2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 $A=\{x|1\le x\le 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{x|2<x\le 3\}$　　B. $\{x|2\le x\le 3\}$

C. $\{x|1\le x<4\}$　　D. $\{x|1<x<4\}$

2. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$（　　）

A. 1　　B. -1

C. i　　D. $-\mathrm{i}$

3.6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去 1 个场馆，甲场馆安排 1 名，乙场馆安排 2 名，丙场馆安排 3 名，则不同的安排方法共有（　　）

A. 120 种　　B. 90 种

C. 60 种　　D. 30 种

4.日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面.在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为（　　）

A. $20°$　　　　B. $40°$

C. $50°$　　　　D. $90°$

5.某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有96%的学生喜欢足球或游泳，60%的学生喜欢足球，82%的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是（　　）

A. 62%　　　　B. 56%

C. 46%　　　　D. 42%

6.基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$随时间 t(单位:天)的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$.有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$.据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加1倍需要的时间约为($\ln2\approx0.69$)（　　）

A. 1.2天　　　　B. 1.8天

C. 2.5天　　　　D. 3.5天

7.已知 P 是边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范用是（　　）

A. $(-2,6)$　　　　B. $(-6,2)$

C. $(-2,4)$　　　　D. $(-4,6)$

8.若定义在 R 的奇函数 $f(x)$在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geq0$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　　　B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　　　D. $[-1,0]\cup[1,3]$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分.

9.已知曲线 $C:mx^2+ny^2=1$.（　　）

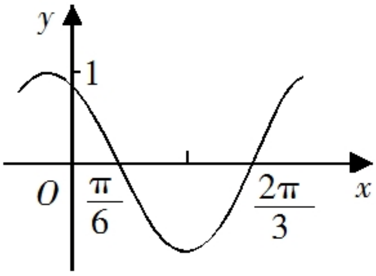
A. 若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B. 若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$

C. 若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

10.下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图像，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$（　　）



A. $\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　　B. $\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$　　　C. $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　　D. $\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

11.已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则（　　）

A. $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$　　　B. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geq -2$　　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$

12.信息熵是信息论中的一个重要概念.设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$.（　　）

A. 若 $n=1$，则 $H(X)=0$

B. 若 $n=2$，则 $H(X)$随着 p_1 的增大而增大

C. 若 $p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $H(X)$随着 n 的增大而增大

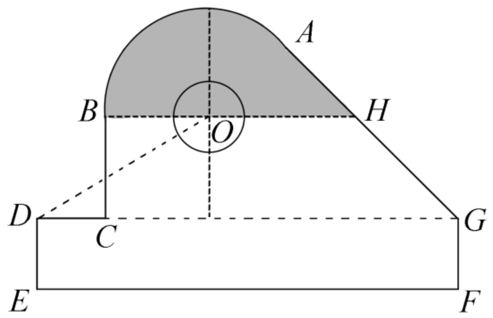
D. 若 $n=2m$，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,m$，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\cdots,m)$，则 $H(X)\leq H(Y)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

14.将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前 n 项和为________.

15.某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示．O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心，A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点，B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点，四边形 $DEFG$ 为矩形，$BC\perp DG$，垂足为 C，$\tan\angle ODC=\frac{3}{5}$，$BH\,/\!/\,DG$，$EF=12$ cm，$DE=2$ cm，A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm，圆孔半径为 1 cm，则图中阴影部分的面积为________cm^2.



16.已知直四棱柱 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD$=60°．以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.在① $ac=\sqrt{3}$，② $c\sin A=3$，③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题 是否存在 $\triangle ABC$，它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\frac{\pi}{6}$，________?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20, a_3=8$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m](m\in\mathbf{N}^*)$ 中的项的个数，求数列 $\{b_m\}$ 的前100项和 S_{100}.

19.为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了100天空气中的 PM2.5 和 SO_2 浓度（单位：μg/m^3），得下表：

SO_2 PM2.5	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

（1）估计事件“该市一天空气中 $PM2.5$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150”的概率；

（2）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

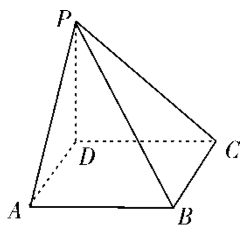
SO_2 $PM2.5$	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

（3）根据（2）中的列联表，判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 $PM2.5$ 浓度与 SO_2 浓度有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20.如图，四棱锥 *P-ABCD* 的底面为正方形，*PD*⊥底面 *ABCD*．设平面 *PAD* 与平面 *PBC* 的交线为 *l*.



（1）证明：*l*⊥平面 *PDC*；

（2）已知 *PD*=*AD*=1，*Q* 为 *l* 上的点，求 *PB* 与平面 *QCD* 所成角的正弦值的最大值．

21.已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$．

（1）当 $a=e$ 时，求曲线 *y*=*f*（*x*）在点（1，*f*（1））处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 *f*（*x*）≥1，求 *a* 的取值范围．

22.已知椭圆 *C*：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 *A*（2，1）．

（1）求 *C* 的方程：

（2）点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足．证明：存在定点 Q，使得$|DQ|$为定值．