2012-2020 全国卷高考真题分类汇编 导数大题专项练习

一、解答题

1．(2020 年高考数学课标Ⅰ卷理科)已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+ax^{2}-x$．

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq \frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围．

2．(2020 年高考数学课标Ⅱ卷理科)已知函数 $f(x)=\sin^2x\sin 2x$．

(1)讨论 $f(x)$在区间$(0，\pi)$的单调性；

(2)证明：$\left|f(x)\right|\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

(3)设 $n\in N^*$，证明：$\sin^2x\sin^2 2x\sin^2 4x\ldots\sin^2 2^n x\leq\frac{3^n}{4^n}$．

3．(2020 年高考数学课标Ⅲ卷理科)设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点($\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{2})$)处的切线与 y 轴垂直．

(1)求 b．

(2)若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1．

4．(2019 年高考数学课标Ⅲ卷理科)已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间$[0,1]$的最小值为-1且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由．

5．(2019 年高考数学课标全国Ⅱ卷理科)已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

(2)设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线．

6．(2019 年高考数学课标全国Ⅰ卷理科)已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

(1) $f'(x)$ 在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点；

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

7．(2018 年高考数学课标Ⅲ卷（理）)已知函数 $f\left(x\right)=\left(2+x+ax^2\right)\ln\left(1+x\right)-2x$．

(1)若 $a=0$，证明：当$-1<x<0$时，$f\left(x\right)<0$，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)>0$；

(2) 若 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值点，求 a .

8．(2018 年高考数学课标Ⅱ卷（理）) (12 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax^{2}$.

(1) 若 $a=1$ ，证明：当 $x\geqslant 0$ 时， $f(x)\geqslant 1$ ；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a .

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

9．(2018 年高考数学课标卷Ⅰ（理）) (12 分) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2 ，证明： $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<a-2$.

10．(2017 年高考数学新课标Ⅰ卷理科) 已知函数 $f\left(x\right)=ae^{2x}+\left(a-2\right)e^{x}-x$.

(1) 讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2) 若 $f\left(x\right)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题:共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做, 则按所做的第一题计分.

11．(2017 年高考数学课标Ⅲ卷理科) (12 分) 已知函数 $f\left(x\right)=x-1-a\ln x$.

(1) 若 $f\left(x\right)\geq 0$ ，求 a 的值；

(2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n ， $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$ ，求 m 的最小值.

12．(2017 年高考数学课标Ⅱ卷理科) (12 分) 已知函数 $f(x)=ax^3-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geq 0$.

(1) 求 a ；

(2) 证明： $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 ，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

13．(2016 高考数学课标Ⅲ卷理科) 设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$, 其中 $a>0$, 记 $\left|f(x)\right|$ 的最大值为 A .

(Ⅰ) 求 $f'(x)$;

(Ⅱ) 求 A ;

(Ⅲ) 证明 $\left|f'(x)\right|\leqslant 2A$.

14．(2016 高考数学课标Ⅱ卷理科) (本小题满分 12 分) (I) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^{x}$ 的单调性，并证明当

$x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$；

(II) 证明：当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ 有最小值．设 $g\left(x\right)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域.

15．(2016 高考数学课标Ⅰ卷理科)(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(I) 求 a 的取值范围;

(II) 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

16．(2015 高考数学新课标 2 理科)(本题满分 12 分)设函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$．

(Ⅰ)证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增;

(Ⅱ)若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le e-1$，求 m 的取值范围.

17．(2015 高考数学新课标 1 理科)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4},g(x)=-\ln x$

(Ⅰ)当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(Ⅱ)用 $\min\left\{m,n\right\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\left\{f(x),g(x)\right\}(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

18．(2014 高考数学课标 2 理科)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=e^x-e^{-x}-2x$．

(Ⅰ)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性;

(Ⅱ)设 $g\left(x\right)=f\left(2x\right)-4bf\left(x\right)$，当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)>0$，求 b 的最大值;

(Ⅲ) 已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 ln2 的近似值(精确到 0．001)

19．(2014 高考数学课标 1 理科)设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线 $y=e(x-1)+2$.

(1) 求 a,b；

(2) 证明: $f(x)>1$.

20．(2013 高考数学新课标 2 理科)已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $m \leq 2$ 时，证明 $f(x) > 0$.

21．(2013 高考数学新课标 1 理科) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$，$g(x) = e^x(cx + d)$，若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 P(0，2)，且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$

(Ⅰ) 求 a，b，c，d 的值

(Ⅱ) 若 $x \geqslant -2$ 时，$f(x) \leqslant kg(x)$，求 k 的取值范围。

22．(2012 高考数学新课标理科) 已知函数 $f(x)$ 满足满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

(2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$，求 $(a+1)b$ 的最大值.

2012-2020 全国卷高考真题分类汇编 导数大题专项练习（原卷+解析）参考答案

一、解答题

1．（1）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增．（2）

$\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x^2-x$，$f'(x)=e^x+2x-1$，

由于 $f''(x)=e^x+2>0$，故 $f'(x)$ 单调递增，注意到 $f'(0)=0$，故：

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增．

(2)由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$ 得，$e^x+ax^2-x\geq\frac{1}{2}x^3+1$，其中 $x\geq0$，

①．当 x=0 时，不等式为：$1\geq1$，显然成立，符合题意；

②．当 $x>0$ 时，分离参数 a 得，$a\geq-\frac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，

记 $g(x)=-\frac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，$g'(x)=-\frac{(x-2)\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}$，

令 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geq0)$，

则 $h'(x)=e^x-x-1$，$h''(x)=e^x-1\geq0$，

故 $h'(x)$ 单调递增，$h'(x)\geq h'(0)=0$，

故函数 $h(x)$ 单调递增，$h(x)\geq h(0)=0$，

由 $h(x)\geq0$ 可得：$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geq0$ 恒成立，

故当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

因此，$[g(x)]_{\max}=g(2)=\frac{7-e^2}{4}$，

综上可得，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$．

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行： (1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系． (2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数． (3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题． (4)考查数形结合思想的应用．

2.（1）当$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增，当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，当$x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增．（2）证明见解析；（3）证明见解析．

解析：(1)由函数的解析式可得：$f(x)=2\sin^3 x\cos x$，则：

$$f'(x)=2\left(3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x\right)=2\sin^2 x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$=2\sin^2 x\left(4\cos^2 x-1\right)=2\sin^2 x\left(2\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right),$$

$f'(x)=0$在$x\in(0,\pi)$上的根为：$x_1=\frac{\pi}{3}, x_2=\frac{2\pi}{3}$，

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增，

当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，

当$x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增．

(2)注意到$f(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)\sin\left[2(x+\pi)\right]=\sin^2 x\sin 2x=f(x)$，

故函数$f(x)$是周期为π的函数，

结合(1)的结论，计算可得：$f(0)=f(\pi)=0$，

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}，f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

据此可得：$\left[f(x)\right]_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$\left[f(x)\right]_{\min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$，

即$\left|f(x)\right|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$．

(3)结合(2)的结论有：

$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x$

$=\left[\sin^3 x\sin^3 2x\sin^3 4x\cdots\sin^3 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\sin x\left(\sin^2 x\sin 2x\right)\left(\sin^2 2x\sin 4x\right)\cdots\left(\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x\right)\sin^2 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$

$\le\left[\sin x\times\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\times\cdots\times\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\times\sin^2 2^n x\right]^{\frac{2}{3}}$

$\le\left[\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行： (1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系． (2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数． (3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题． (4)考查数形结合思想的应用．

3．（1）$b=-\dfrac{3}{4}$；（2）证明见解析

解析：（1）因为 $f'(x)=3x^2+b$，

由题意，$f'(\dfrac{1}{2})=0$，即 $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b=0$

则 $b=-\dfrac{3}{4}$；

（2）由（1）可得 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，

$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}=3(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{2})$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$，$(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-1)=c-\dfrac{1}{4},f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4},f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4},f(1)=c+\dfrac{1}{4}$，

若 $f(x)$ 所有零点中存在一个绝对值大于 1 的零点 x_0，则 $f(-1)>0$ 或 $f(1)<0$，

即 $c>\dfrac{1}{4}$ 或 $c<-\dfrac{1}{4}$.

当 $c>\dfrac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\dfrac{1}{4}>0,f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4}>0,f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4}>0,f(1)=c+\dfrac{1}{4}>0$，

又 $f(-4c)=-64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)<0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-4c,-1)$ 上存在唯一一个零点 x_0，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-1,+\infty)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

当 $c<-\dfrac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\dfrac{1}{4}<0, f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4}<0, f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4}<0, f(1)=c+\dfrac{1}{4}<0$，

又 $f(-4c)=64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)>0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(1,-4c)$ 上存在唯一一个零点 x_0'，

即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-\infty,1)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

综上，$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

【点睛】本题主要考查利用导数研究函数的零点，涉及到导数的几何意义，反证法，考查学生逻辑推理能力，是一道有一定难度的题.

4.【答案】(1)见详解；(2) $a=0$，$b=-1$ 或 $a=4$，$b=1$.

【官方解析】

(1) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup(\dfrac{a}{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,\dfrac{a}{3})$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\dfrac{a}{3},+\infty)$ 单调递增，在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 单调递减；

若 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

若 $a<0$，则当 $x\in(-\infty,\dfrac{a}{3})\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\dfrac{a}{3},0)$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{a}{3})$，$(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(\dfrac{a}{3},0)$ 单调递减.

(2)满足题设条件的 a，b 存在.

(ⅰ)当 $a\leqslant 0$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $f(0)=b$，最大值为 $f(1)=2-a+b$．此时 a，b 满足题设条件当且仅当 $b=-1$，$2-a+b=1$，即 $a=0$，$b=-1$.

(ⅱ)当 $a\geqslant 3$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 $f(0)=b$，最小值为 $f(1)=2-a+b$．此时 a，b 满足题设条件当且仅当 $2-a+b=-1$，$b=1$，即 $a=4$，$b=1$.

(iii) 当 $0<a<3$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}+b$，最大值为 b 或 $2-a+b$.

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1, b=1$，则 $a=3\sqrt[3]{2}$，与 $0<a<3$ 矛盾.

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1, 2-a+b=1$，则 $a=3\sqrt{3}$ 或 $-3\sqrt{3}$ 或 $a=0$，与 $0<a<3$ 矛盾.

综上，当且仅当 $a=0, b=-1$ 或 $a=4$，$b=1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 -1，最大值为 1.

【点评】这是一道常规的函数导数不等式和综合题，题目难度比往年降低了不少．考查的函数单调性，最大值最小值这种基本概念的计算．思考量不大，计算量略大．

5．**【答案】**(1) 函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是单调增函数，证明见解析；(2) 证明见解析.

【官方解析】

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是单调递增.

因为 $f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=2-\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一零点 x_1，即 $f(x_1)=0$.

又 $0<\frac{1}{x_1}<1$，$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$.

综上，$f(x)$ 有且仅有两个零点.

(2) 因为 $\frac{1}{x_0}=e^{-\ln x_0}$，故点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y=e^x$ 上.

由题设知 $f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，

故直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\dfrac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}$.

曲线 $y=e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 处切线的斜率是 $\dfrac{1}{x_0}$，曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线的斜率也是 $\dfrac{1}{x_0}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

【分析】(1) 对函数 $f(x)$ 求导，结合定义域，判断函数的单调性；

(2) 先求出曲线 $y=\ln x$ 在 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$ 处的切线 l，然后求出当曲线 $y=e^x$ 切线的斜率与 l 斜率相等时，证明曲线 $y=e^x$ 切线 l' 在纵轴上的截距与 l 在纵轴的截距相等即可.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$，因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以 $f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是单调增函数；

当 $x\in(0,1)$，时，$x\to 0,y\to-\infty$，而 $f(\dfrac{1}{e})=\ln\dfrac{1}{e}-\dfrac{\dfrac{1}{e}+1}{\dfrac{1}{e}-1}=\dfrac{2}{e-1}>0$，显然当 $x\in(0,1)$，函数 $f(x)$ 有零点，而函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递增，故当 $x\in(0,1)$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一的零点；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(e)=\ln e-\dfrac{e+1}{e-1}=\dfrac{-2}{e-1}<0,f(e^2)=\ln e^2-\dfrac{e^2+1}{e^2-1}=\dfrac{e^2-3}{e^2-1}>0$，

因为 $f(e)\cdot f(e^2)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 (e,e^2) 必有一零点，而函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递增，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一的零点

综上所述，函数 $f(x)$ 的定义域 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 内有 2 个零点；

(2) 因为 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，所以 $f(x_0)=\ln x_0-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=0\Rightarrow\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$

$y=\ln x\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$ 处的切线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$，故曲线 $y=\ln x$ 在 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$ 处的切线 l 的方程为：$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$ 而 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，所以 l 的方程为

$y=\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{2}{x_0-1}$，它在纵轴的截距为 $\dfrac{2}{x_0-1}$.设曲线 $y=e^x$ 的切点为 $B(x_1,e^{x_1})$，过切点为 $B(x_1,e^{x_1})$ 切

线 l'， $y=e^x \Rightarrow y'=e^x$ ，所以在 $B(x_1,e^{x_1})$ 处的切线 l' 的斜率为 e^{x_1} ，因此切线 l' 的方程为

$y=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$，

当切线 l' 的斜率 $k_1=e^{x_1}$ 等于直线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$ 时，即 $e^{x_1}=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow x_1=-(\ln x_0)$，

切线 l' 在纵轴的截距为 $b_1=e^{x_1}(1-x_1)=e^{-\ln x_0}(1+\ln x_0)=\dfrac{1}{x_0}(1+\ln x_0)$，而 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，所以

$b_1=\dfrac{1}{x_0}(1+\dfrac{x_0+1}{x_0-1})=\dfrac{2}{x_0-1}$，直线 l,l' 的斜率相等，在纵轴上的截距也相等，因此直线 l,l' 重合，故

曲线 $y=\ln x$ 在 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

【点评】本题考查了利用导数求已知函数的单调性、考查了曲线的切线方程，考查了数学运算能力.

6．解：（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$．当 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$

单调递减，而 $g'(0)>0,g'(\dfrac{\pi}{2})<0$，可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点，设为 α．

则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时， $g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$时， $g'(x)<0$．

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点，即 $f'(x)$

在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

（2） $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$．

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）知， $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，

$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

（ii）当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，由（1）知， $f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$

时， $f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)>0$．从而 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 没有零点．

（iii）当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减．而 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 有唯一零点．

（iv）当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)>1$，所以 $f(x)$<0，从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点．

综上，$f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

7.【官方解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$，$f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$

设函数 $g(x)=f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$，则 $g'(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$

当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故当 $x>-1$ 时，$g(x)\geq g(0)=0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增

又 $f(0)=0$，故当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$．

（2）（i）若 $a\geq 0$，由（1）知，当 $x>0$ 时，$f(x)\geq(2+x)\ln(1+x)-2x>0=f(0)$

这与 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾

（ii）若 $a<0$，设函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}$

由于当 $|x|<\min\left(1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\right)$ 时，$2+x+ax^2>0$，故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同

又 $h(0)=f(0)=0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，当且仅当 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点

$$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2(2+x+ax^2)(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2}=\frac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(2+x+ax^2)^2}$$

如果 $6a+1>0$，则当 $0<x<-\dfrac{6a+1}{4a}$，且 $|x|<\min\left\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\right\}$ 时，$h'(x)>0$，故 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点

如果$6a+1<0$，则$a^2x^2+4ax+6a+1=0$存在根$x_1<0$，故当$x\in\left(x_1,0\right)$，且$|x|<\min\left\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\right\}$时，

$h'\left(x\right)<0$，所以$x=0$不是$h\left(x\right)$的极大值点

如果$6a+1=0$，则$h'\left(x\right)=\dfrac{x^3\left(x-24\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2-6x-12\right)}$

则当$x\in\left(-1,0\right)$时，$h'\left(x\right)>0$；当$x\in\left(0,1\right)$时，$h'\left(x\right)<0$

所以$x=0$是$h\left(x\right)$的极大值点，从而$x=0$是$f\left(x\right)$的极大值点

综上$a=-\dfrac{1}{6}$.

【民间解析】（1）法一：当$a=0$时，$f\left(x\right)=\left(x+2\right)\ln\left(x+1\right)-2x=\left(x+2\right)\left[\ln\left(x+1\right)-\dfrac{2x}{x+2}\right]$

函数$f\left(x\right)$的定义域为$\left\{x\mid x+1>0\right\}=\left\{x\mid x>-1\right\}$，此时$x+2>0$

记$g\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\dfrac{2x}{x+2}=\ln\left(x+1\right)+\dfrac{4}{x+2}-2\ \left(x>-1\right)$

则$g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{\left(x+2\right)^2}=\dfrac{x^2}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2}\geq 0$

所以函数$g\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增，而$g\left(0\right)=\ln 1-0=0$

所以当$-1<x<0$时，$g\left(x\right)<0$，此时$f\left(x\right)=\left(x+2\right)g\left(x\right)<0$

当$x>0$时，$g\left(x\right)>0$，此时$f\left(x\right)=\left(x+2\right)g\left(x\right)>0$

法二：当$a=0$时，$f\left(x\right)=\left(x+2\right)\ln\left(x+1\right)-2x\ \left(x>-1\right)$，$f\left(0\right)=0$

则$f'\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+\dfrac{x+2}{x+1}-2=\ln\left(x+1\right)+\dfrac{1}{x+1}-1$，$f'\left(0\right)=0$

$f''\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}\ \left(x>-1\right)$

①当$-1<x<0$时，$f''\left(x\right)<0$，此时$f'\left(x\right)$单调递减

所以$-1<x<0$时，$f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$，故函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,0\right)$上单调递增

所以$x\in\left(-1,0\right)$时，$f\left(x\right)<f\left(0\right)=0$

②当$x>0$时，$f''\left(x\right)>0$，此时$f'\left(x\right)$单调递增

所以$x>0$时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

所以当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)>f(0)=0$

综上所述若$a=0$，证明：当$-1<x<0$时，$f(x)<0$，当$x>0$时，$f(x)>0$.

（2）法一：由$f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$

可得$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{x+2+ax^2}{x+1}-2=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{ax^2-x}{x+1}$

所以$f'(0)=0$

因为$x=0$是$f(x)$的极大值点

所以$\exists x_0>0$，当$x\in(-x_0,0)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$

又$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{ax^2-x}{x+1}=ax\left[2\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\right]+\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$

设$h(x)=2\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$，则$h(0)=0$，$h'(x)=\dfrac{3+2x}{(1+x)^2}>0$

所以$h(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，所以当$-1<x<0$时，$h(x)<0$；当$x>0$时，$h(x)>0$

所以当$x\neq 0$时，$x\left[2\ln(x+1)+\dfrac{x}{1+x}\right]>0$

设$h(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$，则$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

当$-1<x<0$时，$h'(x)<0$；当$x>0$时，$h'(x)<0$

所以函数$h(x)$在$(-1,0)$上单调递减；在$(0,+\infty)$上单调递增

所以任意$x>-1$时，$h(x)\geq h(0)=0$

所以若$a\geq 0$时，$f'(x)\geq 0$，此时$f(x)$不存在极值，故$a<0$

由（1）知，当$-1<x<0$时，$\ln(x+1)<\dfrac{2x}{2+x}$；当$x>0$时，$\ln(x+1)>\dfrac{2x}{x+2}$

显然$\exists x_0>0$，当$x\in(-x_0,x_0)$时，$1+2ax>0$

①当$x\in(-x_0,0)$时，则$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{ax^2-x}{x+1}<\dfrac{2x(1+2ax)}{x+2}+\dfrac{ax^2-x}{x+1}$

$=\dfrac{x^2(5ax+6a+1)}{(x+1)(x+2)}$

若$6a+1<0$，则$\exists x_1>0$，使得当$x\in(-x_1,0)$时，$5ax+6a+1<0$，此时$f'(x)<0$不满足题意，故

$6a+1\geq 0$，即$a\geq -\dfrac{1}{6}$

②当$x\in(0,x_0)$时，则$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{ax^2-x}{x+1}>\dfrac{2x(1+2ax)}{2+x}+\dfrac{ax^2-x}{x+1}$

$=\dfrac{x^2(5ax+6a+1)}{(x+1)(x+2)}$

若$6a+1>0$，则$\exists x_2>0$，使得当$x\in(0,x_2)$时，$5ax+6a+1>0$，此时$f'(x)>0$，不满足题意，

故$6a+1\leq 0$，即$a\leq -\dfrac{1}{6}$

综上，$\begin{cases} a<0 \\ a\geq -\dfrac{1}{6} \\ a\leq -\dfrac{1}{6} \end{cases}$，所以$a=-\dfrac{1}{6}$.

法二：$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{x+2+ax^2}{x+1}-2=\dfrac{ax^2-x+(x+1)(1+2ax)\ln(x+1)}{x+1}$

记$h(x)=ax^2-x+(1+2ax)(x+1)\ln(x+1)$，$h'(x)=4ax+(4ax+2a+1)\ln(x+1)$

当$a\geq 0$，$x>0$时，$h'(x)>0$

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以当$x>0$时，$h(x)>0$即$f'(x)>0$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，与$x=0$是$f(x)$的极大值点不符合；

当$a<0$时，$h''(x)=8a+4a\ln(x+1)+\dfrac{1-2a}{x+1}$，显然可知$h''(x)$递减

①$h''(0)=0$，解得$a=-\dfrac{1}{6}$，则有$-1<x<0$，$h''(x)>0$，$h'(x)$递增；

$x>0$时，$h''(x)<0$，$h'(x)$递减，所以$h'(x)\leq h'(0)=0$，故$h(x)$递减，又$h(0)=0$

则$-1<x<0$，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$递增；$x>0$，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$递减

此时$x=0$为$f(x)$的极大值点，符合题意

②当$-\frac{1}{6}<a<0$时，有$h''(0)=1+6a>0$，$h''\left(e^{-\frac{1+6a}{4a}}-1\right)=(2a-1)\left(1-e^{\frac{1+6a}{4a}}\right)<0$

所以$h''(x)=0$在$x>0$有唯一零点，记为x_0，则$0<x<x_0$，$h''(x)>0$，$h'(x)$递增

则$h'(x)>0$，$h(x)$递增，所以$h(x)>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$递增，不符合题意；

③当$a<-\frac{1}{6}$时，有$h''(0)=1+6a>0$，$h''\left(\frac{1}{e^2}-1\right)=(1-2a)e^2>0$

所以$h''(x)=0$在$-1<x<0$有唯一零点，记为x_1，则$x_1<x<0$，$h''(x)<0$，$h'(x)$递减

则$h'(x)<0$，$h(x)$递减，所以$h(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$递减，不符合题意

综上可知$a=-\frac{1}{6}$.

法三：（2）尝试一：（极大值点的第二充要条件：已知函数$y=f(x)$在$x=x_0$处各阶导数都存在且连续，$x=x_0$是函数的极大值点的一个充要条件为前$2n-1$阶导数等于0，第$2n$阶导数小于0。）

$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\frac{2+x+ax^2}{x+1}-2$，$f'(0)=0$

$f''(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\frac{2+x+ax^2}{x+1}-2=2a\ln(x+1)+\frac{x(3ax+4a+1)}{(x+1)^2}$，$f''(0)=0$

$f'''(x)=\frac{2ax^2+6ax-x+6a+1}{(x+1)^3}$，由$f'''(x)=0$得$a=-\frac{1}{6}$

下证：当$a=-\frac{1}{6}$时，$x=0$是$f(x)$的极大值点，

$f'''(x)=\frac{-\frac{1}{3}x(x+6)}{(x+1)^3}$，所以$f''(x)$在$(-1,0)$单增，在$(0,+\infty)$单减

进而有$f''(x)\le f''(0)=0$，从而$f'(x)$在$(-1,+\infty)$单减，

当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)>f'(0)=0$，当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)<f'(0)=0$

从而$f(x)$在$(-1,0)$单增，在$(0,+\infty)$单减，所以$x=0$是$f(x)$的极大值点。

点评：计算量很大，但不失为一种基本方法，激励热爱数学的学生不拘泥于老师所教，就着自己的兴趣，不断学习，学而致知。基于此，还可以从大学的角度给出一种解法。通过$y=\ln(x+1)$在$(1,2)$阶

的帕德逼近可得 $\ln(x+1)\le\dfrac{12x}{12+6x-x^2}$，且两个函数在 $x=0$ 处两个函数可以无限制逼近，估计这也是考试中心构造这个函数的方法。由此可以迅速得到 $a=-\dfrac{1}{6}$，我们也可以根据帕德逼近把此题的对数函数改为指数函数和三角函数，构造出相应的题目。尝试一难点在于 $f(x)$ 的各阶导数太复杂，由帕德逼近优化其解法。

法四：引理 1：若 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 在 $x=x_0$ 处函数值和导数值都相同，则 $h(x)=q(x)f(x)-p(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数为 0.

证明：$h'(x)=q'(x)f(x)+q(x)f'(x)-p'(x)$，$g'(x)=\dfrac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}$

因为 $f'(x_0)=g'(x_0)$，且 $f(x_0)=g(x_0)$，代入化简即证：$h'(x_0)=0$

引理 2：已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处各阶导数都存在且连续，$x=x_0$ 是函数的极大值点的一个充要条件为前 $2n-1$ 阶导数等于 0，第 $2n$ 阶导数小于 0。

$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{2+x+ax^2}{x+1}-2$，

令 $m(x)=-(1+2ax)\ln(x+1)$，$u(x)=\dfrac{2+x+ax^2}{x+1}-2$

则易得 $m(0)=u(0)$，$m'(0)=u'(0)$，$m''(0)=u''(0)$，

由引理 1 知，$m'''(0)=u'''(0)$ 等价于 $f'''(x)=0$，从而迅速求得 $a=-\dfrac{1}{6}$。

当 $a=-\dfrac{1}{6}$ 时，$f^{(4)}(0)<0$

尝试二：若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，注意到 $f'(0)=0$，

则存在充分接近于 0 的 δ，使得当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f'(x)<0$ (*)

得到一个恒成立问题，其基本方法之一有分离参数法。

$$f'(x)=\left[2x\ln(x+1)+\frac{x^2}{x+1}\right]\cdot a+\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$

对任意的 $x(-1,+\infty)$，都有 $2x\ln(x+1)>0$，进而有 $2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}>0$

①当 $x\in(0,\delta)$时，$a<\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}}$，

当 $\delta\to 0^+$时，$a\le\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left[\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right]'}{\left[2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]'}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{2(x+1)^2\ln(x+1)+3x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{4(x+1)\ln(x+1)+2(x+1)+6x+4}=-\dfrac{1}{6}$

②当 $x\in(-\delta,0)$时，$a>\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}}$，

当 $\delta\to 0^+$时，$a\le\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left[\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right]'}{\left[2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]'}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{2(x+1)^2\ln(x+1)+3x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{4(x+1)\ln(x+1)+2(x+1)+6x+4}=-\dfrac{1}{6}$

综上：$a=-\dfrac{1}{6}$.

8．**解析**：（1）当 $a=1$时，$f(x)\geqslant 0$ 等价于 $(x^2+1)e^{-x}-1\leqslant 0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当 $x\neq 1$时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减．而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant 0$时，$g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 1$.

（2）设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$.

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点.

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$ 没有零点.

（ii）当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.

当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增.

故 $h(2)=1-\dfrac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的最小值.

①若 $h(2)>0$，即 $a<\dfrac{e^2}{4}$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 没有零点；

②若 $h(2)=0$，即 $a=\dfrac{e^2}{4}$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点；

③若 $h(2)<0$，即 $a>\dfrac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 有一个零点.

由（1）知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以 $h(4a)=1-\dfrac{16a^3}{e^{4a}}=1-\dfrac{16a^3}{(e^{2a})}>1-\dfrac{16a^3}{(2a)^4}=1-\dfrac{1}{a}>0$.

故 $h(x)$ 在 $(2,4a)$ 有一个零点．因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点.

综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时，$a=\dfrac{e^2}{4}$.

9．解:（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$.

（i）若 $a\le 2$，则 $f'(x)\le 0$，当且仅当 $a=2$，$x=1$ 时 $f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

（ii）若 $a>2$，令 $f'(x)=0$ 得，$x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})\cup(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时，$f'(x)>0$．所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}),(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$

单调递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 单调递增.

（2）由（1）知，$f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 满足 $x^2-ax+1=0$，所以 $x_1x_2=1$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$．由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2},$$

所以 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于 $\dfrac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数 $g(x)=\dfrac{1}{x}-x+2\ln x$，由（1）知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，又 $g(1)=0$，从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$.

所以 $\dfrac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

10．(1)详见解析；(2) $(0,1)$.

【分析】(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性，首先进行求导，发现式子特点后要及时进行因式分解，再对 a 按 $a\le 0$ 、$a>0$ 进行讨论，写出函数的单调区间；(2)根据第(1)问，若 $a\le 0$ ，$f\left(x\right)$ 至多有一个零点，若 $a>0$ ，当 $x=-\ln a$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最小值，求出最小值 $f\left(-\ln a\right)=1-\frac{1}{a}+\ln a$ ，根据 $a=1,a\in\left(1,+\infty\right)$ ，$a\in\left(0,1\right)$ 进行讨论，可知当 $a\in\left(0,1\right)$ 有 2 个零点，设正整数 n_0 满足 $n_0>\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$，则 $f(n_0)=\mathrm{e}^{n_0}(a\mathrm{e}^{n_0}+a-2)-n_0>\mathrm{e}^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$ ，由于 $\ln(\frac{3}{a}-1)>-\ln a$ ，因此 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\ln a,+\infty\right)$ 有一个零点，所以 a 的取值范围为 $\left(0,1\right)$.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ ，$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$

(ⅰ)若 $a\le 0$ ，则 $f'(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减.

(ⅱ)若 $a>0$ ，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$.

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$f'(x)<0$ ；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增.

(2)(ⅰ)若 $a\le 0$ ，由(1)知，$f(x)$ 至多有一个零点.

(ⅱ)若 $a>0$ ，由(1)知，当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}+\ln a$.

①当 $a=1$ 时，由于 $f(-\ln a)=0$ ，故 $f(x)$ 只有一个零点；

②当 $a\in(1,+\infty)$ 时，由于 $1-\frac{1}{a}+\ln a>0$ ，即 $f(-\ln a)>0$ ，故 $f(x)$ 没有零点；

③当 $a\in(0,1)$ 时，$1-\frac{1}{a}+\ln a<0$ ，即 $f(-\ln a)<0$.

又 $f(-2)=a\mathrm{e}^{-4}+(a-2)\mathrm{e}^{-2}+2>-2\mathrm{e}^{-2}+2>0$ ，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 有一个零点.

设正整数 n_0 满足 $n_0>\ln(\frac{3}{a}-1)$ ，则 $f(n_0)=\mathrm{e}^{n_0}(a\mathrm{e}^{n_0}+a-2)-n_0>\mathrm{e}^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$.

由于 $\ln(\frac{3}{a}-1)>-\ln a$，因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 有一个零点.

综上，a 的取值范围为 $(0,1)$.

【民间解析】：(1) 函数的定义域为 R，且 $f'\left(x\right)=2ae^{2x}+\left(a-2\right)e^{x}-1=\left(2e^{x}+1\right)\left(ae^{x}-1\right)$

注意到 $2e^{x}+1>0$

当 $a\le 0$ 时，$ae^{x}-1<0$，所以 $f'\left(x\right)<0$ 恒成立

此时函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减

当 $a>0$，由 $f'\left(x\right)>0\Rightarrow x>\ln\frac{1}{a}$，由 $f'\left(x\right)<0\Rightarrow x<\ln\frac{1}{a}$

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增

综上可知

①$a\le 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减；

②$a>0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增

(2) 由 (1) 可知，$a\le 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减

此时 $f\left(x\right)$ 至多一个零点，不符合题意

当 $a>0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增

此时函数 $f\left(x\right)$ 的最小值为 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=ae^{2\times\ln\frac{1}{a}}+\left(a-2\right)e^{\ln\frac{1}{a}}-\ln\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{a-2}{a}-\ln\frac{1}{a}=1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}$

要使 $f\left(x\right)$ 有两个零点，首先必须有 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$ 即 $1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$

令 $g\left(a\right)=1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}$，则有 $g'\left(a\right)=\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{a}>0$，故 $g\left(a\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，而 $g\left(1\right)=0$

所以 $g\left(a\right)<0\Rightarrow g\left(a\right)<g\left(1\right)\Rightarrow 0<a<1$

另一方面取 $f\left(\ln\frac{3}{a}\right)=3+\frac{3}{a}-\ln\frac{3}{a}>3+\frac{3}{a}-\left(\frac{3}{a}-1\right)=4>0$

而 $\ln\frac{3}{a}>\ln\frac{1}{a}$, $f\left(x\right)$ 在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\ln\frac{1}{a},\ln\frac{3}{a}\right)$ 上有唯一一个零点, 在 $\left(\ln\frac{3}{a},+\infty\right)$ 没有零点

此时当 $x<0$ 时, $f\left(x\right)>\left(a-2\right)e^{x}-x>\left(a-2\right)e^{0}-x$

所以 $f\left(a-2\right)>\left(a-2\right)-\left(a-2\right)=0$, 而 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,a-2\right)$ 上没有零点, 在 $\left(a-2,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上有唯一零点

综上可知当 $0<a<1$ 时, 函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点.

【考点】含参函数的单调性, 利用函数零点求参数的取值范围.

【点评】研究函数零点问题常常与研究对应方程的实根问题相互转化. 已知函数 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点求参数的取值范围, 第一种方法是分离参数, 构造不含参数的函数, 研究其单调性、极值、最值, 判断 $y=a$ 与其交点的个数, 从而求出 a 的范围; 第二种方法是直接对含参函数进行研究, 研究其单调性、极值、最值, 注意点是: 若 $f\left(x\right)$ 有 2 个零点, 且函数先减后增, 则只需其最小值小于 0, 且后面还需验证有最小值的两边存在大于 0 的点.

11. (Ⅰ) $a=1$; (Ⅱ) 3

【解析】(Ⅰ) $f(x)=x-1-a\ln x$, $x>0$

则 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$, 且 $f(1)=0$

当 $a\leqslant 0$ 时, $f'\left(x\right)>0$, $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调增, 所以 $0<x<1$ 时, $f\left(x\right)<0$, 不满足题意;

当 $a>0$ 时,

当 $0<x<a$ 时, $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减;

当 $x>a$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

①若 $a<1$, $f(x)$ 在 $(a,1)$ 上单调递增∴当 $x\in(a,1)$ 时 $f(x)<f(1)=0$ 矛盾

②若 $a>1$, $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减∴当 $x\in(1,a)$ 时 $f(x)<f(1)=0$ 矛盾

③若 $a=1$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增∴ $f(x)\geqslant f(1)=0$ 满足题意

综上所述 $a=1$.

(Ⅱ) 当 $a=1$ 时 $f(x)=x-1-\ln x\geqslant 0$ 即 $\ln x\leqslant x-1$

则有 $\ln(x+1)\leqslant x$ 当且仅当 $x=0$ 时等号成立

∴ $\ln(1+\frac{1}{2^k})<\frac{1}{2^k}$, $k\in\mathbf{N}^*$

一方面: $\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{2^2})+...+\ln(1+\frac{1}{2^n})<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$,

即 $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\ldots(1+\frac{1}{2^n})<\mathrm{e}$.

另一方面: $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\ldots(1+\frac{1}{2^n})>(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^3})=\frac{135}{64}>2$

当 $n\geqslant 3$ 时, $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\ldots(1+\frac{1}{2^n})\in(2,\mathrm{e})$

$\because m\in\mathbf{N}^*$, $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\ldots(1+\frac{1}{2^n})<m$,

$\therefore m$ 的最小值为 3 .

【考点】导数研究函数的单调性;导数研究函数的最值;利用导数证明不等式

【点评】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具,而函数是高中数学中重要的知识点,所以在历届高考中,对导数的应用的考查都非常突出 ,本专题在高考中的命题方向及命题角度　从高考来看,对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行: (1)考查导数的几何意义,往往与解析几何、微积分相联系. (2)利用导数求函数的单调区间,判断单调性;已知单调性,求参数. (3)利用导数求函数的最值(极值),解决生活中的优化问题. (4)考查数形结合思想的应用.

12．(1) $a=1$；(2)证明略.

【命题意图】本题考查函数的极值，导数的应用.

【基本解法】(1)法一.

由题知： $f(x)=x\left(ax-a-\ln x\right)\ \left(x>0\right)$, 且 $f(x)\geq 0$ ，

所以： $a\left(x-1\right)-\ln x\geq 0$.

即当 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $a\leq\frac{\ln x}{x-1}$ ；当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $a\geq\frac{\ln x}{x-1}$ ；

当 $x=1$ 时， $a\left(x-1\right)-\ln x\geq 0$ 成立.

令 $g\left(x\right)=x-1-\ln x$ ， $g'\left(x\right)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ ，当 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $g'\left(x\right)<0$ ，

$g\left(x\right)$ 递减, $g\left(x\right)<g\left(1\right)=0$ ，所以： $x-1>\ln x$ ，即： $\frac{\ln x}{x-1}>1$. 所以： $a\leq 1$ ；

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $g'\left(x\right)>0$ ，

$g\left(x\right)$ 递增, $g\left(x\right)>g\left(1\right)=0$ ，所以： $x-1>\ln x$ ，即： $\frac{\ln x}{x-1}<1$. 所以： $a\geq 1$ ；

综上： $a=1$.

法二．洛必达法则

由题知： $f(x)=x\left(ax-a-\ln x\right)\ \left(x>0\right)$, 且 $f(x)\geq 0$ ，

所以： $a\left(x-1\right)-\ln x\geq 0$.

即当 $x\in(0,1)$ 时，$a\le\dfrac{\ln x}{x-1}$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$a\ge\dfrac{\ln x}{x-1}$；

当 $x=1$ 时，$a(x-1)-\ln x\ge 0$ 成立.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，$g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$.

令 $h(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$，$h'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$, $h(x)$ 递增，$h(x)<h(1)=0$；

所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$g(x)>\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$.

所以：$a\le 1$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$, $h(x)$ 递减，$h(x)<h(1)=0$；

所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$g(x)<\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$.

所以：$a\ge 1$；

故 $a=1$.

（1） 由(1)知：$f(x)=x(x-1-\ln x)$，$f'(x)=2x-2-\ln x$.

设 $\varphi(x)=2x-2-\ln x$，则 $\varphi'(x)=2-\dfrac{1}{x}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 递增.

又 $\varphi(e^{-2})>0$，$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 有唯一零点 x_0，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 有唯一零点 1，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$\varphi(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$.

又 $f'(x)=\varphi(x)$，所以 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值点.

由 $f'(x_0)=0$ 得 $\ln x_0=2(x_0-1)$，故 $f(x_0)=x_0(1-x_0)$.

由 $x_0\in(0,1)$ 得 $f(x_0)<\frac{1}{4}$.

因为 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的唯一极大值点，由 $e^{-1}\in(0,1)$，$f(e^{-1})\neq 0$ 得

$f(x_0)>f(e^{-1})=e^{-2}$

所以 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

【考点】 利用 导数研究函数的单调性；利用导数研究函数的极值

【点评】导数是研究函数的单调性、极值（最值）最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，所以在历届高考中，对导数的应用的考查都非常突出，本专题在高考中的命题方向及命题角度，从高考来看，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：(1) 考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系．(2) 利用导数求函数 了单调区间，判断单调必；已知单调性，求参数．(3) 利用导数求函数的最值（极值），解决生活中的人优化问题．(4) 考查数形结合思想的应用．

13．(Ⅰ) $f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$；(Ⅱ) $A=\begin{cases}2-3a,0<a\leqslant\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a},\frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2,a\geqslant 1\end{cases}$；(III) 见解析.

【解析】(Ⅰ) $f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$.

(Ⅱ) 当 $a\geqslant 1$ 时, $|f(x)|=|a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)|\leq a+2(a-1)=3a-2=f(0)$

因此, $A=3a-2$.

当 $0<a<1$ 时, 将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=2a\cos^2 x+(a-1)\cos x-1$.

令 $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$, 则 A 是 $|g(t)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值

$g(-1)=a$, $g(1)=3a-2$

且当 $t=\frac{1-a}{4a}$ 时, $g(t)$ 取得极小值, 极小值为 $g(\frac{1-a}{4a})=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}$.

令 $-1<\frac{1-a}{4a}<1$, 解得 $a<-\frac{1}{3}$ (舍去), $a>\frac{1}{5}$.

(i) 当 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ 时, $g(t)$ 在 $(-1,1)$ 内无极值点, $|g(-1)|=a$, $|g(1)|=2-3a$, $|g(-1)|<|g(1)|$

所以 $A=2-3a$.

(ii) 当$\dfrac{1}{5}<a<1$时, 由$g(-1)-g(1)=2(1-a)>0$, 知$g(-1)>g(1)>g(\dfrac{1-a}{4a})$.

又$\left|g(\dfrac{1-a}{4a})\right|-\left|g(-1)\right|=\dfrac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$, 所以$A=\left|g(\dfrac{1-a}{4a})\right|=\dfrac{a^2+6a+1}{8a}$.

综上，$A=\begin{cases}2-3a,0<a\leqslant\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{a^2+6a+1}{8a},\dfrac{1}{5}<a<1\\ 3a-2,a\geqslant 1\end{cases}$.

(III) 由（Ⅰ）得$\left|f'(x)\right|=\left|-2a\sin 2x-(a-1)\sin x\right|\leqslant 2a+\left|a-1\right|$.

当$0<a\leqslant\dfrac{1}{5}$时, $\left|f'(x)\right|\leqslant 1+a\leqslant 2-4a<2(2-3a)=2A$.

当$\dfrac{1}{5}<a<1$时, $A=\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{8a}+\dfrac{3}{4}\geqslant 1$, 所以$\left|f'(x)\right|\leqslant 1+a<2A$.

当$a\geqslant 1$时, $\left|f'(x)\right|\leqslant 3a-1\leqslant 6a-4=2A$, 所以$\left|f'(x)\right|\leqslant 2A$.

14．（1）略；（2）$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$.

分析：（Ⅰ）先求定义域，用导数法求函数的单调性，当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)>f(0)$证明结论；

（Ⅱ）用导数法求函数$g(x)$的最值，在构造新函数$\mathrm{h}(a)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0+2}$，又用导数法求解.

【解析】（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geq 0,$$

且仅当$x=0$时，$f'(x)=0$，所以$f(x)$在$(-\infty,-2),(-2,+\infty)$单调递增，

因此当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)>f(0)=-1,$

所以$(x-2)e^x>-(x+2),(x-2)e^x+x+2>0$

（II）$g'(x)=\dfrac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^3}=\dfrac{x+2}{x^2}(f(x)+a),$

由（I）知，$f(x)+a$单调递增，对任意$a\in[0,1), f(0)+a=a-1<0, f(2)+a=a\geq 0,$

因此，存在唯一$x_0\in(0,2]$, 使得$f(x_0)+a=0,$ 即$g'(x_0)=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f(x)+a<0, g'(x)<0, g(x)$ 单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$f(x)+a>0, g'(x)>0, g(x)$ 单调递增.

因此 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值，最小值为

$$g(x_0)=\frac{e^{x_0}-a(x_0+1)}{{x_0}^2}=\frac{e^{x_0}+f(x_0)(x_0+1)}{{x_0}^2}=\frac{e^{x_0}}{x_0+2}.$$

于是 $\mathrm{h}(a)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0+2}$，由 $(\dfrac{e^x}{x+2})'=\dfrac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}>0, \dfrac{e^x}{x+2}$ 单调递增

所以，由 $x_0\in(0,2]$, 得 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^0}{0+2}<h(a)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0+2}\le\dfrac{e^2}{2+2}=\dfrac{e^2}{4}.$

因为 $\dfrac{e^x}{x+2}$ 单调递增，对任意 $\lambda\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}]$, 存在唯一的 $x_0\in(0,2]$, $a=-f(x_0)\in[0,1)$,

使得 $h(a)=\lambda$, 所以 $h(a)$ 的值域是 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}]$

综上，当 $a\in[0,1)$ 时，$g(x)$ 有最小值 $h(a)$，$h(a)$ 的值域是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$.

15. (I) $\left(0,+\infty\right)$; (II) 见解析

【官方解答】(I) 由已知得：$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x+2a\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\left(e^x+2a\right)$

①若 $a=0$，那么 $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)e^x=0\Leftrightarrow x=2$，$f\left(x\right)$ 只有唯一的零点 $x=2$，不合题意；

②若 $a>0$，则当 $x\in\left(-\infty,1\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$.

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递增.

又 $f\left(1\right)=-e$，$f\left(2\right)=a$，取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\dfrac{a}{2}$，则

$$f\left(b\right)>\frac{a}{2}\left(b-2\right)+a\left(b-1\right)^2=a\left(b^2-\frac{3}{2}b\right)>0,$$

故 $f\left(x\right)$ 存在两个零点.

③设 $a<0$，由 $f'\left(x\right)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln\left(-2a\right)$.

若 $a\ge-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln\left(-2a\right)\le1$，故当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，因此 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递增.

又当 $x\le 1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

若 $a<-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时

$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增.

又当 $x\le 1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

(II) 不妨设 $x_1<x_2$. 由 (I) 知 $x_1\in(-\infty,1), x_2\in(1,+\infty), 2-x_2\in(-\infty,1)$,

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减

所以 $x_1+x_2<2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(2-x_2)$，即 $f(2-x_2)<0$.

由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$，而 $f(x_2)=-(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$

所以 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$

设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^{x}$，则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^{x})$

所以当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$g(x)<0$

从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$.

【民间解答】(I) 由已知得：$f'(x)=(x-1)e^{x}+2a(x-1)=(x-1)(e^{x}+2a)$

①若 $a=0$，那么 $f(x)=0\Leftrightarrow(x-2)e^{x}=0\Leftrightarrow x=2$，$f(x)$ 只有唯一的零点 $x=2$，不合题意；

②若 $a>0$，那么 $e^{x}+2a>e^{x}>0$，

所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

即：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↓	极 小	↑

		值	

故$f\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上至多一个零点，在$\left(-\infty,1\right)$上至多一个零点

由于$f\left(2\right)=a>0$，$f\left(1\right)=-e<0$，则$f\left(2\right)f\left(1\right)<0$，

根据零点存在性定理，$f\left(x\right)$在$\left(1,2\right)$上有且仅有一个零点.

而当$x<1$时，$e^{x}<e$，$x-2<-1<0$，

故$f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{x}+a\left(x-1\right)^{2}>e\left(x-2\right)+a\left(x-1\right)^{2}=a\left(x-1\right)^{2}+e\left(x-1\right)-e$

则$f\left(x\right)=0$的两根$t_{1}=\dfrac{-e-\sqrt{e^{2}+4ae}}{2a}+1$，$t_{2}=\dfrac{-e+\sqrt{e^{2}+4ae}}{2a}+1$，　$t_{1}<t_{2}$

因为$a>0$，故当$x<t_{1}$或$x>t_{2}$时，$a\left(x-1\right)^{2}+e\left(x-1\right)-e>0$

因此，当$x<1$且$x<t_{1}$时，$f\left(x\right)>0$

又$f\left(1\right)=-e<0$，根据零点存在性定理，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$有且只有一个零点.

此时，$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上有且只有两个零点，满足题意.

③若$-\dfrac{e}{2}<a<0$，则$\ln\left(-2a\right)<\ln e=1$，

当$x<\ln\left(-2a\right)$时，$x-1<\ln\left(-2a\right)-1<0$，$e^{x}+2a<e^{\ln\left(-2a\right)}+2a=0$，

即$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(e^{x}+2a\right)>0$，$f\left(x\right)$单调递增；

当$\ln\left(-2a\right)<x<1$时，$x-1<0$，$e^{x}+2a>e^{\ln\left(-2a\right)}+2a=0$

即$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(e^{x}+2a\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减；

当$x>1$时，$x-1>0$，$e^{x}+2a>e^{\ln\left(-2a\right)}+2a=0$，即$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$单调递增.

即：

x	$\left(-\infty,\ln\left(-2a\right)\right)$	$\ln\left(-2a\right)$	$\left(\ln\left(-2a\right),1\right)$	1	$\left(1,+\infty\right)$
$f'\left(x\right)$	+	0	−	0	+
$f\left(x\right)$	↑	极大值	↓	极小	↑

				值	

而极大值 $f\left[\ln(-2a)\right]=-2a\left[\ln(-2a)-2\right]+a\left[\ln(-2a)-1\right]^2=a\left\{\left[\ln(-2a)-2\right]^2+1\right\}<0$

故当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $x=\ln(-2a)$ 处取到最大值 $f\left[\ln(-2a)\right]$

那么 $f(x)\leqslant f\left[\ln(-2a)\right]<0$ 恒成立，即 $f(x)=0$ 无解

而当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递增，至多一个零点

此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多一个零点，不合题意.

④若 $a=-\dfrac{e}{2}$，那么 $\ln(-2a)=1$

当 $x<1=\ln(-2a)$ 时，$x-1<0$，$e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增

当 $x>1=\ln(-2a)$ 时，$x-1>0$，$e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有意义，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时至多一个零点，不合题意.

⑤若 $a<-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$

当 $x<1$ 时，$x-1<0$，$e^x+2a<e^1+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

当 $1<x<\ln(-2a)$ 时，$x-1>0$，$e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

当 $x>\ln(-2a)$ 时，$x-1>\ln(-2a)-1>0$，$e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

即：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

故当 $x\leqslant\ln(-2a)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到最大值 $f(1)=-e$

那么 $f(x)\leqslant -e<0$ 恒成立，即 $f(x)=0$ 无解

当$x>\ln(-2a)$时，$f(x)$单调递增，至多一个零点

此时$f(x)$在$\mathbf{R}$上至多一个零点，不合题意.

综上所述，当且仅当$a>0$时符合题意，即a的取值范围为$(0,+\infty)$.

(II) 由已知得：$f(x_1)=f(x_2)=0$，不难发现$x_1\neq 1$，$x_2\neq 1$，

故可整理得：$-a=\dfrac{(x_1-2)e^{x_1}}{(x_1-1)^2}=\dfrac{(x_2-2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$

设$g(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，则$g(x_1)=g(x_2)$

那么$g'(x)=\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3}e^x$

当$x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当$x>1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

设$m>0$，构造代数式：$g(1+m)-g(1-m)=\dfrac{m-1}{m^2}e^{1+m}-\dfrac{-m-1}{m^2}e^{1-m}=\dfrac{1+m}{m^2}e^{1-m}\left(\dfrac{m-1}{m+1}e^{2m}+1\right)$

设$h(m)=\dfrac{m-1}{m+1}e^{2m}+1$，$m>0$

则$h'(m)=\dfrac{2m^2}{(m+1)^2}e^{2m}>0$，故$h(m)$单调递增，有$h(m)>h(0)=0$.

因此，对于任意的$m>0$，$g(1+m)>g(1-m)$.

由$g(x_1)=g(x_2)$可知x_1、x_2不可能在$g(x)$的同一个单调区间上，不妨设$x_1<x_2$，则必有$x_1<1<x_2$

令$m=1-x_1>0$，则有$g[1+(1-x_1)]>g[1-(1-x_1)]\Leftrightarrow g(2-x_1)>g(x_1)=g(x_2)$

而$2-x_1>1$，$x_2>1$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，因此：$g(2-x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow 2-x_1>x_2$

整理得：$x_1+x_2<2$.

16.（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$[-1,1]$.

解析：（Ⅰ）$f'(x)=m(e^{mx}-1)+2x$.

若$m\geq 0$，则当$x\in(-\infty,0)$时，$e^{mx}-1\leq 0$，$f'(x)<0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$e^{mx}-1\geq 0$，$f'(x)>0$.

若 $m<0$，则当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$e^{mx}-1>0$，$f^{'}(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^{mx}-1<0$，$f^{'}(x)>0$．

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，对任意的 m，$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 单调递减，在 $[0,1]$ 单调递增，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值．所以对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le e-1$ 的充要条件是：$\begin{cases}f(1)-f(0)\le e-1,\\ f(-1)-f(0)\le e-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}e^{m}-m\le e-1,\\ e^{-m}+m\le e-1,\end{cases}$ ①，设函数 $g(t)=e^{t}-t-e+1$，则 $g^{'}(t)=e^{t}-1$．当 $t<0$ 时，$g^{'}(t)<0$；当 $t>0$ 时，$g^{'}(t)>0$．故 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增．又 $g(1)=0$，$g(-1)=e^{-1}+2-e<0$，故当 $t\in[-1,1]$ 时，$g(t)\le 0$．当 $m\in[-1,1]$ 时，$g(m)\le 0$，$g(-m)\le 0$，即①式成立．当 $m>1$ 时，由 $g(t)$ 的单调性，$g(m)>0$，即 $e^{m}-m>e-1$；当 $m<-1$ 时，$g(-m)>0$，即 $e^{-m}+m>e-1$．综上，m 的取值范围是 $[-1,1]$．

考点：导数的综合应用．

17．（Ⅰ）$a=\dfrac{3}{4}$；（Ⅱ）当 $a>-\dfrac{3}{4}$ 或 $a<-\dfrac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 由一个零点；当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 或 $a=-\dfrac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；当 $-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点．

分析：（Ⅰ）先利用导数的几何意义列出关于切点的方程组，解出切点坐标与对应的 a 值；（Ⅱ）根据对数函数的图像与性质将 x 分为 $x>1,x=1,0<x<1$ 研究 $h(x)$ 的零点个数，若零点不容易求解，则对 a 再分类讨论．

解析：（Ⅰ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，即 $\begin{cases}x_0^3+ax_0+\dfrac{1}{4}=0\\ 3x_0^2+a=0\end{cases}$，

解得 $x_0=\dfrac{1}{2},a=\dfrac{3}{4}$．

因此，当 $a=\dfrac{3}{4}$ 时，x 轴是曲线 $y=f(x)$ 的切线．

（Ⅱ）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，从而 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\le g(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在（1，+∞）无零点．

当 x=1 时，若 $a\ge-\dfrac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\dfrac{5}{4}\ge 0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 x=1 是 $h(x)$ 的零点；若 $a<-\dfrac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\dfrac{5}{4}<0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 x=1 不是 $h(x)$ 的零点．

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f(x)$ 在（0, 1）的零点个数．

（ⅰ）若 $a \le -3$ 或 $a \ge 0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在（0, 1）无零点，故 $f(x)$ 在（0, 1）单调，而 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $a \le -3$ 时，$f(x)$ 在（0，1）有一个零点；当 $a \ge 0$ 时，$f(x)$ 在（0，1）无零点.

（ⅱ）若 $-3<a<0$，则 $f(x)$ 在（0，$\sqrt{-\frac{a}{3}}$）单调递减，在（$\sqrt{-\frac{a}{3}}$，1）单调递增，故当 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时，$f(x)$ 取的最小值，最小值为 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

①若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$，$f(x)$ 在（0, 1）无零点.

②若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f(x)$ 在（0, 1）有唯一零点；

③若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由于 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 在（0, 1）有两个零点；当 $-3<a\le -\frac{5}{4}$ 时，$f(x)$ 在（0, 1）有一个零点. …10 分

综上，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 由一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点.

考点：利用导数研究曲线的切线；对新概念的理解；分段函数的零点；分类整合思想

18．解析：

（Ⅰ）$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\ge 0$，等号仅当 $x=0$ 时成立

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

（Ⅱ）$g(x)=f(2x)-4bf(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4b(e^x-e^{-x})+(8b-4)x$

$$g'(x)=2[e^{2x}+e^{-2x}-2b(e^x+e^{-x})+(4b-2)]$$

$$=2[(e^x+e^{-x})^2-2b(e^x+e^{-x})+4b-4]$$

$$=2(e^x+e^{-x}-2)(e^x+e^{-x}-2b+2)$$

i) 当 $b\le 2$ 时，$g'(x)\ge 0$，等号仅当 $x=0$ 时成立，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(0)=0$，故 $x>0, g(x)>0$.

ii) 当 $b>2$ 时，若 x 满足 $2<e^x+e^{-x}<2b-2$，即 $0<x<\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$ 时，$g'(x)<0$，而

$g(0)=0$，故 $0<x<\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$， $g(x)<0$.

综上 b 的最大值为 2.

（III）由（2）知， $g(\ln\sqrt{2})=\dfrac{3}{2}-2\sqrt{2}b+2(2b-1)\ln 2$

当 $b=2$ 时， $g(\ln\sqrt{2})=\dfrac{3}{2}-4\sqrt{2}+6\ln 2>0$，得 $\ln 2>\dfrac{8\sqrt{2}-3}{12}>0.6928$

当 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+1$ 时， $\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})=\ln 2$

$g(\ln\sqrt{2})=-\dfrac{3}{2}-2\sqrt{2}+(3\sqrt{2}+2)\ln 2<0$，得 $\ln 2<\dfrac{18+\sqrt{2}}{28}<0.6928$

所以 $\ln 2\approx 0.693$

考点：（1）利用导数判断函数的单调性；（2）利用导数研究不等式问题；（3）最值问题

难度：D

备注：高频考点

19．解析:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=ae^x\ln x+\dfrac{a}{x}e^x-\dfrac{b}{x^2}e^{x-1}+\dfrac{b}{x}e^{x-1}$

由题意可得 $f(1)=2, f'(1)=e$, 故 $a=1,b=2$.

(2)由(1)知 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}$, 从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=x+\ln x$，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时， $g'(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时, $g'(x)>0$, 故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增, 从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$, 则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$, 所以当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)>0$, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $h'(x)<0$, 故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 单调递减, 从而 $h(x)$ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值为

$h(1)=-\dfrac{1}{e}$.

综上:当 $x>0$ 时, $g(x)>h(x)$, 即 $f(x)>1$.

考点:(1)利用导数的定义求函数的导数;(2)导数的几何意义(切线方程问题);(3)利用导数研究不等式问题;(4)等价转换思想

难度:D

备注:高频考点

20.（1）（2） 见解析；

解析：（1） $f(x)=e^x-\ln(x+m)\Rightarrow f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$

所以 $f'(0)=e^0-\dfrac{1}{m}=0\Rightarrow m=1$，

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{e^x(x+1)-1}{x+1}(x>-1)$，

显然 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

（2）证明 令 $g(x)=e^x-\ln(x+2)$，

则 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}(x>-2)$.

$h(x)=g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}(x>-2)\Rightarrow h'(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+2)^2}>0$，

所以 $h(x)$ 是增函数，$h(x)=0$ 至多只有一个实数根，

又 $g'(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{e}}-\dfrac{1}{\frac{3}{2}}<0,g'(0)=1-\dfrac{1}{2}>0$，

所以 $h(x)=g'(x)=0$ 的唯一实根在区间 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 内，

设 $g'(x)=0$ 的根为 t，则有 $g'(t)=e^t-\dfrac{1}{t+2}=0(-\dfrac{1}{2}<t<0)$，

所以，$e^t=\dfrac{1}{t+2}\Rightarrow t+2=e^{-t}$，

当 $x\in(-2,t)$ 时，$g'(x)<g'(t)=0,g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(,t+\infty)$ 时，$g'(x)>g'(t)=0,g(x)$ 单调递增；

所以 $g(x)_{\min}=g(t)=e^t-\ln(t+2)=\dfrac{1}{t+2}+t=\dfrac{(1+t)^2}{t+2}>0$，

当 $m\le 2$ 时，有 $\ln(x+m)\le\ln(x+2)$，

所以 $f(x)=e^x-\ln(x+m)\ge e^x-\ln(x+2)=g(x)\ge g(x)_{\min}>0$.

考点：（1）3．2．4 导数与函数最值；（2）3．2．7 导数与函数放缩

难度： D

备注：高频考点，典型题

21.（1） a=4，b=2，c=2，d=2 （2）$[1,e^2]$.

解析：（Ⅰ）由已知得 $f(0)=2, g(0)=2, f'(0)=4, g'(0)=4$，

而 $f'(x)=2x+b$， $g'(x)=e^{x}(cx+d+c)$，∴ a=4，b=2，c=2，d=2；……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=x^{2}+4x+2$，$g(x)=2e^{x}(x+1)$，

设函数 $F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^{x}(x+1)-x^{2}-4x-2$（$x\geq-2$），

$F'(x)=2ke^{x}(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^{x}-1)$，

有题设可得 $F(0)\geqslant0$，即 $k\geq1$，

令 $F'(x)$=0 得，$x_{1}=-\ln k$，$x_{2}=-2$，

（1）若 $1\leq k<e^{2}$，则 $-2<x_{1}\leqslant0$，∴当 $x\in(-2,x_{1})$ 时，$F(x)<0$，当 $x\in(x_{1},+\infty)$ 时，$F(x)>0$，

即 $F(x)$ 在 $(-2,x_{1})$ 单调递减，在 $(x_{1},+\infty)$ 单调递增，故 $F(x)$ 在 $x=x_{1}$ 取最小值 $F(x_{1})$，而

$F(x_{1})=2x_{1}+2-x_{1}^{2}-4x_{1}-2=-x_{1}(x_{1}+2)\geqslant0$，

∴当 $x\geqslant-2$ 时，$F(x)\geqslant0$，即 $f(x)\leqslant kg(x)$ 恒成立，

(2) 若 $k=e^{2}$，则 $F'(x)=2e^{2}(x+2)(e^{x}-e^{2})$，

∴当 $x\geqslant-2$ 时，$F'(x)\geqslant0$，∴ $F(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 单调递增，而 $F(-2)$=0，

∴当 $x\geqslant-2$ 时，$F(x)\geqslant0$，即 $f(x)\leqslant kg(x)$ 恒成立，

(3) 若 $k>e^{2}$，则 $F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^{2})<0$，

∴当 $x\geqslant-2$ 时，$f(x)\leqslant kg(x)$ 不可能恒成立，

综上所述，k 的取值范围为 $[1, e^{2}]$．

考点：（1）3．1．3 导数的几何意义；（2）3．2．4 导数与函数最值；（3）3．3．1 利用导数研究“恒能恰”成立及参数求解问题．

难度：C

备注：高频考点

22．（1）增区间为 $(0,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,0)$　（2）$\dfrac{e}{2}$

解析：（Ⅰ）$f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$，令 $x=1$ 得，$f(0)=1$，

再由 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^{2}$，令 $x=0$ 得 $f'(1)=e$．

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=e^{x}-x+\dfrac{1}{2}x^{2}$．

$f'(x)=e^x-1+x$，易知 $f'(x)=e^x-1+x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f'(0)=0$．

所以 $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0, f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0,$

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left(0,+\infty\right)$，减区间为 $\left(-\infty,0\right)$．

（Ⅱ）若 $f(x)\ge \dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ 恒成立，

即 $h\left(x\right)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2-ax-b=e^x-\left(a+1\right)x-b\ge 0$ 恒成立，

$\because h'\left(x\right)=e^x-\left(a+1\right)$，

(1) 当 $a+1<0$ 时，$h'\left(x\right)>0$ 恒成立，$h\left(x\right)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且当 $x\to-\infty$ 时，$h\left(x\right)\to-\infty$，不合题意；

(2) 当 $a+1=0$ 时，$h\left(x\right)>0$ 恒成立，则 $b\le 0$，$(a+1)b=0$；

(3) 当 $a+1>0$ 时，$h'\left(x\right)=e^x-\left(a+1\right)$ 为增函数，由 $h'\left(x\right)=0$ 得 $x=\ln\left(a+1\right)$，

故 $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\ln\left(a+1\right), f'(x)<0 \Leftrightarrow x<\ln\left(a+1\right)$，

当 $x=\ln\left(a+1\right)$ 时，$h\left(x\right)$ 取最小值 $h\left(\ln\left(a+1\right)\right)=a+1-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b$．

依题意有 $h\left(\ln\left(a+1\right)\right)=a+1-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b\ge 0$，

即 $b\le a+1-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)$，

$\because a+1>0$，$\therefore \left(a+1\right)b\le\left(a+1\right)^2-\left(a+1\right)^2\ln\left(a+1\right)$，

令 $u\left(x\right)=x^2-x^2\ln x\ \ \left(x>0\right)$，则 $u'\left(x\right)=2x-2x\ln x-x=x\left(1-2\ln x\right)$，

$u'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}, u'(x)<0 \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$，

所以当 $x=\sqrt{e}$ 时，$u\left(x\right)$ 取最大值 $u\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{e}{2}$．

故当 $a+1=\sqrt{e}, b=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ 时，$\left(a+1\right)b$ 取最大值 $\dfrac{e}{2}$．

综上，若 $f(x)\ge \dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，则 $(a+1)b$ 的最大值为 $\dfrac{e}{2}$．

考点：（１）３．１．２导数的运算；（２）３．２．２导数与函数单调性；（３）３．２．４导数与函数最值

难度：D

备注：高频考点