

长郡中学 2021 届高三月考试卷（六）

数 学

本试卷共 8 页。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 \leq 4\}$, $N = \{x | 2^x < 4\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | x \leq -2\}$ B. $\{x | -2 \leq x < 2\}$ C. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

★2. 已知复数 z 满足 $z(2+i) = 3-4i$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 5

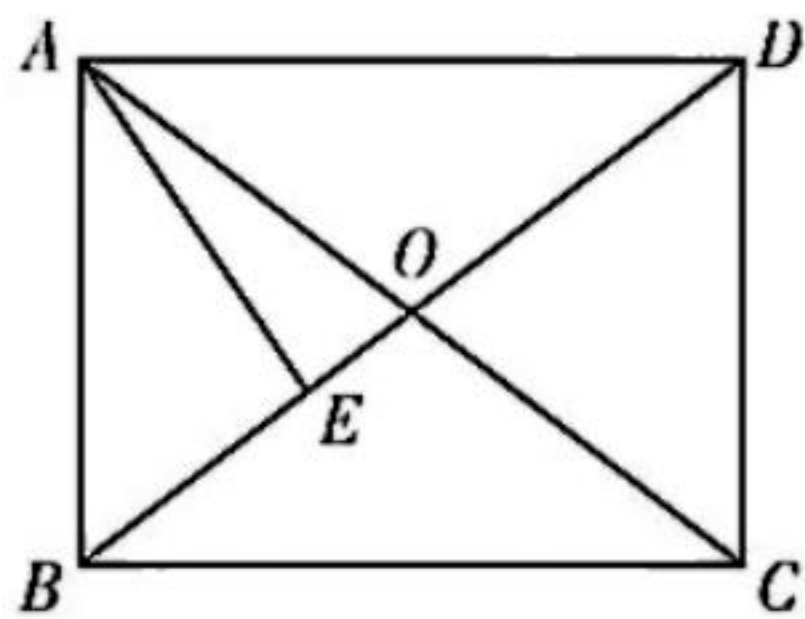
★3. 已知圆锥的表面积为 3π , 它的侧面展开图是一个半圆, 则此圆锥的体积为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. $\sqrt{3}$

★4. a 是 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - \log_2 x$ 的零点, 若 $0 < x_0 < a$, 则 $f(x_0)$ 的值满足

- A. $f(x_0)$ 的符号不确定 B. $f(x_0) < 0$
C. $f(x_0) = 0$ D. $f(x_0) > 0$

★5. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, AC 与 BD 相交于点 O , 过点 A 作 $AE \perp BD$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} =$

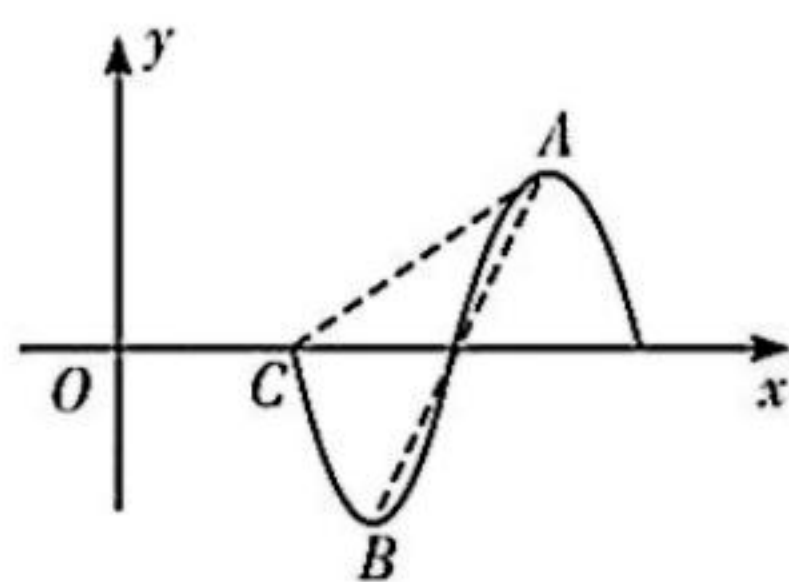


- A. $\frac{12}{25}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\pi x + \varphi)$ 某个周期的图象如图所示, A, B 分别是 $f(x)$ 图象的最高点与最低点, C 是 $f(x)$ 图象与 x 轴的交点, 则 $\tan \angle BAC =$



- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{4}{7}$
- C. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
- D. $\frac{7}{65}\sqrt{65}$

8. 概率论起源于博弈游戏. 17 世纪, 曾有一个“赌金分配”的问题: 博弈水平相当的甲、乙两人进行博弈游戏, 每局比赛都能分出胜负, 没有平局. 双方约定, 各出赌金 48 枚金币, 先赢 3 局者可获得全部赌金; 但比赛中途因故终止了, 此时甲赢了 2 局, 乙赢了 1 局. 问这 96 枚金币的赌金该如何分配? 数学家费马和帕斯卡都用了现在称之为“概率”的知识, 合理地给出了赌金分配方案. 该分配方案是

- A. 甲 48 枚, 乙 48 枚
B. 甲 64 枚, 乙 32 枚
C. 甲 72 枚, 乙 24 枚
D. 甲 80 枚, 乙 16 枚

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

★9. 已知 α, β 是空间中两个不同的平面, m, n 是空间中两条不同的直线, 则给出的下列说法中, 正确的是

- A. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$
 B. 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 C. 若 $\alpha \perp \beta, m \parallel \beta$, 则 $m \perp \alpha$
 D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \perp \beta$

★10. 若 a, b, c 都是正数, 且 $4^a = 6^b = 9^c$, 那么

- A. $ab+bc=2ac$
B. $ab+bc=ac$
C. $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$
D. $\frac{1}{c}=\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$

★11. 一袋中有大小相同的 4 个红球和 2 个白球, 则下列结论正确的是

- A. 从中任取 3 球, 恰有一个白球的概率是 $\frac{3}{5}$
- B. 从中有放回地取球 6 次, 每次任取一球, 则取到红球次数的方差为 $\frac{4}{3}$
- C. 现从中不放回地取球 2 次, 每次任取 1 球, 则在第一次取到红球后, 第二次再次取到红球的概率为 $\frac{2}{5}$
- D. 从中有放回地取球 3 次, 每次任取一球, 则至少有一次取到红球的概率为 $\frac{26}{27}$

★12. 关于函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, 下列说法正确的是

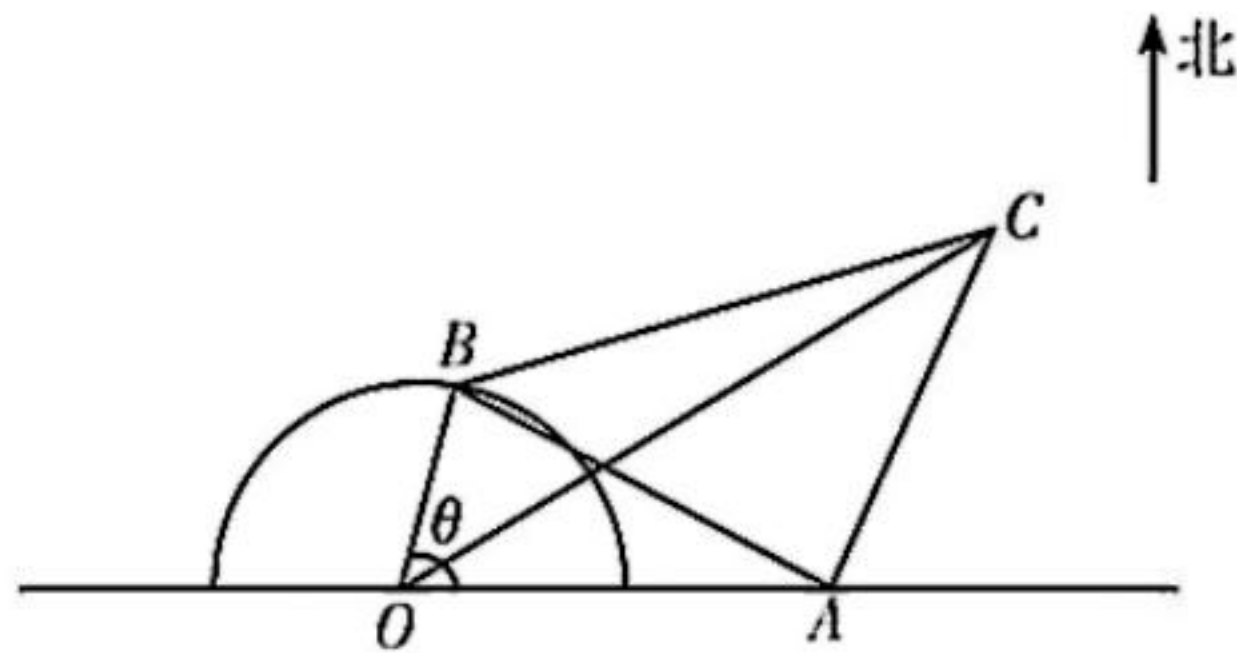
- A. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- B. 函数 $y = f(x) - x$ 有且只有 1 个零点
- C. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减
- D. 设 $g(x) = xf(x)$, 则 $g\left(\frac{1}{e}\right) < g(\sqrt{e})$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\left(x - \frac{1}{x}\right)(1-x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 _____.

14. 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

15. 如图, 某湖有一半径为 100 m 的半圆形岸边, 现决定在圆心 O 处设立一个水文监测中心 (大小忽略不计), 在其正东方向相距 200 m 的点 A 处安装一套监测设备. 为了监测数据更加准确, 在半圆弧上的点 B 以及湖中的点 C 处, 再分别安装一套监测设备, 且满足 $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$. 定义: 四边形 $OACB$ 及其内部区域为“直接监测覆盖区域”; 设 $\angle AOB = \theta$.



则“直接监测覆盖区域”面积的最大值为 _____.

16. 已知两条抛物线 $C: y^2 = 2x$, $E: y^2 = 2px$ ($p > 0$ 且 $p \neq 1$), M 为 C 上一点 (异于原点 O), 直线 OM 与 E 的另一个交点为 N . 若过 M 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABN$ 的面积是 $\triangle ABO$ 面积的 3 倍, 则 $p =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

★17. (本小题满分 10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 1$), 前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_5 - S_2}{a_1} = \frac{7}{2}$,

且 $S_3 + 2 = a_4$.

(1) 求 a_n ;

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq T_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$.

18. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $\sqrt{3}b \sin A = a(2 + \cos B)$.

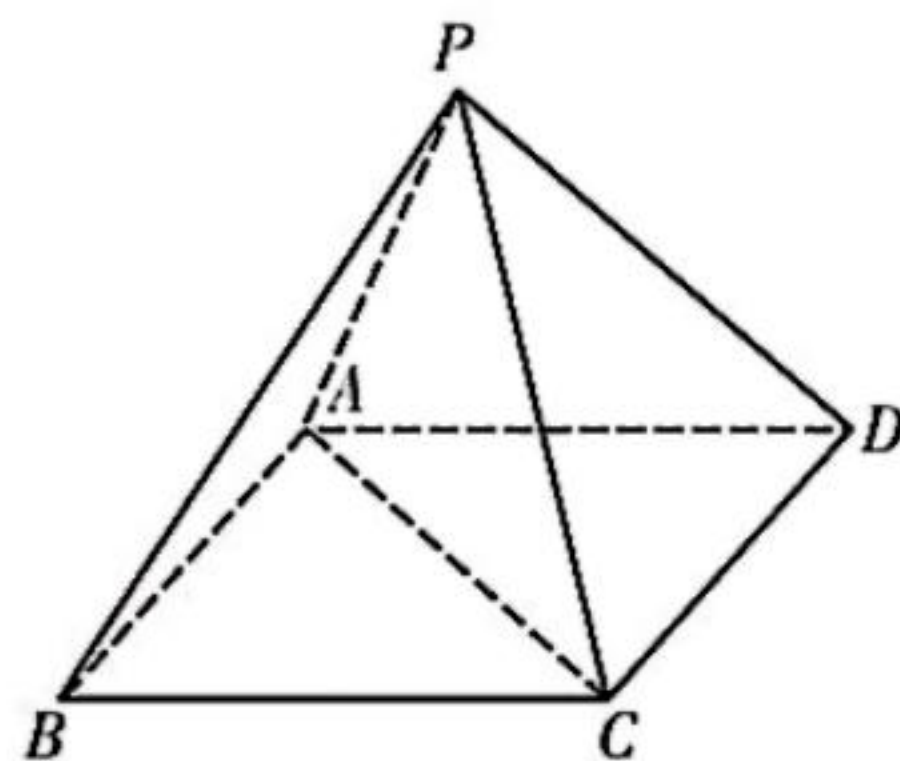
(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的最小值.

★19. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形, 平面 $PAC \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=PC=2\sqrt{2}$.

- (1) 求证: $PB=PD$;
- (2) 点 M, N 分别在棱 PA, PC 上, $PM=AM, PN=CN$, 求直线 PB 与平面 DMN 所成角的正弦值.



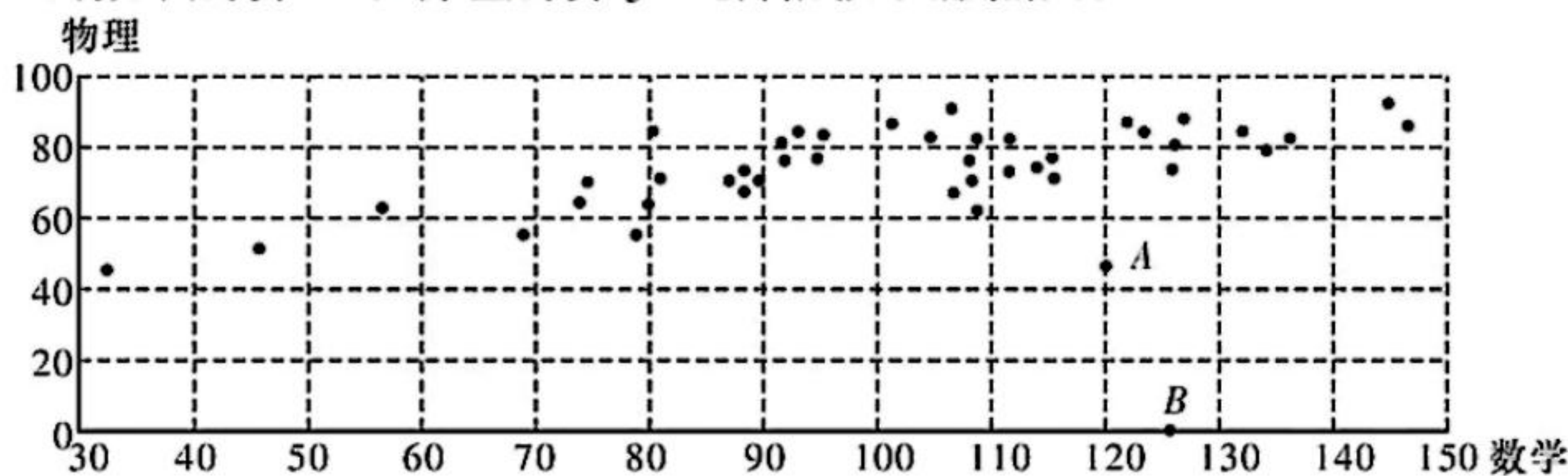
20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{2}$, 且过点 $(\sqrt{2}, 1)$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 若直线 l 与 C 有且只有一个公共点, l 与圆 $x^2 + y^2 = 6$ 交于 A, B 两点, 直线 OA, OB 的斜率分别记为 k_1, k_2 . 试判断 $k_1 \cdot k_2$ 是否为定值, 若是, 求出该定值; 否则, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

某地区在一次考试后,从全体考生中随机抽取 44 名,获取他们本次考试的数学成绩(x)和物理成绩(y),绘制成如图触点图:



根据散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系,但图中有两个异常点 A, B . 经调查得知, A 考生由于感冒导致物理考试发挥失常, B 考生因故未能参加物理考试. 为了使分析结果更科学准确,剔除这两组数据后,对剩下的数据作处理,得到一些统计的值: $\sum_{i=1}^{42} x_i = 4641$, $\sum_{i=1}^{42} y_i = 3108$, $\sum_{i=1}^{42} x_i y_i = 350350$, $\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})^2 = 13814.5$, $\sum_{i=1}^{42} (y_i - \bar{y})^2 = 5250$, 其中 x_i, y_i 分别表示这 42 名同学的数学成绩、物理成绩, $i = 1, 2, \dots, 42$, y 与 x 的相关系数 $r = 0.82$.

- (1) 若不剔除 A, B 两名考生的数据,用 44 组数据作回归分析,设此时 y 与 x 的相关系数为 r_0 . 试判断 r_0 与 r 的大小关系,并说明理由;
- (2) 求 y 关于 x 的线性回归方程(系数精确到 0.01),并估计如果 B 考生加了这次物理考试(已知 B 考生的数学成绩为 125 分),物理成绩是多少?(精确到个位);
- (3) 从概率统计规律看,本次考试该地区的物理成绩 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 以剔除后的物理成绩作为样本,用样本平均数 $\bar{y}$ 作为 μ 的估计值,用样本方差 s^2 作为 σ^2 的估计值. 试求该地区 5000 名考生中,物理成绩位于区间 $(62.8, 85.2)$ 的人数 Z 的数学期望.

附: ① 回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

② 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

③ $\sqrt{125} \approx 11.2$.

★22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x + a$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 零点的个数;
- (2) 若函数 $f(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 证明: $2\ln x_1 + \ln x_2 < 0$.

数学参考答案

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	A	D	D	C	B	C

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	AD	AD	ABD	ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 5 【解析】二项式 $(1-x)^4 = C_4^0 - C_4^1 x + C_4^2 x^2 - C_4^3 x^3 + C_4^4 x^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$,

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)(1-x)^4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)$$

$\therefore$ 展开式中含 x^3 项的系数为 $1 \times 6 + (-1) \times 1 = 5$.

14. $\frac{3}{5}$

15. $(10000\sqrt{5} + 25000)\text{m}^2$ 【解析】在 $\triangle OAB$ 中, $\because \angle AOB = \theta, OB = 100, OA = 200$,

$$\therefore AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos \angle AOB, \text{ 即 } AB = 100 \sqrt{5 - 4 \cos \theta},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ONCB} = S_{\triangle ONB} + S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot AB^2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ONCB} = 100^2 \left(\sin \theta - 2 \cos \theta + \frac{5}{2} \right),$$

$$\text{令 } \tan \varphi = 2, \text{ 则 } S_{\text{四边形}ONCB} = 100^2 \left[\sqrt{5} \sin(\theta - \varphi) + \frac{5}{2} \right],$$

$\therefore$ “直接监测覆盖区域”面积的最大值为 $(10000\sqrt{5} + 25000)\text{m}^2$.

16. 4 【解析】设 $M\left(\frac{b^2}{2}, b\right)$, 则直线 OM 的方程为: $y = \frac{2}{b}x$, 即 $x = \frac{b}{2}y$, 代入 $y^2 = 2px (p > 0 \text{ 且 } p \neq 1)$, 可得 $y =$

$$pb, x = \frac{pb^2}{2}, \text{ 即 } N\left(\frac{pb^2}{2}, bp\right),$$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由题 $\frac{S_5 - S_2}{a_1} = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{a_1} = \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2}$, 解得 $q = 2 (q > 1)$, 3 分

又 $S_3 + 2 = a_4$, 即 $7a_1 + 2 = 8a_1$, $\therefore a_1 = 2$, $\therefore a_n = 2^n$ 5 分

(2) 由(1)知 $S_n = 2^{n+1} - 2$,

$$\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2^{n+1} - 2} > \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\text{又 } \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2^{n+1} - 2} = \frac{1}{2^n + 2^n - 2} \leq \frac{1}{2^n}, \therefore \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{S_n} \leq \frac{1}{2^n}, \text{ 7 分}$$

$$\therefore \text{当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{4} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{l+1}} \leq T_l \leq 1 - \frac{1}{2^l} \text{ 成立.}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } T_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}, T_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

综上所述, $\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq T_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$ 10 分

18.【解析】(1) 因为 $\sqrt{3}b\sin A = a(2 + \cos B)$,

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin A = \sin A(2 + \cos B)$.

显然 $\sin A > 0$, 所以 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = 2$ 3 分

所以 $2\sin(B - \frac{\pi}{6}) = 2$, $\because B \in (0, \pi)$,

所以 $B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore B = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

(2) 依题意 $\frac{\sqrt{3}ac}{4} = \sqrt{3}$, $\therefore ac = 4$ 8 分

所以 $a + c \geq 2\sqrt{ac} = 4$, 当且仅当 $a = c = 2$ 时取等号.

又由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 + ac \geq 3ac = 12$, $\therefore b \geq 2\sqrt{3}$.

当且仅当 $a = c = 2$ 时取等号.

所以 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为 $4 + 2\sqrt{3}$ 12 分

19.【解析】(1) 证明: 记 $AC \cap BD = O$, 连接 PO ,

$\because$ 底面 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore OA = OC = OB = OD = 2$.

$\because PA = PC$, $\therefore PO \perp AC$ 2 分

$\because$ 平面 $PAC \cap$ 底面 $ABCD = AC$, $PO \subset$ 平面 PAC , $\therefore PO \perp$ 底面 $ABCD$.

$\because BD \subset$ 底面 $ABCD$, $\therefore PO \perp BD$, $\therefore PB = PD$ 5 分

(2) 以 O 为坐标原点, 射线 OB, OC, OP 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系如图所示, 由(1)可知 $OP = 2$.

可得 $P(0, 0, 2), A(0, -2, 0), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), D(-2, 0, 0)$,

$M(0, -1, 1), N(0, 1, 1), \overrightarrow{DM} = (2, -1, 1), \overrightarrow{MN} = (0, 2, 0)$.

设平面 DMN 的法向量 $n = (x, y, z)$,

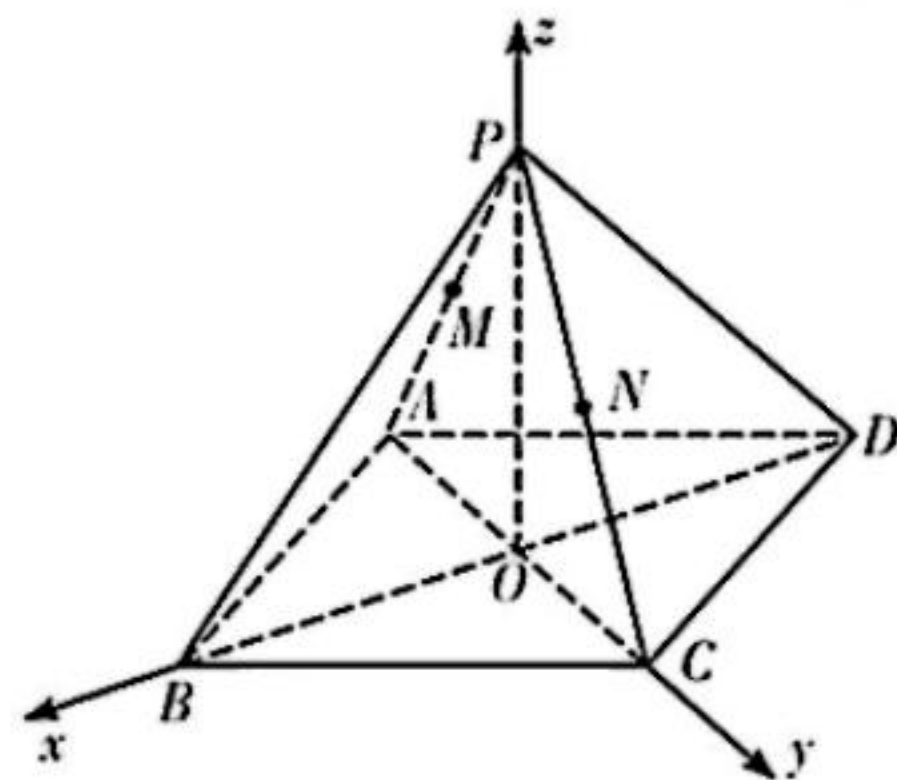
$\because \overrightarrow{DM} \cdot n = 0, \overrightarrow{MN} \cdot n = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 可得 $n = (1, 0, -2), \overrightarrow{PB} = (2, 0, -2)$ 9 分

$$\cos \langle \overrightarrow{PB}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot n}{|\overrightarrow{PB}| \times |n|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$\therefore$ 直线 PB 与平面 DMN 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 12 分



20.【解析】(1)由题意,得
$$\begin{cases} 2c=2\sqrt{2}, \\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, \\ c^2=a^2-b^2, \end{cases}$$
解得 $a=2, b=\sqrt{2}$.

∴椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 5分

(2) $k_1 k_2$ 为定值 $-\frac{1}{2}$.

理由如下:

①当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=\pm 2$;

当 $x=2$ 时, $A(2, \sqrt{2}), B(2, -\sqrt{2})$,则 $k_1 k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$;

当 $x=-2$ 时, $A(-2, \sqrt{2}), B(-2, -\sqrt{2})$, $k_1 k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$; 6分

②当直线 l 的斜率存在时,设其方程为 $y=kx+m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立
$$\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$$
得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$.

由题意得: $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-4)=0$,得 $m^2=4k^2+2$.

联立
$$\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+y^2=6, \end{cases}$$
得 $(1+k^2)x^2+2kmx+m^2-6=0$.

则 $x_1+x_2=-\frac{2km}{1+k^2}, x_1x_2=\frac{m^2-6}{1+k^2}$ 8分

$$\begin{aligned} \therefore k_1 k_2 &= \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1 x_2} = \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1+x_2) + m^2}{x_1 x_2} \\ &= \frac{k^2 \cdot \frac{m^2-6}{1+k^2} + km \cdot \left(-\frac{2km}{1+k^2}\right) + m^2}{\frac{m^2-6}{1+k^2}} = \frac{\frac{k^2(m^2-6) - 2k^2m^2 + m^2(1+k^2)}{1+k^2}}{\frac{m^2-6}{1+k^2}} = \frac{k^2m^2 - 6k^2 - 2k^2m^2 + m^2 + k^2m^2}{m^2-6} = \frac{m^2 - 6k^2}{m^2-6} = \frac{4k^2+2-6k^2}{4k^2+2-6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

综上, $k_1 \cdot k_2$ 为定值 $-\frac{1}{2}$ 12分

21.【解析】(1) $r_0 < r$.

理由如下:由图可知, y 与 x 成正相关关系,

①异常点 A, B 会降低变量之间的线性相关程度.

②44个数据点与其回归直线的总偏差更大,回归效果更差,所以相关系数更小.

③42个数据点与其回归直线的总偏差更小,回归效果更好,所以相关系数更大.

④42个数据点更贴近其回归直线 l .

⑤44个数据点与其回归直线更离散. 2分

(2)由题中数据可得: $\bar{x} = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} x_i = 110.5, \bar{y} = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} y_i = 74$,

所以 $\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{42} x_i y_i - 42\bar{x}\bar{y} = 350350 - 42 \times 110.5 \times 74 = 6916$.

又因为 $\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})^2 = 13814.5$,

所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{42} (x_i - \bar{x})^2} \approx 0.501$ 4分

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 74 - 0.501 \times 110.5 \approx 18.64.$$

所以 $\hat{y} = 0.50x + 18.64$ 6 分

将 $x = 125$ 代入, 得 $y = 0.50 \times 125 + 18.64 = 62.5 + 18.64 \approx 81$,

所以估计 B 同学的物理成绩为 81 分. 7 分

$$(3) \bar{y} = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} y_i = 74, s^2 = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{42} \times 5250 = 125,$$

所以 $\xi \sim N(74, 125)$,

又因为 $\sqrt{125} \approx 11.2$,

所以 $P(62.8 < \xi < 85.2) = P(74 - 11.2 < \xi < 74 + 11.2) = 0.6826$, 9 分

因为 $Z \sim B(5000, 0.6826)$, 11 分

所以 $E(Z) = 5000 \times 0.6826 = 3413$,

即该地区本次考试物理成绩位于区间 $(62.8, 85.2)$ 的人数 Z 的数学期望为 3413. 12 分

22. 【解析】(1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} (x > 0)$, 2 分

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = a - 1$,

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $a - 1 < 0$ 即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 没有零点,

当 $a - 1 = 0$ 即 $a = 1$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点,

当 $a - 1 > 0$ 即 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点. 5 分

(2) 证明: 由 (1) 可知 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可知 $\ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2$, 即 $\ln \frac{x_2}{x_1} = x_2 - x_1$,

设 $\frac{x_2}{x_1} = t (t > 1)$, 则 $\ln t = x_1(t - 1)$, 故 $x_1 = \frac{\ln t}{t - 1}$,

要证: $2\ln x_1 + \ln x_2 < 0$ 只需证: $x_1^2 x_2 < 1$

即证: $x_1^3 t < 1$, 即 $\frac{t(\ln t)^3}{(t - 1)^3} < 1$, 即证 $t(\ln t)^3 - (t - 1)^3 < 0$, 7 分

令 $g(t) = t(\ln t)^3 - (t - 1)^3$, 则 $g'(t) = (\ln t)^3 + 3(\ln t)^2 - 3(t - 1)^2$,

$$g''(t) = \frac{3(\ln t)^2}{t} + \frac{6\ln t}{t} - 6(t - 1) = \frac{3[(\ln t)^2 + 2\ln t - 2t^2 + 2t]}{t},$$

令 $p(t) = (\ln t)^2 + 2\ln t - 2t^2 + 2t (t > 1)$, 则 $p'(t) = \frac{2\ln t}{t} + \frac{2}{t} - 4t + 2 = \frac{2(\ln t + 1 - 2t^2 + t)}{t}$,

令 $q(t) = \ln t + 1 - 2t^2 + t (t > 1)$, 则 $q'(t) = \frac{1}{t} - 4t + 1$, 9 分

$\therefore q'(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $q'(t) < q'(1) = -2 < 0$,

$\therefore q(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $q(t) < q(1) = 0$,

$\therefore p'(t) < 0$, $\therefore p(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $p(t) < p(1) = 0$,

$\therefore g''(t) < 0$, 故 $g'(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $g'(t) < g'(1) = 0$,

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g(t) < g(1) = 0$,

即 $t(\ln t)^3 - (t - 1)^3 < 0$, $\therefore \frac{t(\ln t)^3}{(t - 1)^3} < 1$,

$\therefore 2\ln x_1 + \ln x_2 < 0$ 12 分