

2021 年深圳市高三年级第二次调研考试

数 学

2021. 4

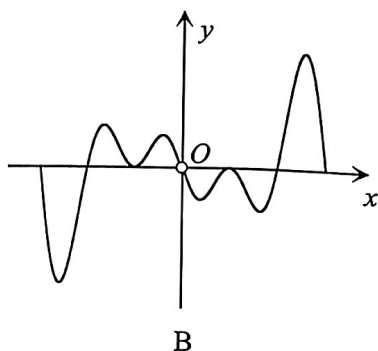
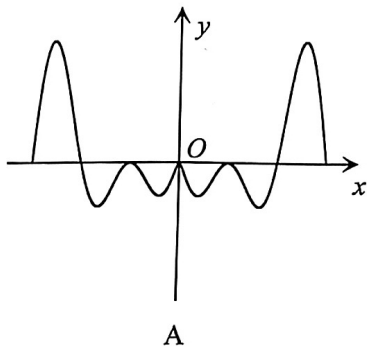
本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

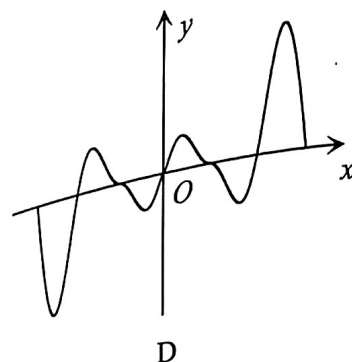
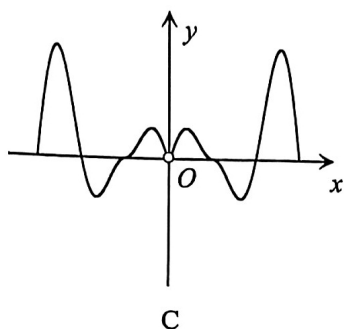
注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上。
3. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $A = \{x \in \mathbf{N} | x < 7\}$ ， $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ，则集合 $A \cup B$ 中的元素个数为
A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
2. 已知复数 $z = 1 + \sqrt{2}i$ (i 为虚数单位)，设 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z \cdot \bar{z} =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
3. 五一国际劳动节放假三天，甲、乙两名同学计划去敬老院做志愿者，若甲同学在三天中随机选一天，乙同学在前两天中随机选一天，且两名同学的选择互不影响，则他们在同一天去的概率为
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
4. 函数 $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot \sin(\pi x) \cdot \log_2 |x|$ 的图象大致为





5. 已知 $\cos x = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) =$

A. $\frac{7}{9}$

B. $-\frac{7}{9}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $-\frac{8}{9}$

6. 设 α, β 为两个不同的平面, 直线 $l \subset \alpha$, 则 “ $l \parallel \beta$ ” 是 “ $\alpha \parallel \beta$ ” 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. F_1, F_2 分别为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与 C 的左、右两支曲线分别交于 A, B 两点, 若 $l \perp F_2B$, 则 $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B} =$

A. $4 - 2\sqrt{3}$

B. $4 + \sqrt{3}$

C. $6 - 2\sqrt{5}$

D. $6 + 2\sqrt{5}$

8. 在一个正三角形的三边上, 分别取一个距顶点最近的十等分点, 连接形成的三角形也为正三角形 (如图1所示, 图中共有 2 个正三角形). 然后在较小的正三角形中, 以同样的方式形成一个更小的正三角形, 如此重复多次, 可得到如图2所示的优美图形 (图中共有 11 个正三角形), 这个过程称之为迭代. 在边长为 243 的正三角形三边上, 分别取一个三等分点, 连接成一个较小的正三角形, 然后迭代得到如图3所示的图形 (图中共有 10 个正三角形), 其中最小的正三角形面积为

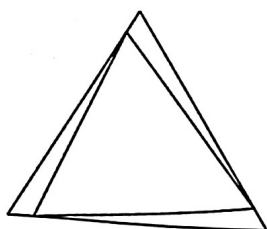


图1

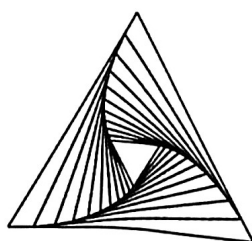


图2

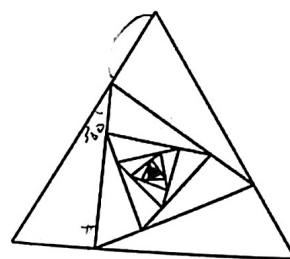


图3

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

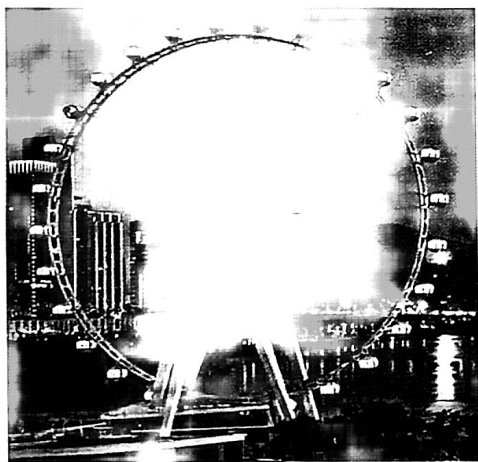
B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设直线 $l: y = kx + 1 (k \in \mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 5$ ，则下列结论正确的为
- A. l 与 C 可能相离
B. l 不可能将 C 的周长平分
C. 当 $k=1$ 时， l 被 C 截得的弦长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D. l 被 C 截得的最短弦长为 4
10. 为方便顾客购物，某网上购鞋平台统计了鞋号 y （单位：码）与脚长 x （单位：毫米）的样本数据 (x_i, y_i) ，发现 y 与 x 具有线性相关关系，用最小二乘法求得回归方程为 $y = 0.2x - 10$ ，则下列结论中正确的为
- A. 回归直线过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$
B. y 与 x 可能具有负的线性相关关系
C. 若某顾客的鞋号是 40 码，则该顾客脚长约为 250 毫米
D. 若某顾客脚长为 262 毫米，在“不挤脚”的前提下，应选择 42 码的鞋
11. 摩天轮常被当作一个城市的地标性建筑，如深圳前海的“湾区之光”摩天轮，如图所示，某摩天轮最高点离地面高度 128 米，转盘直径为 120 米，设置若干个座舱，游客从离地面最近的位置进舱，开启后按逆时针匀速旋转 t 分钟，当 $t=15$ 时，游客随舱旋转至距离地面最远处。以下关于摩天轮的说法中，正确的为



(第 11 题图)

- A. 摩天轮离地面最近的距离为 4 米
B. 若旋转 t 分钟后，游客距离地面的高度为 h 米，则 $h = -60\cos(\frac{\pi}{15}t) + 68$
C. 若在 t_1, t_2 时刻，游客距离地面的高度相等，则 $t_1 + t_2$ 的最小值为 30
D. $\exists t_1, t_2 \in [0, 20]$ ，使得游客在该时刻距离地面的高度均为 90 米

12. 设函数 $f(x) = e^x - ex$ 和 $g(x) = \ln x - kx^2 + (1-2k)x + \frac{1}{2}$ ($k \in \mathbf{R}$), 其中 e 是自然对数的底数 ($e=2.718\ 28\dots$), 则下列结论正确的为
- A. $f(x)$ 的图象与 x 轴相切
- B. 存在实数 $k < 0$, 使得 $g(x)$ 的图象与 x 轴相切
- C. 若 $k = \frac{1}{2}$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 有唯一实数解
- D. 若 $g(x)$ 有两个零点, 则 k 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2})$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 且离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 C 的方程可以为_____.
14. 设恒等式 $(1-2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 + a_3 =$ _____.
15. 若在母线长为 5, 高为 4 的圆锥中挖去一个小球, 则剩余部分体积的最小值为_____.
16. 著名的费马问题是法国数学家皮埃尔·德·费马 (1601–1665) 于 1643 年提出的平面几何极值问题: “已知一个三角形, 求作一点, 使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小.” 费马问题中的所求点称为费马点, 已知对于每个给定的三角形, 都存在唯一的费马点, 当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° 时, 则使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ 的点 P 即为费马点. 已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点, 且 $AC \perp BC$, 若 $|PA| + |PB| = \lambda |PC|$, 则实数 λ 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $2b_2 = a_1 + a_2$, ② $b_2 = a_8$, ③ $T_3 = a_5$ 这三个条件中选择一个, 补充在下面问题中, 并作出解答.

问题: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 21n - n^2$, 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $b_1 = a_3$, 且_____, 判断是否存在唯一的 k ($k \in \mathbf{N}^*$), 使得 $b_k > 1$, 且 $b_{k+1} < 1$. 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = \sqrt{2} \sin A \cdot \sin B$.

(1) 求 C ;

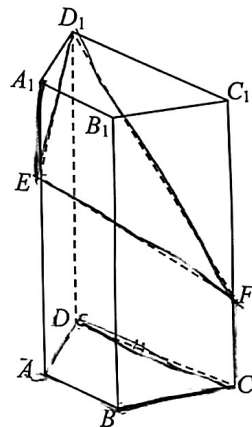
(2) 若 $\cos B = \frac{3}{5}$, D 是边 BC 上一点, 且 $CD = 4BD$, $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{7}{5}$, 求 AC .

19. (12分)

如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB \parallel CD$, $DC = 2$, $AA_1 = 3$, $AB = BC = DA = 1$, 点 E 和 F 分别在侧棱 AA_1 、 CC_1 上, 且 $A_1E = CF = 1$.

(1) 求证: $BC \parallel$ 平面 D_1EF ;

(2) 求直线 AD 与平面 D_1EF 所成角的正弦值.



(第19题图)

20. (12分)

已知某高校共有10000名学生, 其图书馆阅览室共有994个座位, 假设学生是否去自习是相互独立的, 且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为0.1.

(1) 将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为 X , 求 X 的期望和方差;

(2) 18世纪30年代, 数学家棣莫弗发现, 如果随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 那么当 n 比较大时, 可视为 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 任意正态分布都可变换为标准正态分布 ($\mu = 0$ 且 $\sigma = 1$ 的正态分布), 如果随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么令 $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$, 则可以证明 $Z \sim N(0, 1)$. 当 $Z \sim N(0, 1)$ 时, 对于任意实数 a , 记 $\Phi(a) = P(Z < a)$.

已知下表为标准正态分布表(节选),该表用于查询标准正态分布对应的概率值.例如当 $a=0.16$ 时,由于 $0.16=0.1+0.06$,则先在表的最左列找到数字0.1(位于第三行),然后在表的最上行找到数字0.06(位于第八列),则表中位于第三行第八列的数字0.5636便是 $\Phi(0.16)$ 的值.

(i) 求在晚自习时间阅览室座位不够用的概率;

(ii) 若要使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于0.7,则至少需要添加多少个座位?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

21. (12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, O 是坐标原点, P 是直线 $x=-2$ 上的动点,过 P 作两条相异直线 l_1 和 l_2 ,其中 l_1 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A 、 B 两点, l_2 与 C 交于 M 、 N 两点,记 l_1 、 l_2 和直线 OP 的斜率分别为 k_1 、 k_2 和 k_3 .

(1) 当 P 在 x 轴上,且 A 为 PB 中点时,求 $|k_1|$;

(2) 当 AM 为 $\triangle PBN$ 的中位线时,请问是否存在常数 μ ,使得 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \mu k_3$? 若存在,求出 μ 的值;若不存在,请说明理由.

22. (12分)

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x^2+a\cos x+(a-2)e^{-x}$, $a\in\mathbf{R}$. (其中常数 e 是自然对数的底数, $e=2.718\ 28\cdots$)

(1) 当 $a=2$ 时,求 $f(x)$ 的极值;

(2) (i) 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增,求实数 a 的取值范围;

(ii) 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,证明:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)\tan\frac{1}{n+k}} > n - \frac{1}{4n+2}.$$