绝密★启用前

三湘名校教育联盟·2021届高三第三次大联考

数　学

本试卷共4页，22题. 全卷满分150分，考试用时120分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3. 考试结束时，将本试题卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知U为全集，非空集合A,B满足$A\cap(\complement_U B)\neq\varnothing$，则下列正确的是

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\subseteq B$　　C. $B\subseteq A$　　D. $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$

2. 已知复数z满足$z(1-\mathrm{i})=1+2\mathrm{i}$，则$1+\bar{z}$在复平面内对应的点在

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列选项中的两个条件是互为充要条件的是

A. P：$a=1$；Q：函数$f(x)=x^2-(1-a^2)x+3$是偶函数

B. 在$\triangle ABC$中，P：$\triangle ABC$是等边三角形；Q：$\sin A=\sin B=\sin C$

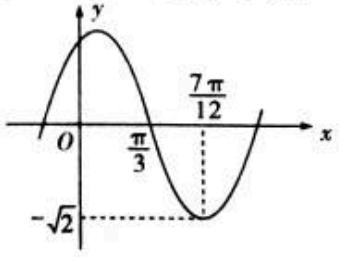
C. P：数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2n^2-3n+1$；Q：数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列

D. P：实数$x>1$；Q：$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$

4. 九龙壁是中国古代建筑的特色，是帝王贵族出入的宫殿或者王府的正门对面，是权力的象征，做工十分精美，艺术和历史价值很高. 九龙壁中九条蟠龙各居神态，正中间即第五条为正居之龙，两侧分别是降沉之龙和升腾之龙间隔排开，其中升腾之龙位居阳位，即第1,3,7,9位，沉降之龙位居2,4,6,8位. 某工匠自己雕刻一九龙壁模型，为了增加模型的种类但又不改变升腾之龙居阳位和沉降之龙的位置，只能调换四条升腾之龙的相对位置和四条沉降之龙的相对位置. 则不同的雕刻模型有多少种

A. A_8^8　　B. $2A_4^4$　　C. A_9^4　　D. $A_4^4\cdot A_4^4$

5. 函数$f(x)=-\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示，则$f(x)$的单调递增区间为



A. $\left[k\pi-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$

B. $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{7\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

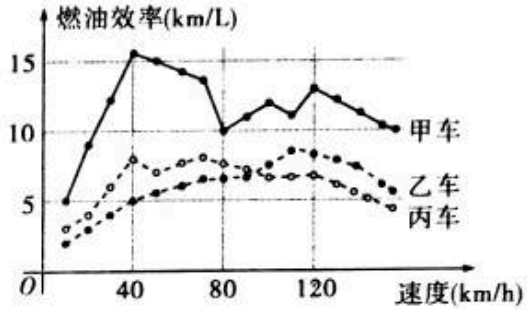
D. $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$

6. 已知直线 l 被双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 所截得的弦的中点坐标为(1,2)，则直线 l 的方程为

A. $x+4y-9=0$　　B. $x-4y+7=0$　　C. $x-8y+15=0$　　D. $x+8y-17=0$

7. 目前我国对于轻型汽车将“国六标准”分为“国六 A”和“国六 B”两个阶段，并计划于 2023 年在全国统一实施. 国六标准即“国家第六阶段机动车污染物排放标准”，是为了贯彻环境保护相关法律，减少并防止汽车排气对环境的污染，保护生态环境，保证人体健康而制定的. 某国有汽车品牌努力研发轻型燃油汽车性能，对旗下生产的三款汽车在不同速度下燃油效率性能检测如图(“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程). 下列叙述中正确的是

排放物	国六 A	国六 B
一氧化碳	700(mg/km)	500(mg/km)
非甲烷烃	68(mg/km)	35(mg/km)
氮氧化物	60(mg/km)	35(mg/km)
PM 细颗粒物	4.5(mg/km)	3(mg/km)
PN 颗粒物	6×10^{11}颗/km	6×10^{11}颗/km



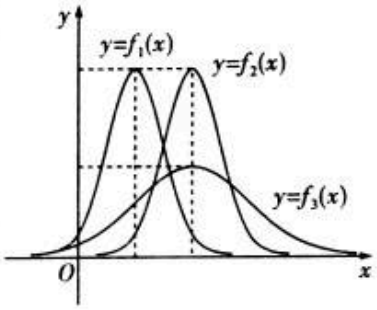
A. 国六 B 阶段比国六 A 阶段对 PN 颗粒物排放量要求减少

B. 以相同速度行驶时，甲车每小时消耗汽油最少

C. 乙车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗汽油不到 10 升

D. 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 km 需要消耗汽油约 10 升

8. 已知连续型随机变量 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,3)$，其正态曲线如图所示，则下列结论正确的是



A. $P(X_1\leqslant\mu_2)<P(X_2\leqslant\mu_1)$

B. $P(X_2\geqslant\mu_2)>P(X_3\geqslant\mu_3)$

C. $P(X_1\leqslant\mu_2)<P(X_2\leqslant\mu_3)$

D. $P(\mu_i-2\sigma_i\leqslant X_i\leqslant\mu_i+2\sigma_i)=P(\mu_{i+1}-2\sigma_{i+1}\leqslant X_{i+1}\leqslant\mu_{i+1}+2\sigma_{i+1})(i=1,2)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}b=3$，$B=2C$，则下列结论正确的是

A. $\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $a=\frac{c}{3}$　　C. $a=c$　　D. $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$

10. 数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 $q>1$，其前 n 项和为 S_n，若 $a_5-a_1=15$，$a_2\cdot a_4=16$，则下列说法正确的是

A. $S_{n+1}=2S_n+1$

B. $a_n=2^n$

C. 数列$\{\log_3(S_n+1)\}$是等比数列

D. 对任意的正整数 k(k 为常数)，数列$\{\log_2(S_{n+k}-S_n)\}$是公差为 1 的等差数列

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sqrt{2})(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则下列命题正确的是

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 可能平行　　B. 存在 θ，使得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C. 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}$ 时，$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. 当 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直

12. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x+1)$. 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\log_2(1+x)$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的周期为 2　　B. 若 $i\in\mathbf{N}^*$，则 $\sum_{i=1}^{n}f(i)=0$

C. 点 $(-1,0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心　　D. $\sum_{i=1}^{2021}f\left(\frac{i}{2}\right)=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)^{1011}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 从古至今，奇门遁甲，五行八卦等，称之为玄学，它充满了神秘色彩，人们常说“无极生太极，太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦”. 八卦是由 ⚋ 阴 ⚊ 阳 组合而成，八卦中的阳爻和阴爻与计算机数制“二进制”中的 1 和 0 分别对应，例如在二进制下“101011”表示的“十进制”数为 $1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\times2^0=43$，在八卦中 ䷀ 乾卦代表的二进制数“111111”表示十进制数 63，䷁ 坤卦代表的二进制数“000000”表示的十进制数为 0，据此，离卦 ䷝ 表示的十进制数字为_____.

14. 已知过点 $(0,-4)$ 且倾斜角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 的直线方程为_____，若该直线与抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 只有一个公共点，则抛物线的准线方程为_____.

15. “开车不喝酒，喝酒不开车”，为了营造良好的交通秩序，全国各地交警都大力宣传和查处“酒驾行为”. 某地交警在设卡查处“酒驾行为”时碰到甲、乙、丙三位司机，

司机甲说：我喝酒了.

司机乙说：我没有喝酒.

司机丙说：甲没有喝酒.

若这三位司机身上都有酒味，但只有一人真正喝酒了，三人中只有一人说的是真话，请你在不使用酒精测试仪的情况下，帮助交警判定出真正喝酒的人是_____.

16. 已知点 P 是等边 $\triangle ABC$ 外一点，且点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内的射影恰好在边 BC 上，若 $\triangle ABC$ 的边长为 2，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，从以下三个条件中任选其中一个①$S_{15}=120$；②$a_5+a_7=12$；③$\frac{S_5}{5}-\frac{S_2}{2}=\frac{3}{2}$.

(1) 求公差 d 及 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (12 分)在$\triangle ABC$中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)若 $a=\sqrt{7},c=\sqrt{3}$,求 b 的值;

(2)若角 A 的平分线交 BC 于点 D,$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}$,$a=2$,求$\triangle ACD$的面积.

19. (12 分)2020 年 5 月 27 日,中央文明办明确规定,在 2020 年全国文明城市测评指标中不将马路市场、流动商贩列为文明城市测评考核内容. 6 月 1 日上午,国务院总理李克强在山东烟台考察时表示,地摊经济、小店经济是就业岗位的重要来源,是人间的烟火,和"高大上"一样,是中国的生机. 其中套圈游戏凭借其趣味性和挑战性深受广大市民的欢迎. 现有甲、乙两人进行套圈比赛,要求他们站在定点 A,B 两点处进行套圈,已知甲在 A,B 两点的命中率均为$\frac{1}{3}$,乙在 A 点的命中率为 $1-p\left(0<p\leqslant\frac{1}{2}\right)$,在 B 点的命中率为 $1-2p$,且他们每次套圈互不影响.

(1)若甲在 A 处套圈 3 次,求甲至多命中 1 次的概率;

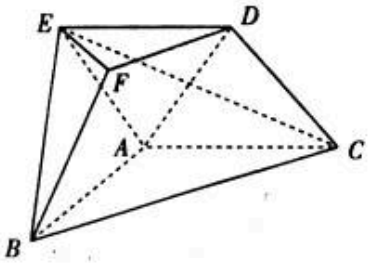
(2)若甲和乙每人在 A,B 两点各套圈一次,且在 A 点命中计 2 分,在 B 点命中计 3 分,未命中则计 0 分,设甲的得分为 X,乙的得分为 Y,写出 X 和 Y 的分布列和期望;

(3)在(2)的条件下,若 $EX>EY$,求 p 的范围.

20. (12 分)如图所示,$\triangle ABC$ 是等边三角形,$DE\parallel AC,DF\parallel BC$,二面角 $D-AC-B$ 为直二面角,$AC=CD=AD=DE=2DF=2$.

(1)求证:$EF\perp BC$;

(2)求平面 $ACDE$ 与平面 BEF 所成锐二面角的正切值.



21. (12 分)已知函数 $f(x)$ 满足 $xf(x)-x\ln x-2a=0(a\in\mathbf{R})$恒成立.

(1)分析函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $g(x)=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2}$,证明:当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)>g(x)$.

22. (12 分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=\frac{2}{3}$,F_1,F_2 分别为左右焦点,点 T 在椭圆上,$\triangle TF_1F_2$ 的面积最大为 $2\sqrt{5}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)椭圆 C 的左、右顶点分别为 A,B. 过定点(1,0)且斜率不为 0 的直线 l 交椭圆 C 于 P,Q 两点,直线 AP 和直线 BQ 相交于椭圆 C 外一点 M,求证:点 M 的轨迹为定直线.