 2 \times 0 - 0^2 \geq m$ 成立, 故 $m \leq 0$6 分

下面证明当 $m \leq 0$ 时, 对任意 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, 都有 $xe^x + x \cos x - 2x - x^2 \geq m$.

设 $F(x) = e^x + \cos x - 2 - x$,

则 $G(x) = F'(x) = e^x - \sin x - 1$7 分

设 $H(x) = G'(x) = e^x - \cos x$,

$\because H'(x) = e^x + \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 单调递增,

又 $\because H'(-\frac{\pi}{3}) = e^{-\frac{\pi}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}} < \frac{2 - \sqrt{3}e}{2e^{\frac{\pi}{3}}} < 0$, $H'(0) = 1 > 0$.

$\therefore$ 存在唯一实数 $x_0 \in (-\frac{\pi}{3}, 0)$, 使 $H'(x_0) = 0$.

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, x_0)$ 时, $H'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, 0]$ 时, $H'(x) > 0$.

$\therefore H(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, 0]$ 单调递增.9 分

$$\text{又} \because H(-\frac{\pi}{3}) = e^{-\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2} = \frac{2-e^{\frac{\pi}{3}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}} < \frac{2-e}{2e^{\frac{\pi}{3}}} < 0, \quad H(0) = 0,$$

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$ 时, $H(x) = G'(x) \leq 0$, 故 $G(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$ 时, $F'(x) = G(x) \geq G(0) = 0$, 故 $F(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$ 时, $F(x) \leq F(0) = 0$, 即 $F(x) = e^x + \cos x - 2 - x \leq 0$.

$\therefore$ 当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$ 时, $xF(x) = x(e^x + \cos x - 2 - x) \geq 0$, 即 $x \cdot g(x) - x^2 \geq 0$.

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, 0]$,

$\therefore$ 对任意 $x \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, 都有 $x \cdot g(x) - x^2 \geq m$, 即 $x \cdot g(x) \geq x^2 + m$12 分

21. (12 分)

解: (1) 由已知: P, M, N 是椭圆 C 上的动点, P, F_1, M 三点共线, P, F_2, N 三点共线.

$\therefore$ 当 ΔF_1PF_2 的面积最大时, P 是椭圆 C 在短轴上的顶点.

$\therefore$ 当 ΔF_1PF_2 的面积最大时, ΔMPN 为等边三角形,

$\therefore$ 当 ΔF_1PF_2 的面积最大时, $\angle F_1PO = \frac{1}{2}\angle F_1PF_2 = \frac{1}{2}\angle MPN = 30^\circ$,

其中 O 是坐标原点.2 分

$\therefore$ 当 ΔF_1PF_2 的面积最大时, $e = \frac{c}{a} = \sin \angle F_1PO = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$4 分

(2) 由 (1) 知: $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

$\therefore c = \frac{1}{2}a, \quad b^2 = a^2 - c^2 = \frac{3a^2}{4}$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程可化为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{3a^2} = 1$, $F_1(-\frac{1}{2}a, 0)$, 设 $P(x_0, y_0)$, $M(x_1, y_1)$.

$$\therefore \overrightarrow{PF_1} = (-\frac{a}{2} - x_0, -y_0), \quad \overrightarrow{F_1M} = (x_1 + \frac{a}{2}, y_1).$$

$$\text{由已知和 } \overrightarrow{PF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1M} \text{ 得: } x_1 = \frac{-x_0 - \frac{(1+\lambda)a}{2}}{\lambda}, \quad y_1 = -\frac{y_0}{\lambda}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$\therefore M(x_1, y_1)$ 在椭圆 C 上,

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{4y_1^2}{3a^2} = 1, \quad \text{即 } \frac{1}{a^2} \times \left[\frac{-x_0 - \frac{(1+\lambda)a}{2}}{\lambda} \right]^2 + \frac{4}{3a^2} \times \left(-\frac{y_0}{\lambda} \right)^2 = 1.$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{4y_0^2}{3a^2} \right) + \frac{(1+\lambda)x_0}{a\lambda^2} + \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda^2} = 1.$$

$\therefore P(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上,

$$\therefore \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{4y_0^2}{3a^2} = 1.$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda^2} + \frac{(1+\lambda)x_0}{a\lambda^2} + \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda^2} = 1, \quad \text{解方程得 } \lambda = \frac{5a+4x_0}{3a}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{同理可得 } \mu = \frac{5a-4x_0}{3a}.$$

$$\therefore \text{直线 } \lambda x + \mu y = 1 \text{ 可化为 } \frac{5a+4x_0}{3a}x + \frac{5a-4x_0}{3a}y = 1.$$

$$\therefore \frac{5a+4x_0}{3a} \times \frac{3}{10} + \frac{5a-4x_0}{3a} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \times \frac{5a+4x_0+5a-4x_0}{3a} = \frac{3}{10} \times \frac{10a}{3a} = 1,$$

$$\therefore \text{直线 } \frac{5a+4x_0}{3a}x + \frac{5a-4x_0}{3a}y = 1 \text{ 经过定点 } \left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10} \right). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即直线 } \lambda x + \mu y = 1 \text{ 经过定点 } \left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10} \right).$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = \frac{3a^2}{4}, \quad b > \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} = \frac{3}{4b^2} < 3.$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} \times \left(\frac{3}{10} \right)^2 + \frac{4}{3a^2} \times \left(\frac{3}{10} \right)^2 = \frac{9}{100} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} \right) = \frac{9}{100} \times \frac{7}{3a^2} = \frac{21}{100} \times \frac{1}{a^2} < \frac{63}{100} < 1,$$

$$\therefore \text{定点 } \left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10} \right) \text{ 在椭圆 } C \text{ 内.}$$

$$\therefore \text{直线 } \lambda x + \mu y = 1 \text{ 与椭圆 } C \text{ 有两个公共点.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

解: (1) 点 B 的直角坐标为 $(4, 0)$,1 分

曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$,3 分

曲线 C_2 的普通方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$5 分

(2) 由已知设 $A(\cos \varphi, 2 \sin \varphi)$, 点 A 到 x 轴的距离 $d = 2 |\sin \varphi|$.

由 (1) 知: 点 B 的直角坐标为 $(4, 0)$.

$\therefore \triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OB| d = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 |\sin \varphi| = 4 |\sin \varphi|$8 分

$\because |\sin \varphi|$ 的最大值为 1,

$\therefore 4 |\sin \varphi|$ 的最大值为 4.

$\therefore \triangle AOB$ 面积的最大值为 4.10 分

23. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(1) 证明: $\because a > 0, b > 0, a + b = 2$,

$\therefore (\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1})^2 = (a+b) + 2 + 2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$ 2 分

$$= 2 + 2 + 2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$$

$$\leq 4 + 2 \times \frac{(a+1) + (b+1)}{2}$$

$$= 4 + (a+b) + 2 = 8.4 分$$

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} \leq 2\sqrt{2}$5 分

(2) 解: $\because a > 0, b > 0, a + b = 2$,

$$\therefore ab = (\sqrt{ab})^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1.$$

又 $\because$ 当 $a = b = 1$ 时, $ab = 1$.

$\therefore ab$ 的最大值为 1.

$\therefore$ 不等式 $|2x+1| - |2x-3| \geq ab$ 对满足已知条件的所有 a, b 都成立

$$\Leftrightarrow |2x+1| - |2x-3| \geq 1 \text{ 成立.} \cdots \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, 不等式化为 $-2x-1-(3-2x) \geq 1$, 化简得 $-4 \geq 1$, 不成立, 所以不等式无解;

当 $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$ 时, 不等式化为 $2x+1-(3-2x) \geq 1$, 解得 $x \geq \frac{3}{4}$;

$$\therefore \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

当 $x > \frac{3}{2}$ 时, 不等式化为 $2x+1-(2x-3) \geq 1$, 化简得 $4 \geq 1$, 恒成立.

$$\therefore x > \frac{3}{2}.$$

$$\therefore |2x+1| - |2x-3| \geq 1 \text{ 的解集为 } [\frac{3}{4}, +\infty).$$

综上, 实数 x 的取值范围是 $[\frac{3}{4}, +\infty)$. $\cdots \cdots \cdots 10 \text{ 分}$

请注意: 以上参考答案与评分标准仅供阅卷时参考, 其他答案请参考评分标准酌情给分.