2020 年普通高等学校招生全国统一考试数学卷

（上海卷）

一、　　填空题（本题共 12 小题，满分 54 分，其中 1-6 题每题 4 分，7-12 题每题 5 分）

1．已知集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{2,3,4\}$，求 $A\bigcap B=$______

【分值】4 分

【答案】$\{2,4\}$

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=$______

【分值】4 分

【答案】$\dfrac{1}{3}$

3．已知复数 z 满足 $z=1-2i$（i 为虚数单位），则 $|z|=$______

【分值】4 分

【答案】$\sqrt{5}$

4．已知行列式 $\begin{vmatrix}1 & a & c\\ 2 & d & b\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$，则行列式 $\begin{vmatrix}a & c\\ d & b\end{vmatrix}=$______

【分值】4 分

【答案】2

5．已知 $f(x)=x^3$，则 $f^{-1}(x)=$______

【分值】4 分

【答案】$x^{\frac{1}{3}}\left(x\in R\right)$

6.已知 a、b、1、2 的中位数为 3，平均数为 4，则 ab=

【分值】4 分

【答案】36

7.已知 $\begin{cases}x+y\geq 2\\ y\geq 0\\ x+2y-3\leq 0\end{cases}$ ，则 $z=y-2x$ 的最大值为

【分值】5 分

【答案】-1

8.已知 $\left\{a_n\right\}$ 是公差不为零的等差数列，且 $a_1+a_{10}=a_9$，则 $\frac{a_1+a_2+\cdots a_9}{a_{10}}=$

【分值】5 分

【答案】$\frac{27}{8}$

9.从 6 人中挑选 4 人去值班，每人值班 1 天，第一天需要 1 人，第二天需要 1 人，第三天需要 2 人，则有种排法。

【分值】5 分

【答案】180

10.椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过右焦点 F 作直线 l 交椭圆于 P、Q 两点，P 在第二象限已知 $Q\left(x_Q,y_Q\right),Q'\left(x'_Q,y'_Q\right)$ 都在椭圆上，且 $y_Q+\mathrm{y}'_Q=0$，$FQ'\perp PQ$，则直线 l 的方程为

【分值】5 分

【答案】$x+y-1=0$

11、设 $a\in R$,若存在定义域 R 的函数 $f\left(x\right)$ 既满足对于任意 $x_0\in R$ ， $f\left(x_0\right)$ 的值为 x_0^2 或 x_0 ”又满足“关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a$ 无实数解”，则 α 的取值范围为

【分值】5 分

【答案】$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【解析】题目转换为是否为实数 a ,使得存在函数 $f\left(x\right)$

满足“对于任意 $x_0\in R$ ， $f\left(x_0\right)$ 的值为 x_0^2 或 x_0 ”，

又满足“关于的方程 $f\left(x\right)=a$ 无实数解”构造函数；

$f\left(x\right)=\begin{cases}x,x\neq a\\x^2,x=a\end{cases}$ ，则方程 $f\left(x\right)=a$

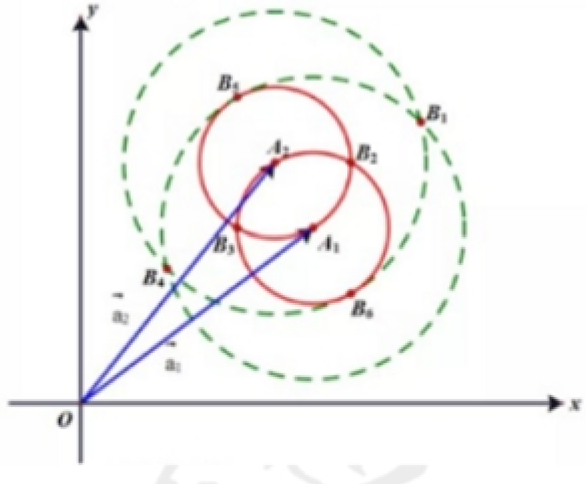
只有 0,1 两个实数解。

12、已知 $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, ……, $\overrightarrow{b_k}$ （$k\in N^*$）是平面内两两互不平等的向量，满足 $|\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}|=1$ ，且 $|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{b_j}|\in\{1,2\}$ (其中 $i=1,2$，$j=1,2,\ldots$，k)，则 K 的最大值为

【分值】5 分

【答案】6

【解析】根据向量减法的运算规律， $|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{b_j}|\in\{1,2\}$ 可转化为以向量 $\overrightarrow{a_1}$ 和 $\overrightarrow{a_2}$ 终点为圆心作半径 $r_1=1$ 和 $r_2=2$ 的圆，两圆交点即为满足题意的 $\vec{b}$ ，由图知， k 的最大值为 6.



二、选择题（本题共有 4 小题，每题 5 分，共计 20 分）

13、下列不等式恒成立的是（）

A、$a^2+b^2\le 2ab$

B、$a^2+b^2\ge -2ab$

C、$a+b\ge -2\sqrt{|ab|}$

D、$a+b\le 2\sqrt{|ab|}$

【分值】5 分

【答案】B

【解析】无

14、已知直线l的解析式为$3x-4y+1=0$，则下列各式是l的参数方程的是（）

A、$\begin{cases}x=4+3t\\y=3-4t\end{cases}$

B、$\begin{cases}x=4+3t\\y=3+4t\end{cases}$

C、$\begin{cases}x=1-4t\\y=1+3t\end{cases}$

D、$\begin{cases}x=1+4t\\y=1+3t\end{cases}$

【分值】5 分

【答案】D

【解析】无

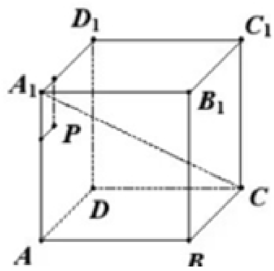
15、在棱长为 10 的正方体.$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为左侧面 ADD_1A_1 上一点，已知点 P 到 A_1D_1 的距离为 3，点 P 到 AA_1 的距离为 2，则过点 P 且与 A_1C 平行的直线交正方体于 P、Q 两点，则 Q 点所在的平面是（ ）

A. AA_1B_1B

B. BB_1C_1C

C. CC_1D_1D

D. $ABCD$



【分值】5 分

【答案】D

【解析】

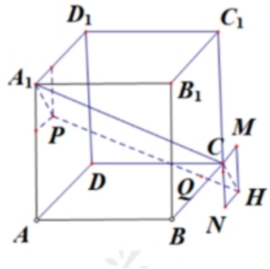
延长 BC 至 M 点，使得 $CM=2$

延长 C_1C 至 N 点，使得 $CN=3$，

以 C、M、N 为顶点作矩形，记矩形的另外一个顶点为 H，

连接 A_1P、PH、HC，则易得四边形 A_1PHC 为平行四边形，

因为点 P 在平面 ADD_1A_1 内，点 H 在平面 BCC_1B_1 内，



且点P在平面$ABCD$的上方，点H在平面$ABCD$下方，

所以线段PH必定会在和平面$ABCD$相交，

即点Q在平面$ABCD$内

16.、若存在$a \in R$且$a \neq 0$,对任意的$x \in R$，均有$f(x+a)<f(x)+f(a)$恒成立，则称函数$f(x)$具有性质P，已知：$q_1: f(x)$单调递减，且$f(x)>0$恒成立；q_2: $f(x)$单调递增，存在$x_0<0$使得$f(x_0)=0$，则是$f(x)$具有性质P的充分条件是（）

A、只有q_1

B、只有q_2

C、q_1和q_2

D、q_1和q_2都不是

【分值】5 分

【答案】C

【解析】本题要看清楚一个函数具有性质P的条件是，存在$a \in R$且$a \neq 0$，

则对于q_1，$a>0$时，易得函数$f(x)$具有性质P；

对于q_2，只需取$a=x_0$，则$x+a=x+x_0<x$，$f(a)=f(x_0)=0$，

所以$f(x+a)=f(x+x_0)<f(x)=f(x)+f(a)$，所以此时函数$f(x)$具有性质$P$.

三、解答题（本题共 5 小题，共计 76 分）

关注公众号：数学货

综合题分割

17、已知边长为 1 的正方形 ABCD，沿 BC 旋转一周得到圆柱体。

（1）求圆柱体的表面积；

（2）正方形 ABCD 绕 BC 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 A_1BCD_1，求 AD_1 与平面 ABCD 所成的角。

【分值】

【答案】（1）4π；

（2）$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

综合题分割

18、已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$.

（1）若 f(x)的周期是 4π，求 ω，并求此时 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的解集；

（2）已知 ω=1，$g(x)=f^2(x)+\sqrt{3}f(-x)f(\frac{\pi}{2}-x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，求 g(x)的值域.

【分值】

【答案】（1）$\omega=\frac{1}{2}$，$x\in\left\{x|x=\frac{\pi}{3}+4k\pi或x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi,k\in Z\right\}$；

（2）$\left[-\frac{1}{2},0\right]$

综合题分割

19、已知：$v=\dfrac{q}{x}$， $x\in(0,80]$，且 $v=\begin{cases}100\text{-}135(\dfrac{1}{3})^{\frac{80}{x}},x\in(0,40)\\ -k(x-40)+85,x\in[40,80]\end{cases}$ $(k>0)$，

（1）若 v>95，求 x 的取值范围；

（2）已知 x=80 时，v=50，求 x 为多少时，q 可以取得最大值，并求出该最大值。

【分值】

【答案】（1） $x\in(0,\dfrac{80}{3})$；

（2） $x=\dfrac{480}{7}$时，$q_{max}=\dfrac{28800}{7}$

综合题分割

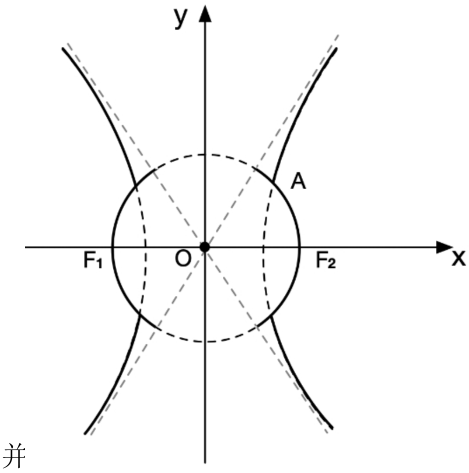
20、双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，圆 $C_2:x^2+y^2=4+b^2(b>0)$ 在第一象限交点为 A，

$A(x_A,y_A)$，曲线 $\Gamma\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,|x|>x_A\\ x^2+y^2=4+b^2,|x|>x_A\end{cases}$。

（1）若 $x_A=\sqrt{6}$，求 b；

（2）若 $b=\sqrt{5}$，C_2 与 x 轴交点记为 F_1、F_2,P 是曲线 Γ 上一点，且在第一象限，并满足

$|PF_1| = 8$，求$\angle F_1PF_2$；



（3）过点$S(0,2+\frac{b^2}{2})$且斜率为$-\frac{b}{2}$的直线l交曲线Γ于M、N两点，用b的代数式表示$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$，并求出$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的取值范围。

【分值】

【答案】（1）2；

（2）$\frac{11}{16}$；

（3）$(6+2\sqrt{5},+\infty)$；

【解析】（1）若$x_A=\sqrt{6}$，因为点A为曲线C_1与曲线C_2的交点，

$\because \begin{cases} \frac{{x_A}^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ {x_A}^2+y^2=4+b^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} y=\sqrt{2} \\ b=2 \end{cases}$，

$\therefore b=2$

（2）方法一：由题意易得F_1、F_2为曲线的两焦点，

由双曲线定义知：$|PF_2|=|PF_1|-2a$，

$|PF_1|=8, 2a=4$，$\therefore |PF_2|=4$

又$\because b=\sqrt{5}$，$\therefore |F_1F_2|=6$

在ΔPF_1F_2中由余弦定理可得：

$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|}=\dfrac{11}{16}$

方法二：$\because b=\sqrt{5}$，可得$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1\\(x+3)^2+y^2=64\end{cases}$，解得$P(4,\sqrt{15})$，

$\therefore \overrightarrow{PF_1}=\left(-7,-\sqrt{15}\right)$，$\overrightarrow{PF_2}=\left(-1,-\sqrt{15}\right)$，

$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{PF_1},\overrightarrow{PF_2}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\dfrac{11}{16}$

（3）设直线$l:y=-\dfrac{b}{2}x+\dfrac{b^2+4}{2}$

可得原点 O 到直线l的距离$d=\dfrac{\left|\dfrac{b^2+4}{2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{4}}}=\dfrac{|b^2+4|}{\sqrt{b^2+4}}=\sqrt{b^2+4}$

所以直线l是圆的切线，切点为 M,

所以$k_{OM}=\dfrac{2}{b}$，并设$l_{OM}:y=\dfrac{2}{b}x$，与圆$x^2+y^2=4+b^2$联立可得$x^2+\dfrac{4}{b^2}x^2=4+b^2$，

所以得$x=b,y=2$，即$M(b,2)$，

注意到直线l与双曲线得斜率为负得渐近线平行，

所以只有当$y_A\rangle 2$时，直线l才能与曲线Γ有两个交点，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\{x_A}^2+y^2=4+b^2\end{cases}$，得${y^2}_A=\dfrac{b^4}{a+b^2}$，

所以有$4\langle\dfrac{b^4}{4+b^2}$，解得$b^2\rangle 2+2\sqrt{5}$，或$b^2\langle 2-2\sqrt{5}$（舍）

关注公众号：数学货

又因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 由$\overrightarrow{ON}$在$\overrightarrow{OM}$上的投影可知：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=b^2+4$

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=b^2+4>6+2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\in\left(6+2\sqrt{5},+\infty\right)$

21.有限数列$\{a_n\}$，若满足$|a_1-a_2|\leq|a_1-a_3|\leq\ldots\leq|a_1-a_m|$，$m$是项数，则称$\{a_n\}$满足性质$p$.

（1） 判断数列$3,2,5,1$和$4,3,2,5,1$是否具有性质p，请说明理由.

（2） 若$a_1=1$，公比为q的等比数列，项数为10，具有性质p，求q的取值范围.

（3） 若a_n是$1,2,...,m$的一个排列$(m\geq4),b_k=a_{k+1}(k=1,2...m-1),\{a_n\},\{b_n\}$都具有性质$p$，求所有满足条件的$\{a_n\}$.

【分值】

【答案】（1）对于第一个数列有$|2-3|=1,|5-3|=2,|1-3|=2$，

满足题意，该数列满足性质p

对于第二个数列有$|3-4|=1,|2-4|=2,|5-4|=1$不满足题意，该数列不满足性质p.

（2）由题意可得，$\left|q^n-1\right|\geqslant\left|q^{n-1}-1\right|,n\in\{2,3,...,9\}$

两边平方得：$q^n-2q^n+1\geqslant q^{2n-2}-2q^{n-1}+1$

整理得：$(q-1)q^{n-1}\left[q^{n-1}\left(q+1\right)-2\right]\geqslant0$

当$q\geqslant 1$时，得$q^{n-1}(q+1)-2\geqslant 0$，此时关于$n$恒成立，

所以等价于$n=2$时$q(q+1)-2\geqslant 0$，所以$(q+2)(q-1)\geqslant 0$，

所以$q\leqslant -2$或者$q\geq 1$，所以取$q\geqslant 1$.

当$0<q\leqslant 1$时，得$q^{n-1}(q+1)-2\leqslant 0$，此时关于$n$恒成立，

所以等价于$n=2$时$q(q+1)-2\leqslant 0$，所以$(q+2)(q-1)\leqslant 0$，

所以$-2\leqslant q\leqslant 1$,所以取$0<q\leqslant 1$。

当$-1\leqslant q<0$时，得$q^{n-1}\left[q^{n-1}(q+1)-2\right]\leqslant 0$。

当n为奇数的时候，得$q^{n-1}(q+1)-2\leqslant 0$，很明显成立，

当n为偶数的时候，得$q^{n-1}(q+1)-2\geqslant 0$，很明显不成立，

故当$-1\leqslant q<0$时，矛盾，舍去。

当$q<-1$时，得$q^{n-1}\left[q^{n-1}(q+1)-2\right]\leqslant 0$。

当n为奇数的时候，得$q^{n-1}(q+1)-2\leqslant 0$，很明显成立，

当n为偶数的时候，要使$q^{n-1}(q+1)-2\geqslant 0$恒成立，

所以等价于$n=2$时$q(q+1)-2\geqslant 0$，所以$\left(q+2\right)\left(q-1\right)\geqslant 0$，

所以$q\leqslant -2$或者$q\geqslant 1$，所以取$q\leqslant -2$。

综上可得，$q\in\left(-\infty,-2\right]\cup\left(0,+\infty\right)$。

（3）设$a_1=p$ $p\in\left\{3,4,\ldots,m-3，m-2\right\}$

因为$a_1=p$，a_2可以取$p-1$或者$p+1$，a_3可以取$p-2$或者$p+2$。

如果a_2或者a_3取了$p-3$或者$p+3$，将使$\{a_n\}$不满足性质p

所以，$\{a_n\}$的前五项有以下组合：

①$a_1=p$，$a_2=p-1$，$a_3=p+1$，$a_4=p-2$，$a_5=p+2$，

②$a_1=p$，$a_2=p-1$，$a_3=p+1$，$a_4=p+2$，$a_5=p-2$，

③$a_1=p$，$a_2=p+1$，$a_3=p-1$，$a_4=p-2$，$a_5=p+2$，

④$a_1=p$，$a_2=p+1$，$a_3=p-1$，$a_4=p+2$，$a_5=p-2$，

对于①，$b_1=p-1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=1$，与$\{b_n\}$满足性质p矛盾，舍去。

对于②，$b_1=p-1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=3$，$|b_4-b_1|=2$与$\{b_n\}$满足性质p矛盾，舍去。

对于③，$b_1=p+1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=3$，$|b_4-b_1|=1$与$\{b_n\}$满足性质p矛盾，舍去。

对于④，$b_1=p+1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=1$，与$\{b_n\}$满足性质p矛盾，舍去。

所以$p\in\{3,4,\dots,m-3,m-2\}$均不能同时使$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都具有性质$p$。

当$p=1$时，有数列$\{a_n\}$：$1,2,3,\dots,m-1,m$满足题意。

当$p=m$时，时有数列$\{a_n\}$：$m,m-1,\dots,3,2,1$满足题意。

当$p=2$时，有数列$\{a_n\}$：$2,1,3,\dots,m-1,m$满足题意。

当$p=m$时，有数列$\{a_n\}$：$m-1,m,m-2,m-3,\dots,3,2,1$满足题意。

故满足题意的数列只有上面四种。