2017年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅱ）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5分）设集合A={1，2，3}，B={2，3，4}，则A∪B=（　　）

A．{1，2，3，4}　B．{1，2，3}　C．{2，3，4}　D．{1，3，4}

2．（5分）（1+i）（2+i）=（　　）

A．1﹣i　B．1+3i　C．3+i　D．3+3i

3．（5分）函数f（x）=sin（2x+$\frac{\pi}{3}$）的最小正周期为（　　）

A．4π　B．2π　C．π　D．$\frac{\pi}{2}$

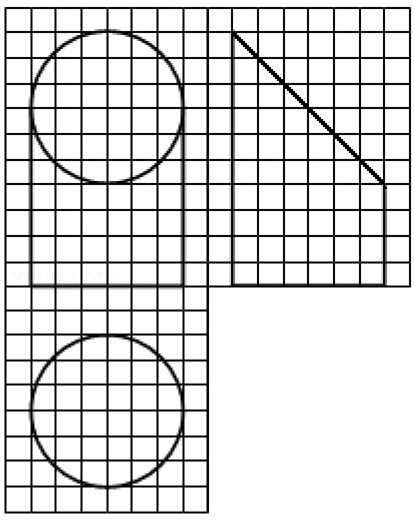
4．（5分）设非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$则（　　）

A．$\vec{a}\perp\vec{b}$　B．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　C．$\vec{a}/\!/\vec{b}$　D．$|\vec{a}|>|\vec{b}|$

5．（5分）若a＞1，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的离心率的取值范围是（　　）

A．（$\sqrt{2}$，+∞）　B．（$\sqrt{2}$，2）　C．（1，$\sqrt{2}$）　D．（1，2）

6．（5分）如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为（　　）



A．90π　B．63π　C．42π　D．36π

7．（5 分）设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$，则 z=2x+y 的最小值是（　　）

A．﹣15　　B．﹣9　　C．1　　D．9

8．（5 分）函数 f（x）=ln（x^2﹣2x﹣8）的单调递增区间是（　　）

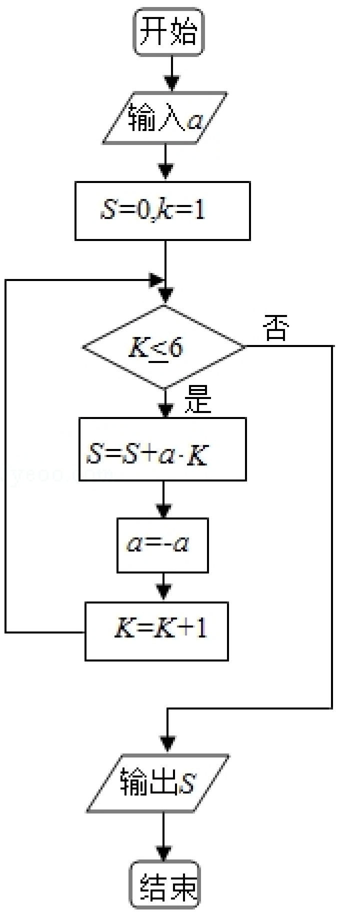
A．（﹣∞，﹣2）　B．（﹣∞，﹣1）　C．（1，+∞）　D．（4，+∞）

9．（5 分）甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则（　　）

A．乙可以知道四人的成绩　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

10．（5 分）执行如图的程序框图，如果输入的 a=﹣1，则输出的 S=（　　）



A．2　　　　　B．3　　　　　C．4　　　　　D．5

11．（5 分）从分别写有 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为（　　）

A．$\frac{1}{10}$　　　　B．$\frac{1}{5}$　　　　C．$\frac{3}{10}$　　　　D．$\frac{2}{5}$

12．（5 分）过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为$\sqrt{3}$的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上，且 MN⊥l，则 M 到直线 NF 的距离为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$2\sqrt{3}$　　　　D．$3\sqrt{3}$

二、填空题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13．（5 分）函数 f（x）=2cosx+sinx 的最大值为________．

14．（5 分）已知函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 x∈（﹣∞，0）时，f（x）$=2x^3+x^2$，则 f（2）=________．

15．（5 分）长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为________．

16．（5 分）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 2bcosB=acosC+ccosA，则 B=________．

三、解答题 共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17 至 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$．

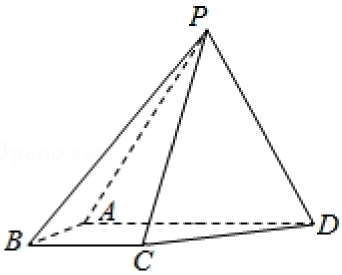
（1）若 $a_3+b_3=5$，求$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若 $T_3=21$，求 S_3．

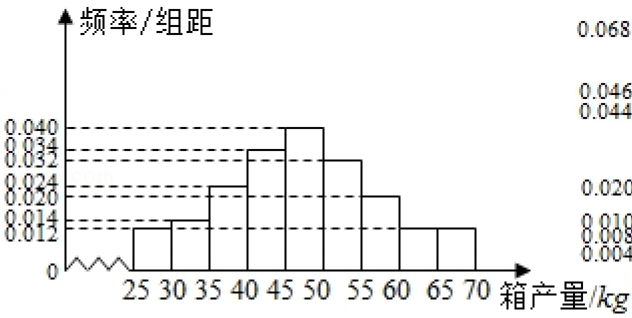
18．（12 分）如图，四棱锥 P﹣ ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，AB=BC=$\frac{1}{2}$AD，∠BAD=∠ABC=90°．

（1）证明：直线 BC∥平面 PAD；

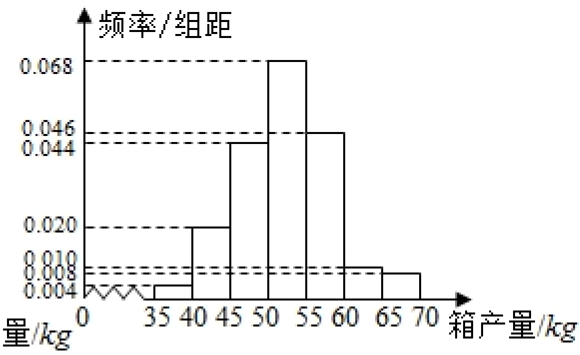
（2）若△PCD 面积为 $2\sqrt{7}$，求四棱锥 P﹣ ABCD 的体积．



19．（12 分）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如下：



旧养殖法



新养殖法

（1）记 A 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50kg"，估计 A 的概率；

（2）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		

新养殖法		

（3）根据箱产量的频率分布直方图，对两种养殖方法的优劣进行比较．

附：

$P(K^2\geqslant K)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

20．（12 分）设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$．证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21．（12 分）设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（1）讨论 f（x）的单调性；

（2）当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，求 a 的取值范围．

选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$．

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为（2，$\frac{\pi}{3}$），点 B 在曲线 C_2 上，求△OAB 面积的最大值．

[选修 4-5：不等式选讲]

23．已知 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$．证明：

（1）$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$；

（2）$a+b\leqslant 2$．

2017年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5分）设集合A={1，2，3}，B={2，3，4}，则A∪B=（　　）

A．{1，2，3，4}　B．{1，2，3}　C．{2，3，4}　D．{1，3，4}

【考点】1D：并集及其运算．

【专题】11：计算题；49：综合法．

【分析】集合A={1，2，3}，B={2，3，4}，求A∪B，可用并集的定义直接求出两集合的并集．

【解答】解：∵A={1，2，3}，B={2，3，4}，

∴A∪B={1，2，3，4}

故选：A．

【点评】本题考查并集及其运算，解题的关系是正确理解并集的定义及求并集的运算规则，是集合中的基本概念型题．

2．（5分）（1+i）（2+i）=（　　）

A．1﹣i　B．1+3i　C．3+i　D．3+3i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】35：转化思想；5N：数系的扩充和复数．

【分析】利用复数的运算法则即可得出．

【解答】解：原式=2﹣1+3i=1+3i．

故选：B．

【点评】本题考查了复数的运算法则，考查了推理能力与计算能力，属于基础题

.

3．（5 分）函数 f（x）=sin（$2x+\frac{\pi}{3}$）的最小正周期为（　　）

A．4π　　B．2π　　C．π　　D．$\frac{\pi}{2}$

【考点】H1：三角函数的周期性．

【专题】38：对应思想；48：分析法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】利用三角函数周期公式，直接求解即可．

【解答】解：函数 f（x）=sin（$2x+\frac{\pi}{3}$）的最小正周期为：$\frac{2\pi}{2}$=π．

故选：C．

【点评】本题考查三角函数的周期的求法，是基础题．

4．（5 分）设非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$则（　　）

A．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　B．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　C．$\vec{a}/\!/\vec{b}$　　D．$|\vec{a}|>|\vec{b}|$

【考点】91：向量的概念与向量的模．

【专题】11：计算题；34：方程思想；4O：定义法；5A：平面向量及应用．

【分析】由已知得$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$，从而$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，由此得到$\vec{a}\perp\vec{b}$．

【解答】解：∵非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，

∴$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$，

$\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\vec{b}$，

$4\vec{a}\vec{b}=0$，

解得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

∴$\vec{a}\perp\vec{b}$．

故选：A．

【点评】本题考查两个向量的关系的判断，是基础题，解题时要认真审题，注意向量的模的性质的合理运用．

5．（5 分）若 a＞1，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的离心率的取值范围是（　　）

A．（$\sqrt{2}$，+∞）　B．（$\sqrt{2}$，2）　C．（1，$\sqrt{2}$）　D．（1，2）

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

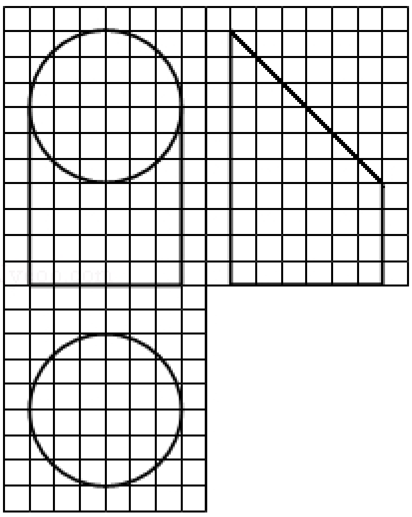
【分析】利用双曲线方程，求出 a，c 然后求解双曲线的离心率的范围即可．

【解答】解：a＞1，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的离心率为：$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\in(1,\sqrt{2})$．

故选：C．

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，考查计算能力．

6．（5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为（　　）



A．90π　B．63π　C．42π　D．36π

【考点】L!：由三视图求面积、体积．

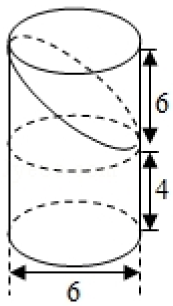
【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5Q：立体几何．

【分析】由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半，即可求出几何体的体积．

【解答】解：由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半，

$V=\pi\bullet 3^2\times 10-\frac{1}{2}\bullet\pi\bullet 3^2\times 6=63\pi$，

故选：B．



【点评】本题考查了体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

7．（5 分）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$，则 z=2x+y 的最小值是（　　）

A．﹣15　　B．﹣9　　C．1　　D．9

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式．

【分析】画出约束条件的可行域，利用目标函数的最优解求解目标函数的最小值即可．

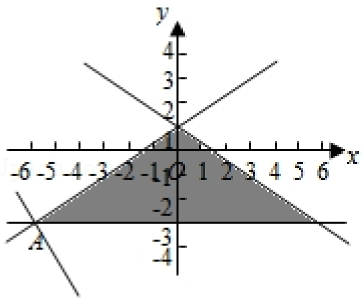
【解答】解：x、y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$ 的可行域如图：

z=2x+y 经过可行域的 A 时，目标函数取得最小值，

由 $\begin{cases}y=-3\\2x-3y+3=0\end{cases}$ 解得 A（﹣6，﹣3），

则 z=2x+y 的最小值是：－ 15．

故选：A．



【点评】本题考查线性规划的简单应用，考查数形结合以及计算能力．

8．（5 分）函数 f（x）=ln（x^2－ 2x－ 8）的单调递增区间是（　　）

A．（－ ∞，－ 2） B．（－ ∞，－ 1） C．（1，+∞） D．（4，+∞）

【考点】3G：复合函数的单调性．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】由 x^2－ 2x－ 8＞0 得：x∈（－ ∞，－ 2）∪（4，+∞），令 t=x^2－ 2x－ 8，则 y=lnt，结合复合函数单调性"同增异减"的原则，可得答案．

【解答】解：由 x^2－ 2x－ 8＞0 得：x∈（－ ∞，－ 2）∪（4，+∞），

令 t=x^2－ 2x－ 8，则 y=lnt，

∵x∈（－ ∞，－ 2）时，t=x^2－ 2x－ 8 为减函数；

x∈（4，+∞）时，t=x^2－ 2x－ 8 为增函数；

y=lnt 为增函数，

故函数 f（x）=ln（x^2－ 2x－ 8）的单调递增区间是（4，+∞），

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是复合函数的单调性，对数函数的图象和性质，二次数函数的图象和性质，难度中档．

9．（5 分）甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则（　　）

A．乙可以知道四人的成绩　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

【考点】F4：进行简单的合情推理．

【专题】2A：探究型；35：转化思想；48：分析法；5M：推理和证明．

【分析】根据四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，继而可以推出正确答案

【解答】解：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

→乙丙必有一优一良，（若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩）

→乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

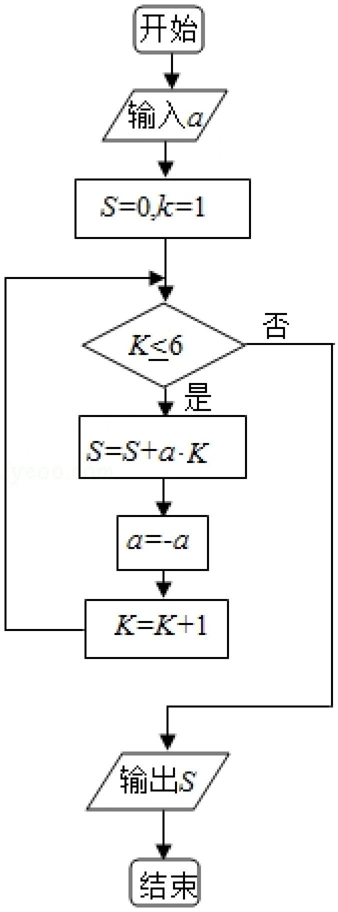
→丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩，

给甲看乙丙成绩，甲不知道自已的成绩，说明乙丙一优一良，假定乙丙都是优，则甲是良，假定乙丙都是良，则甲是优，那么甲就知道自已的成绩了．给乙看丙成绩，乙没有说不知道自已的成绩，假定丙是优，则乙是良，乙就知道自己成绩．给丁看甲成绩，因为甲不知道自己成绩，乙丙是一优一良，则甲丁也是一优一良，丁看到甲成绩，假定甲是优，则丁是良，丁肯定知道自已的成绩了

故选：D．

【点评】本题考查了合情推理的问题，关键掌握四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，属于中档题．

10．（5 分）执行如图的程序框图，如果输入的 a=﹣1，则输出的 S=（　　）



A．2　　　　　　B．3　　　　　　C．4　　　　　　D．5

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；27：图表型；4B：试验法；5K：算法和程序框图．

【分析】执行程序框图，依次写出每次循环得到的 S，K 值，当 K=7 时，程序终止即可得到结论．

【解答】解：执行程序框图，有 S=0，K=1，a=﹣1，代入循环，

第一次满足循环，S=﹣1，a=1，K=2；

满足条件，第二次满足循环，S=1，a=﹣1，K=3；

满足条件，第三次满足循环，S=﹣2，a=1，K=4；

满足条件，第四次满足循环，S=2，a=﹣1，K=5；

满足条件，第五次满足循环，S=﹣3，a=1，K=6；

满足条件，第六次满足循环，S=3，a=﹣ 1，K=7；

K≤6 不成立，退出循环输出 S 的值为 3．

故选：B．

【点评】本题主要考查了程序框图和算法，属于基本知识的考查，比较基础．

11．（5 分）从分别写有 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为（　　）

A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{3}{10}$　　D．$\frac{2}{5}$

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式．

【专题】11：计算题；37：集合思想；4O：定义法；5I：概率与统计．

【分析】先求出基本事件总数 n=5×5=25，再用列举法求出抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数包含的基本事件个数，由此能求出抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率．

【解答】解：从分别写有 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，

基本事件总数 n=5×5=25，

抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数包含的基本事件有：

（2，1），（3，1），（3，2），（4，1），（4，2），（4，3），（5，1），（5，2），（5，3），（5，4），

共有 m=10 个基本事件，

∴抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率 $p=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$．

故选：D．

【点评】本题考查概率的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意列举法的合理运用．

12．（5 分）过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为$\sqrt{3}$的直线交 C 于点 M（M

在 x 轴上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上，且 MN⊥l，则 M 到直线 NF 的距离为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$2\sqrt{3}$　　　　D．$3\sqrt{3}$

【考点】K8：抛物线的性质；KN：直线与抛物线的综合．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】利用已知条件求出 M 的坐标，求出 N 的坐标，利用点到直线的距离公式求解即可．

【解答】解：抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F（1，0），且斜率为$\sqrt{3}$的直线：$y=\sqrt{3}(x-1)$，

过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为$\sqrt{3}$的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴上方），l

可知：$\begin{cases} y^2=4x \\ y=\sqrt{3}(x-1) \end{cases}$，解得 M（3，$2\sqrt{3}$）．

可得 N（－1，$2\sqrt{3}$），NF 的方程为：$y=-\sqrt{3}(x-1)$，即$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$，

则 M 到直线 NF 的距离为：$\frac{|3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}=2\sqrt{3}$.

故选：C．

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系的应用，考查计算能力．

二、填空题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13．（5 分）函数 f（x）=2cosx+sinx 的最大值为__$\sqrt{5}$__．

【考点】HW：三角函数的最值．

【专题】11：计算题；35：转化思想；56：三角函数的求值；57：三角函数的图像与性质．

【分析】利用辅助角公式化简函数的解析式，通过正弦函数的有界性求解即可．

【解答】解：函数 f（x）=2cosx+sinx=$\sqrt{5}$（$\frac{2\sqrt{5}}{5}$cosx+$\frac{\sqrt{5}}{5}$sinx）=$\sqrt{5}$sin（x+θ），

其中 $\tan\theta=2$，

可知函数的最大值为：$\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

【点评】本题考查三角函数的化简求值，正弦函数的有界性的应用，考查计算能力．

14．（5 分）已知函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 x∈（－ ∞，0）时，f（x）$=2x^3+x^2$，则 f（2）=__12__．

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断；3P：抽象函数及其应用．

【专题】35：转化思想；4R：转化法；51：函数的性质及应用．

【分析】由已知中当 x∈（－ ∞，0）时，f（x）$=2x^3+x^2$，先求出 f（－ 2），进而根据奇函数的性质，可得答案．

【解答】解：∵当 x∈（－ ∞，0）时，f（x）$=2x^3+x^2$，

∴f（－ 2）=－ 12，

又∵函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，

∴f（2）=12，

故答案为：12

【点评】本题考查的知识点是函数奇偶性的性质，函数求值，难度不大，属于基础题．

15．（5 分）长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为__14π__．

【考点】LG：球的体积和表面积；LR：球内接多面体．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5F：空间位置关系与距离．

【分析】求出球的半径，然后求解球的表面积．

【解答】解：长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，

可知长方体的对角线的长就是球的直径，

所以球的半径为：$\frac{1}{2}\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

则球 O 的表面积为：$4\times\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2\pi=14\pi$.

故答案为：14π.

【点评】本题考查长方体的外接球的表面积的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

16．（5 分）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 2bcosB=acosC+ccosA，则 B=__$\frac{\pi}{3}$__.

【考点】GL：三角函数中的恒等变换应用；HP：正弦定理.

【专题】11：计算题；35：转化思想；4O：定义法；56：三角函数的求值；58：解三角形.

【分析】根据正弦定理和两角和的正弦公式和诱导公式计算即可

【解答】解：∵2bcosB=acosC+ccosA，由正弦定理可得，

2cosBsinB=sinAcosC+sinCcosA=sin（A+C）=sinB，

∵sinB≠0，

∴$\cos B=\frac{1}{2}$，

∵0＜B＜π，

∴$B=\frac{\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{\pi}{3}$

【点评】本题考查了正弦定理和两角和的正弦公式和诱导公式，属于基础题

三、解答题 共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17 至 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）已知等差数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，等比数列{b_n}的前 n 项和为 T_n

，$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$.

（1）若 $a_3+b_3=5$，求$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若 $T_3=21$，求 S_3.

【考点】8E：数列的求和；8M：等差数列与等比数列的综合.

【专题】34：方程思想；48：分析法；54：等差数列与等比数列.

【分析】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，运用等差数列和等比数列的通项公式，列方程解方程可得 d，q，即可得到所求通项公式；

（2）运用等比数列的求和公式，解方程可得公比，再由等差数列的通项公式和求和，计算即可得到所求和.

【解答】解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$，$a_3+b_3=5$，

可得$-1+d+q=2$，$-1+2d+q^2=5$，

解得 $d=1$，$q=2$ 或 $d=3$，$q=0$（舍去），

则$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$，$n\in N^*$；

（2）$b_1=1$，$T_3=21$，

可得 $1+q+q^2=21$，

解得 $q=4$ 或-5，

当 $q=4$ 时，$b_2=4$，$a_2=2-4=-2$，

$d=-2-(-1)=-1$，$S_3=-1-2-3=-6$；

当 $q=-5$ 时，$b_2=-5$，$a_2=2-(-5)=7$，

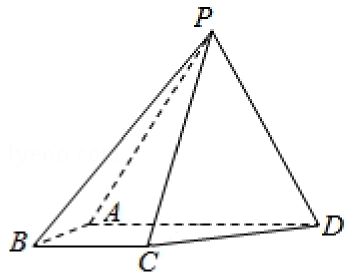
$d=7-(-1)=8$，$S_3=-1+7+15=21$.

【点评】本题考查等差数列和等比数列的通项公式和求和公式的运用，求出公差和公比是解题的关键，考查方程思想和化简整理的运算能力，属于基础题.

18．（12 分）如图，四棱锥 P－ ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，∠BAD=∠ABC=90°．

（1）证明：直线 BC∥平面 PAD；

（2）若△PCD 面积为 $2\sqrt{7}$，求四棱锥 P－ ABCD 的体积．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LS：直线与平面平行．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离．

【分析】（1）利用直线与平面平行的判定定理证明即可．

（2）利用已知条件转化求解几何体的线段长，然后求解几何体的体积即可．

【解答】（1）证明：四棱锥 P－ ABCD 中，∵∠BAD=∠ABC=90°．∴BC∥AD，∵AD⊂平面 PAD，BC⊄平面 PAD，

∴直线 BC∥平面 PAD；

（2）解：四棱锥 P－ ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，∠BAD=∠ABC=90°．设 AD=2x，

则 AB=BC=x，$CD=\sqrt{2}x$，O 是 AD 的中点，

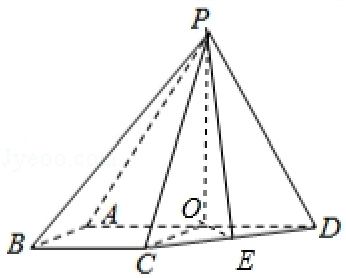
连接 PO，OC，CD 的中点为：E，连接 OE，

则 $OE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$PO=\sqrt{3}x$，$PE=\sqrt{PO^2+OE^2}=\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{2}}$，

△PCD 面积为 $2\sqrt{7}$，可得：$\frac{1}{2}PE\cdot CD=2\sqrt{7}$，

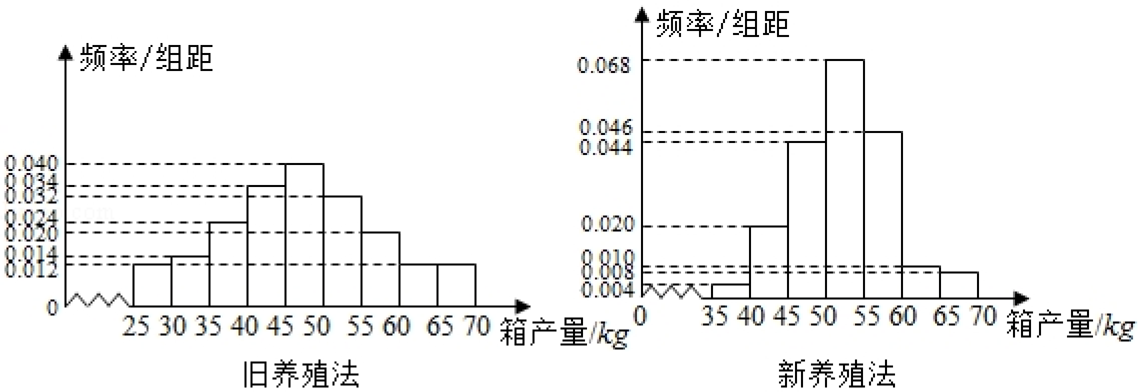
即：$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}x\cdot\sqrt{2}x=2\sqrt{7}$，解得 x=2，$PO=2\sqrt{3}$．

则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(BC+AD)\times AB\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$．



【点评】本题考查直线与平面平行的判定定理的应用，几何体的体积的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

19．（12分）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了100个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如下：



（1）记A表示事件“旧养殖法的箱产量低于50kg”，估计A的概率；

（2）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3）根据箱产量的频率分布直方图，对两种养殖方法的优劣进行比较.

附：

P（K^2≥K）	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

【考点】B8：频率分布直方图；BL：独立性检验．

【专题】11：计算题；35：转化思想；48：分析法；5I：概率与统计．

【分析】（1）根据题意，由旧养殖法的频率分布直方图计算可得答案；

（2）由频率分布直方图可以将列联表补全，进而计算可得 $K^2=\frac{200(62\times66-38\times34)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705>6.635$，与附表比较即可得答案；

（3）由频率分布直方图计算新旧养殖法产量的平均数，比较即可得答案．

【解答】解：（1）根据题意，由旧养殖法的频率分布直方图可得：

P（A）=（0.012+0.014+0.024+0.034+0.040）×5=0.62；

（2）根据题意，补全列联表可得：

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg	总计
旧养殖法	62	38	100
新养殖法	34	66	100
总计	96	104	200

则有 $K^2=\frac{200(62\times66-38\times34)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705>6.635$，

故有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关；

（3）由频率分布直方图可得：

旧养殖法 100 个网箱产量的平均数 $\overline{x_1}$=（27.5×0.012+32.5×0.014+37.5×0.024+42.5×0.034+47.5×0.040+52.5×0.032+57.5×0.032+62.5×0.012+67.5×0.012）×5=5×9.42=47.1；

新养殖法 100 个网箱产量的平均数 $\overline{x_2}$=（37.5×0.004+42.5×0.020+47.5×0.044+52.5×0.054+57.5×0.046+62.5×0.010+67.5×0.008）×5=5×10.47=52.35；

比较可得：$\overline{x_1}<\overline{x_2}$，

故新养殖法更加优于旧养殖法．

【点评】本题考查频率分布直方图、独立性检验的应用，涉及数据平均数、方差的计算，关键认真分析频率分布直方图．

20．（12 分）设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 x=－3 上，且$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$．证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

【考点】J3：轨迹方程；KL：直线与椭圆的综合.

【专题】34：方程思想；48：分析法；5A：平面向量及应用；5B：直线与圆.

【分析】（1）设 M（x_0，y_0），由题意可得 N（x_0，0），设 P（x，y），运用向量的坐标运算，结合 M 满足椭圆方程，化简整理可得 P 的轨迹方程；

（2）设 Q（－3，m），P（$\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{2}\sin\alpha$），（$0\leqslant\alpha<2\pi$），运用向量的数量积的坐标表示，可得 m，即有 Q 的坐标，求得椭圆的左焦点坐标，求得 OQ，PF 的斜率，由两直线垂直的条件：向量数量积为 0，即可得证.

【解答】解：（1）设 M（x_0，y_0），由题意可得 N（x_0，0），

设 P（x，y），由点 P 满足$\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

可得（x－x_0，y）=$\sqrt{2}$（0，y_0），

可得 $x-x_0=0$，$y=\sqrt{2}y_0$，

即有 $x_0=x$，$y_0=\frac{y}{\sqrt{2}}$，

代入椭圆方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，可得$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$，

即有点 P 的轨迹方程为圆 $x^2+y^2=2$；

（2）证明：设 Q（－3，m），P（$\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{2}\sin\alpha$），（$0\leqslant\alpha<2\pi$），

$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$，可得（$\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{2}\sin\alpha$）•（－3－$\sqrt{2}\cos\alpha$，m－$\sqrt{2}\sin\alpha$）=1，

即为$-3\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos^2\alpha+\sqrt{2}m\sin\alpha-2\sin^2\alpha=1$，

当 $\alpha=0$ 时，上式不成立，则 $0<\alpha<2\pi$，

解得 $m=\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$，

即有 Q（﹣3，$\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$），

椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点 F（﹣1，0），

由$\overrightarrow{PF}\bullet\overrightarrow{OQ}$=（﹣1﹣$\sqrt{2}\cos\alpha$，﹣$\sqrt{2}\sin\alpha$）•（﹣3，$\frac{3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$）

$=3+3\sqrt{2}\cos\alpha-3(1+\sqrt{2}\cos\alpha)=0$.

可得过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

另解：设 Q（﹣3，t），P（m，n），由$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{PQ}=1$，

可得（m，n）•（﹣3﹣m，t﹣n）$=-3m-m^2+nt-n^2=1$，

又 P 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，可得 $m^2+n^2=2$，

即有 $nt=3+3m$，

又椭圆的左焦点 F（﹣1，0），

$\overrightarrow{PF}\bullet\overrightarrow{OQ}$=（﹣1﹣m，﹣n）•（﹣3，t）$=3+3m-nt$

$=3+3m-3-3m=0$，

则$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{OQ}$，

可得过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

【点评】本题考查轨迹方程的求法，注意运用坐标转移法和向量的加减运算，考查圆的参数方程的运用和直线的斜率公式，以及向量的数量积的坐标表示和两直线垂直的条件：向量数量积为 0，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

21．（12 分）设函数 f（x）=（1﹣x^2）e^x.

（1）讨论 f（x）的单调性；

（2）当 x≥0 时，f（x）≤ax+1，求 a 的取值范围.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；53：导数的综合应用．

【分析】（1）求出函数的导数，求出极值点，利用导函数的符号，判断函数的单调性即可．

（2）化简 $f(x)=(1-x)(1+x)e^x$．$f(x)\leqslant ax+1$，下面对 a 的范围进行讨论：

①当 $a\geqslant 1$ 时，②当 $0<a<1$ 时，设函数 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1>0$（$x>0$），推出结论；③当 $a\leqslant 0$ 时，推出结果，然后得到 a 的取值范围．

【解答】解：（1）因为 $f(x)=(1-x^2)e^x$，$x\in R$，

所以 $f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$，

令 $f'(x)=0$ 可知 $x=-1\pm\sqrt{2}$，

当 $x<-1-\sqrt{2}$ 或 $x>-1+\sqrt{2}$ 时 $f'(x)<0$，当 $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$ 时 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{2})$，$(-1+\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ 上单调递增；

（2）由题可知 $f(x)=(1-x)(1+x)e^x$．下面对 a 的范围进行讨论：

①当 $a\geqslant 1$ 时，设函数 $h(x)=(1-x)e^x$，则 $h'(x)=-xe^x<0$（$x>0$），

因此 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

又因为 $h(0)=1$，所以 $h(x)\leqslant 1$，

所以 $f(x)=(1+x)h(x)\leqslant x+1\leqslant ax+1$；

②当 $0<a<1$ 时，设函数 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1>0$（$x>0$），

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=1-0-1=0$，

所以 $e^x\geqslant x+1$．

因为当 $0<x<1$ 时 $f(x)>(1-x)(1+x)^2$，

所以 $(1-x)(1+x)^2-ax-1=x(1-a-x-x^2)$，

取 $x_0=\frac{\sqrt{5-4a}-1}{2}$∈（0，1），则（1﹣ x_0）（1+x_0）^{2}﹣ ax_0﹣ 1=0，

所以 f（x_0）＞ax_0+1，矛盾；

③当 a≤0 时，取 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$∈（0，1），则 f（x_0）＞（1﹣ x_0）（1+x_0）^{2}=1≥ax_0+1，矛盾；

综上所述，a 的取值范围是[1，+∞）．

【点评】本题考查函数的导数的应用，函数的单调性以及函数的最值的求法，考查转化思想以及计算能力．

选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 ρcosθ=4．

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足|OM|•|OP|=16，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为（2，$\frac{\pi}{3}$），点 B 在曲线 C_2 上，求△OAB 面积的最大值．

【考点】Q4：简单曲线的极坐标方程．

【专题】38：对应思想；49：综合法；5S：坐标系和参数方程．

【分析】（1）设 P（x，y），利用相似得出 M 点坐标，根据|OM|•|OP|=16 列方程化简即可；

（2）求出曲线 C_2 的圆心和半径，得出 B 到 OA 的最大距离，即可得出最大面积．

【解答】解：（1）曲线 C_1 的直角坐标方程为：x=4，

设 P（x，y），M（4，y_0），则$\frac{x}{4}=\frac{y}{y_0}$，∴$y_0=\frac{4y}{x}$，

∵|OM||OP|=16，

∴$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{16+y_0^2}$=16，

即$(x^2+y^2)(1+\frac{y^2}{x^2})=16$，

∴$x^4+2x^2y^2+y^4=16x^2$，即$(x^2+y^2)^2=16x^2$，

两边开方得：$x^2+y^2=4x$，

整理得：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$，

∴点P的轨迹C_2的直角坐标方程：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$.

（2）点A的直角坐标为$A(1,\sqrt{3})$，显然点A在曲线C_2上，$|OA|=2$，

∴曲线C_2的圆心（2，0）到弦OA的距离$d=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴△AOB的最大面积$S=\frac{1}{2}|OA|\bullet(2+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了极坐标方程与直角坐标方程的转化，轨迹方程的求解，直线与圆的位置关系，属于中档题.

[选修4-5：不等式选讲]

23．已知$a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$．证明：

（1）$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$；

（2）$a+b\leqslant 2$．

【考点】R6：不等式的证明．

【专题】14：证明题；35：转化思想；49：综合法；5T：不等式．

【分析】（1）由柯西不等式即可证明，

（2）由$a^3+b^3=2$转化为$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，再由均值不等式可得$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$，即可得到$\frac{1}{4}(a+b)^3\leqslant 2$，问题得以证明．

【解答】证明：（1）由柯西不等式得：$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant(\sqrt{a\cdot a^5}+\sqrt{b\cdot b^5})^2=(a^3+b^3)^2\geqslant 4$，

当且仅当$\sqrt{ab^5}=\sqrt{ba^5}$，即$a=b=1$时取等号，

（2）∵$a^3+b^3=2$，

∴$(a+b)(a^2-ab+b^2)=2$，

∴（a+b）[（a+b）^{2}− 3ab]=2，

∴（a+b）^{3}− 3ab（a+b）=2，

∴$\frac{(a+b)^{3}-2}{3(a+b)}$=ab，

由均值不等式可得：$\frac{(a+b)^{3}-2}{3(a+b)}$=ab≤（$\frac{a+b}{2}$）^{2}，

∴（a+b）^{3}− 2≤$\frac{3(a+b)^{3}}{4}$，

∴$\frac{1}{4}$（a+b）^{3}≤2，

∴a+b≤2，当且仅当 a=b=1 时等号成立．

【点评】本题考查了不等式的证明，掌握柯西不等式和均值不等式是关键，属于中档题