

绝密★启用前

2021 届天府名校 4 月高三诊断性考试

理数

本试卷共 4 页,23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

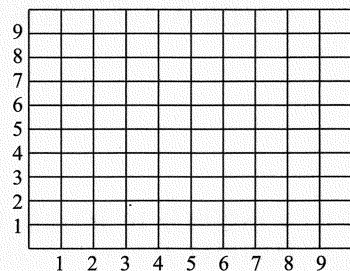
注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | 2^x < 4\}$, 集合 $N = \left\{x | \frac{x}{x-1} \geq 2\right\}$, 则 $N \cap M =$
A. $[1, 2)$ B. $[1, 2]$ C. $(1, 2)$ D. $(1, 2]$
2. 已知复数 z 满足: $\frac{2i}{z-1} = 1-i$, 则 $|z| =$
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. 已知角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后, 得到角 β 的终边, 角 β 的终边过点 $P(8, -m)$, 且 $\cos \beta = \frac{24}{5m}$, 则 $\tan \alpha$ 的值为
A. $\pm \frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$
4. 宋代学者聂崇义编撰的《三礼图集注》中描述的周王城, “匠人营国, 方九里, 旁三门, 国中九经九纬……”; 意思是周王城为正方形, 边长为九里, 每边都有左中右三个门; 城内纵横各有九条路……; 则依据此种描述, 画出周王城的平面图, 则图中共有 () 个矩形
A. 3 025 B. 2 025 C. 1 225 D. 2 525
5. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , $M(5, y_0)$ 为抛物线 C 上一点, 以 M 为圆心的圆 M 与准线 l 相切, 且过点 $E(9, 0)$, 则抛物线的方程为
A. $y^2 = 4x$ B. $y^2 = 2x$ C. $y^2 = 36x$ D. $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 36x$
6. 已知 a, b 为不同直线, α, β 为不同平面, 则下列结论不正确的是
A. 若 $a \perp \alpha, b // \alpha$, 则 $b \perp a$ B. 若 $a \subset \alpha, \alpha // \beta$, 则直线 $a //$ 平面 β
C. 若 $a // \alpha, b \perp \beta, a // b$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \cap \beta = b, a \subset \alpha, a \perp b$, 则 $\alpha \perp \beta$



7. 设 $a = \log_7 4, b = \log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{3}, c = 2^{\frac{2}{3}}$, 则 a, b, c 的大小关系是
A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
8. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x, \\ x + y \leq 1, \\ y \geq a, \end{cases}$ 且 $z = x + 2y$ 的最小值是 -2 , 则 a 的值为
A. $-\frac{4}{5}$ B. -2 C. $-\frac{2}{3}$ D. -1
9. 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ 的图象在 $[0, m]$ 上恰有两个极大值点, 则 $\sin m$ 的取值范围为
A. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D. $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D , 且 $AD = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为
A. 3 B. $4\sqrt{3}$ C. 4 D. $6\sqrt{3}$
11. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的棱长均为 1, 现将三棱锥 $D-ABC$ 绕着 DA 旋转, 则 $D-ABC$ 所经过的区域构成的几何体的体积为
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π
12. 定义函数 $F(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq g(x) \\ g(x) & f(x) > g(x) \end{cases}$, 若函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1, g(x) = x^2 - ax + b$, 且对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $F(x) = F(4-x)$ 成立, 函数 $y = F(x)$ 的图象与 $y = m$ 自左向右有四个交点 A, B, C, D , 则 $|BC| \cdot m$ 的范围为
A. $\left(0, \frac{8}{27}\right]$ B. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ C. $(0, 1)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22~23 题为选考题, 考生根据要求作答。

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分。

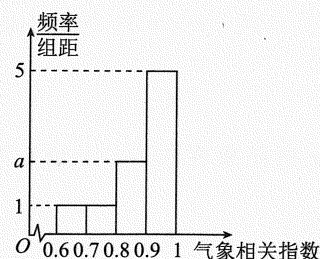
13. 若 $(2-mx)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 若 $a_3 = -40$, 则 $m =$ _____.
14. 在边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, E, F 是线段 AC 的三等分点, 则 $\vec{AD} \cdot (\vec{BE} + \vec{BF}) =$ _____.
15. 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 D 为 AC 的中点, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起到 $\triangle A'BD$, 使得 $\angle A'DC = \frac{2\pi}{3}$, 若该三棱锥的所有顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为 _____.
16. 已知点 F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > 0, b_2 > 0)$ 的公共焦点, e_1, e_2 分别是 C_1 和 C_2 的离心率, 点 M 是 C_1 和 C_2 在第一象限的公共点, 且 $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$, 若 $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 则 $e_2 =$ _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)
在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $2a_3, a_5, 3a_4$ 是等差数列 $\{b_n\}$ 的前三项.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n-1}}{a_{2n}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

某地盛产橙子,但橙子的品质与当地的气象相关指数 λ 有关,气象相关指数 λ 越高,橙子品质越高,售价同时也会越高.某合作社统计了近 10 年的当地的气象相关指数 λ ,得到了如下频率分布直方图.

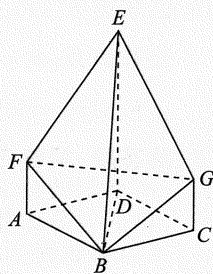


- (1) 求 a 的值;
- (2) 从近 10 年中任意抽取 3 年研究气象指数 λ 对橙子品质的影响,求这 3 年的气象相关指数 λ 在 $[0.9, 1]$ 之间的个数 X 的数学期望;
- (3) 根据往年数据,该合作社的利润 y (单位:千元,利润=收入-投入)与每亩地的投入 $x \in [4, 8]$ (单位:千元)和气象相关指数 λ 的关系如下: $y = 100\lambda - \frac{200}{x+2}\lambda - 4x - 40, x \in [4, 8]$,气象相关指数 λ 取何值时,能使对于任意的 $x \in [4, 8]$ 时该合作社都不亏损.

19. (本小题满分 12 分)

如图所示,几何体 $ABCDEFG$ 中,四边形 $ABCD$ 为菱形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FA \parallel GC \parallel ED$, $FA = GC = \frac{1}{3}ED$, $FG = 2$, $BE = 4$,平面 BFG 与平面 $ABCD$ 的交线为 l .

- (1) 证明:直线 $l \perp$ 平面 BDE ;
- (2) 求直线 BG 与平面 BDE 所成角的正弦值的范围.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F_1 ,过点 F_1 作 x 轴的垂线与椭圆在第二象限的交点为 M .椭圆的左、右顶点分别为 A, B ,已知 $\triangle MAB$ 的面积为 3, $\overrightarrow{AF_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 直线 MB 与 y 轴交于点 N ,过点 N 作直线与椭圆交于 P, Q 两点,若 $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = 6 \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NQ}$.求直线 PQ 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + a (a \neq 0)$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点的个数;
- (2) 当 $a > 0$ 时,若 $f(x) \leq b + 2a$ 恒成立,证明: $\frac{b}{a} \geq -2$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + \frac{1}{m} + \sqrt{2}, \\ y = m - \frac{1}{m} \end{cases} (m \text{ 为参数}).$

- (1) 求曲线 C 的普通方程;
- (2) 过点 $A(3\sqrt{2}, 0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 C 的交点分别为点 M, N ,求 $\frac{1}{|AM|} + \frac{1}{|AN|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-2| + |x-4|$.

- (1) 求不等式 $f(x) \leq 2x+2$ 的解集;
- (2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 m ,正数 a, b 满足 $a+b=m$,求 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值.