2013 年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5 分）设集合 U={1，2，3，4，5}，集合 A={1，2}，则$\complement_U A$=（　　）

A．{1，2}　　B．{3，4，5}　　C．{1，2，3，4，5}　D．∅

2．（5 分）若 α 为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，则 cosα=（　　）

A．$-\frac{12}{13}$　　B．$-\frac{5}{13}$　　C．$\frac{5}{13}$　　D．$\frac{12}{13}$

3．（5 分）已知向量$\vec{m}$=（λ+1，1），$\vec{n}$=（λ+2，2），若（$\vec{m}+\vec{n}$）⊥（$\vec{m}-\vec{n}$），则 λ=（　　）

A．﹣4　　B．﹣3　　C．﹣2　　D．﹣1

4．（5 分）不等式$|x^2-2|<2$的解集是（　　）

A．（﹣1，1）　B．（﹣2，2）　C．（﹣1，0）∪（0，1）　D．（﹣2，0）∪（0，2）

5．（5 分）$(x+2)^8$的展开式中 x^6 的系数是（　　）

A．28　　B．56　　C．112　　D．224

6．（5 分）函数 $f(x)=\log_2(1+\frac{1}{x})$（x＞0）的反函数 $f^{-1}(x)$=（　　）

A．$\frac{1}{2^x-1}(x>0)$　B．$\frac{1}{2^x-1}(x\neq0)$　C．2^x-1（x∈R）　D．2^x-1（x＞0）

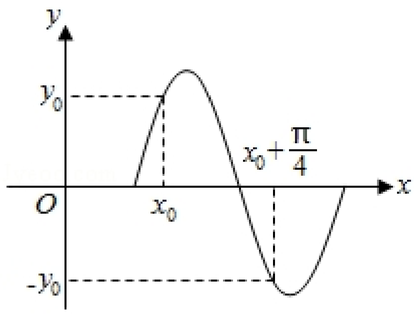
7．（5 分）已知数列{a_n}满足 $3a_{n+1}+a_n=0$，$a_2=-\frac{4}{3}$，则{a_n}的前 10 项和等于（　　）

A．﹣6（$1-3^{-10}$）　　B．$\frac{1}{9}(1-3^{-10})$　　C．3（$1-3^{-10}$）　　D．3（$1+3^{-10}$）

8．（5 分）已知 F_1（﹣1，0），F_2（1，0）是椭圆 C 的两个焦点，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交椭圆于 A、B 两点，且|AB|=3，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

9．（5 分）若函数 y=sin（ωx+ϕ）（ω＞0）的部分图象如图，则 ω=（　　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

10．（5 分）已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点（﹣1，a+2）处切线的斜率为 8，a=（　　）

A．9　　B．6　　C．﹣9　　D．﹣6

11．（5 分）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

12．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M（﹣2，2），过点 F 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 k=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13．（5 分）设 f（x）是以 2 为周期的函数，且当 x∈[1，3）时，f（x）=x﹣2，则 f（﹣1）=_______.

14．（5 分）从进入决赛的 6 名选手中决出 1 名一等奖，2 名二等奖，3 名三等奖，则可能的决赛结果共有_______种．（用数字作答）

15．（5 分）若 x、y 满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+3y\geqslant 4\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$，则 z=﹣x+y 的最小值为_______.

16．（5 分）已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆，其公共弦长等于球 O 的半径，$OK=\frac{3}{2}$，且圆O与圆K所在的平面所成角为60°，则球 O 的表面积等于_______.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10 分）等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\frac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

18．（12 分）设△ABC 的内角 A，B，C 的内角对边分别为 a，b，c，满足（a+b+c）（a﹣b+c）=ac.

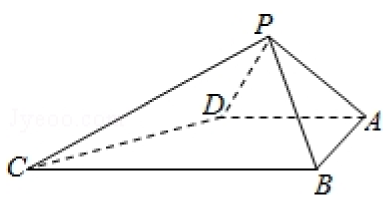
（Ⅰ）求 B.

（Ⅱ）若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，求 C.

19．（12 分）如图，四棱锥 P﹣ABCD 中，∠ABC=∠BAD=90°，BC=2AD，△PAB 与△PAD 都是边长为 2 的等边三角形.

（Ⅰ）证明：PB⊥CD；

（Ⅱ）求点 A 到平面 PCD 的距离.



20．（12 分）甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛，其中两人比赛，另一人当裁判，每局比赛结束时，负的一方在下一局当裁判，设各局中双方获胜的概率均为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果都相互独立，第 1 局甲当裁判.

（Ⅰ）求第 4 局甲当裁判的概率；

（Ⅱ）求前 4 局中乙恰好当 1 次裁判概率.

21．（12 分）已知函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3x+1$.

（Ⅰ）求 $a=\sqrt{2}$时，讨论 f（x）的单调性；

（Ⅱ）若 $x\in[2，+\infty)$ 时，f（x）$\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

22．（12 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 3，直线 y=2 与 C 的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$.

（I）求 a，b；

（II）设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别相交于 A、B 两点，且$|AF_1|=|BF_1|$，证明：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列.

2013年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）设集合U={1，2，3，4，5}，集合A={1，2}，则C_UA=（　　）

A．{1，2}　　B．{3，4，5}　　C．{1，2，3，4，5}　D．∅

【考点】1F：补集及其运算.

【专题】11：计算题.

【分析】由题意，直接根据补集的定义求出C_UA，即可选出正确选项

【解答】解：因为U={1，2，3，4，5，}，集合A={1，2}

所以C_UA={3，4，5}

故选：B．

【点评】本题考查补集的运算，理解补集的定义是解题的关键

2．（5分）若α为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，则cosα=（　　）

A．$-\frac{12}{13}$　　B．$-\frac{5}{13}$　　C．$\frac{5}{13}$　　D．$\frac{12}{13}$

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】由α为第二象限角，得到cosα小于0，根据sinα的值，利用同角三角函数间的基本关系即可求出cosα的值.

【解答】解：∵α为第二象限角，且$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，

∴$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$.

故选：A．

【点评】此题考查了同角三角函数间的基本关系，熟练掌握基本关系是解本题的

关键．

3．（5 分）已知向量$\overrightarrow{m}$=（λ+1，1），$\overrightarrow{n}$=（λ+2，2），若（$\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}$）⊥（$\overrightarrow{m}-\overrightarrow{n}$），则 λ=（　　）

A．﹣4　　B．﹣3　　C．﹣2　　D．﹣1

【考点】9T：数量积判断两个平面向量的垂直关系．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】利用向量的运算法则、向量垂直与数量积的关系即可得出．

【解答】解：∵$\overrightarrow{m}$=(λ+1，1)，$\overrightarrow{n}$=(λ+2，2)．

∴$\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}$=（2λ+3，3），$\overrightarrow{m}-\overrightarrow{n}$=(﹣1，﹣1)．

∵$(\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n})\perp(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{n})$，

∴$(\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n})\cdot(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{n})=0$，

∴﹣（2λ+3）﹣3=0，解得 λ=﹣3．

故选：B．

【点评】熟练掌握向量的运算法则、向量垂直与数量积的关系是解题的关键．

4．（5 分）不等式$|x^2-2|<2$的解集是（　　）

A．（﹣1，1）　B．（﹣2，2）　C．（﹣1，0）∪（0，1）　D．（﹣2，0）∪（0，2）

【考点】R5：绝对值不等式的解法．

【专题】11：计算题；59：不等式的解法及应用．

【分析】直接利用绝对值不等式的解法，去掉绝对值后，解二次不等式即可．

【解答】解：不等式$|x^2-2|<2$的解集等价于，不等式$-2<x^2-2<2$的解集，

即 $0<x^2<4$，

解得 x∈（− 2，0）∪（0，2）.

故选：D.

【点评】本题考查绝对值不等式的解法，考查转化思想与计算能力.

5. （5 分）$(x+2)^8$ 的展开式中 x^6 的系数是（　　）

A. 28　　B. 56　　C. 112　　D. 224

【考点】DA：二项式定理.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项，令 x 的指数为 6 求出 x^6 的系数.

【解答】解：$(x+2)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}2^r$

令 8− r=6 得 r=2，

∴展开式中 x^6 的系数是 $2^2C_8^2=112$.

故选：C.

【点评】本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具.

6. （5 分）函数 $f(x)=\log_2(1+\frac{1}{x})$（$x>0$）的反函数 $f^{-1}(x)=$（　　）

A. $\frac{1}{2^x-1}(x>0)$　　B. $\frac{1}{2^x-1}(x\neq0)$　　C. 2^x-1（x∈R）　　D. 2^x-1（x>0）

【考点】4R：反函数.

【专题】51：函数的性质及应用.

【分析】把 y 看作常数，求出 x：$x=\frac{1}{2^y+1}$，x，y 互换，得到 $y=\log_2(1+\frac{1}{x})$ 的反函数．注意反函数的定义域.

【解答】解：设 $y=\log_2(1+\frac{1}{x})$，

把 y 看作常数，求出 x：

$1+\frac{1}{x}=2^y$，$x=\frac{1}{2^y-1}$，其中 $y>0$，

x，y 互换，得到 $y=\log_2$（$1+\frac{1}{x}$）的反函数：$y=\frac{1}{2^x-1}(x>0)$，

故选：A.

【点评】本题考查对数函数的反函数的求法，解题时要认真审题，注意对数式和指数式的相互转化.

7．（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足 $3a_{n+1}+a_n=0$，$a_2=-\frac{4}{3}$，则$\{a_n\}$的前 10 项和等于（　　）

A．$-6(1-3^{-10})$　　B．$\frac{1}{9}(1-3^{-10})$　　C．$3(1-3^{-10})$

D．$3(1+3^{-10})$

【考点】89：等比数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列.

【分析】由已知可知，数列$\{a_n\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，结合已知 $a_2=-\frac{4}{3}$可求 a_1，然后代入等比数列的求和公式可求

【解答】解：∵$3a_{n+1}+a_n=0$

∴$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{3}$

∴数列$\{a_n\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列

∵ $a_2=-\frac{4}{3}$

∴$a_1=4$

由等比数列的求和公式可得，$S_{10}=\frac{4[1-(-\frac{1}{3})^{10}]}{1+\frac{1}{3}}=3(1-3^{-10})$

故选：C.

【点评】本题主要考查了等比数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础试题

8．（5 分）已知 F_1（－ 1，0），F_2（1，0）是椭圆 C 的两个焦点，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交椭圆于 A、B 两点，且|AB|=3，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

【考点】K3：椭圆的标准方程．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，根据题意可得$\sqrt{a^2-b^2}=1$．再由 AB 经过右焦点 F_2 且垂直于 x 轴且|AB|=3 算出 A、B 的坐标，代入椭圆方程得$\frac{1^2}{a^2}+\frac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1$，两式联解即可算出 $a^2=4$，$b^2=3$，从而得到椭圆 C 的方程．

【解答】解：设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

可得 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，所以 $a^2-b^2=1$…①

∵AB 经过右焦点 F_2 且垂直于 x 轴，且|AB|=3

∴可得 A（1，$\frac{3}{2}$），B（1，－ $\frac{3}{2}$），代入椭圆方程得$\frac{1^2}{a^2}+\frac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1$，…②

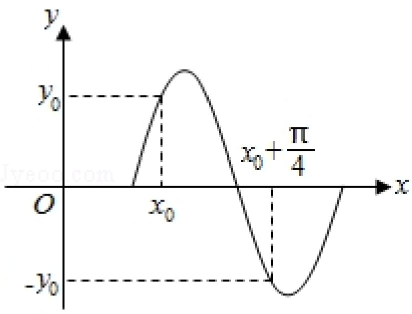
联解①②，可得 $a^2=4$，$b^2=3$

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

故选：C．

【点评】本题给出椭圆的焦距和通径长，求椭圆的方程．着重考查了椭圆的标准方程和椭圆的简单几何性质等知识，属于基础题．

9．（5 分）若函数 y=sin（ωx+ϕ）（ω＞0）的部分图象如图，则 ω=（　　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【考点】HK：由 y=Asin（ωx+φ）的部分图象确定其解析式；HL：y=Asin（ωx+φ）中参数的物理意义．

【专题】11：计算题；57：三角函数的图像与性质．

【分析】利用函数图象已知的两点的横坐标的差值，求出函数的周期，然后求解ω．

【解答】解：由函数的图象可知，（x_0，y_0）与$(x_0+\frac{\pi}{4},\ -y_0)$，纵坐标相反，而且不是相邻的对称点，

所以函数的周期 $T=2(x_0+\frac{\pi}{4}-x_0)=\frac{\pi}{2}$，

所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$．

故选：B．

【点评】本题考查三角函数解析式以及函数的周期的求法，考查学生的视图用图能力．

10．（5 分）已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点（﹣1，a+2）处切线的斜率为 8，a=（　　）

A．9　　B．6　　C．﹣9　　D．﹣6

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程．

【专题】53：导数的综合应用．

【分析】先求导函数，再利用导数的几何意义，建立方程，即可求得 a 的值．

【解答】解：∵$y=x^4+ax^2+1$，

∴$y'=4x^3+2ax$，

∵曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点（﹣1，a+2）处切线的斜率为 8，

∴﹣4﹣2a=8

∴a=﹣6

故选：D．

【点评】本题考查导数的几何意义，考查学生的计算能力，属于基础题．

11．（5 分）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

【考点】MI：直线与平面所成的角．

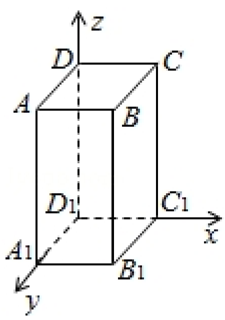
【专题】15：综合题；16：压轴题；5G：空间角；5H：空间向量及应用．

【分析】设 AB=1，则 $AA_1=2$，分别以$\overrightarrow{D_1A_1}$、$\overrightarrow{D_1C_1}$、$\overrightarrow{D_1D}$的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，设$\vec{n}$=（x，y，z）为平面 BDC_1 的一个法向量，CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DC}|}|$，在空间坐标系下求出向量坐标，代入计算即可．

【解答】解：设 AB=1，则 $AA_1=2$，分别以$\overrightarrow{D_1A_1}$、$\overrightarrow{D_1C_1}$、$\overrightarrow{D_1D}$的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

如下图所示：



则 D（0，0，2），C_1（1，0，0），B（1，1，2），C（1，0，2），

$\overrightarrow{DB}$=（1，1，0），$\overrightarrow{DC_1}$=（1，0，﹣2），$\overrightarrow{DC}$=（1，0，0），

设$\overrightarrow{n}$=（x，y，z）为平面 BDC_1 的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y=0\\ x-2z=0\end{cases}$，取$\overrightarrow{n}$=（2，﹣2，1），

设 CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{DC}|}|=\frac{2}{3}$，

故选：A．

【点评】本题考查直线与平面所成的角，考查空间向量的运算及应用，准确理解线面角与直线方向向量、平面法向量夹角关系是解决问题的关键．

12．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M（﹣2，2），过点 F 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 k=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．2

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算；K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】斜率 k 存在，设直线 AB 为 y=k（x﹣2），代入抛物线方程，利用 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$=（$x_1$+2，$y_1$﹣2）•（$x_2$+2，$y_2$﹣2）=0，即可求出 k 的值．

【解答】解：由抛物线 C：$y^2=8x$ 得焦点（2，0），

由题意可知：斜率 k 存在，设直线 AB 为 y=k（x﹣2），

代入抛物线方程，得到 $k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$，△>0，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）．

∴$x_1+x_2=4+\frac{8}{k^2}$，$x_1x_2=4$．

∴$y_1+y_2=\frac{8}{k}$，$y_1y_2=-16$，

又$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，

$\therefore \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=$（$x_1+2$，$y_1-2$）•（$x_2+2$，$y_2-2$）$=\frac{16}{k^2}-\frac{16}{k}+4=0$

$\therefore k=2$.

故选：D.

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查向量的数量积公式，考查学生的计算能力，属于中档题.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13．（5 分）设 f（x）是以 2 为周期的函数，且当 x∈[1，3）时，f（x）=x﹣2，则 f（﹣1）=__﹣1__.

【考点】3T：函数的值.

【专题】11：计算题.

【分析】利用函数的周期，求出 f（﹣1）=f（1），代入函数的解析式求解即可.

【解答】解：因设 f（x）是以 2 为周期的函数，且当 x∈[1，3）时，f（x）=x﹣2，

则 f（﹣1）=f（1）=1﹣2=﹣1.

故答案为：﹣1.

【点评】本题考查函数的周期的应用，函数值的求法，函数的定义域是解题的关键，考查计算能力.

14．（5 分）从进入决赛的 6 名选手中决出 1 名一等奖，2 名二等奖，3 名三等奖，则可能的决赛结果共有__60__种.（用数字作答）

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题.

【专题】11：计算题.

【分析】6 名选手中决出 1 名一等奖有 A_6^1种方法，2 名二等奖，C_5^2种方法，利用分步计数原理即可得答案.

【解答】解：依题意，可分三步，第一步从 6 名选手中决出 1 名一等奖有A_6^1种方法，

第二步，再决出 2 名二等奖，有C_5^2种方法，

第三步，剩余三人为三等奖，

根据分步乘法计数原理得：共有$A_6^1 \bullet C_5^2=60$ 种方法.

故答案为：60.

【点评】本题考查排列、组合及简单计数问题，掌握分步计数原理是解决问题的关键，属于中档题.

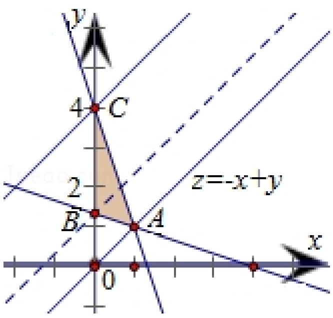
15．（5 分）若 x、y 满足约束条件$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x+3y\geqslant 4 \\ 3x+y\leqslant 4 \end{cases}$，则 z=﹣ x+y 的最小值为__0__.

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】11：计算题；16：压轴题；59：不等式的解法及应用.

【分析】作出题中不等式组表示的平面区域，得如图的△ABC 及其内部，再将目标函数 z=﹣ x+y 对应的直线进行平移，可得当 x=y=1 时，目标函数 z 取得最小值，从而得到本题答案.

【解答】解：作出不等式组$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x+3y\geqslant 4 \\ 3x+y\leqslant 4 \end{cases}$表示的平面区域，



得到如图的△ABC 及其内部，其中 A（1，1），B（0，$\frac{4}{3}$），C（0，4）

设 z=F（x，y）=﹣ x+y，将直线 l：z=﹣ x+y 进行平移，

当 l 经过点 A 时，目标函数 z 达到最小值

∴$z_{最小值}$=F（1，1）=－1+1=0

故答案为：0

【点评】题给出二元一次不等式组，求目标函数 z=－x+y 的最小值，着重考查了二元一次不等式组表示的平面区域和简单的线性规划等知识，属于基础题．

16．（5 分）已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆，其公共弦长等于球 O 的半径，$OK=\frac{3}{2}$，且圆O与圆K所在的平面所成角为60°，则球 O 的表面积等于 16π．

【考点】LG：球的体积和表面积．

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】正确作出图形，利用勾股定理，建立方程，即可求得结论．

【解答】解：如图所示，设球 O 的半径为 r，AB 是公共弦，∠OCK 是面面角

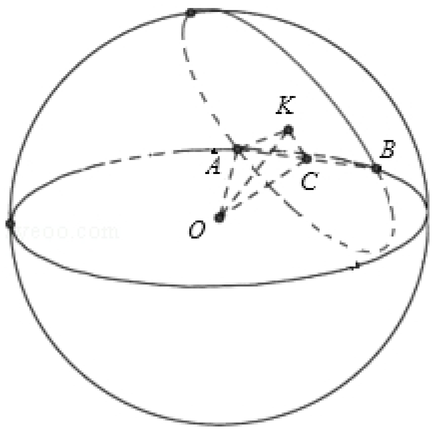
根据题意得 $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$CK=\frac{\sqrt{3}}{4}r$

在△OCK 中，$OC^2=OK^2+CK^2$，即 $\frac{3}{4}r^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}r^2$

∴$r^2=4$

∴球 O 的表面积等于 $4\pi r^2=16\pi$

故答案为 16π



【点评】本题考查球的表面积，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10 分）等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\frac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

【考点】84：等差数列的通项公式；8E：数列的求和.

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列.

【分析】（I）由 $a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，结合等差数列的通项公式可求 a_1，d，进而可求 a_n

（II）由$b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$，利用裂项求和即可求解

【解答】解：（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d

∵$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$，

∴$\begin{cases}a_1+6d=4\\a_1+18d=2(a_1+8d)\end{cases}$

解得，$a_1=1$，$d=\frac{1}{2}$

∴$a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1+n}{2}$

（II）∵$b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$

∴$s_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$

【点评】本题主要考查了等差数列的通项公式及裂项求和方法的应用，试题比较容易

18. （12 分）设△ABC 的内角 A，B，C 的内角对边分别为 a，b，c，满足（a+b+c）（a﹣ b+c）=ac.

（Ⅰ）求 B.

（Ⅱ）若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，求 C.

【考点】GP：两角和与差的三角函数；HR：余弦定理.

【专题】58：解三角形.

【分析】（I）已知等式左边利用多项式乘多项式法则计算，整理后得到关系式，利用余弦定理表示出cosB，将关系式代入求出cosB的值，由B为三角形的内角，利用特殊角的三角函数值即可求出B的度数；

（II）由（I）得到A+C的度数，利用两角和与差的余弦函数公式化简cos（A﹣C），变形后将cos（A+C）及2sinAsinC的值代入求出cos（A﹣C）的值，利用特殊角的三角函数值求出A﹣C的值，与A+C的值联立即可求出C的度数.

【解答】解：（I）∵（a+b+c）（a﹣b+c）=（a+c）^{2}﹣b^2=ac，

∴$a^2+c^2-b^2=-ac$，

∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

又B为三角形的内角，

则B=120°；

（II）由（I）得：A+C=60°，∵$\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，$\cos(A+C)=\frac{1}{2}$，

∴cos（A﹣C）=cosAcosC+sinAsinC=cosAcosC﹣sinAsinC+2sinAsinC=cos（A+C）+2sinAsinC$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}-1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴A﹣C=30°或A﹣C=﹣30°，

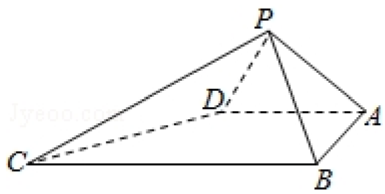
则C=15°或C=45°.

【点评】此题考查了余弦定理，两角和与差的余弦函数公式，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握余弦定理是解本题的关键.

19．（12分）如图，四棱锥P﹣ABCD中，∠ABC=∠BAD=90°，BC=2AD，△PAB与△PAD都是边长为2的等边三角形.

（Ⅰ）证明：PB⊥CD；

（Ⅱ）求点A到平面PCD的距离.



【考点】LW：直线与平面垂直；MK：点、线、面间的距离计算．

【专题】5F：空间位置关系与距离．

【分析】（Ⅰ）取 BC 的中点 E，连接 DE，则 ABED 为正方形，过 P 作 PO⊥平面 ABCD，垂足为 O，连接 OA，OB，OD，OE，证明 PB⊥OE，OE∥CD，即可证明 PB⊥CD；

（Ⅱ）取 PD 的中点 F，连接 OF，证明 O 到平面 PCD 的距离 OF 就是 A 到平面 PCD 的距离，即可求得点 A 到平面 PCD 的距离．

【解答】（Ⅰ）证明：取 BC 的中点 E，连接 DE，则 ABED 为正方形，过 P 作 PO⊥平面 ABCD，垂足为 O，连接 OA，OB，OD，OE

由△PAB 和△PAD 都是等边三角形知 PA=PB=PD

∴OA=OB=OD，即 O 为正方形 ABED 对角线的交点

∴OE⊥BD，∴PB⊥OE

∵O 是 BD 的中点，E 是 BC 的中点，∴OE∥CD

∴PB⊥CD；

（Ⅱ）取 PD 的中点 F，连接 OF，则 OF∥PB

由（Ⅰ）知 PB⊥CD，∴OF⊥CD，

∵ $OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，$OP=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{2}$

∴△POD 为等腰三角形，∴OF⊥PD

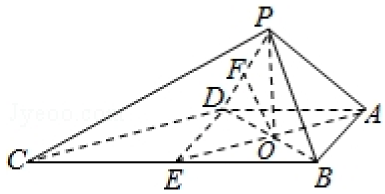
∵PD∩CD=D，∴OF⊥平面 PCD

∵AE∥CD，CD⊂平面 PCD，AE⊄平面 PCD，∴AE∥平面 PCD

∴O 到平面 PCD 的距离 OF 就是 A 到平面 PCD 的距离

∵$OF=\frac{1}{2}PB=1$

∴点 A 到平面 PCD 的距离为 1．



【点评】本题考查线线垂直，考查点到面的距离的计算，考查学生转化的能力，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

20．（12 分）甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛，其中两人比赛，另一人当裁判，每局比赛结束时，负的一方在下一局当裁判，设各局中双方获胜的概率均为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果都相互独立，第 1 局甲当裁判．

（Ⅰ）求第 4 局甲当裁判的概率；

（Ⅱ）求前 4 局中乙恰好当 1 次裁判概率．

【考点】C5：互斥事件的概率加法公式；C8：相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】（I）设 A_1 表示事件“第二局结果为甲胜”，A_2 表示事件“第三局甲参加比赛结果为甲负”，A 表示事件“第四局甲当裁判”，可得 $A=A_1\bullet A_2$．利用相互独立事件的概率计算公式即可得出；

（II）设 B_1 表示事件“第一局比赛结果为乙胜”，B_2 表示事件“第二局乙参加比赛结果为乙胜”，B_3 表示事件“第三局乙参加比赛结果为乙胜”，B 表示事件“前 4 局中乙恰好当 1 次裁判”．可得 $B=\overline{B_1}\cdot B_3+B_1\cdot B_2\cdot\overline{B_3}+B_1\cdot\overline{B_2}$，利用互斥事件和相互独立事件的概率计算公式即可得出．

【解答】解：（I）设 A_1 表示事件“第二局结果为甲胜”，A_2 表示事件“第三局甲参加比赛结果为甲负”，A 表示事件“第四局甲当裁判”．

则 $A=A_1\bullet A_2$．

$P(A)=P(A_1\bullet A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$．

（II）设 B_1 表示事件“第一局比赛结果为乙胜”，B_2 表示事件“第二局乙参加比赛结果为乙胜”，

B_3表示事件"第三局乙参加比赛结果为乙胜"，B 表示事件"前 4 局中乙恰好当 1 次裁判".

则 $B=\overline{B_1}\cdot B_3+B_1\cdot B_2\cdot\overline{B_3}+B_1\cdot\overline{B_2}$,

则 P（B）=P（$\overline{B_1}\cdot B_3+B_1\cdot B_2\cdot\overline{B_3}+B_1\cdot\overline{B_2}$）

$=P(\overline{B_1}\cdot B_3)+P(B_1\cdot B_2\cdot\overline{B_3})+P(B_1\cdot\overline{B_2})$

$=P(\overline{B_1})P(B_3)+P(B_1)P(B_2)P(\overline{B_3})+P(B_1)P(\overline{B_2})$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

【点评】正确理解题意和熟练掌握相互独立事件和互斥事件的概率计算公式是解题的关键.

21．（12 分）已知函数 f（x）$=x^3+3ax^2+3x+1$.

（Ⅰ）求 $a=\sqrt{2}$时，讨论 f（x）的单调性；

（Ⅱ）若 x∈[2，+∞）时，f（x）≥0，求 a 的取值范围.

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性；6E：利用导数研究函数的最值.

【专题】16：压轴题；53：导数的综合应用.

【分析】（I）把 $a=\sqrt{2}$代入可得函数 f（x）的解析式，求导数令其为 0 可得 $x=-\sqrt{2}-1$，或 $x=-\sqrt{2}+1$，判断函数在区间（$-\infty$，$-\sqrt{2}-1$），（$-\sqrt{2}-1$，$-\sqrt{2}+1$），（$-\sqrt{2}+1$，+∞）的正负可得单调性；（II）由 f（2）≥0，可得 $a\geq-\frac{5}{4}$，当 $a\geq-\frac{5}{4}$，x∈（2，+∞）时，由不等式的证明方法可得 f′（x）>0，可得单调性，进而可得当 x∈[2，+∞）时，有 f（x）≥f（2）≥0 成立，进而可得 a 的范围.

【解答】解：（I）当 $a=\sqrt{2}$时，f（x）$=x^3+3\sqrt{2}x^2+3x+1$，

f′（x）$=3x^2+6\sqrt{2}x+3$，令 f′（x）=0，可得 $x=-\sqrt{2}-1$，或 $x=-\sqrt{2}+1$，

当 x∈（$-\infty$，$-\sqrt{2}-1$）时，f′（x）>0，f（x）单调递增，

当 x∈（$-\sqrt{2}-1$，$-\sqrt{2}+1$）时，f′（x）<0，f（x）单调递减，

当 x∈（$-\sqrt{2}+1$，+∞）时，f′（x）＞0，f（x）单调递增；

（II）由 f（2）≥0，可解得 $a\geq -\frac{5}{4}$，当 $a\geq -\frac{5}{4}$，x∈（2，+∞）时，

f′（x）=3（$x^2+2ax+1$）≥3（$x^2-\frac{5}{2}x+1$）=3（$x-\frac{1}{2}$）（x﹣2）＞0，

所以函数 f（x）在（2，+∞）单调递增，于是当 x∈[2，+∞）时，f（x）≥f（2）≥0，

综上可得，a 的取值范围是[$-\frac{5}{4}$，+∞）

【点评】本题考查利用导数研究函数的单调性，涉及函数的最值问题，属中档题．

22．（12 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 3，直线 y=2 与 C 的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$．

（I）求 a，b；

（II）设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别相交于 A、B 两点，且$|AF_1|=|BF_1|$，证明：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列．

【考点】K4：椭圆的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】14：证明题；15：综合题；16：压轴题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（I）由题设，可由离心率为 3 得到参数 a，b 的关系，将双曲线的方程用参数 a 表示出来，再由直线 y=2 与 C 的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$建立方程求出参数 a 即可得到双曲线的方程；

（II）由（I）的方程求出两焦点坐标，设出直线 l 的方程设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），将其与双曲线 C 的方程联立，得出 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8}$，$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$，再利用$|AF_1|=|BF_1|$建立关于 A，B 坐标的方程，得出两点横坐标的关系 $x_1+x_2=-\frac{2}{3}$，由此方程求出 k 的值，得出直线的方程，从而可求得$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$

，再利用等比数列的性质进行判断即可证明出结论.

【解答】解：（I）由题设知$\frac{c}{a}$=3，即$\frac{b^2+a^2}{a^2}$=9，故 $b^2=8a^2$

所以 C 的方程为 $8x^2-y^2=8a^2$

将 y=2 代入上式，并求得 $x=\pm\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$，

由题设知，$2\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，解得 $a^2=1$

所以 a=1，$b=2\sqrt{2}$

（II）由（I）知，F_1（﹣3，0），F_2（3，0），C 的方程为 $8x^2-y^2=8$　　①

由题意，可设 l 的方程为 y=k（x﹣3），$|k|<2\sqrt{2}$代入①并化简得（k^2-8）

$x^2-6k^2x+9k^2+8=0$

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则 $x_1\leqslant-1$，$x_2\geqslant1$，$x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8}$，$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$，于是

$|AF_1|=\sqrt{(x_1+3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+3)^2+8x_1^2-8}=-(3x_1+1)$，

$|BF_1|=\sqrt{(x_2+3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2+3)^2+8x_2^2-8}=3x_2+1$，

$|AF_1|=|BF_1|$得﹣（$3x_1+1$）=$3x_2+1$，即 $x_1+x_2=-\frac{2}{3}$

故$\frac{6k^2}{k^2-8}=-\frac{2}{3}$，解得 $k^2=\frac{4}{5}$，从而 $x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}=-\frac{19}{9}$

由于$|AF_2|=\sqrt{(x_1-3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-3)^2+8x_1^2-8}=1-3x_1$，

$|BF_2|=\sqrt{(x_2-3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2-3)^2+8x_2^2-8}=3x_2-1$，

故$|AB|=|AF_2|-|BF_2|=2-3(x_1+x_2)=4$，$|AF_2||BF_2|=3(x_1+x_2)-9x_1x_2-1=16$

因而$|AF_2||BF_2|=|AB|^2$，所以$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列

【点评】本题考查直线与圆锥曲线的综合关系，考查了运算能力，题设条件的转化能力，方程的思想运用，此类题综合性强，但解答过程有其固有规律，一般需要把直线与曲线联立利用根系关系，解答中要注意提炼此类题解答过程

中的共性，给以后解答此类题提供借鉴．