绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟．第Ⅰ卷1至3页，第Ⅱ卷4至6页．

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．

2．本卷共9小题，每小题5分，共45分．

参考公式：

如果事件A与事件B互斥，那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

如果事件A与事件B相互独立，那么$P(AB)=P(A)P(B)$．

球的表面积公式$S=4\pi R^2$，其中R表示球的半径．

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.设全集$U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,0,1,2\}$， $B=\{-3,0,2,3\}$，则$A\bigcap\left(\complement_U B\right)=$（　　）

A. $\{-3,3\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-3,-2,-1,1,3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】

首先进行补集运算，然后进行交集运算即可求得集合的运算结果.

【详解】由题意结合补集的定义可知：$\complement_U B=\left\{-2,-1,1\right\}$，则$A\bigcap\left(\complement_U B\right)=\left\{-1,1\right\}$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查补集运算，交集运算，属于基础题.

2.设 $a \in \mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>a$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】

首先求解二次不等式，然后结合不等式的解集即可确定充分性和必要性是否成立即可.

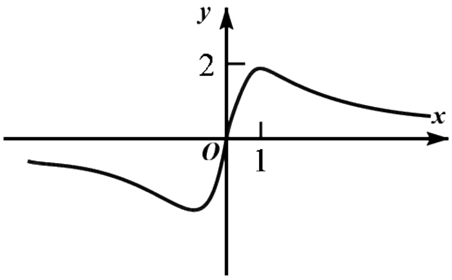
【详解】求解二次不等式 $a^2>a$ 可得：$a>1$ 或 $a<0$，

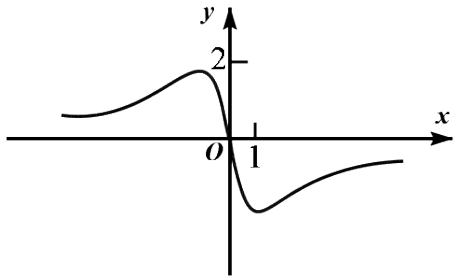
据此可知：$a>1$ 是 $a^2>a$ 的充分不必要条件.

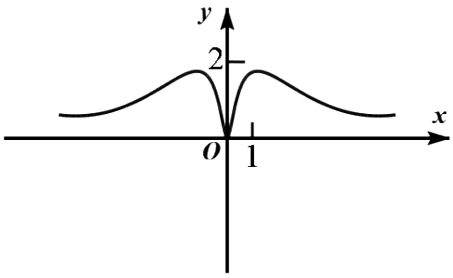
故选：A.

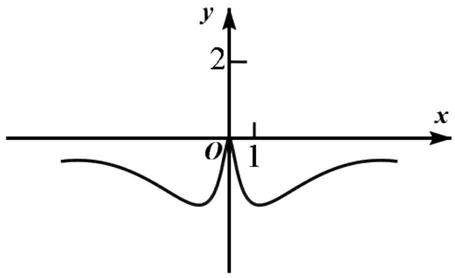
【点睛】本题主要考查二次不等式的解法，充分性和必要性的判定，属于基础题.

3.函数 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为（　　）

A.


B.


C.


D.


【答案】A

【解析】

【分析】

由题意首先确定函数的奇偶性，然后考查函数在特殊点的函数值排除错误选项即可确定函数的图象.

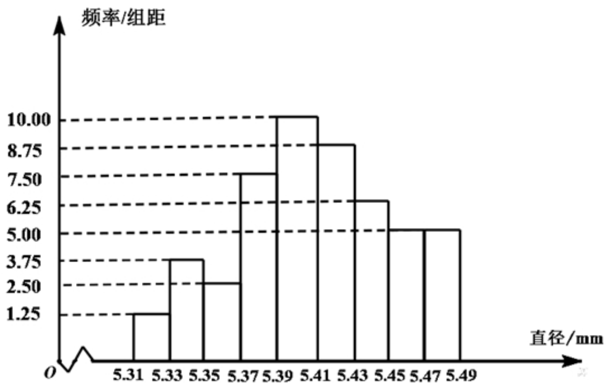
【详解】由函数的解析式可得：$f(-x)=\dfrac{-4x}{x^2+1}=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于坐标原点对称，选项 CD 错误；

当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{4}{1+1}=2>0$，选项 B 错误.

故选：A.

【点睛】函数图象的识辨可从以下方面入手：(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置．(2)从函数的单调性，判断图象的变化趋势．(3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性．(4)从函数的特征点，排除不合要求的图象．利用上述方法排除、筛选选项．

4.从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组：$[5.31,5.33),[5.33,5.35),\cdots,[5.45,5.47],[5.47,5.49]$，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取的零件中，直径落在区间$[5.43,5.47)$内的个数为（　　）



A. 10　　　　B. 18　　　　C. 20　　　　D. 36

【答案】B

【解析】

【分析】

根据直方图确定直径落在区间$\left[5.43,5.47\right)$之间的零件频率，然后结合样本总数计算其个数即可.

【详解】根据直方图，直径落在区间$\left[5.43,5.47\right)$之间的零件频率为：$\left(6.25+5.00\right)\times 0.02=0.225$，

则区间$\left[5.43,5.47\right)$内零件的个数为：$80\times 0.225=18$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查频率分布直方图的计算与实际应用，属于中等题.

5.若棱长为$2\sqrt{3}$的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A. 12π　　　　B. 24π　　　　C. 36π　　　　D. 144π

【答案】C

【解析】

【分析】

求出正方体的体对角线的一半，即为球的半径，利用球的表面积公式，即可得解.

【详解】这个球是正方体的外接球，其半径等于正方体的体对角线的一半，

即 $R=\dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}}{2}=3$，

所以，这个球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times3^2=36\pi$.

故选：C.

【点睛】本题考查正方体的外接球的表面积的求法，求出外接球的半径是本题的解题关键，属于基础题.求多面体的外接球的面积和体积问题，常用方法有：（1）三条棱两两互相垂直时，可恢复为长方体，利用长方体的体对角线为外接球的直径，求出球的半径；（2）直棱柱的外接球可利用棱柱的上下底面平行，借助球的对称性，球心为上下底面外接圆的圆心连线的中点，再根据勾股定理求球的半径；（3）如果设计几何体有两个面相交，可过两个面的外心分别作两个面的垂线，垂线的交点为几何体的球心.

6.设 $a=3^{0.7}$， $b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.8}$， $c=\log_{0.7}0.8$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】D

【解析】

【分析】

利用指数函数与对数函数的性质，即可得出 a,b,c 的大小关系.

【详解】因为 $a=3^{0.7}>1$，

$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.8}=3^{0.8}>3^{0.7}=a$，

$c=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，

所以 $c<1<a<b$.

故选：D.

【点睛】本题考查的是有关指数幂和对数值的比较大小问题，在解题的过程中，注意应用指数函数和对数函数的单调性，确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系，常用方法：

（1）利用指数函数的单调性：$y=a^x$，当 $a>1$时，函数递增；当 $0<a<1$时，函数递减；

（2）利用对数函数的单调性：$y=\log_a x$，当 $a>1$时，函数递增；当 $0<a<1$时，函数递减；

（3）借助于中间值，例如：0 或 1 等.

7.设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点和点 $(0,b)$ 的直线为 l．若 C 的一条渐近线与 l 平行，另一条渐近线与 l 垂直，则双曲线 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　D. $x^2-y^2=1$

【答案】D

【解析】

【分析】

由抛物线的焦点 $(1,0)$ 可求得直线 l 的方程为 $x+\frac{y}{b}=1$，即得直线的斜率为 $-b$，再根据双曲线的渐近线的方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，可得 $-b=-\frac{b}{a}$，$-b\times\frac{b}{a}=-1$ 即可求出 a,b，得到双曲线的方程.

【详解】由题可知，抛物线的焦点为 $(1,0)$，所以直线 l 的方程为 $x+\frac{y}{b}=1$，即直线的斜率为 $-b$，

又双曲线的渐近线的方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，所以 $-b=-\frac{b}{a}$，$-b\times\frac{b}{a}=-1$，因为 $a>0,b>0$，解得 $a=1,b=1$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查抛物线的简单几何性质，双曲线的几何性质，以及直线与直线的位置关系的应用，属于基础题.

8.已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$．给出下列结论：

①$f(x)$ 的最小正周期为 2π；

②$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

③把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象.

其中所有正确结论的序号是

A. ①　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

【答案】B

【解析】

【分析】

对所给选项结合正弦型函数的性质逐一判断即可.

【详解】因为 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$，所以周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，故①正确；

$f(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}\neq 1$，故②不正确；

将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，

故③正确.

故选：B.

【点睛】本题主要考查正弦型函数的性质及图象的平移，考查学生的数学运算能力，逻辑分析那能力，是一道容易题.

9.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|$ $(k\in\mathbf{R})$ 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,2\sqrt{2})$

C. $(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　　D. $(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】

由 $g(0)=0$，结合已知，将问题转化为 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ 有 3 个不同交点，分 $k=0,k<0,k>0$ 三种情况，数形结合讨论即可得到答案.

【详解】注意到 $g(0)=0$，所以要使 $g(x)$ 恰有 4 个零点，只需方程 $|kx-2|=\frac{f(x)}{|x|}$ 恰有 3 个实根即可，

令 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$，即 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ 的图象有 3 个不同交点.

因为 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$，

当 $k=0$ 时，此时 $y=2$，如图 1，$y=2$ 与 $h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$ 有 2 个不同交点，不满足题意；

当$\mathrm{k}<0$时，如图 2，此时$y=|kx-2|$与$h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$恒有3个不同交点，满足题意；

当$k>0$时，如图 3，当$y=kx-2$与$y=x^2$相切时，联立方程得$x^2-kx+2=0$，

令$\Delta=0$得$k^2-8=0$，解得$k=2\sqrt{2}$（负值舍去），所以$k>2\sqrt{2}$.

综上，k的取值范围为$(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.

故选：D.

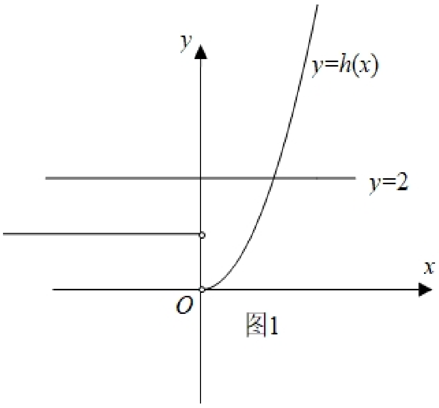


图1

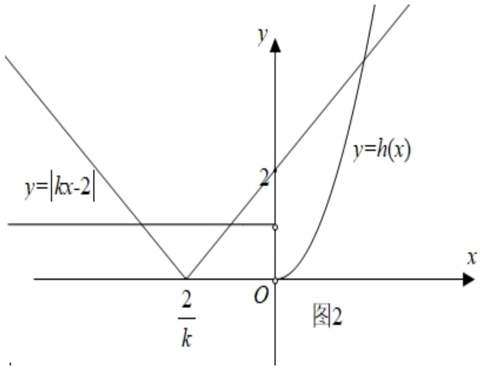


图2

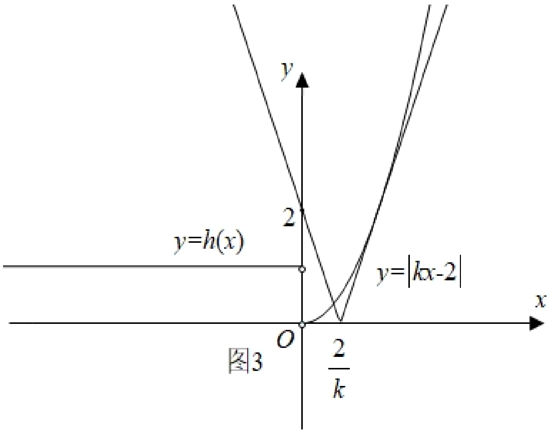


图3

【点睛】本题主要考查函数与方程的应用，考查数形结合思想，转化与化归思想，是一道中档题.

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2．本卷共11小题，共105分.

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．试题中包含两个空的，答对1个的给

3 分，全部答对的给 5 分．

10.i 是虚数单位，复数 $\dfrac{8-i}{2+i}=$_________．

【答案】$3-2i$

【解析】

【分析】

将分子分母同乘以分母的共轭复数，然后利用运算化简可得结果.

【详解】$\dfrac{8-i}{2+i}=\dfrac{(8-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{15-10i}{5}=3-2i$.

故答案为：$3-2i$.

【点睛】本题考查复数的四则运算，属于基础题.

11.在 $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是_________．

【答案】10

【解析】

【分析】

写出二项展开式的通项公式，整理后令 x 的指数为 2，即可求出．

【详解】因为 $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{5-3r}\left(r=0,1,2,3,4,5\right)$，令

$5-3r=2$，解得 $r=1$.

所以 x^2 的系数为 $C_5^1\times 2=10$.

故答案为：10.

【点睛】本题主要考查二项展开式的通项公式的应用，属于基础题.

12.已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A,B 两点．若 $|AB|=6$，则 r 的值为_________．

【答案】5

【解析】

【分析】

根据圆的方程得到圆心坐标和半径，由点到直线的距离公式可求出圆心到直线的距离 d，进而利用弦长公式 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$，即可求得 r.

【详解】因为圆心$(0,0)$到直线$x-\sqrt{3}y+8=0$的距离$d=\dfrac{8}{\sqrt{1+3}}=4$，

由$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$可得$6=2\sqrt{r^2-4^2}$，解得$r=5$.

故答案为：5.

【点睛】本题主要考查圆的弦长问题，涉及圆的标准方程和点到直线的距离公式，属于基础题.

13.已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为$\dfrac{1}{2}$和$\dfrac{1}{3}$. 假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为________；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为________.

【答案】 (1). $\dfrac{1}{6}$ (2). $\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】

根据相互独立事件同时发生的概率关系，即可求出两球都落入盒子的概率；同理可求两球都不落入盒子的概率，进而求出至少一球落入盒子的概率.

【详解】甲、乙两球落入盒子的概率分别为$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$，

且两球是否落入盒子互不影响，

所以甲、乙都落入盒子的概率为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，

甲、乙两球都不落入盒子的概率为$(1-\dfrac{1}{2})\times(1-\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$，

所以甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为$\dfrac{2}{3}$.

故答案为：$\dfrac{1}{6}$；$\dfrac{2}{3}$.

【点睛】本题主要考查独立事件同时发生的概率，以及利用对立事件求概率，属于基础题.

14.已知$a>0,\quad b>0$，且$ab=1$，则$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{8}{a+b}$的最小值为________.

【答案】4

【解析】

【分析】

根据已知条件，将所求的式子化为$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{8}{a+b}$，利用基本不等式即可求解.

【详解】$\because a>0,b>0,\therefore a+b>0$，$ab=1$，$\therefore \dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{8}{a+b}=\dfrac{ab}{2a}+\dfrac{ab}{2b}+\dfrac{8}{a+b}$

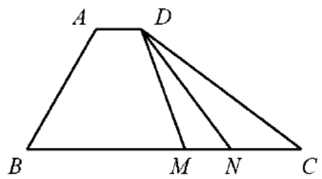
$=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{8}{a+b}\ge 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{8}{a+b}}=4$，当且仅当 $a+b=4$ 时取等号，

结合 $ab=1$，解得 $a=2-\sqrt{3},b=2+\sqrt{3}$，或 $a=2+\sqrt{3},b=2-\sqrt{3}$ 时，等号成立.

故答案为：4

【点睛】本题考查应用基本不等式求最值，“1”的合理变换是解题的关键，属于基础题.

15.如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=3$，$BC=6$，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$，则实数 λ 的值为________，若 M,N 是线段 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{MN}|=1$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为________.



【答案】 (1). $\dfrac{1}{6}$ (2). $\dfrac{13}{2}$

【解析】

【分析】

可得 $\angle BAD=120^{\circ}$，利用平面向量数量积的定义求得 λ 的值，然后以点 B 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设点 $M(x,0)$，则点 $N(x+1,0)$（其中 $0\le x\le 5$），得出 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 关于 x 的函数表达式，利用二次函数的基本性质求得 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值.

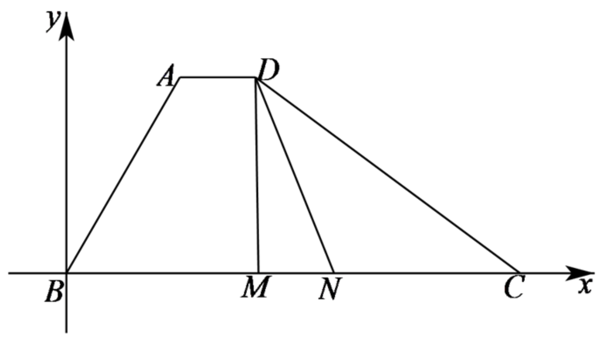
【详解】$\because \overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\therefore AD//BC$，$\therefore \angle BAD=180^{\circ}-\angle B=120^{\circ}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 120^{\circ}$

$=\lambda\times 6\times 3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-9\lambda=-\dfrac{3}{2}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{6}$，

以点 B 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴建立如下图所示的平面直角坐标系 xBy，



$\because BC=6, \therefore C(6,0)$,

$\because |AB|=3, \angle ABC=60^{\circ}$，$\therefore$ A 的坐标为 $A\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\because$ 又 $\because \overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，则 $D\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，设 $M(x,0)$，则 $N(x+1,0)$（其中 $0\le x\le 5$），

$\overrightarrow{DM}=\left(x-\frac{5}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{DN}=\left(x-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=x^2-4x+\frac{21}{2}=(x-2)^2+\frac{13}{2}$，

所以，当 $x=2$ 时，$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 取得最小值 $\frac{13}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{6}$；$\frac{13}{2}$.

【点睛】本题考查平面向量数量积的计算，考查平面向量数量积的定义与坐标运算，考查计算能力，属于中等题.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c．已知 $a=2\sqrt{2},b=5,c=\sqrt{13}$.

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）求 $\sin A$ 的值；

（Ⅲ）求 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【答案】（Ⅰ）$C=\frac{\pi}{4}$；（Ⅱ）$\sin A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$；（Ⅲ）$\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）直接利用余弦定理运算即可；

（Ⅱ）由（Ⅰ）及正弦定理即可得到答案；

（Ⅲ）先计算出$\sin A,\cos A,$进一步求出$\sin 2A,\cos 2A$，再利用两角和的正弦公式计算即可.

【详解】（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，由$a=2\sqrt{2},b=5,c=\sqrt{13}$及余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{8+25-13}{2\times 2\sqrt{2}\times 5}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{4}$；

（Ⅱ）在$\triangle ABC$中，由$C=\frac{\pi}{4}$，$a=2\sqrt{2},c=\sqrt{13}$及正弦定理，可得

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13};$$

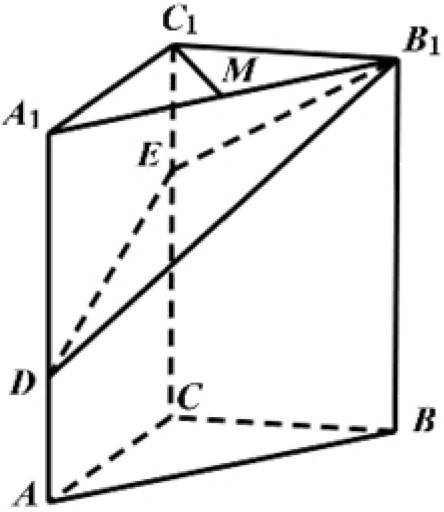
（Ⅲ）由$a<c$知角A为锐角，由$\sin A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，可得$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

进而$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{12}{13},\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{5}{13}$，

所以$\sin(2A+\frac{\pi}{4})=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

【点睛】本题主要考查正、余弦定理解三角形，以及三角恒等变换在解三角形中的应用，考查学生的数学运算能力，是一道容易题.

17.如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面$ABC, AC\perp BC, AC=BC=2$，$CC_1=3$，点D，E分别在棱AA_1和棱CC_1上，且$AD=1$　$CE=2,$　M为棱A_1B_1的中点.



（Ⅰ）求证：$C_1M \perp B_1D$；

（Ⅱ）求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值；

（Ⅲ）求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.

【答案】（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$；（Ⅲ）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

【分析】

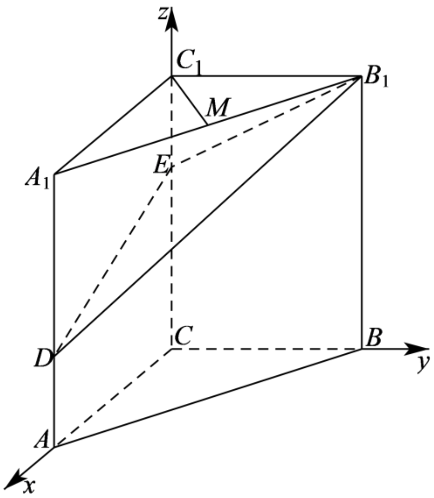
以 C 为原点，分别以 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系.

（Ⅰ）计算出向量 $\overrightarrow{C_1M}$ 和 $\overrightarrow{B_1D}$ 的坐标，得出 $\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=0$，即可证明出 $C_1M \perp B_1D$；

（Ⅱ）可知平面 BB_1E 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA}$，计算出平面 B_1ED 的一个法向量为 $\vec{n}$，利用空间向量法计算出二面角 $B-B_1E-D$ 的余弦值，利用同角三角函数的基本关系可求解结果；

（Ⅲ）利用空间向量法可求得直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.

【详解】依题意，以 C 为原点，分别以 $\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系（如图），



可得$C\left(0,0,0\right)$、$A\left(2,0,0\right)$、$B\left(0,2,0\right)$、$C_1\left(0,0,3\right)$、

$A_1\left(2,0,3\right)$、$B_1\left(0,2,3\right)$、$D\left(2,0,1\right)$、$E\left(0,0,2\right)$、$M\left(1,1,3\right)$.

（Ⅰ）依题意，$\overrightarrow{C_1M}=\left(1,1,0\right)$，$\overrightarrow{B_1D}=\left(2,-2,-2\right)$，

从而$\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=2-2+0=0$，所以$C_1M\perp B_1D$；

（Ⅱ）依题意，$\overrightarrow{CA}=\left(2,0,0\right)$是平面$BB_1E$的一个法向量，

$\overrightarrow{EB_1}=\left(0,2,1\right)$，$\overrightarrow{ED}=\left(2,0,-1\right)$.

设$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$为平面$DB_1E$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2y+z=0\\2x-z=0\end{cases}$，

不妨设$x=1$，可得$\vec{n}=\left(1,-1,2\right)$.

$\cos<\overrightarrow{CA},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

$\therefore\sin<\overrightarrow{CA},\vec{n}>=\sqrt{1-\cos^2<\overrightarrow{CA},\vec{n}>}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

所以，二面角$B-B_1E-D$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$；

（Ⅲ）依题意，$\overrightarrow{AB}=\left(-2,2,0\right)$.

由（Ⅱ）知$\vec{n}=\left(1,-1,2\right)$为平面$DB_1E$的一个法向量，于是

$\cos < \overrightarrow{AB}, \vec{n} > = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{-4}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题考查利用空间向量法证明线线垂直，求二面角和线面角的正弦值，考查推理能力与计算能力，属于中档题.

18.已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-3)$，右焦点为 F，且 $|OA|=|OF|$，其中 O 为原点.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，点 B 在椭圆上（B 异于椭圆的顶点），直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，且 P 为线段 AB 的中点．求直线 AB 的方程.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$；（Ⅱ）$y=\dfrac{1}{2}x-3$，或 $y=x-3$.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据题意，并借助 $a^2=b^2+c^2$，即可求出椭圆的方程；

（Ⅱ）利用直线与圆相切，得到 $CP \perp AB$，设出直线 AB 的方程，并与椭圆方程联立，求出 B 点坐标，进而求出 P 点坐标，再根据 $CP \perp AB$，求出直线 AB 的斜率，从而得解.

【详解】（Ⅰ）$\because$ 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的一个顶点为 $A\left(0,-3\right)$，

$\therefore b=3$，

由 $\left|OA\right|=\left|OF\right|$，得 $c=b=3$，

又由 $a^2=b^2+c^2$，得 $a^2=3^2+3^2=18$，

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

（Ⅱ）$\because$ 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，所以 $CP \perp AB$，

根据题意可知，直线 AB 和直线 CP 的斜率均存在，

设直线 AB 的斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y+3=kx$，即 $y=kx-3$，

$\begin{cases} y=kx-3 \\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，消去 y，可得 $\left(2k^2+1\right)x^2-12kx=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{12k}{2k^2+1}$.

将 $x=\dfrac{12k}{2k^2+1}$ 代入 $y=kx-3$，得 $y=k\cdot\dfrac{12k}{2k^2+1}-3=\dfrac{6k^2-3}{2k^2+1}$，

所以，点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{12k}{2k^2+1},\dfrac{6k^2-3}{2k^2+1}\right)$，

因为 P 为线段 AB 的中点，点 A 的坐标为 $(0,-3)$，

所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{6k}{2k^2+1},\dfrac{-3}{2k^2+1}\right)$，

由 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，得点 C 的坐标为 $(1,0)$，

所以，直线 CP 的斜率为 $k_{CP}=\dfrac{\dfrac{-3}{2k^2+1}-0}{\dfrac{6k}{2k^2+1}-1}=\dfrac{3}{2k^2-6k+1}$，

又因为 $CP\perp AB$，所以 $k\cdot\dfrac{3}{2k^2-6k+1}=-1$，

整理得 $2k^2-3k+1=0$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=1$.

所以，直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-3$ 或 $y=x-3$.

【点睛】本题考查了椭圆标准方程的求解、直线与椭圆的位置关系、直线与圆的位置关系、中点坐标公式以及直线垂直关系的应用，考查学生的运算求解能力，属于中档题.当看到题目中出现直线与圆锥曲线位置关系的问题时，要想到联立直线与圆锥曲线的方程.

19.已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1,a_5=5(a_4-a_3),b_5=4(b_4-b_3)$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

（Ⅲ）对任意的正整数 n，设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{为奇数}, \\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

【答案】（Ⅰ）$a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$；（Ⅱ）证明见解析；（Ⅲ）$\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times4^n}-\dfrac{4}{9}$.

【解析】

【分析】

(Ⅰ)由题意分别求得数列的公差、公比，然后利用等差、等比数列的通项公式得到结果；

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结论首先求得数列$\left\{a_n\right\}$前 n 项和，然后利用作差法证明即可；

(Ⅲ)分类讨论 n 为奇数和偶数时数列的通项公式，然后分别利用指数型裂项求和和错位相减求和计算

$\sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{n} c_{2k}$ 的值，据此进一步计算数列$\left\{c_n\right\}$的前 $2n$ 项和即可.

【详解】(Ⅰ)设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为 d，等比数列$\left\{b_n\right\}$的公比为 q.

由 $a_1=1$，$a_5=5\left(a_4-a_3\right)$，可得 $d=1$.

从而$\left\{a_n\right\}$的通项公式为 $a_n=n$.

由 $b_1=1, b_5=4\left(b_4-b_3\right)$，

又 $q\neq 0$，可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$，

从而$\left\{b_n\right\}$的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$.

(Ⅱ)证明：由(Ⅰ)可得 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

故 $S_nS_{n+2}=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$，$S_{n+1}^2=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$，

从而 $S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=-\frac{1}{2}(n+1)(n+2)<0$，

所以 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$.

(Ⅲ)当 n 为奇数时，$c_n=\frac{\left(3a_n-2\right)b_n}{a_na_{n+2}}=\frac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n}$，

当 n 为偶数时，$c_n=\frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\frac{n-1}{2^n}$，

对任意的正整数 n，有 $\sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2k}}{2k+1}-\frac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\frac{2^{2n}}{2n+1}-1$，

和 $\sum_{k=1}^{n} c_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{4^k}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{5}{4^3}+\cdots+\frac{2n-3}{4^{n-1}}+\frac{2n-1}{4^n}$ ①

由①得 $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{5}{4^4}+\cdots+\frac{2n-3}{4^n}+\frac{2n-1}{4^{n+1}}$ ②

由①②得 $\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{2}{4^n}-\frac{2n-1}{4^{n+1}}=\frac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}-\frac{2n-1}{4^{n+1}}$，

由于 $\frac{\frac{2}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}-\frac{2n-1}{4^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4^n}-\frac{1}{4}-\frac{2n-1}{4^n}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}-\frac{6n+5}{3\times4^{n+1}}$，

从而得：$\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{5}{9}-\frac{6n+5}{9\times4^n}$.

因此，$\sum_{k=1}^{2n}c_k=\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times4^n}-\frac{4}{9}$.

所以，数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $\frac{4^n}{2n+1}-\frac{6n+5}{9\times4^n}-\frac{4}{9}$.

【点睛】本题主要考查数列通项公式的求解，分组求和法，指数型裂项求和，错位相减求和等，属于中等题.

20.已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in R)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（Ⅰ）当 $k=6$ 时，

（i）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ii）求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\frac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）当 $k\geq -3$ 时，求证：对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有

$$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

【答案】（Ⅰ）（i）$y=9x-8$；（ii）$g(x)$ 的极小值为 $g(1)=1$，无极大值；（Ⅱ）证明见解析.

【解析】

【分析】

（Ⅰ）(i)首先求得导函数的解析式，然后结合导数的几何意义求解切线方程即可；

(ii)首先求得 $g'(x)$ 的解析式，然后利用导函数与原函数的关系讨论函数的单调性和函数的极值即可；

（Ⅱ）首先确定导函数的解析式，然后令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$，将原问题转化为与 t 有关的函数，然后构造新函数，利用新函数的性质即可证得题中的结论.

【详解】(Ⅰ) (i) 当 k=6 时，$f\left(x\right)=x^3+6\ln x$，$f'\left(x\right)=3x^2+\dfrac{6}{x}$.可得 $f\left(1\right)=1$，$f'\left(1\right)=9$，

所以曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-1=9\left(x-1\right)$，即 $y=9x-8$.

(ii) 依题意，$g\left(x\right)=x^3-3x^2+6\ln x+\dfrac{3}{x},x\in\left(0,+\infty\right)$.

从而可得 $g'\left(x\right)=3x^2-6x+\dfrac{6}{x}-\dfrac{3}{x^2}$，

整理可得：$g^{'}(x)=\dfrac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$，

令 $g'\left(x\right)=0$，解得 $x=1$.

当 x 变化时，$g'\left(x\right),g\left(x\right)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(0,1\right)$	$x=1$	(1,+¥)
$g'\left(x\right)$	$-$	0	+
$g\left(x\right)$	单调递减	极小值	单调递增

所以，函数 $g(x)$的单调递减区间为(0，1)，单调递增区间为(1，+∞)；

$g(x)$的极小值为 $g(1)=1$，无极大值.

（Ⅱ）证明：由 $f(x)=x^3+k\ln x$，得 $f^{'}(x)=3x^2+\dfrac{k}{x}$.

对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t\quad(t>1)$，则

$$\left(x_1-x_2\right)\left(f^{'}\left(x_1\right)+f^{'}\left(x_2\right)\right)-2\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)$$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left(3x_1^2+\frac{k}{x_1}+3x_2^2+\frac{k}{x_2}\right)-2\left(x_1^3-x_2^3+k\ln\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$=x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)-2k\ln\frac{x_1}{x_2}$$

$$=x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right). \qquad ①$$

令 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x,\quad x\in[1,+\infty)$.

当 $x>1$ 时，$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0$，

由此可得 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增，所以当 $t>1$ 时，$h\left(t\right)>h\left(1\right)$，即 $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$.

因为 $x_2\geq 1$，$t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3>0$，$k\geq -3$，

所以 $x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)\ldots\left(t^3-3t^2+3t-1\right)-3\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)$

$$=t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1. \qquad ②$$

由(Ⅰ)(ii)可知，当 $t>1$ 时，$g\left(t\right)>g\left(1\right)$，即 $t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}>1$，

故 $t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1>0 \qquad ③$

由①②③可得 $\left(x_1-x_2\right)\left(f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)\right)-2\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)>0$.

所以，当 $k\geq -3$ 时，任意的 $x_1,x_2\in\left[1,+\infty\right)$，且 $x_1>x_2$，有

$$\frac{f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)}{2}>\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}.$$

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：

(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系.

(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数.

(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题.

(4)考查数形结合思想的应用.