

2021 年“安徽省示范高中皖北协作区”第 23 届高三联考

理科数学

含答案

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \geq 0\}$ ，集合 $B = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $[1, +\infty)$ B. $[-2, +\infty)$ C. $(-\infty, -3]$ D. $(-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$

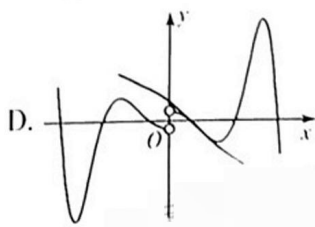
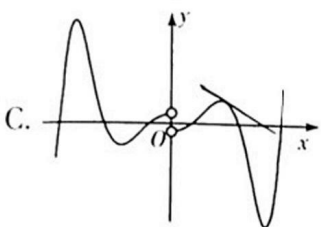
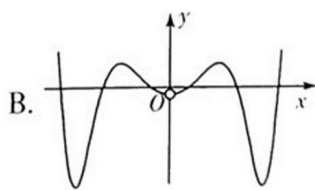
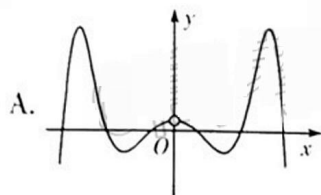
2. 设复数 z 满足 $z \cdot i = -1 + i$ ，则 $|z| =$

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$

3. 已知 $a = e^{-1.5}$ ， $b = e^{\ln 2}$ ， $c = 1.5$ ，则

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 函数 $f(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \cos x}{x}$ 的图像大致为



5. 已知函数 $f(x) = \log_3 x$ ，将函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 1 个单位长度，再将所得的函数图像上的点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标不变，然后将所得的图像上的点的纵坐标伸长为原来的 3 倍，横坐标不变，得到函数 $y = g(x)$ 的图像，则函数 $g(x)$ 的解析式为

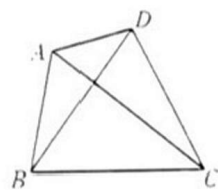
A. $g(x) = 3 \log_3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$ B. $g(x) = \frac{1}{3} \log_3 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

C. $g(x) = 3 \log_3 (2x - 1)$ D. $g(x) = 3 \log_3 (2x - 2)$

6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ ，且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ，则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 5

7. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi) + \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ 为奇函数, 其中 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 处的切线方程为
- A. $4x - y + \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 0$ B. $2x - y + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0$
- C. $2\sqrt{3}x - y + 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = 0$ D. $2x - y + 1 - \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} = 0$
8. 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形, $\triangle ABD$ 是以 BD 为斜边的等腰直角三角形, 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为
- A. 8π B. $\sqrt{6}\pi$ C. 6π D. $2\sqrt{2}\pi$
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, 函数 $f(x) = \frac{x+m}{e^x}$, 则“ $m > \frac{2-e}{e-1}$ ”是“数列 $\{f(a_n)\}$ 为递减数列”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
10. 设抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 已知 $B\left(-\frac{p}{2}, 3p\right)$, $C\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ 且 $y_0 > 0$, 抛物线 E 上一点 A 满足 $AB \perp BC$, 若线段 AC 的垂直平分线 l 过点 F , 则直线 l 的斜率为
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$
11. 如图所示, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\triangle BCD$ 是等边三角形, $AD = 1$, $BD = \sqrt{7}$, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为
- A. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 圆 $E: (x-4)^2 + y^2 = 1$, 若双曲线 C 的渐近线上存在点 P , 过点 P 作直线 l 与圆 E 交于 A, B 两点, 满足 $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PA}$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围为
- A. $\left[\frac{4\sqrt{7}}{7}, +\infty\right)$ B. $\left(1, \frac{4\sqrt{7}}{7}\right]$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $[\sqrt{2}, +\infty)$



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

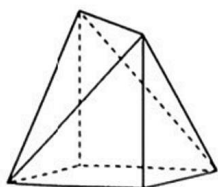
13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2, \\ x-y \leq 2, \\ x-4y+4 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - 2y$ 的最大值为

14. $\left(x - 4 + \frac{4}{x}\right)^3$ 的展开式中常数项是 (用数字作答).

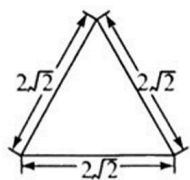
15. 已知直线 $2x + y + 1 = 0$ 的倾斜角为 θ , 则 $\frac{\sqrt{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{\sin \theta + \cos \theta}$

16. 为提高学生的动手能力, 学校的学科拓展中心建立了 3D 打印中心和陶瓷 DIY 工作坊. 一名同学在 3D 打印中心用橡胶打印了如图(1)所示的模具, 该模具是棱长为 2 的正方体截去两个三棱锥后剩下的部分. 该同学又在陶瓷 DIY 工作坊做了 5 个异形瓶, 其瓶口形状如图(2)中①②③④⑤所示, 则此橡胶七

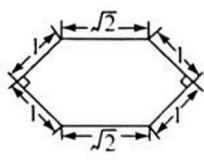
面体模具能作为图(2)中哪种异形瓶的瓶塞? 答: _____ (写出所有满足条件的编号).



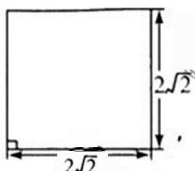
图(1)



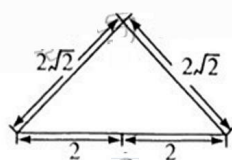
①



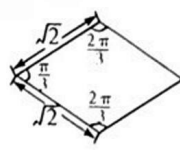
②



③



④



⑤

图(2)

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2S_3 = a_4 - a_1$, 且 $a_1 + 2, 2a_2, a_3$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

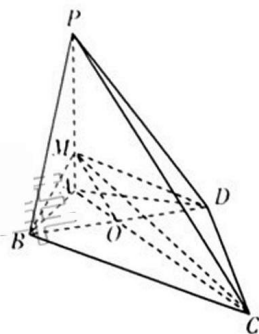
(II) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{S_n - na_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = BC = CD = BD = 2$, $AB = AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, AC 与 BD 交于点 O , 点 M 在线段 PA 上, 且 $PM = 3MA$.

(I) 证明: $OM \parallel$ 平面 PBC ;

(II) 求二面角 $B-MD-C$ 的余弦值.



19. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$, P 为椭圆 E 的右顶点, O 为坐标原点, 过点 P 的直线 l_1, l_2 与椭圆 E 的另外一个交点分别为 A, B , 线段 PA 的中点为 M , 线段 PB 的中点为 N .

(I) 若直线 OM 的斜率为 $-\frac{1}{3}$, 求直线 l_1 的方程;

(II) 若 $OM \perp ON$, 证明: 直线 AB 过定点.

20. (12 分)

“博弈”原指下棋,出自我国《论语·阳货》篇,现在多指一种决策行为,即一些个人、团队或组织,在一定规则约束下,同时或先后,一次或多次,在各自允许选择的策略下进行选择和实施,并从中各自取得相应结果或收益的过程.生活中有很多游戏都蕴含着博弈,比如现在有两个人玩“亮”硬币的游戏,甲、乙约定若同时亮出正面,则甲付给乙 3 元,若同时亮出反面,则甲付给乙 1 元,若亮出结果是 1 正 1 反,则乙付给甲 2 元.

(I) 若两人各自随机“亮”出正反面,求乙收益的期望.

(II) 因为各自“亮”出正反面,而不是抛出正反面,所以可以控制“亮”出正面或反面的频率(假设进行多次游戏,频率可以代替概率),因此双方就面临竞争策略的博弈.甲、乙可以根据对手出正面的概率调整自己出正面的概率,进而增加自己赢得收益的期望,以收益的期望为决策依据,甲、乙各自应该如何选择“亮”出正面的概率,才能让结果对自己最有利? 并分析游戏规则是否公平.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x - ae^x, x \geq 0, a \in \mathbf{R}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a = 1$ 时,不等式 $f(x) \leq (m+1)x - \frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{1}{2}m^2$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

(二) 选考题:共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4t^2 - 1 \\ y = 4t \end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点 O 为极点, x 轴正

半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \in \mathbf{R}$).

(I) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(II) 设曲线 C_1 与曲线 C_2 交于两点 A, B ,求 $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设函数 $f(x) = |2x + 1| + \left| x + \frac{3}{2} \right|$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(II) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 m ,且正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = m$,证明: $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2021 年“安徽省示范高中皖北协作区”第 23 届高三联考

理科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	B	A	A	C	D	B	C	C	D	D	B

1. 答案 A

解析 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \geq 0\} = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$, $B = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4\right\} = \{x | x \geq -2\}$, $\therefore A \cap B = [1, +\infty)$.

2. 答案 B

解析 因为 $z = \frac{-1+i}{i} = \frac{(-1+i) \cdot i}{i \cdot i} = \frac{-i-1}{-1} = 1+i$, 所以 $\bar{z} = 1-i$, $|\bar{z}| = \sqrt{2}$.

3. 答案 A

解析 $\because 0 < a < 1, b = 2, c = 1.5^e > 1.5^2 = 2.25, \therefore a < b < c$.

4. 答案 A

解析 $\because f(-x) = \frac{(e^{-x} - e^x) \cos(-x)}{-x} = f(x)$, $\therefore f(x)$ 是偶函数, 排除 C, D. 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $e^x - e^{-x} > 0, \cos x > 0, \therefore f(x) > 0$, 故选 A.

5. 答案 C

解析 函数 $f(x) = \log_3 x$ 的图像向右平移 1 个单位长度得到函数 $y = \log_3(x-1)$ 的图像, 再将函数 $y = \log_3(x-1)$ 图像上的点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $y = \log_3(2x-1)$ 的图像, 然后将函数 $y = \log_3(2x-1)$ 图像上的点的纵坐标伸长为原来的 3 倍, 横坐标不变, 得到函数 $g(x) = 3\log_3(2x-1)$ 的图像.

6. 答案 D

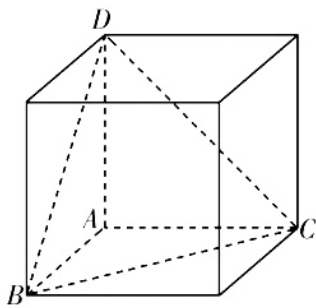
解析 因为 $|a| = 1$, 且 $a \perp (a-b)$, 所以 $a^2 - a \cdot b = 0$, 可得 $a \cdot b = 1$, 所以 $|a+2b| = \sqrt{a^2 + 4a \cdot b + 4b^2} = 5$.

7. 答案 B

解析 $f(x) = \sin(2x + \varphi) + \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin(2x + \varphi) + \sqrt{3} \cos(2x + \varphi) = 2\sin\left(2x + \varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, 由函数 $f(x)$ 为奇函数, 可得 $\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin 2x, f'(x) = 4\cos 2x$, 可得 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y - \sqrt{3} = 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 即 $2x - y + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0$.

8. 答案 C

解析 因为 $\triangle ABD$ 是以 BD 为斜边的等腰直角三角形, 所以 $DA \perp AB$, 又因为平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 所以 $DA \perp$ 平面 ABC , 所以 $DA \perp AC$, 可得 DA, BA, CA 两两垂直, 且 $DA = BA = CA = \sqrt{2}$, 构造正方体如图所示, 可得四面体 $ABCD$ 的外接球半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以表面积为 $4\pi R^2 = 6\pi$.



9. 答案 C

解析 由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, 可得 $a_n = n$, 所以 $f(a_n) = f(n) = \frac{n+m}{e^n}$, 数列 $\{f(a_n)\}$ 为递减数列等价于 $f(n) > f(n+1)$ 恒成立, 所以 $\frac{n+m}{e^n} > \frac{n+1+m}{e^{n+1}}$, 整理得 $m > \frac{(1-e)n+1}{e-1}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 因为 $\left[\frac{(1-e)n+1}{e-1} \right]_{\max} = \frac{2-e}{e-1}$, 所以 $m > \frac{2-e}{e-1}$.

10. 答案 D

解析 因为 $AB \perp BC$, 所以 $A\left(\frac{9p}{2}, 3p\right)$, 直线 l 垂直平分线段 AC , 根据抛物线定义知 $|CF| = |AF| = |AB| = 5p$, 所以 $y_0 = 2\sqrt{6}p$, 所以直线 AC 的斜率 $k_{AC} = \frac{3-2\sqrt{6}}{5}$, 故直线 l 的斜率 $k_l = -\frac{5}{3-2\sqrt{6}} = \frac{3+2\sqrt{6}}{3}$.

11. 答案 D

解析 设 $AB = x$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可知 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \frac{2\pi}{3}$, 整理可得 $x^2 + x - 6 = 0$, 解得 $x = 2$, 设 $\angle ABD = \alpha$, 由正弦定理知 $\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin \frac{2\pi}{3}}$, 解得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, 所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{21}}{14}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

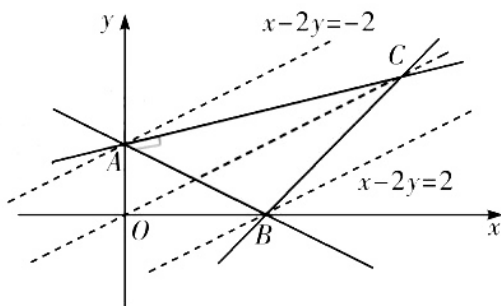
12. 答案 B

解析 由 $\vec{PB} = 2\vec{PA}$, 可得 $\vec{EB} - \vec{EP} = 2(\vec{EA} - \vec{EP})$, 所以 $\vec{EP} = 2\vec{EA} - \vec{EB}$, 设 $\vec{EA}, \vec{EB}$ 的夹角为 $\theta, \theta \in (0, \pi]$, 则 $\vec{EP}^2 = (2\vec{EA} - \vec{EB})^2 = 4\vec{EA}^2 + \vec{EB}^2 - 4\vec{EA} \cdot \vec{EB} = 5 - 4\cos \theta \in (1, 9]$, 所以 $|\vec{EP}| \in (1, 3]$, E 到渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离 $d = \frac{4b}{c} \leq 3$, 所以 $e \in \left(1, \frac{4\sqrt{7}}{7}\right]$, 故选 B.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案 2

解析 作出不等式组表示的平面区域, 如图中阴影部分所示, 目标函数 $z = x - 2y$ 表示的直线经过点 $B(2, 0)$ 时 z 取得最大值, 最大值为 2.



14. 答案 -160

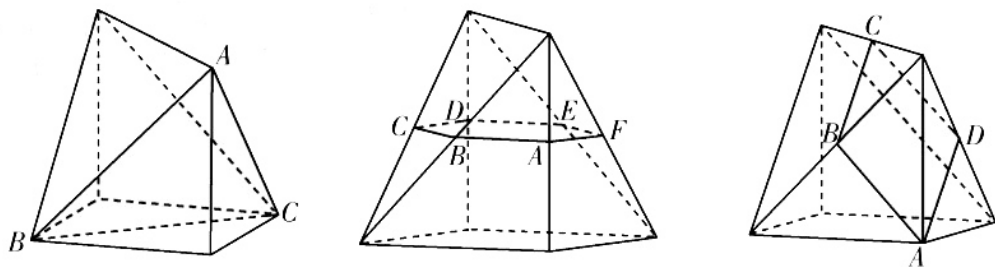
解析 $\left(x - 4 + \frac{4}{x}\right)^3 = \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x}\right)^3 = \frac{(x-2)^6}{x^3}$, 所以常数项为 -160 .

15. 答案 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 由题可知 $\tan \theta = -2$ 且 $\theta \in [0, \pi)$, $\frac{\sqrt{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{2\sin \theta \cos \theta + 2\cos^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 2\cos \theta$, 再由 $\tan \theta = -2$, 可得 $2\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

16. 答案 ①②⑤

解析 如图所示的三种情况的截面, 选择恰当的角度可以形成异形瓶的“瓶塞”, 分别对应①②⑤, ③④显然不满足.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 解析 (I) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q , 由 $2S_3 = a_4 - a_1$ 得 $2(1 + q + q^2) = q^3 - 1$,

解得 $q = 3$ (2 分)

$\because a_1 + 2, 2a_2, a_3$ 成等差数列, $\therefore 4a_1q = a_1 + 2 + a_1q^2$, 解得 $a_1 = 1$ (4 分)

$\therefore a_n = 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ (5 分)

(II) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 以 3 为公比的等比数列,

$\therefore S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ (6 分)

$\therefore b_n = \frac{S_n - na_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{(n+1)S_n - nS_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{n+1}{S_{n+1}} - \frac{n}{S_n}$, (9 分)

$\therefore T_n = \left(\frac{2}{S_2} + \frac{3}{S_3} + \cdots + \frac{n}{S_n} + \frac{n+1}{S_{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{S_1} + \frac{2}{S_2} + \cdots + \frac{n-1}{S_{n-1}} + \frac{n}{S_n}\right) = \frac{n+1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1} - 1} - 1 = \frac{2n+3-3^{n+1}}{3^{n+1} - 1}$.
..... (12 分)

18. 解析 (I) 由已知可得 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$,

$\therefore AC \perp BD$ 且 O 为 BD 的中点, (2 分)

由 $BC = CD = BD = 2, AB = AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $OA = \frac{\sqrt{3}}{3}, OC = \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{AO}{AC} = \frac{1}{4} = \frac{AM}{AP}$, (4 分)

$\therefore OM \parallel PC$,

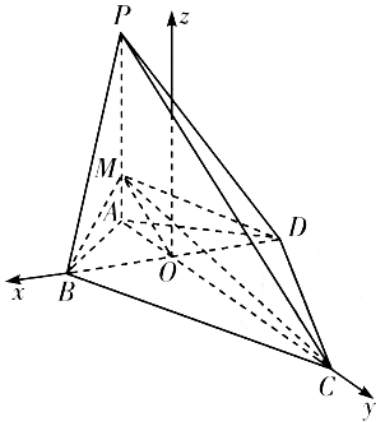
又 $OM \not\subset$ 平面 $PBC, PC \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore OM \parallel$ 平面 PBC (5 分)

(II) 以直线 OB 为 x 轴, 直线 OC 为 y 轴, 过点 O 作平面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 建立空间直角坐标系如图所示,

则 $B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0), M\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (6 分)

$\therefore \overrightarrow{BD} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{MD} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{CD} = (-1, -\sqrt{3}, 0).$ (7 分)



设平面 MBD 的法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = -2x = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{MD} = -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{1}{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $y = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{m} = (0, \sqrt{3}, 2).$ (8 分)

设平面 MCD 的法向量 $\mathbf{n} = (a, b, c)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = -a - \sqrt{3}b = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MD} = -a + \frac{\sqrt{3}}{3}b - \frac{1}{2}c = 0, \end{cases}$$

令 $b = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{n} = (-3, \sqrt{3}, 8).$ (9 分)

$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{19}{\sqrt{7} \times 2 \sqrt{19}} = \frac{\sqrt{133}}{14},$

$\because$ 二面角 $B-MD-C$ 为锐二面角, $\therefore$ 二面角 $B-MD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{133}}{14}.$ (12 分)

19. 解析 (I) 设直线 $AP: x = ty + 3 (t \neq 0)$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$,

得 $(t^2 + 3)y^2 + 6ty = 0$, 可得 $M\left(\frac{9}{t^2 + 3}, \frac{-3t}{t^2 + 3}\right),$ (2 分)

又因为 $k_{OM} = -\frac{1}{3}$, 所以 $\frac{\frac{-3t}{t^2 + 3}}{\frac{9}{t^2 + 3}} = -\frac{1}{3}$, 解得 $t = 1.$

所以直线 l_1 的方程为 $x - y - 3 = 0.$ (4 分)

(II) ① 当直线 AB 的斜率不存在时, 设 $A(x_0, y_0), B(x_0, -y_0), -3 < x_0 < 3,$

则 $M\left(\frac{x_0 + 3}{2}, \frac{y_0}{2}\right), N\left(\frac{x_0 + 3}{2}, -\frac{y_0}{2}\right),$

由 $OM \perp ON$, 有 $k_{OM} \cdot k_{ON} = -1$, 代入 M, N 点的坐标可得 $-\frac{y_0^2}{(x_0 + 3)^2} = -1,$

又因为 $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 联立可得 $x_0 = -\frac{3}{2}$, 所以 AB 的方程为 $x = -\frac{3}{2}.$ (6 分)

② 当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m,$

代入椭圆方程得 $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 9 = 0, \Delta = 12(9k^2 - m^2 + 3) > 0.$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = \frac{-6km}{3k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{3m^2 - 9}{3k^2 + 1}.$ (7 分)

由 $k_{OM} \cdot k_{ON} = -1$, 可得 $\frac{y_1 y_2}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} = -1$,

即 $(k^2 + 1)x_1 x_2 + (km + 3)(x_1 + x_2) + m^2 + 9 = 0$,

将 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 代入可得 $9k^2 - 9km + 2m^2 = 0$, 即 $(3k - 2m)(3k - m) = 0$ (9 分)

当 $m = 3k$ 时, 直线 AB 过椭圆的左顶点, 不满足题意; (10 分)

当 $m = \frac{3}{2}k$ 时, 直线 AB 过定点 $(-\frac{3}{2}, 0)$, 且满足 $\Delta = 12(9k^2 - m^2 + 3) > 0$ (11 分)

综上, 直线 AB 过定点 $(-\frac{3}{2}, 0)$ (12 分)

20. 解析 (I) 因为是各自随机“亮”出正反面, 所以甲、乙“亮”出正面的概率均可认为是 $\frac{1}{2}$, 设乙在此游戏中的收益为随机变量 ξ , 则 ξ 的可能取值为 $-2, 1, 3$, 所以可得乙的收益的分布列为

ξ	-2	1	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(\xi) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 0$ (4 分)

(II) 假设甲以 $p(0 \leq p \leq 1)$ 的概率“亮”出正面, 乙以 $q(0 \leq q \leq 1)$ 的概率“亮”出正面, 甲收益的随机变量为 X , 乙收益的随机变量为 Y , 此时甲的收益分布列为

X	2	-1	-3
P	$p(1 - q) + q(1 - p)$	$(1 - p)(1 - q)$	pq

所以甲的收益期望为 $E(X) = 2[p(1 - q) + q(1 - p)] - (1 - p)(1 - q) - 3pq = (3 - 8q)p + 3q - 1$ (6 分)

同理可得乙的收益分布列为

Y	-2	1	3
P	$p(1 - q) + q(1 - p)$	$(1 - p)(1 - q)$	pq

所以乙的收益期望为 $E(Y) = -2[p(1 - q) + q(1 - p)] + (1 - p)(1 - q) + 3pq = (8p - 3)q - 3p + 1$ (8 分)

根据甲的收益期望, 可知乙的最优策略是“亮”出正面的概率为 $\frac{3}{8}$, 否则若 $\frac{3}{8} < q \leq 1$, 有 $3 - 8q < 0$, 甲的收益期望 $E(X) = (3 - 8q)p + 3q - 1$, 甲可以选择都“亮”出反面的策略, 即 $p = 0$, 达到预期收益最大, 此时 $E(X) = 3q - 1 > \frac{1}{8}$ (9 分)

若 $0 \leq q < \frac{3}{8}$, 则甲选择都“亮”出正面的策略, 即 $p = 1$, 达到预期收益最大, $E(X) = 2 - 5q > \frac{1}{8}$ (10 分)

同理, 可知甲的最优策略是“亮”出正面的概率为 $\frac{3}{8}$, 所以最终两人的决策为保持“亮”出正面的概率都为 $\frac{3}{8}$ (11 分)

而当 $p = q = \frac{3}{8}$ 时, $E(X) = \frac{1}{8}, E(Y) = -\frac{1}{8}$, 所以此时游戏结果对两人都是最有利, 但是规则不公平. (12 分)

21. 解析 (I) $\because f(x) = x - ae^x, x \geq 0$,
 $\therefore f'(x) = 1 - ae^x$.

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. (1 分)

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln \frac{1}{a}$.

当 $a \geq 1$ 时, $\ln \frac{1}{a} \leq 0$, $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $0 < a < 1$ 时, $\ln \frac{1}{a} > 0$, 当 $x \in (0, \ln \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. (4 分)

综上: 当 $a \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a \in [1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减. (5 分)

(II) 当 $a = 1$ 时, 不等式 $f(x) \leq (m+1)x - \frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{1}{2}m^2$, 即 $2e^x - x^2 + 2mx + 2 - m^2 \geq 0$.

设 $g(x) = 2e^x - x^2 + 2mx + 2 - m^2$, $x \geq 0$,

则 $g'(x) = 2e^x - 2x + 2m = 2(e^x - x + m)$.

设 $h(x) = e^x - x + m$, 则 $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $h(0) = 1 + m$, (6 分)

①当 $m \geq -1$ 时, $h(x) \geq h(0) \geq 0$, 所以 $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(0) = 4 - m^2 \geq 0$, 故 $-1 \leq m \leq 2$; (7 分)

②当 $m < -1$ 时, $h(0) = 1 + m < 0$,

由(I)知, $a = \frac{1}{2}$ 时, 可得当 $x \geq 0$ 时, $e^x > 2x$,

所以 $h(-m) = e^{-m} + 2m > -2m + 2m = 0$,

故存在 $x_0 \in (0, -m)$, 使 $h(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - x_0 + m = 0$, (8 分)

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x) \geq g(x_0) = 2e^{x_0} - x_0^2 + 2mx_0 + 2 - m^2 = 2e^{x_0} - x_0^2 + 2x_0(x_0 - e^{x_0}) + 2 - (x_0 - e^{x_0})^2 = -e^{2x_0} + 2e^{x_0} + 2$,

由 $-e^{2x_0} + 2e^{x_0} + 2 \geq 0$, 解得 $0 < x_0 \leq \ln(\sqrt{3} + 1)$ (10 分)

因为 $m = x_0 - e^{x_0}$,

由(I)知, $a = 1$ 时, 可得当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - e^x$ 单调递减,

所以 $\ln(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + 1) \leq m < -1$, (11 分)

综上: $\ln(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + 1) \leq m \leq 2$ (12 分)

22. 解析 (I) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 \sin^2 \theta = 4\rho \cos \theta + 4$, 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (5 分)

(II) 联立曲线 C_1 和 C_2 的极坐标方程得 $\rho^2 - 8\sqrt{3}\rho - 16 = 0$, 设 $A(\rho_1, \frac{\pi}{6})$, $B(\rho_2, \frac{\pi}{6})$,

则 $\rho_1 + \rho_2 = 8\sqrt{3}$, $\rho_1 \rho_2 = -16$, $|\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2} = 16$,

所以 $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{1}{|\rho_1|} + \frac{1}{|\rho_2|} = \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{|\rho_1 \rho_2|} = \frac{16}{16} = 1$ (10 分)

23. 解析 (I) $f(x) = |2x+1| + \left| x + \frac{3}{2} \right| = \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{3}{2} \right|$

$$\geq 0 + \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{3}{2} \right| \geq \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) - \left(x + \frac{3}{2} \right) \right| = 1,$$

当且仅当 $x = -\frac{1}{2}$ 时等号成立. (5 分)

(II) 因为 $a+b+c=1$, 所以 $1 = \frac{a}{2} + b + \frac{a}{2} + c \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot b} + 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot c},$

所以 $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$

当且仅当 $a = \frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{4}$ 时等号成立. (10 分)