

秘密★启用前

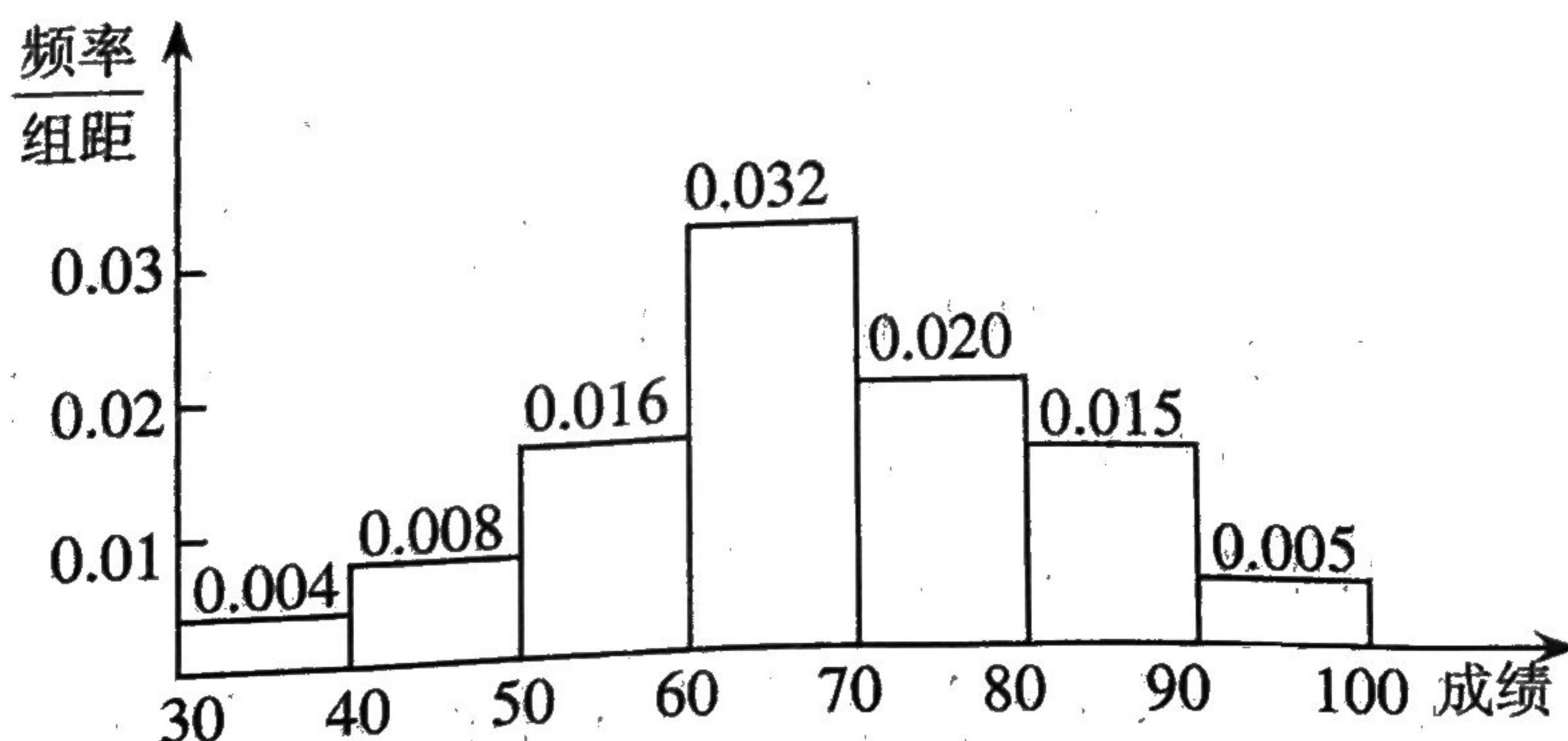
理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

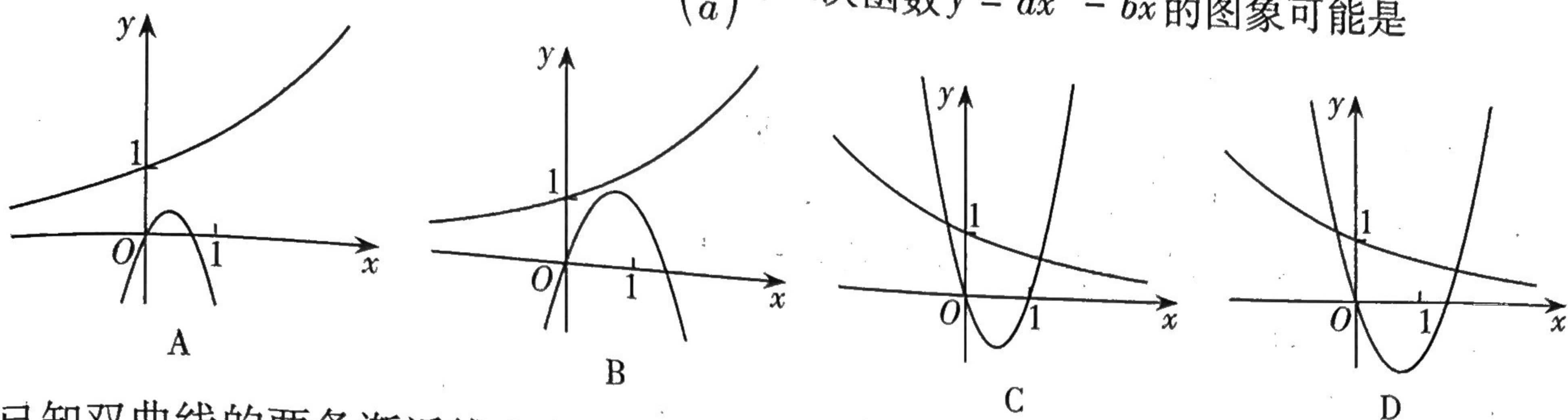
1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 12 < 0\}$, 集合 $B = \{x | -5 \leq x < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | -5 \leq x < 3\}$ B. $\{x | -5 \leq x < -4\}$
 C. $\{x | -4 < x < 0\}$ D. $\{x | 0 < x < 3\}$
2. 已知点 $P(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ 是角 α 的终边与单位圆的交点, 则 $\sin 2\alpha =$
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
3. 高斯函数也称取整函数, 记作 $[x]$, 是指不超过实数 x 的最大整数, 例如 $[6.8] = 6, [-4.1] = -5$, 该函数被广泛应用于数论、函数绘图和计算机领域. 下列关于高斯函数 $y = [x]$ 的性质叙述错误的是
 A. $y = [x]$ 值域为 $\mathbb{Z}$ B. $y = [x]$ 不是奇函数
 C. $y = x - [x]$ 为周期函数 D. $y = [x]$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增
4. 某公司计划招收600名新员工, 共报名了2000人, 远超计划, 故该公司采用笔试的方法进行选拔, 并按照笔试成绩择优录取. 现采用随机抽样的方法抽取200名报名者的笔试成绩, 绘制频率分布直方图如下:



则录取分数线可估计为

- A. 70 B. 73 C. 75 D. 77

5. 在同一直角坐标系中, 指数函数 $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$, 二次函数 $y = ax^2 - bx$ 的图象可能是



6. 已知双曲线的两条渐近线夹角为 α , 且 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 则其离心率为

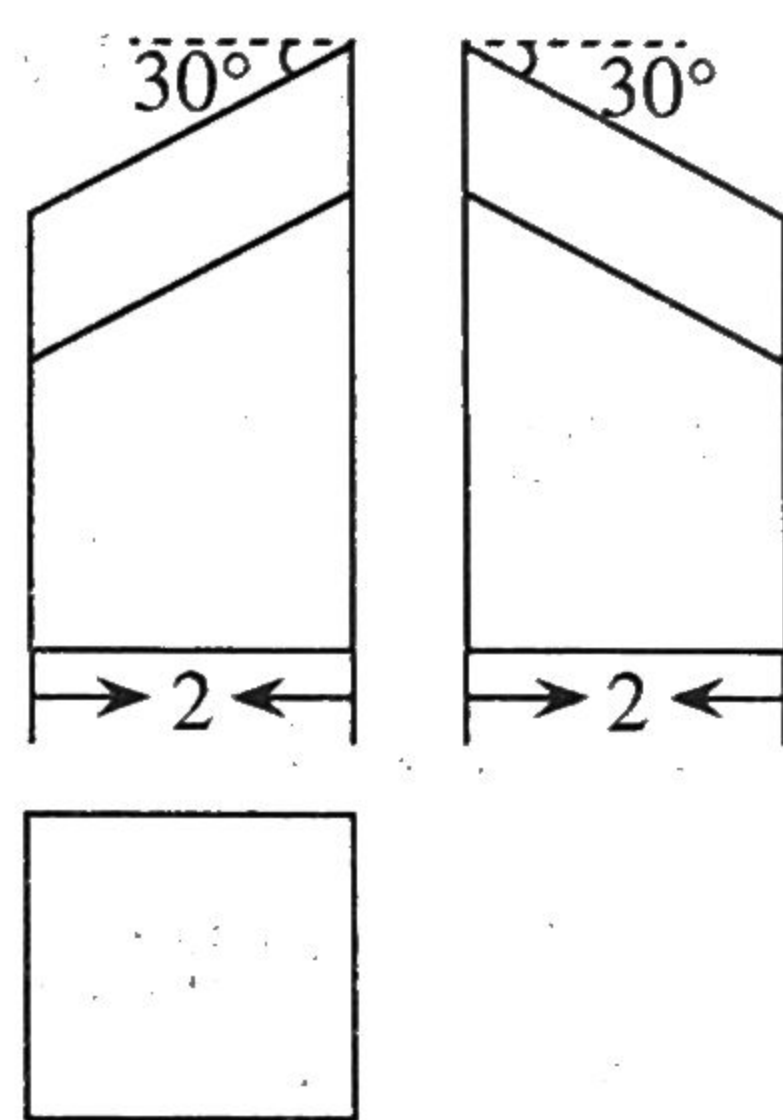
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 或 $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\sqrt{5}$

7. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, 且 $a > 4, ab + ac = 4$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{2}{b+c} + \frac{32}{a+b+c}$ 的最小值是

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

8. 木工师傅将一个长方体形的木块切去一部分, 得到一个新木件, 其三视图如图所示, 则这个木件的切面与底面所成锐二面角的正切值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\sqrt{3}$



(第8题图)

9. 十九世纪下半叶集合论的创立奠定了现代数学的基础. 著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物, 具有典型的分形特征. 仿照“康托三分集”我们可以构造一个“四分集”, 其操作过程如下: 将闭区间 $[0, 1]$ 均分为四段, 去掉其中的区间段 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, 记为第一次

操作; 再将剩下的三个区间 $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ 分别均分为四段, 并各自去掉第二个区间段, 记为第二次操作; ... 如此这样, 每次在上一次操作的基础上, 将剩下的各个区间分别均分为四段, 同样各自去掉第二个区间段. 操作过程不断地进行下去, 以至无穷, 剩下的区间集合即是“四分集”. 若使去掉的各区间长度之和不小于 $\frac{19}{20}$, 则需要操作的次数 n 的

最小值为 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$)

- A. 11 B. 10 C. 9 D. 8

10. 一个圆锥的底面圆周和顶点都在一个球面上, 已知圆锥的底面面积与球面面积比值为 $\frac{2}{9}$, 则这个圆锥体积与球体积的比值为

- A. $\frac{8}{81}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{4}{81}$ 或 $\frac{8}{81}$ D. $\frac{4}{27}$ 或 $\frac{8}{27}$

11. 函数 $f(x) = a^x |\log_a x| - 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 有两个零点, 则 a 的取值范围为

- A. $(1, +\infty)$ B. $\left\{e^{-\frac{1}{e}}\right\} \cup (1, +\infty)$ C. $\{e^{-e}\} \cup (1, +\infty)$ D. $\left\{\frac{1}{e}\right\} \cup (1, +\infty)$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{7}$, 对于 $n \geq 3$, 且 $n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}$. 若 $a_{2021} = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$, 且 p, q 互质), 则 $p + q$ 等于
- A. 8089 B. 8088 C. 8087 D. 8086

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $z = -1 + \sqrt{3}i$ (其中 i 为虚数单位), 则 $z^3 = \underline{\hspace{1cm}}$.

14. 观察下列各式:

$$1 + \frac{1}{2}C_1^1 = \frac{2^2 - 1}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2}C_2^1 + \frac{1}{3}C_2^2 = \frac{2^3 - 1}{3},$$

$$1 + \frac{1}{2}C_3^1 + \frac{1}{3}C_3^2 + \frac{1}{4}C_3^3 = \frac{2^4 - 1}{4},$$

$$1 + \frac{1}{2}C_4^1 + \frac{1}{3}C_4^2 + \frac{1}{4}C_4^3 + \frac{1}{5}C_4^4 = \frac{2^5 - 1}{5},$$

.....

照此规律, 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \underline{\hspace{1cm}}$.

15. 已知函数 $f(x) = \left(3x - \frac{2}{x}\right)^n$, 则下列关于 $f(x)$ 展开式的命题中, 所有真命题的序号是 .

- ① 当 $n = 11$ 时, $f(x)$ 展开式共有 11 项;
 ② 当 $n = 8$ 时, $f(x)$ 展开式第 3 项与第 6 项的二项式系数之比为 1:2;
 ③ 当 $n = 7$ 时, $f(x)$ 展开式中, 各项系数之和为 -1;
 ④ 当 $n = 5$ 时, $f(x)$ 展开式中, 系数最小的项是 $-810x^3$.

16. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 $M(-\frac{p}{2}, 0)$, 过点 F 的直线与此抛物线交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 24$, 且 $\tan \angle AMB = 2\sqrt{2}$, 则 $p = \underline{\hspace{1cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边. 若 $b - c = 2$, $\cos C = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 再从条件①与②中选择一个作为已知条件, 完成以下问题:

- (1) 求 b, c 的值;
 (2) 求角 A 的值及 $\triangle ABC$ 的面积.

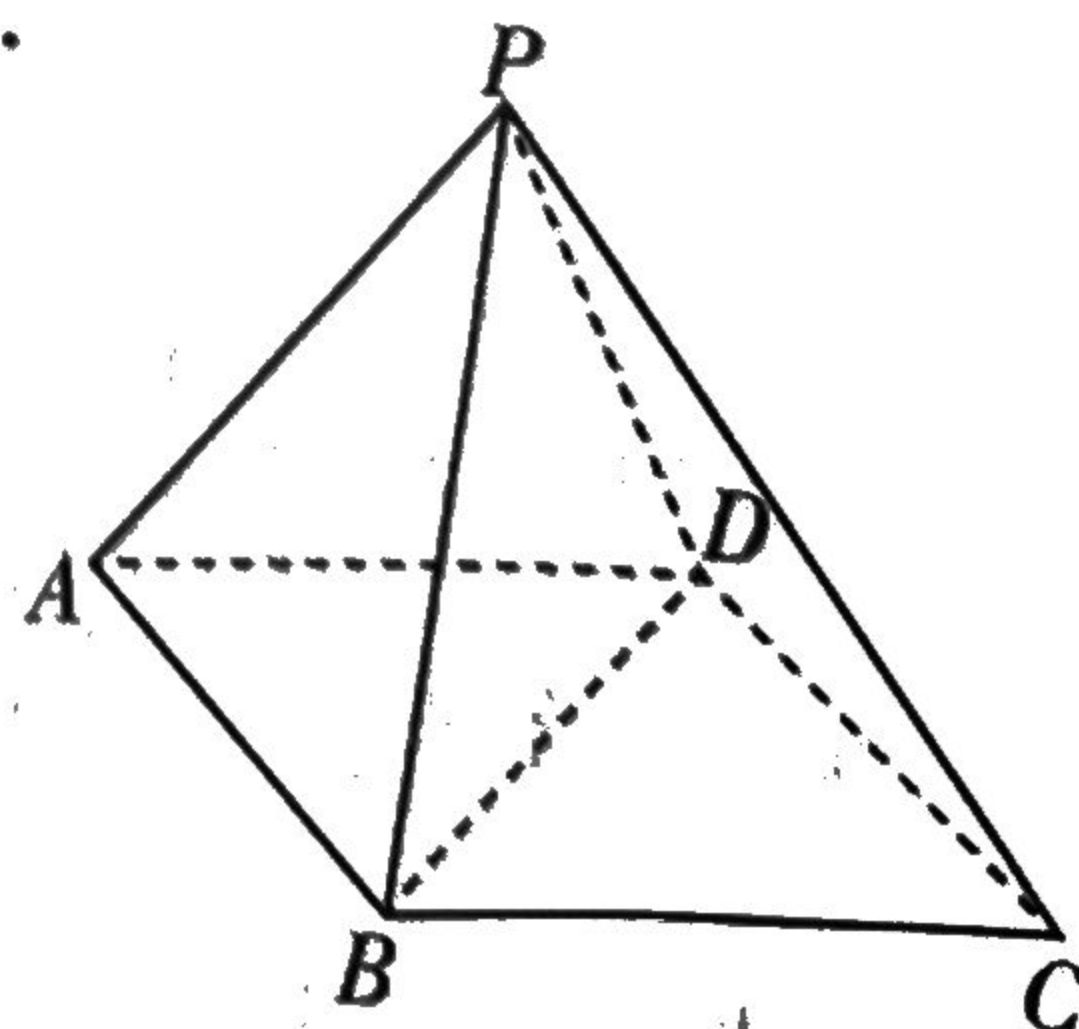
条件①: $a \cos B + b \cos A = \frac{\sqrt{7}}{14} ac$; 条件②: $2b \cos C = 2a - \frac{\sqrt{7}}{7} c$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按条件①的解答给分.

18. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle APB$ 为等腰直角三角形, $PA = PB$, $AD = \sqrt{2}$, $AB = 2$, $PD \perp AB$, $PC = \sqrt{5}$.

- (1) 求证: $BD \perp AD$;
 (2) 求直线 BD 与面 PAD 所成角的正弦值.



(第 18 题图)

19. (12分)

已知6只小白鼠中有且仅有2只患有某种疾病,需要通过化验血液来确定患病的小白鼠.血液化验呈阳性即为患病,阴性为不患病.现将6只小白鼠随机排序并化验血液,每次测1只,且得到前一只小白鼠的血液化验结果之后才化验下一只小白鼠的血液,直到能确定哪两只小白鼠患病为止,并用 X 表示化验总次数.

- (1)在第一只小白鼠验血结果为阳性的条件下,求 $X = 3$ 的概率;
- (2)求 X 的分布列与数学期望.

20. (12分)

已知椭圆 C_2 与 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率相同,过 C_2 的右焦点且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C_2 截得的线段长为 $3\sqrt{2}$.

- (1)求椭圆 C_2 的标准方程;
- (2)若直线 $l: y = \sqrt{3}x + m$ 与椭圆 C_1, C_2 的交点从上到下依次为 C, A, B, D ,且 $|AC| = \frac{4}{5}$,求 m 的值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}kx^2 - x$, $g(x) = \ln x - kx$.

- (1)当 $k = 1$ 时,求 $g(x)$ 的最大值;

- (2)当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时,

(i)判断函数 $g(x)$ 的零点个数;

(ii)求证: $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,且 $\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2} > -1$.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分,作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3} + t\cos\alpha \\ y = -\frac{7}{3} + t\sin\alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, \alpha \text{ 为直线 } l \text{ 的倾斜角})$$

以原点 O 为极点、 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho^2 = \frac{4}{3 - \cos 2\theta}.$$

- (1)求曲线 C 的直角坐标方程;

- (2)若点 $P(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{3})$,直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点,且 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$,求直线 l 的方程.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |3x - 1| + 2|x - 3|$.

- (1)若关于 x 的方程 $|3x - 1| + 2|x - 3| = a$ 有两个不同的实数根,求 a 的取值范围;

- (2)如果不等式 $f(x) \leq bx$ 的解集非空,求 b 的取值范围.