2014 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅰ）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．（5 分）已知集合 M={x|－1＜x＜3}，N={x|－2＜x＜1}，则 M∩N=（　　）

A．（－2，1）　B．（－1，1）　C．（1，3）　D．（－2，3）

2．（5 分）若 tanα＞0，则（　　）

A．sinα＞0　B．cosα＞0　C．sin2α＞0　D．cos2α＞0

3．（5 分）设 $z=\frac{1}{1+i}+i$，则|z|=（　　）

A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．2

4．（5 分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$（a＞0）的离心率为 2，则实数 a=（　　）

A．2　B．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　D．1

5．（5 分）设函数 f（x），g（x）的定义域都为 R，且 f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A．f（x）•g（x）是偶函数　B．|f（x）|•g（x）是奇函数

C．f（x）•|g（x）|是奇函数　D．|f（x）•g（x）|是奇函数

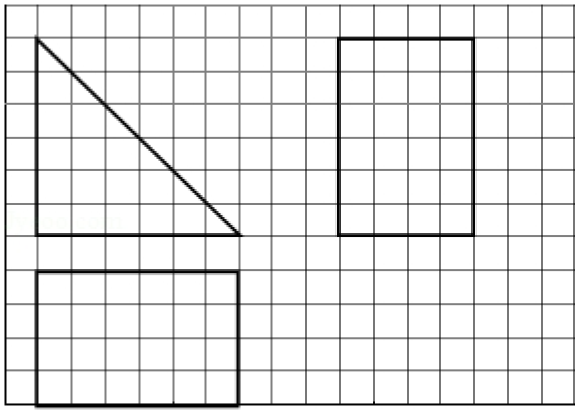
6．（5 分）设 D，E，F 分别为△ABC 的三边 BC，CA，AB 的中点，则$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}$=（　　）

A．$\overrightarrow{AD}$　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　C．$\overrightarrow{BC}$　D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

7．（5 分）在函数①y=cos|2x|，②y=|cosx|，③y=cos（$2x+\frac{\pi}{6}$），④y=tan（$2x-\frac{\pi}{4}$）中，最小正周期为 π 的所有函数为（　　）

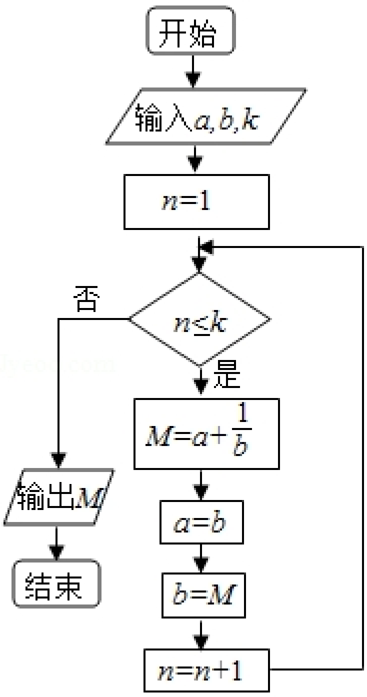
A．①②③　B．①③④　C．②④　D．①③

8．（5 分）如图，网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，则这个几何体是（　　）



A．三棱锥　　　　B．三棱柱　　　　C．四棱锥　　　　D．四棱柱

9．（5 分）执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=（　　）



A．$\frac{20}{3}$　　　　B．$\frac{7}{2}$　　　　C．$\frac{16}{5}$　　　　D．$\frac{15}{8}$

10．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=x$ 的焦点为 F，A（x_0，y_0）是 C 上一点，AF=$\left|\frac{5}{4}x_0\right|$，则 x_0=（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．8

11．（5 分）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant a \\ x-y\leqslant -1 \end{cases}$ 且 z=x+ay 的最小值为 7，则 a=（　　）

A．﹣5　　　　B．3　　　　C．﹣5 或 3　　　　D．5 或﹣3

12．（5 分）已知函数 f（x）=ax^3-3x^2+1，若 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 x_0＞

0，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（1，+∞）　　B．（2，+∞）　　C．（﹣∞，﹣1） D．（﹣∞，﹣2）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分

13．（5 分）将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行，则 2 本数学书相邻的概率为________．

14．（5 分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

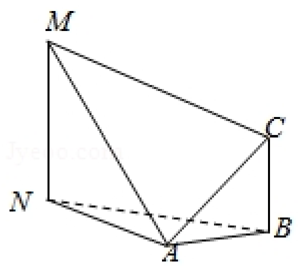
乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为________．

15．（5 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x<1 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geqslant 1 \end{cases}$，则使得 f（x）≤2 成立的 x 的取值范围是________．

16．（5 分）如图，为测量山高 MN，选择 A 和另一座的山顶 C 为测量观测点，从 A 点测得 M 点的仰角∠MAN=60°，C 点的仰角∠CAB=45°以及∠MAC=75°；从 C 点测得∠MCA=60°，已知山高 BC=100m，则山高 MN=________m．



三、解答题：解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤

17．（12 分）已知{a_n}是递增的等差数列，a_2，a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根．

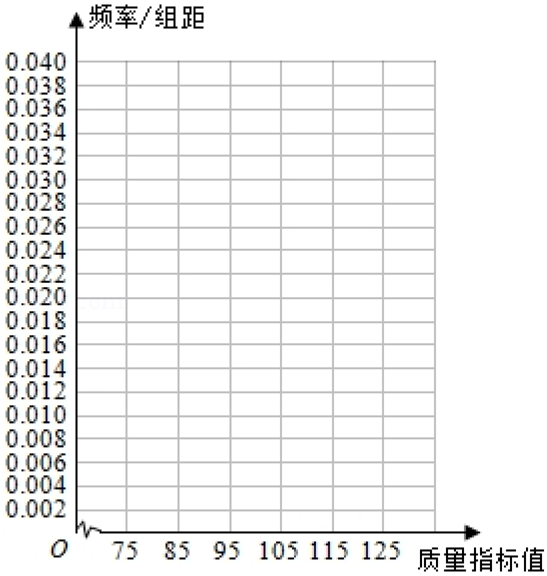
（1）求{a_n}的通项公式；

（2）求数列{$\frac{a_n}{2^n}$}的前 n 项和．

18．（12 分）从某企业生产的产品中抽取 100 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频数分布表：

质量指标值分组	[75，85）	[85，95）	[95，105）	[105，115）	[115，125）
频数	6	26	38	22	8

（1）在表格中作出这些数据的频率分布直方图；



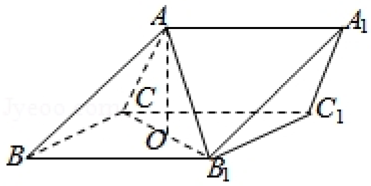
（2）估计这种产品质量指标的平均数及方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（3）根据以上抽样调查数据，能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品 80%”的规定？

19．（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，B_1C 的中点为 O，且 AO⊥平面 BB_1C_1C.

（1）证明：$B_1C\perp AB$；

（2）若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，BC=1，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.



20．（12 分）已知点 P（2，2），圆 C：$x^2+y^2-8y=0$，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，O 为坐标原点.

（1）求 M 的轨迹方程；

（2）当 $|OP|=|OM|$ 时，求 l 的方程及△POM 的面积.

21．（12 分）设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-bx$（$a\neq1$），曲线 $y=f(x)$ 在点（1，f（1））处的切线斜率为 0，

（1）求 b；

（2）若存在 $x_0\geq1$，使得 $f(x_0)<\frac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围.

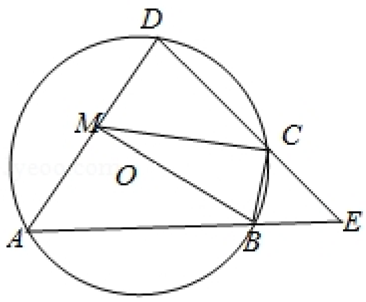
请考生在第 22，23，24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

【选修 4-1：几何证明选讲】

22．（10 分）如图，四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E，且 CB=CE．

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设 AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，且 MB=MC，证明：△ADE 为等边三角形．



【选修 4-4：坐标系与参数方程】

23．已知曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t 为参数）

（Ⅰ）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程．

（Ⅱ）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，求|PA|的最大值与最小值．

【选修4-5：不等式选讲】

24．若 a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

（Ⅰ）求 a^3+b^3 的最小值；

（Ⅱ）是否存在 a，b，使得 $2a+3b=6$？并说明理由.

2014 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 I ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．（5 分）已知集合 $M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|-2<x<1\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．（﹣2，1）　B．（﹣1，1）　C．（1，3）　D．（﹣2，3）

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】5J：集合．

【分析】根据集合的基本运算即可得到结论．

【解答】解：$M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|-2<x<1\}$，

则 $M\cap N=\{x|-1<x<1\}$，

故选：B．

【点评】本题主要考查集合的基本运算，比较基础．

2．（5 分）若 $\tan\alpha>0$，则（　　）

A．$\sin\alpha>0$　B．$\cos\alpha>0$　C．$\sin2\alpha>0$　D．$\cos2\alpha>0$

【考点】GC：三角函数值的符号．

【专题】56：三角函数的求值．

【分析】化切为弦，然后利用二倍角的正弦得答案．

【解答】解：$\because\tan\alpha>0$，

$\therefore\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$，

则 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha>0$．

故选：C．

【点评】本题考查三角函数值的符号，考查了二倍角的正弦公式，是基础题．

3．（5 分）设 $z=\frac{1}{1+i}+i$，则 $|z|=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．2

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题；5N：数系的扩充和复数．

【分析】先求 z，再利用求模的公式求出 $|z|$．

【解答】解：$z=\frac{1}{1+i}+i=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$．

故 $|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故选：B．

【点评】本题考查复数代数形式的运算，属于容易题．

4．（5 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$（a＞0）的离心率为 2，则实数 a=（　　）

A．2　　B．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．1

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由双曲线方程找出 a，b，c，代入离心率，从而求出 a．

【解答】解：由题意，

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+3}}{a}=2$，

解得，a=1．

故选：D．

【点评】本题考查了双曲线的定义，属于基础题．

5．（5 分）设函数 f（x），g（x）的定义域都为 R，且 f（x）是奇函数，g（x）

是偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A．f（x）•g（x）是偶函数　　B．|f（x）|•g（x）是奇函数

C．f（x）•|g（x）|是奇函数　　D．|f（x）•g（x）|是奇函数

【考点】3K：函数奇偶性的性质与判断．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】根据函数奇偶性的性质即可得到结论．

【解答】解：∵f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，

∴f（﹣x）=﹣f（x），g（﹣x）=g（x），

f（﹣x）•g（﹣x）=﹣f（x）•g（x），故函数是奇函数，故A错误，

|f（﹣x）|•g（﹣x）=|f（x）|•g（x）为偶函数，故B错误，

f（﹣x）•|g（﹣x）|=﹣f（x）•|g（x）|是奇函数，故C正确．

|f（﹣x）•g（﹣x）|=|f（x）•g（x）|为偶函数，故D错误，

故选：C．

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断，根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键．

6．（5分）设D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB的中点，则$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}$=（　　）

A．$\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　C．$\overrightarrow{BC}$　　D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角．

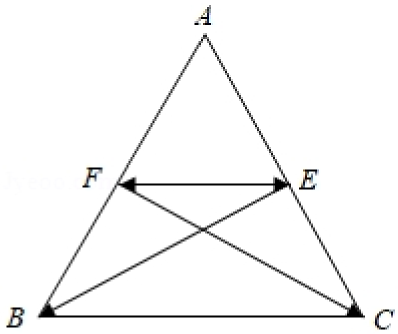
【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】利用向量加法的三角形法则，将$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{FC}$分解为$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$和$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}$的形式，进而根据D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB的中点，结合数乘向量及向量加法的平行四边形法则得到答案．

【解答】解：∵D，E，F分别为△ABC的三边BC，CA，AB的中点，

$\therefore \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})+(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC})=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}$,

故选：A.



【点评】本题考查的知识点是向量在几何中的应用，熟练掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则是解答的关键.

7. （5 分）在函数①y=cos|2x|，②y=|cosx|，③y=cos（$2x+\frac{\pi}{6}$），④y=tan（$2x-\frac{\pi}{4}$）中，最小正周期为π的所有函数为（　　）

A. ①②③　　B. ①③④　　C. ②④　　D. ①③

【考点】H1：三角函数的周期性.

【专题】57：三角函数的图像与性质.

【分析】根据三角函数的周期性，求出各个函数的最小正周期，从而得出结论.

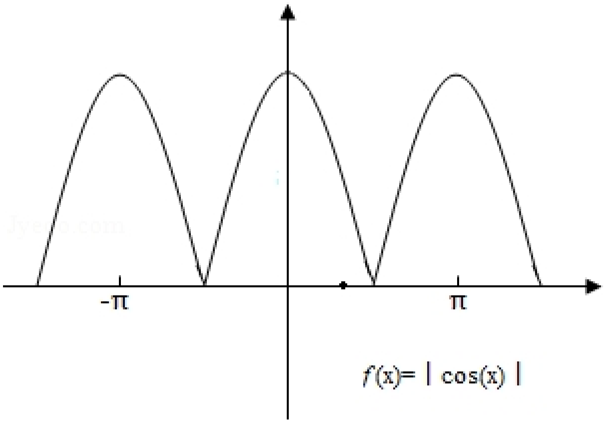
【解答】解：∵函数①y=cos｜2x｜=cos2x，它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

②y=｜cosx｜的最小正周期为$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{1}=\pi$，

③y=cos（$2x+\frac{\pi}{6}$）的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

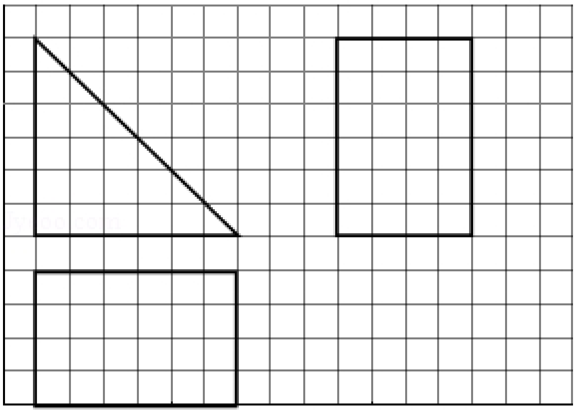
④y=tan（$2x-\frac{\pi}{4}$）的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，

故选：A.



【点评】本题主要考查三角函数的周期性及求法，属于基础题．

8．（5 分）如图，网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，则这个几何体是（　　）



A．三棱锥　　B．三棱柱　　C．四棱锥　　D．四棱柱

【考点】L7：简单空间图形的三视图．

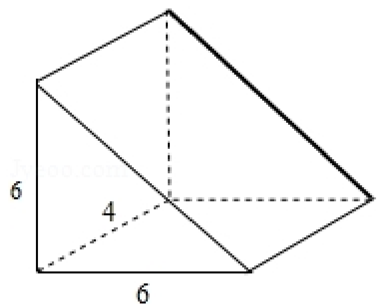
【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】由题意画出几何体的图形即可得到选项．

【解答】解：根据网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，

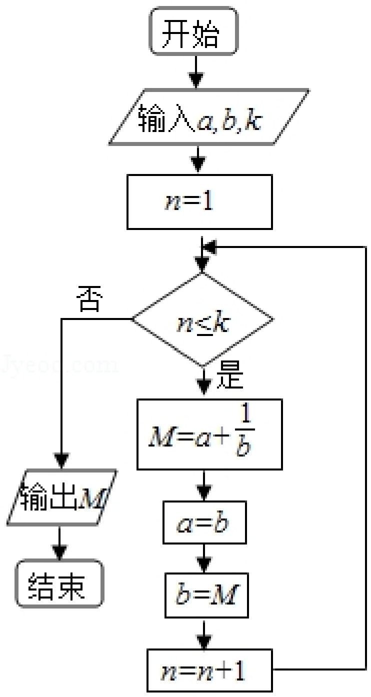
可知几何体如图：几何体是三棱柱．

故选：B．



【点评】本题考查三视图复原几何体的直观图的判断方法，考查空间想象能力．

9．（5 分）执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=（　　）



A．$\frac{20}{3}$　　B．$\frac{7}{2}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{15}{8}$

【考点】EF：程序框图．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出 M 的值．

【解答】解：由程序框图知：第一次循环 M=1+$\frac{1}{2}$=$\frac{3}{2}$，a=2，b=$\frac{3}{2}$，n=2；

第二次循环 M=2+$\frac{2}{3}$=$\frac{8}{3}$，a=$\frac{3}{2}$，b=$\frac{8}{3}$，n=3；

第三次循环 $M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$，$a=\frac{8}{3}$，$b=\frac{15}{8}$，n=4.

不满足条件 n≤3，跳出循环体，输出 $M=\frac{15}{8}$.

故选：D.

【点评】本题考查了当型循环结构的程序框图，根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法.

10．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=x$ 的焦点为 F，A（x_0，y_0）是 C 上一点，$AF=|\frac{5}{4}x_0|$，则 $x_0=$（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用抛物线的定义、焦点弦长公式即可得出.

【解答】解：抛物线 C：$y^2=x$ 的焦点为 F $(\frac{1}{4}，0)$，

∵A（x_0，y_0）是 C 上一点，$AF=|\frac{5}{4}x_0|$，$x_0>0$.

∴$\frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{1}{4}$，

解得 $x_0=1$.

故选：A.

【点评】本题考查了抛物线的定义、焦点弦长公式，属于基础题.

11．（5 分）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a\\x-y\leqslant -1\end{cases}$ 且 z=x+ay 的最小值为 7，则 a=（　　）

A．﹣5　　B．3　　C．﹣5 或 3　　D．5 或﹣3

【考点】7F：基本不等式及其应用.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】如图所示，当 a≥1 时，由 $\begin{cases}x-y=-1\\x+y=a\end{cases}$，解得 $A(\frac{a-1}{2}，\frac{a+1}{2})$．当直线 z=x+ay

经过 A 点时取得最小值为 7，同理对 a＜1 得出．

【解答】解：如图所示，

当 a≥1 时，由$\begin{cases}x-y=-1\\x+y=a\end{cases}$，

解得 $x=\frac{a-1}{2}$，$y=\frac{a+1}{2}$．

∴ $A(\frac{a-1}{2}，\frac{a+1}{2})$．

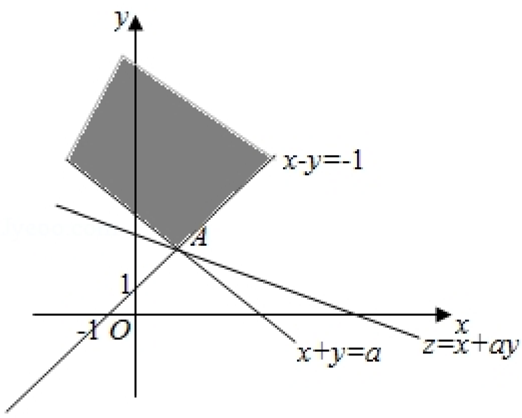
当直线 z=x+ay 经过 A 点时取得最小值为 7，

∴ $7=\frac{a-1}{2}+\frac{a(a+1)}{2}$，化为 $a^2+2a-15=0$，

解得 a=3，a=﹣5 舍去．

当 a＜1 时，不符合条件．

故选：B．



【点评】本题考查了线性规划的有关知识、直线的斜率与交点，考查了数形结合的思想方法，属于中档题．

12．（5 分）已知函数 f（x）$=ax^3-3x^2+1$，若 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（1，+∞）　B．（2，+∞）　C．（﹣∞，﹣1）　D．（﹣∞，﹣2）

【考点】53：函数的零点与方程根的关系．

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用．

【分析】由题意可得 $f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，$f(0)=1$；分类讨论确定函数的零点的个数及位置即可.

【解答】解：∵$f(x)=ax^3-3x^2+1$，

∴$f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$，$f(0)=1$；

①当 $a=0$ 时，$f(x)=-3x^2+1$ 有两个零点，不成立；

②当 $a>0$ 时，$f(x)=ax^3-3x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有零点，故不成立；

③当 $a<0$ 时，$f(x)=ax^3-3x^2+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点；

故 $f(x)=ax^3-3x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上没有零点；

而当 $x=\frac{2}{a}$ 时，$f(x)=ax^3-3x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上取得最小值；

故 $f(\frac{2}{a})=\frac{8}{a^2}-3\bullet\frac{4}{a^2}+1>0$；

故 $a<-2$；

综上所述，

实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$；

故选：D.

【点评】本题考查了导数的综合应用及分类讨论的思想应用，同时考查了函数的零点的判定的应用，属于基础题.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分

13. （5 分）将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行，则 2 本数学书相邻的概率为__$\frac{2}{3}$__.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】首先求出所有的基本事件的个数，再从中找到 2 本数学书相邻的个数，最后根据概率公式计算即可.

【解答】解：2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行，所有的基本事件有共有 A_3^3=6 种结果，

其中 2 本数学书相邻的有（数学 1，数学 2，语文），（数学 2，数学 1，语文），（语文，数学 1，数学 2），（语文，数学 2，数学 1）共 4 个，故本数学书相邻的概率 P=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查了古典概型的概率公式的应用，关键是不重不漏的列出满足条件的基本事件.

14．（5 分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为__A__.

【考点】F4：进行简单的合情推理.

【专题】5M：推理和证明.

【分析】可先由乙推出，可能去过 A 城市或 B 城市，再由甲推出只能是 A，B 中的一个，再由丙即可推出结论.

【解答】解：由乙说：我没去过 C 城市，则乙可能去过 A 城市或 B 城市，

但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市，则乙只能是去过 A，B 中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，

则由此可判断乙去过的城市为 A.

故答案为：A.

【点评】本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题.

15．（5 分）设函数 f（x）= $\begin{cases} e^{x-1}, & x<1 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geqslant 1 \end{cases}$，则使得 f（x）≤2 成立的 x 的取值范围是 $\underline{\quad x\leqslant 8\quad}$．

【考点】5B：分段函数的应用．

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用．

【分析】利用分段函数，结合 f（x）≤2，解不等式，即可求出使得 f（x）≤2 成立的 x 的取值范围．

【解答】解：x＜1 时，$e^{x-1}\leqslant 2$，

∴x≤ln2+1，

∴x＜1；

x≥1 时，$x^{\frac{1}{3}}\leqslant 2$，

∴x≤8，

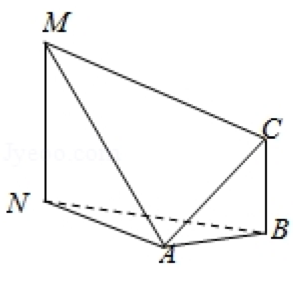
∴1≤x≤8，

综上，使得 f（x）≤2 成立的 x 的取值范围是 x≤8．

故答案为：x≤8．

【点评】本题考查不等式的解法，考查分段函数，考查学生的计算能力，属于基础题．

16．（5 分）如图，为测量山高 MN，选择 A 和另一座的山顶 C 为测量观测点，从 A 点测得 M 点的仰角∠MAN=60°，C 点的仰角∠CAB=45°以及∠MAC=75°；从 C 点测得∠MCA=60°，已知山高 BC=100m，则山高 MN=$\underline{\quad 150\quad}$m．



【考点】HU：解三角形．

【专题】12：应用题；58：解三角形．

【分析】△ABC 中，由条件利用直角三角形中的边角关系求得 AC；△AMC 中，由条件利用正弦定理求得 AM；Rt△AMN 中，根据 MN=AM•sin∠MAN，计算求得结果．

【解答】解：△ABC 中，∵∠BAC=45°，∠ABC=90°，BC=100，

∴$AC=\frac{100}{\sin45°}=100\sqrt{2}$．

△AMC 中，∵∠MAC=75°，∠MCA=60°，

∴∠AMC=45°，由正弦定理可得$\frac{AM}{\sin60°}=\frac{100\sqrt{2}}{\sin45°}$，解得 $AM=100\sqrt{3}$．

Rt△AMN 中，$MN=AM\bullet\sin\angle MAN=100\sqrt{3}\times\sin60°=150$（m），

故答案为：150．

【点评】本题主要考查正弦定理、直角三角形中的边角关系，属于中档题．

三、解答题：解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤

17．（12 分）已知$\{a_n\}$是递增的等差数列，a_2，a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$的前 n 项和．

【考点】84：等差数列的通项公式；8E：数列的求和．

【专题】15：综合题；54：等差数列与等比数列．

【分析】（1）解出方程的根，根据数列是递增的求出 a_2，a_4 的值，从而解出通项；

（2）将第一问中求得的通项代入，用错位相减法求和．

【解答】解：（1）方程 $x^2-5x+6=0$ 的根为 2，3．又$\{a_n\}$是递增的等差数列，

故 $a_2=2$，$a_4=3$，可得 $2d=1$，$d=\frac{1}{2}$，

故 $a_n=2+(n-2)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+1$，

（2）设数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$的前 n 项和为 S_n，

$S_n=\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{a_1}{2^2}+\frac{a_2}{2^3}+\frac{a_3}{2^4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^n}+\frac{a_n}{2^{n+1}}$，②

①- ②得$\frac{1}{2}S_n=\frac{a_1}{2}+d(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{a_n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{a_n}{2^{n+1}}$，

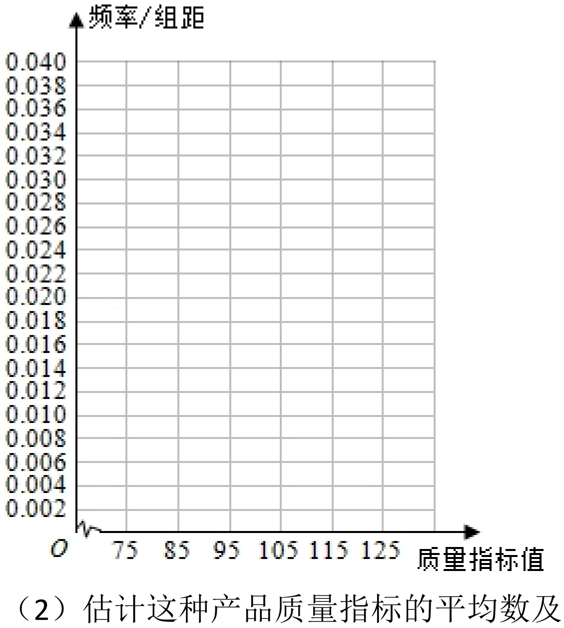
解得 $S_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n+2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$.

【点评】本题考查等的性质及错位相减法求和，是近几年高考对数列解答题考查的主要方式.

18．（12 分）从某企业生产的产品中抽取 100 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频数分布表：

质量指标值分组	[75，85）	[85，95）	[95，105）	[105，115）	[115，125）
频数	6	26	38	22	8

（1）在表格中作出这些数据的频率分布直方图；



（2）估计这种产品质量指标的平均数及方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（3）根据以上抽样调查数据，能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品 80%”的规定？

【考点】B8：频率分布直方图；BC：极差、方差与标准差．

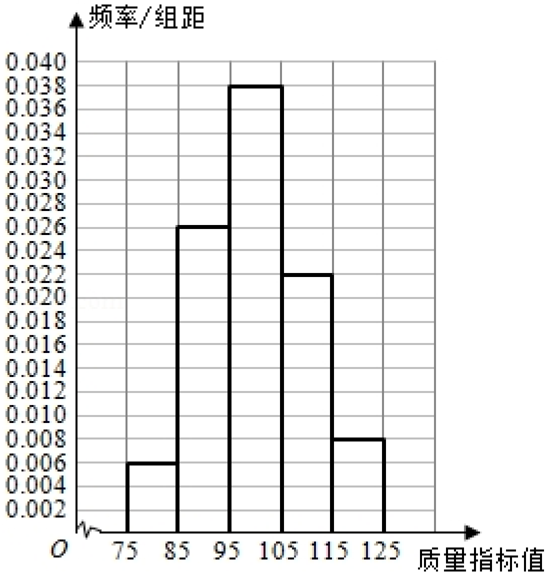
【专题】5I：概率与统计．

【分析】（1）根据频率分布直方图做法画出即可；

（2）用样本平均数和方差来估计总体的平均数和方差，代入公式计算即可．

（3）求出质量指标值不低于 95 的产品所占比例的估计值，再和 0.8 比较即可．

【解答】解：（1）频率分布直方图如图所示：



（2）质量指标的样本平均数为$\overline{x}$=80×0.06+90×0.26+100×0.38+110×0.22+120×0.08=100，

质量指标的样本的方差为 S^2=（﹣20）^{2}×0.06+（﹣10）^{2}×0.26+0×0.38+10^2×0.22+20^2×0.08=104，

这种产品质量指标的平均数的估计值为 100，方差的估计值为 104．

（3）质量指标值不低于 95 的产品所占比例的估计值为 0.38+0.22+0.08=0.68，

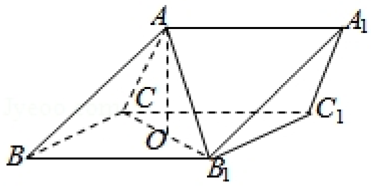
由于该估计值小于 0.8，故不能认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品 80%”的规定．

【点评】本题主要考查了频率分布直方图，样本平均数和方差，考查了学习的细心的绘图能力和精确的计算能力．

19．（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，B_1C 的中点为 O，且 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C．

（1）证明：$B_1C\perp AB$；

（2）若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，$BC=1$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高．



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LW：直线与平面垂直．

【专题】15：综合题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】（1）连接 BC_1，则 O 为 B_1C 与 BC_1 的交点，证明 $B_1C\perp$ 平面 ABO，可得 $B_1C\perp AB$；

（2）作 $OD\perp BC$，垂足为 D，连接 AD，作 $OH\perp AD$，垂足为 H，证明 $\triangle CBB_1$ 为等边三角形，求出 B_1 到平面 ABC 的距离，即可求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高．

【解答】（1）证明：连接 BC_1，则 O 为 B_1C 与 BC_1 的交点，

∵侧面 BB_1C_1C 为菱形，

∴$BC_1\perp B_1C$，

∵$AO\perp$ 平面 BB_1C_1C，

∴$AO\perp B_1C$，

∵$AO\cap BC_1=O$，

∴$B_1C\perp$ 平面 ABO，

∵$AB\subset$ 平面 ABO，

∴$B_1C\perp AB$；

（2）解：作 $OD\perp BC$，垂足为 D，连接 AD，作 $OH\perp AD$，垂足为 H，

∵$BC\perp AO$，$BC\perp OD$，$AO\cap OD=O$，

∴$BC\perp$ 平面 AOD，

∴$OH\perp BC$，

∵$OH\perp AD$，$BC\cap AD=D$，

∴OH⊥平面 ABC，

∵∠CBB_1=60°，

∴△CBB_1为等边三角形，

∵BC=1，∴OD=$\frac{\sqrt{3}}{4}$，

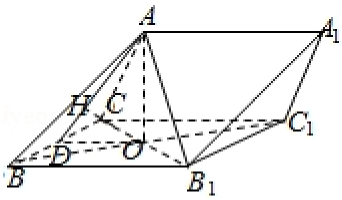
∵AC⊥AB_1，∴OA=$\frac{1}{2}B_1C$=$\frac{1}{2}$，

由 OH•AD=OD•OA，可得 AD=$\sqrt{OD^2+OA^2}$=$\frac{\sqrt{7}}{4}$，∴OH=$\frac{\sqrt{21}}{14}$，

∵O 为 B_1C 的中点，

∴B_1到平面 ABC 的距离为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，

∴三棱柱 ABC﹣$A_1B_1C_1$的高$\frac{\sqrt{21}}{7}$.



【点评】本题考查线面垂直的判定与性质，考查点到平面距离的计算，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

20．（12 分）已知点 P（2，2），圆 C：$x^2+y^2-8y=0$，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，O 为坐标原点.

（1）求 M 的轨迹方程；

（2）当|OP|=|OM|时，求 l 的方程及△POM 的面积.

【考点】%H：三角形的面积公式；J3：轨迹方程.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】（1）由圆 C 的方程求出圆心坐标和半径，设出 M 坐标，由$\overrightarrow{CM}$与$\overrightarrow{MP}$数量积等于 0 列式得 M 的轨迹方程；

（2）设 M 的轨迹的圆心为 N，由|OP|=|OM|得到 ON⊥PM．求出 ON 所在直线的斜率，由直线方程的点斜式得到 PM 所在直线方程，由点到直线的距离公式求出 O 到 l 的距离，再由弦心距、圆的半径及弦长间的关系求出 PM 的长度

，代入三角形面积公式得答案．

【解答】解：（1）由圆 C：$x^2+y^2-8y=0$，得 $x^2+(y-4)^2=16$，

∴圆 C 的圆心坐标为（0，4），半径为 4．

设 M（x，y），则$\overrightarrow{CM}=(x,\ y-4)$，$\overrightarrow{MP}=(2-x,\ 2-y)$．

由题意可得：$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$．

即 $x(2-x)+(y-4)(2-y)=0$．

整理得：$(x-1)^2+(y-3)^2=2$．

∴M 的轨迹方程是 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$．

（2）由（1）知 M 的轨迹是以点 N（1，3）为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆，

由于 $|OP|=|OM|$，

故 O 在线段 PM 的垂直平分线上，

又 P 在圆 N 上，

从而 ON⊥PM．

∵$k_{ON}=3$，

∴直线 l 的斜率为$-\frac{1}{3}$．

∴直线 PM 的方程为$y-2=-\frac{1}{3}(x-2)$，即 $x+3y-8=0$．

则 O 到直线 l 的距离为$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$．

又 N 到 l 的距离为$\frac{|1\times1+3\times3-8|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

∴$|PM|=2\sqrt{2-(\frac{\sqrt{10}}{5})^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$．

∴ $S_{\triangle POM}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{16}{5}$．

【点评】本题考查圆的轨迹方程的求法，训练了利用向量数量积判断两个向量的垂直关系，训练了点到直线的距离公式的应用，是中档题．

21．（12 分）设函数 $f(x)=alnx+\frac{1-a}{2}x^2-bx$（$a\neq1$），曲线 y=f（x）在点（1，

f（1））处的切线斜率为 0，

（1）求 b；

（2）若存在 $x_0\geqslant 1$，使得 f（x_0）$<\frac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围．

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】（1）利用导数的几何意义即可得出；

（2）对 a 分类讨论：当 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，当$\frac{1}{2}<a<1$时，当 $a>1$ 时，再利用导数研究函数的单调性极值与最值即可得出．

【解答】解：（1）$f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-b$（$x>0$），

∵曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线斜率为 0，

∴f′（1）=a+（1﹣a）×1﹣b=0，解得 b=1．

（2）函数 f（x）的定义域为（0，+∞），由（1）可知：$f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$，

∴ $f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-1=\frac{(1-a)}{x}(x-\frac{a}{1-a})(x-1)$．

①当 $a\leqslant\frac{1}{2}$时，则$\frac{a}{1-a}\leqslant 1$，

则当 $x>1$ 时，f′（x）>0，

∴函数 f（x）在（1，+∞）单调递增，

∴存在 $x_0\geqslant 1$，使得 f（x_0）$<\frac{a}{a-1}$的充要条件是$f(1)<\frac{a}{a-1}$，即$\frac{1-a}{2}-1<\frac{a}{a-1}$，

解得 $-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$；

②当$\frac{1}{2}<a<1$ 时，则$\frac{a}{1-a}>1$，

则当 $x\in(1,\frac{a}{1-a})$时，f′（x）<0，函数 f（x）在$(1,\frac{a}{1-a})$上单调递减；

当 $x\in(\frac{a}{1-a},+\infty)$时，f′（x）>0，函数 f（x）在$(\frac{a}{1-a},+\infty)$上单调递增．

∴存在 $x_0\geqslant 1$，使得 f（x_0）$<\frac{a}{a-1}$的充要条件是$f(\frac{a}{1-a})<\frac{a}{a-1}$，

而$f(\frac{a}{1-a})=a\ln\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1}>\frac{a}{a-1}$，不符合题意，应舍去．

③若 a＞1 时，f（1）$=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-a-1}{2}<\frac{a}{a-1}$，成立．

综上可得：a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-1)\cup(1,\ +\infty)$．

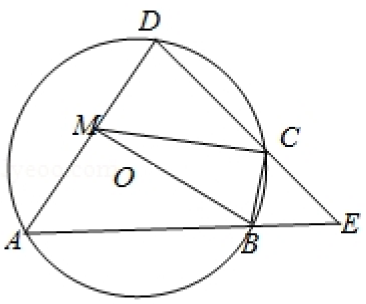
【点评】本题考查了导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性极值与最值等基础知识与基本技能方法，考查了分类讨论的思想方法，考查了推理能力和计算能力，属于难题．

请考生在第 22，23，24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。【选修 4-1：几何证明选讲】

22．（10 分）如图，四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E，且 CB=CE．

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设 AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，且 MB=MC，证明：△ADE 为等边三角形．



【考点】NB：弦切角；NC：与圆有关的比例线段．

【专题】15：综合题；5M：推理和证明．

【分析】（Ⅰ）利用四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，可得∠D=∠CBE，由 CB=CE，可得∠E=∠CBE，即可证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设 BC 的中点为 N，连接 MN，证明 AD∥BC，可得∠A=∠CBE，进而可得∠A=∠E，即可证明△ADE 为等边三角形．

【解答】证明：（Ⅰ）∵四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，

∴∠D=∠CBE，

∵CB=CE，

∴∠E=∠CBE，

∴∠D=∠E；

（Ⅱ）设 BC 的中点为 N，连接 MN，则由 MB=MC 知 MN⊥BC，

∴O 在直线 MN 上，

∵AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，

∴OM⊥AD，

∴AD∥BC，

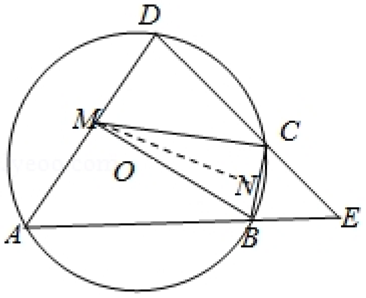
∴∠A=∠CBE，

∵∠CBE=∠E，

∴∠A=∠E，

由（Ⅰ）知，∠D=∠E，

∴△ADE 为等边三角形．



【点评】本题考查圆的内接四边形性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

23．已知曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t 为参数）

（Ⅰ）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程．

（Ⅱ）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，求|PA|的最大值与最小值．

【考点】KH：直线与圆锥曲线的综合；QH：参数方程化成普通方程．

【专题】5S：坐标系和参数方程．

【分析】（Ⅰ）联想三角函数的平方关系可取 x=2cosθ、y=3sinθ 得曲线 C 的参数方程，直接消掉参数 t 得直线 l 的普通方程；

（Ⅱ）设曲线 C 上任意一点 P（2cosθ，3sinθ）．由点到直线的距离公式得到 P 到直线 l 的距离，除以

sin30°进一步得到|PA|，化积后由三角函数的范围求得|PA|的最大值与最小值．

【解答】解：（Ⅰ）对于曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，可令 x=2cosθ、y=3sinθ，

故曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$，（θ 为参数）．

对于直线 l：$\begin{cases}x=2+t & ①\\y=2-2t & ②\end{cases}$，

由①得：t=x－2，代入②并整理得：2x+y－6=0；

（Ⅱ）设曲线 C 上任意一点 P（2cosθ，3sinθ）．

P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$．

则 $|PA|=\frac{d}{\sin30^\circ}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中 α 为锐角．

当 sin（θ+α）=－1 时，|PA|取得最大值，最大值为$\frac{22\sqrt{5}}{5}$．

当 sin（θ+α）=1 时，|PA|取得最小值，最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

【点评】本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题．

【选修 4-5：不等式选讲】

24．若 a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$．

（Ⅰ）求 a^3+b^3 的最小值；

（Ⅱ）是否存在 a，b，使得 2a+3b=6？并说明理由．

【考点】RI：平均值不等式．

【专题】59：不等式的解法及应用．

【分析】（Ⅰ）由条件利用基本不等式求得 ab≥2，再利用基本不等式求得 a^3+b^3 的最小值．

（Ⅱ）根据 $ab\geqslant 2$ 及基本不等式求的 $2a+3b>8$，从而可得不存在 a，b，使得 $2a+3b=6$.

【解答】解：（Ⅰ）∵$a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，

∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，∴$ab\geqslant 2$，

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时取等号.

∵$a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{(ab)^3}\geqslant 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时取等号，

∴a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

（Ⅱ）∵$2a+3b\geqslant 2\sqrt{2a\cdot 3b}=2\sqrt{6ab}$，当且仅当 $2a=3b$ 时，取等号.

而由（1）可知，$2\sqrt{6ab}\geqslant 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>6$，

故不存在 a，b，使得 $2a+3b=6$ 成立.

【点评】本题主要考查基本不等式在最值中的应用，要注意检验等号成立条件是否具备，属于基础题.