

目录

第 1 讲 分数数列计算..... 1

 内容概述..... 1

 典型问题..... 1

 提高篇..... 1

 拓展篇..... 3

 超越篇..... 6

第 2 讲 比例解应用题..... 8

 内容概述..... 8

 典型问题..... 8

 提高篇..... 8

 拓展篇..... 10

第 3 讲 方程解应用题..... 15

 内容概述..... 15

 典型问题..... 15

第 4 讲 浓度问题与经济问题..... 22

 内容概述..... 22

 典型问题..... 22

第 5 讲 立体几何..... 28

 内容概述..... 28

 典型问题..... 29

 提高篇..... 29

 拓展篇..... 31

 超越篇..... 34

第 6 讲 逻辑推理（二）..... 36

 内容概述..... 36

 典型问题..... 37

 提高篇..... 37

 拓展篇..... 39

 超越篇..... 42

第 7 讲 几何综合（一）..... 44

 内容概述..... 44

 典型问题..... 45

 提高篇..... 45

 拓展篇..... 47

 超越篇..... 50

第 8 讲 数论综合（一）..... 52

 内容概述..... 52

 典型问题..... 53

 提高篇..... 53

 拓展篇..... 55

超越篇.....	58
第 9 讲 计算综合（二）	59
内容概述.....	59
典型问题.....	59
第十讲 行程问题（六）	67
内容概述.....	67
典型问题.....	67
提高篇.....	68
拓展篇.....	70
超越篇.....	73
第 11 讲 不定方程.....	75
内容概述.....	75
典型问题.....	75
提高篇.....	75
拓展篇.....	78
超越篇.....	81
第 12 讲 进位制与取整符号.....	83
内容概述.....	83
典型问题.....	83
第 13 讲 应用题综合（一）	91
内容概述.....	91
典型问题.....	91
提高篇.....	91
拓展篇.....	94
超越篇.....	98
第 14 讲 计数综合（三）	101
内容概述.....	101
典型问题.....	101
提高篇.....	101
拓展篇.....	103
超越篇.....	106
第 15 讲 几何综合（二）	108
内容概述.....	108
典型问题.....	108
提高篇.....	108
拓展篇.....	111
超越篇.....	114
第 16 讲 最值问题（二）	117
内容概述.....	117
典型问题.....	117
提高篇.....	117
拓展篇.....	119
超越篇.....	122
第 17 讲 应用题综合（二）	125
内容概述.....	125
典型问题.....	125

提高篇.....	125
拓展篇.....	127
超越篇.....	131
第 18 讲 数论综合（二）	134
内容概述.....	134
典型问题.....	134
提高篇.....	134
拓展篇.....	136
超越篇.....	139
第 19 讲 数字谜综合（二）	141
内容概述.....	141
典型问题.....	141
提高篇.....	141
拓展篇.....	143
乙组的数□甲组的数○1=.....	145
超越篇.....	147
第 20 讲 计数综合（四）	150
内容概述.....	150
典型问题.....	150
提高篇.....	150
拓展篇.....	152
超越篇.....	155
第 21 讲 构造论证（二）	158
内容概述.....	158
典型问题.....	158
第 22 讲 数论综合（三）	167
内容概述.....	167
典型问题.....	167
第 23 讲 概率初步.....	174
内容概述.....	174
典型问题.....	174
提高篇.....	174
拓展篇.....	177
超越篇.....	180

第 1 讲 分数数列计算

内容概述

建立抵消的思想，特别是灵活运用裂项的方法求解一些分数数列的计算问题。

典型问题

提高篇

1. 计算： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10}$ 。

2. 计算： $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2}{97 \times 99}$ 。

3. 计算： $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots + \frac{1}{98 \times 100}$ 。

4. 计算： $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$ 。

5. 计算 $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130} + \cdots + \frac{1}{9700}$ 。



6.计算: $\frac{5+6}{5 \times 6} - \frac{6+7}{6 \times 7} + \frac{7+8}{7 \times 8} - \frac{8+9}{8 \times 9} + \frac{9+10}{9 \times 10}$.

7.计算: $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$.

8.计算: $\frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{2}{98 \times 99 \times 100}$.

9.计算: $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \cdots + \frac{209}{210} + \frac{239}{240}$.



3. 计算： $(1-\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1-\frac{1}{9})\times(1+\frac{1}{9})$.

拓展篇

1. 计算： $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{2007\times 2008}$.

2. 计算： $\frac{3}{2\times 5}+\frac{3}{5\times 8}+\frac{3}{8\times 11}+\frac{3}{11\times 14}+\cdots+\frac{3}{98\times 101}$.

3. 计算： $\frac{4}{1\times 3}-\frac{8}{3\times 5}+\frac{12}{5\times 7}-\frac{16}{7\times 9}+\frac{20}{9\times 11}-\frac{24}{11\times 13}$.



4. 计算：(1) $1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} + 5\frac{1}{12} + 7\frac{1}{20} + 9\frac{1}{30} + 11\frac{1}{42} + 13\frac{1}{56} + 15\frac{1}{72} + 17\frac{1}{90}$;

(2) $\frac{4}{1 \times 3} + \frac{6}{2 \times 4} - \frac{8}{3 \times 5} - \frac{10}{4 \times 6} + \frac{12}{5 \times 7} + \frac{14}{6 \times 8} - \frac{16}{7 \times 9} - \frac{18}{8 \times 10} + \frac{20}{9 \times 11} + \cdots + \frac{76}{37 \times 39} + \frac{78}{38 \times 40} - \frac{80}{39 \times 41} - \frac{82}{40 \times 42}$.

5. 计算：

$$1 + \frac{2}{1 \times (1+2)} + \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} + \frac{4}{(1+2+3) \times (1+2+3+4)} + \cdots + \frac{10}{(1+2+\cdots+9) \times (1+2+\cdots+9+10)}$$

6. 计算： $\frac{3}{2} + \frac{11}{6} + \frac{23}{12} + \frac{39}{20} + \cdots + \frac{759}{380} + \frac{839}{420}$.

7. 计算： $\frac{2 \times 3}{1 \times 4} + \frac{5 \times 6}{4 \times 7} + \frac{8 \times 9}{7 \times 10} + \cdots + \frac{98 \times 99}{97 \times 100}$.



8.计算: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \frac{1}{2+4+6+8} + \cdots + \frac{1}{2+4+6+\cdots+20}$.

9.计算: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{48 \times 49 \times 50}$.

10.计算: $\frac{4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{6}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{11}{8 \times 9 \times 10}$. 11.计算: $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{99^2})$.

12.计算: $(1 + \frac{1}{1 \times 3}) \times (1 + \frac{1}{2 \times 4}) \times (1 + \frac{1}{3 \times 5}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{2007 \times 2009})$.



超越篇

1. 计算: $\frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{18^2 + 19^2}{18 \times 19} + \frac{19^2 + 20^2}{19 \times 20}.$

2. 计算: $\frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} + \frac{4^2 + 1}{4^2 - 1} + \cdots + \frac{18^2 + 1}{18^2 - 1} + \frac{20^2 + 1}{20^2 - 1}.$

3. 已知算式 $(1 + \frac{2}{3}) \times (2 + \frac{4}{5}) \times \cdots \times (8 + \frac{16}{17}) \times (9 + \frac{18}{19})$ 的结果是一个整数, 那么它的末两位数字是多少?

4. 计算: $\frac{3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{37}{18 \times 19 \times 20}.$



5. 计算： $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$ （最后结果可以用阶乘表示）

6. 已知 $A = \frac{1}{8}, B = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{64^2}$ ，请比较 A 和 B 的大小。

7. 计算： $\frac{3 \times 1}{3} + \frac{4 \times 2}{3^2} + \frac{5 \times 3}{3^3} + \cdots + \frac{102 \times 100}{3^{100}}$ （结果可以用阶乘和乘方表示）

8. 计算： $\frac{100}{97} + \frac{100 \times 99}{97 \times 96} + \frac{100 \times 99 \times 98}{97 \times 96 \times 95} + \cdots + \frac{100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 5 \times 4}{97 \times 96 \times 95 \times \cdots \times 2 \times 1}$.



第 2 讲 比例解应用题

内容概述

涉及两个或多个量之间比例的应用题，熟练掌握比的转化和运算；对条件较多的应用题，学会通过列表的方法逐步分析求解；了解正比例与反比例的概念，掌握行程问题和工程问题中的正反比例关系。

典型问题

提高篇

1. 圆珠笔和铅笔的价格比是 4:3，20 支圆珠笔和 21 支铅笔共用 71.5 元。问：圆珠笔的单价是每支多少元？
2. 一段路程分为上坡和下坡两段，这两段的长度之比是 4:3。已知阿奇在上坡时每小时走 3 千米，下坡时每小时走 4.5 千米。如果阿奇走完全程用了半小时。请问：这段路程一共有多少千米？
3. 加工一个零件，甲要 2 分钟，乙要 3 分钟，丙要 4 分钟，现有 1170 个零件，甲、乙、丙三人各加工几个零件，才能使得他们同时完成任务？
4. 有两块重量相同的铜锌合金。第一块合金中铜与锌的重量比是 2:5，第二块合金中铜与锌的重量比是 1:3。现在把这两块合金合铸成一块大的。求合铸所成的合金中铜与锌的重量之比。



5. 已知甲、乙、丙三个班总人数的比为 3:4:2, 甲班男、女生的比为 5:4, 丙班男、女生的比为 2:1, 而且三个班所有男生和所有女生的比为 13:14. 请问:

(1) 乙班男、女生人数的比是多少?

(2) 如果甲班男生比乙班女生少 12 人, 那么甲、乙、丙三个班各有多少人?

6. 甲、乙两包糖的重量比是 5:3, 如果从甲包取出 10 克放入乙包后, 甲、乙两包糖的重量比变为 7: 5. 请问: 这两包糖重量的总和是多少克?

7. 小明从甲地到乙地, 去时每小时走 5 千米, 回来时每小时走 7 千米, 来回共用了 4 小时. 问: 小明去时用了多长时间?

8. 冬冬从家去学校, 平时总是 7:50 到校, 有一天他起晚了, 结果晚出发了 10 分钟, 为了不至于迟到, 他将速度提高了五分之一, 跑步前往学校, 最后在 7:55 到校, 请问: 冬冬这天是几点出发的?

9. 一项工程, 由若干台机器在规定时间内完成. 如果增加 2 台机器, 只需用规定时间的 $\frac{7}{8}$ 就可完成; 如

果减少 2 台机器, 就要推迟 $\frac{2}{3}$ 小时才能完成. 请问:

(1) 在规定时间内完成需几台机器?

(2) 由 1 台机器去完成这工程, 需要多少小时?



10. 康师傅加工一批零件，加工 720 个之后，他的工作效率提高了 20%，结果提前 4 天完成任务；如果康师傅从一开始就把工作效率提高 12.5%，那么也可以提前 4 天完成任务。这批零件共有多少个？

拓展篇

1. 学校组织体检，收费标准如下：老师每人 3 元，女生每人 2 元，男生每人 1 元，已知老师和女生的人数比为 2:9，女生和男生的人数比为 3:7，共收体检费 945 元。那么老师、女生和男生各有多少人？

2. 徐福记的巧克力糖每 6 块包成一小袋，水果糖每 15 块包成一大袋。现有巧克力糖和水果糖各若干袋，而且巧克力糖比水果糖多 30 袋。如果巧克力糖的总块数与水果糖的总块数之比为 7:10，那么它们各有多少块？

3. 甲、乙、丙三人合买一台电视机，甲付的钱数等于乙付的钱数的 2 倍，也等于丙付的钱数的 3 倍。已知甲比丙多付了 680 元，请问：

(1) 甲、乙、丙三人所付的钱数之比是多少？

(2) 这台电视机售价多少钱？

4. 一把小刀售价 3 元，如果小明买了这把小刀，那么小明与小强剩余的钱数之比是 2:5；如果小强买了这把小刀，那么两人剩余的钱数之比变为 8:13。小明原来有多少钱？



5. 两根粗细相同、材料相同的蜡烛，长度比为 $29:26$ ，燃烧 50 分钟后，长蜡烛与短蜡烛的长度比为 $11:9$ ，那么较长的那根还能燃烧多少分钟？

6. 某俱乐部男、女会员的人数比是 $3:2$ ，分为甲、乙、丙三组。已知甲、乙、丙三组的人数比是 $10:8:7$ ，甲组中男、女会员的人数比是 $3:1$ ，乙组中男、女会员的人数比是 $5:3$ 。求丙组中男、女会员的人数比。

7. 某次数学竞赛设一、二、三等奖，已知：

①甲、乙两校获一等奖的人数比为 $1:2$ ，但它们一等奖人数占各自获奖总人数的百分数之比为 $2:5$ ；

②甲、乙两校获二等奖人数占两校获奖人数总和的 25% ，其中乙校是甲校的 3.5 倍；

③甲校三等奖获奖人数占该校获奖人数的 80% 。

请问：乙校获三等奖人数占该校获奖人数的百分比是多少？

8. 如果单独完成某项工作，甲需 24 天，乙需 36 天，丙需 48 天，现在甲先做，乙后做，最后由丙完成。甲、乙工作的天数比为 $1:2$ ，乙、丙工作的天数比为 $3:5$ 。问：完成这项工作一共用了多少天？

9. 已知猫跑 5 步的路程与狗跑 3 步的路程相同，猫跑 7 步的路程与兔跑 5 步的路程相同。而猫跑 3 步的时间与狗跑 5 步的时间相同，猫跑 5 步的时间与兔跑 7 步的时间相同，求猫、狗和兔的速度之比。



10. 星期天早晨，哥哥和弟弟都要到奶奶家去，弟弟先走 5 分钟，哥哥出发 25 分钟后追上了弟弟，如果哥哥每分钟多走 5 米，出发 20 分钟后就可以追上弟弟。问：弟弟每分钟走多少米？

11. 一支解放军部队从驻地乘车赶往某地抗洪抢险，如果行驶 1 个小时后，将车速提高五分之一，就可比预定时间提前 20 分钟赶到；如果先按原速度行驶 72 千米，再将车速提高三分之一，就可比预定时间提前 30 分钟赶到，问：这支解放军部队一共需要行多少千米？

12. 一项工作由甲、乙两人合作，恰可在规定时间内完成，如果甲效率提高三分之一，则只需用规定时间的 $\frac{5}{6}$ 即可完成；如果乙效率降低四分之一，那么就要推迟 75 分钟才能完成，请问：规定时间是多少小时？

超越篇

1. 甲、乙两人分别同时从 A、B 两地开始，修建一条连接 A、B 两地的公路，并按修路的距离分配 240 万元工程款。如果按原计划，甲应分得 100 万元。而在实际施工的时候，乙每天比原计划多修 1 千米，结果乙实际分得了 150 万元，那么乙队实际施工时，每天修多少千米？

2. 孙悟空有仙桃、机器猫有甜饼、米老鼠有泡泡糖，他们按下面比例互换：仙桃与甜饼为 3:5，仙桃与泡泡糖为 3:8，甜饼与泡泡糖为 5:8。现在孙悟空共拿出 39 个仙桃分别与其他两位互换，机器猫共拿出甜饼 90 个与其他两位互换，米老鼠共拿出 88 个泡泡糖与其他两位互换。请问：米老鼠与孙悟空和机器猫各交换泡泡糖多少个？



3. 有两包糖，每包糖内装有奶糖、水果糖和巧克力糖。已知：

①第一包糖的粒数是第二包糖的 $\frac{2}{3}$ ；②在第一包糖中，奶糖占 25%，在第二包糖中，水果糖占 50%；

③巧克力糖在第一包糖中所占的百分比是在第二包糖中所占的百分比的两倍，当两包糖混合在一起时，巧克力糖占 28%。求第一包与第二包中水果糖占所有糖的百分比。

4. 某工地用三种型号的卡车运送土方。已知甲、乙、丙三种卡车载重量之比为 10:7:6，速度比为 3:4:5，运送土方的路程之比为 15:14:14，三种车的辆数之比为 10:5:7。工程开始时，乙、丙两种车全部投入运输，但甲种车只有一半投入，直到 10 天后，另一半甲种车才投入工作，又干了 15 天才完成任务。求甲种车完成的工作量与总工作量之比。

5. 在一个 490 米长的圆形跑道上，甲、乙两人从相距 50 米的 A、B 两地，相背出发，相遇后，乙返回，甲方向不变，继续前进，甲的速度提高五分之一，乙的速度提高四分之一。当乙回到 B 地时，甲刚好回到 A 地，此时他们都按现有速度与方向前进。请问：当甲再次追上乙时，甲（从开始出发算起）一共走了多少米？

6. 将 A、B 两种细菌分别放在两个容器里。在光线亮时 A 细菌需 12 小时分裂完毕，B 细菌需 15 小时分裂完毕；在光线暗时，A 细菌的分裂速度要下降 40%，B 细菌的分裂速度反而提高 10%。现在两种细菌同时开始分裂并同时分裂完毕，试问：在分裂过程中，光线暗的时间有多少小时？



7. 某大学本科共有四个年级，男生总人数和女生总人数的比为 7：5。又已知：

- ①一年级男生和二年级女生的比是 3：2，二年级男生和一年级女生的比也是 3：2；
- ②三年级和四年级的人数相等，且三年级男生比四年级女生多 100 人；
- ③三、四年级男生与女生的比为 6：5；
- ④二年级的男生占学生总数的 24%。

请问：一年级男生和女生的人数分别是多少？

8. 如图 2-1 所示，A、B、C、D、E、F 是六个齿轮。其中 A 和 B 相互咬合，B 和 C 相互咬合，D 和 E、E 和 F 也都相互咬合；而 C 和 D 是同轴的两个齿轮，也就是说 C 和 D 转动的圈数始终相同。当 A 转了 7 圈时，B 恰好转了 5 圈；当 E 转了 8 圈时，F 恰好转了 9 圈；当 C 转了 5 圈时，B 和 E 恰好共转了 28 圈。请问：(1)如果 A、E 转的总圈数总是和 B、F 转的总圈数相同，那么当 A、F 共转了 100 圈时，D 转了多少圈？（注：图片只是示意图，并不代表实际齿数）

(2)如果 A、E 的总齿数和 B、F 的总齿数相等，D 的齿数是 C 的齿数的 2 倍，那么当 A 转了 210 圈时，D 和 F 分别转了多少圈？

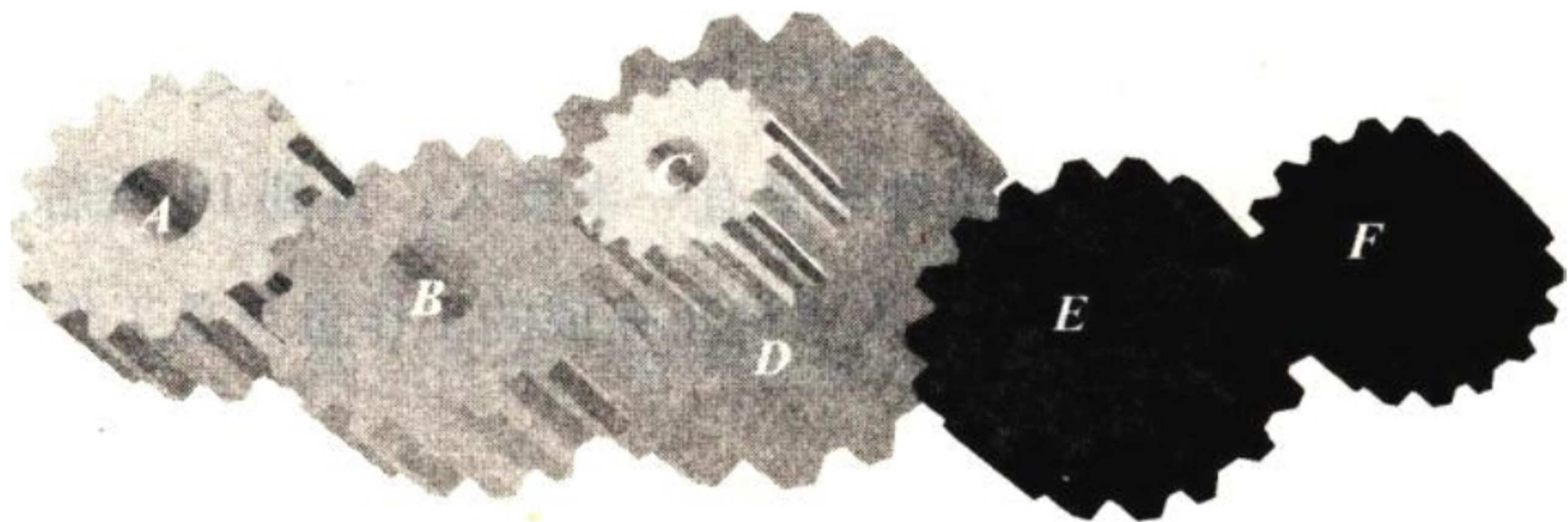


图 2-1



第3讲 方程解应用题

内容概述

掌握一元一次方程的解法，多元一次方程组的解法，以及具有对称性的多元一次方程的特殊解法。能从已知条件中寻找出等量关系，列出方程或方程组并求解。

典型问题

提高篇

1. 解下列方程。

$$(1) x - \frac{x-1}{2} = 2 - \frac{x+2}{5};$$

$$(2) \frac{1}{3} \times (1 - \frac{2}{5}x) = \frac{5}{6}x;$$

$$(3) \frac{x-11}{x+23} = \frac{1}{3}.$$

2. 在一次选举中，有甲、乙、丙三位候选人，乙的选票比甲的2倍还多5张，丙的选票比甲的一半还少4张。如果甲、乙、丙三人的选票一共有36张，请问：甲得了多少张选票？

3. 有若干名学生上体育课，体育老师规定每两人合用一个排球，每三人合用一个足球，每四人合用一个篮球，已知排球、足球、篮球共用了26个。问：有多少名学生上体育课？

3. 唐老师给幼儿园大班的小朋友每人发17张画片，小班每人发13张画片。已知大班人数是小班的 $\frac{3}{5}$ ，小班比大班总共多发126张画片，求小班的人数。



5. 明知小学六年级一班男生的人数占全班总人数的 70%，六年级二班的男生比一班男生少 2 名，而女生人数为一班女生的 2 倍. 如果两班合在一起，则男生所占的比例为 60%. 请问：二班有多少名女生？

6. 甲、乙两车同时从 A、B 两地出发，相向而行，在 A、B 之间不断往返行驶. 甲车到达 B 地后，在 B 地停留了 2 个小时，然后返回 A 地；乙车到达 A 地后，马上返回 B 地；两车在返回的途中又相遇了，相遇的地点距离 B 地 288 千米. 已知甲车的速度是每小时 60 千米，乙车的速度是每小时 40 千米. 请问：A、B 两地相距多少千米？

7. 解下面的方程组：

$$(1) \begin{cases} 4x + 2y = 22, \\ 17x + 7y = 80; \end{cases} (2) \begin{cases} 4x + 7y = 144, \\ 12y - 8x = 24. \end{cases}$$

8. 冬冬与小悦一起在水果店买水果，冬冬买了 3 千克苹果和 2 千克梨，共花了 18.8 元. 小悦买了 2 千克苹果和 3 千克梨，共花了 18.2 元，你能算出 1 千克苹果多少元，1 千克梨多少元吗？

9. 2 个蟹将和 4 个虾兵能打扫龙宫的 $\frac{3}{10}$ ，8 个蟹将和 10 个虾兵就能把龙宫全部打扫完. 如果只让蟹将打扫龙宫，需要多少个？只让虾兵打扫龙宫，需要多少个？



10. 如图 3-1，小玲有两种不同形状的纸板，一种是正方形的，一种是长方形的．正方形纸板的总数与长方形纸板的总数之比是 1：2．她用这些纸板做成一些竖式和横式的无盖纸盒，正好将纸板用完．那么在小玲所做纸盒中，竖式纸盒的总数与横式纸盒的总数之比是多少？

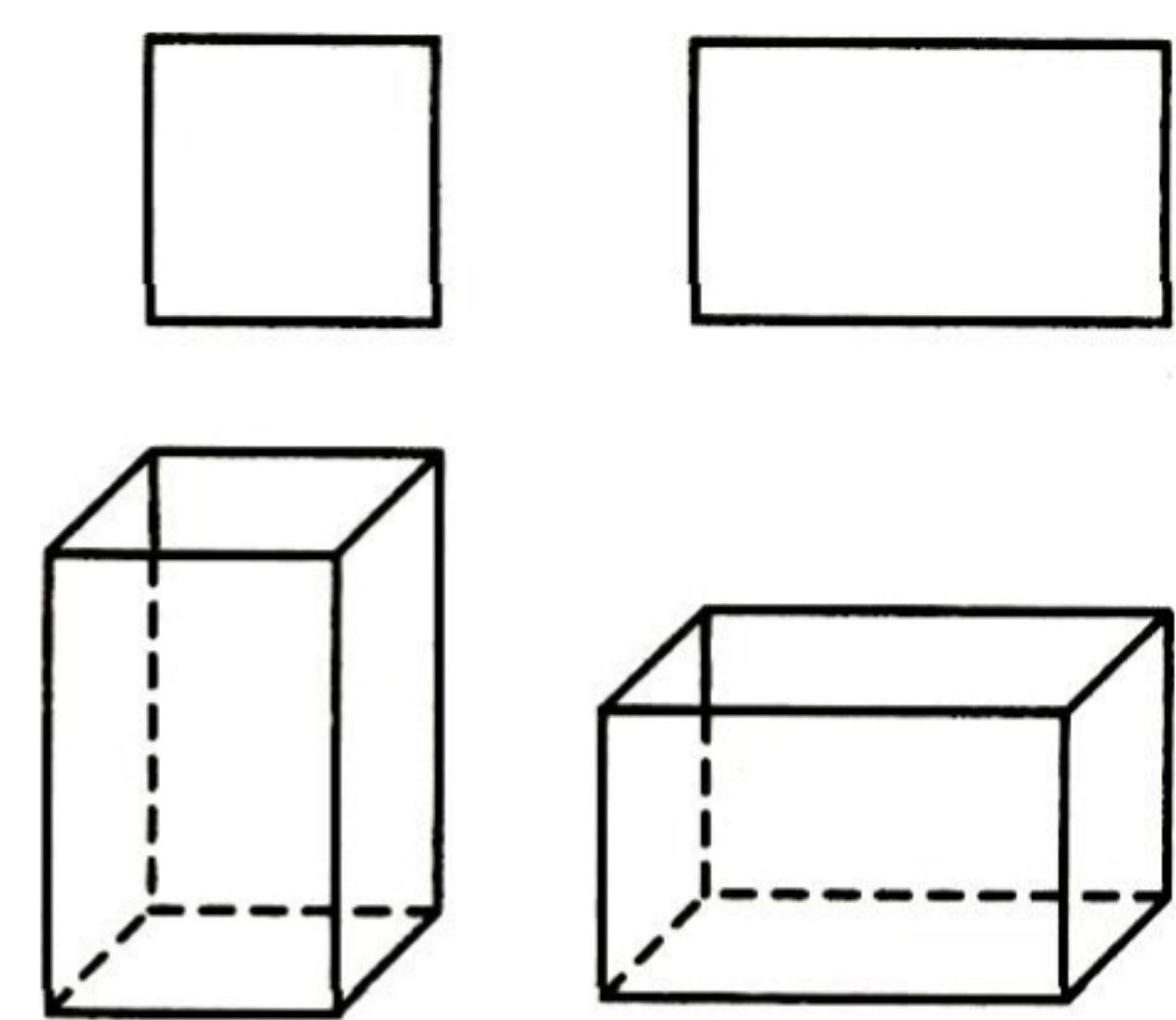


图 3-1

拓展篇

1. 解下列方程：

(1)
$$x + \frac{x+3}{4} + \frac{x-1}{6} = \frac{7x}{12} + 1;$$

(2)
$$\frac{3}{2} \times \left[\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) + 2 \right] - \frac{7}{2} = \frac{2}{3}x;$$

(3)
$$\frac{3x+5}{4x+1} = \frac{5}{2};$$

(4)
$$(x+1)(x+7) = (x+2)^2 + 5.$$

2. 一个分数，分子与分母的和是 122.如果分子、分母都减去 19，得到的分数约分后是 $\frac{1}{5}$ ，那么原来的分数是多少？

3. 130 克含盐 5%的盐水，与若干含盐 9%的盐水混合，配成含盐 6.4%的盐水．请问：最后配成的盐水有多少克？



4. 如图 3-2 中的短除式所示，一个自然数被 8 除余 1，所得的商被 8 除也余 1，再把第二次所得的商被 8 除后余 7，最后得到的商是 a 。图 3-3 中的短除式表明：这个自然数被 17 除余 4，所得的商被 17 除余 15，最后得到的商是 a 的 2 倍，求这个自然数。

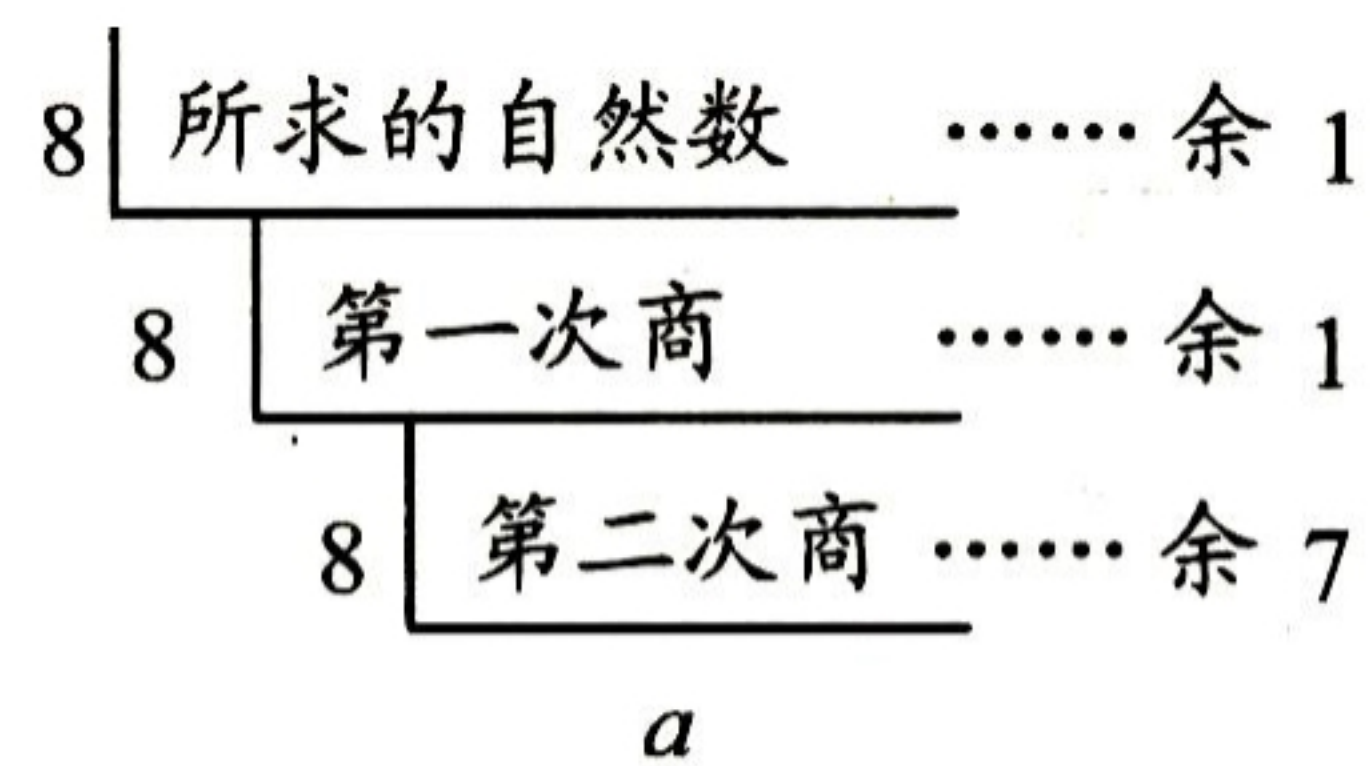


图 3-2

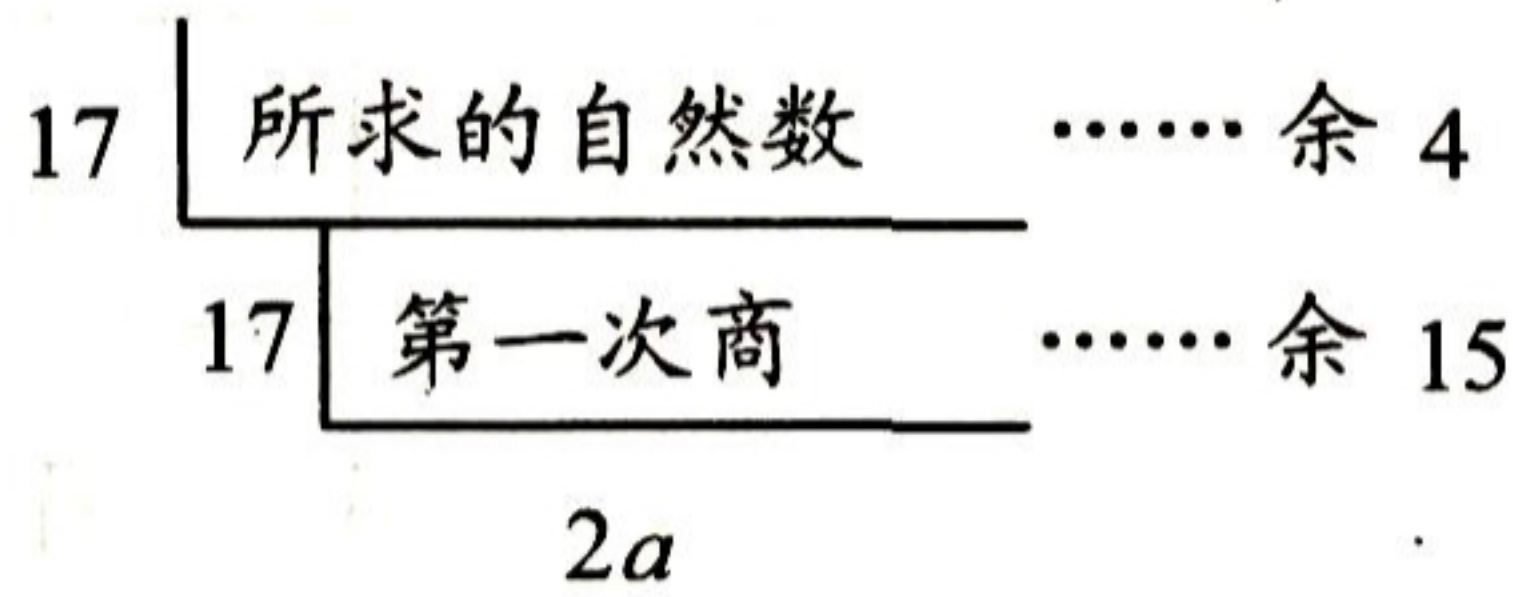


图 3-3

5. 给六年级五班的同学分苹果，第一组每人 3 个，第二组每人 4 个，第三组每人 5 个，第四组每人 6 个。已知第二组和第三组共有 22 人，第一组人数是第二组的 2 倍，第三组和第四组人数相等，总共分出去 230 个苹果，问：该班一共有多少名学生？

6. 解下面的方程组：

$$(1) \begin{cases} 11x + 9y = 49, \\ 13x - 3y = 17; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2y - x = 1, \\ 13x - 8y = 59; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 18x + 29y = 307, \\ 16x + 28y = 284. \end{cases}$$

7. 商店里有大盒、中盒、小盒共 27 盒筷子，其中大盒中装有 18 双筷子，中盒中装有 12 双筷子，小盒中装有 8 双筷子，一共装有 330 双筷子，其中小盒数是中盒数的 2 倍，问：三种包装的筷子各有多少盒？



8. 甲、乙两人从相距 36 千米的两地相向而行。如果甲比乙先出发 2 小时，那么他们在乙出发 2.5 小时后相遇；如果乙比甲先出发 2 小时，那么他们在甲出发 3 小时后相遇。问：甲、乙两人每小时各走多少千米？

9. 一台天平，右盘上有若干重量相等的白球，左盘上有若干重量相等的黑球，这时两边平衡。如果从右盘中取走一个白球置于左盘上，再把左盘的两个黑球置于右盘上，同时给左盘加 20 克砝码，这时两边也平衡。如果从右盘移两个白球到左盘上，从左盘移一个黑球到右盘上，那么需要再给右盘加 50 克砝码，两边才能平衡。问：白球、黑球每个各重多少克？

10. 奥运指定商品零售店里的福娃有大号、中号和小号三种。小悦买了一个大号的、三个中号的和两个小号的，共花了 360 元；冬冬买了两个大号的、一个中号的和一个小号的，共花了 270 元；阿奇买了一个大号的、两个中号的和两个小号的，共花了 300 元。请问：商店里的大号、中号和小号福娃的单价各是多少？

11. 如图 3-4，墙边放着一块木板，一只猫淘气，爬了上去，使得木板向下滑动了一段距离，现在已知图中的三段长度（单位：厘米），你能求出这块木板的长度吗？

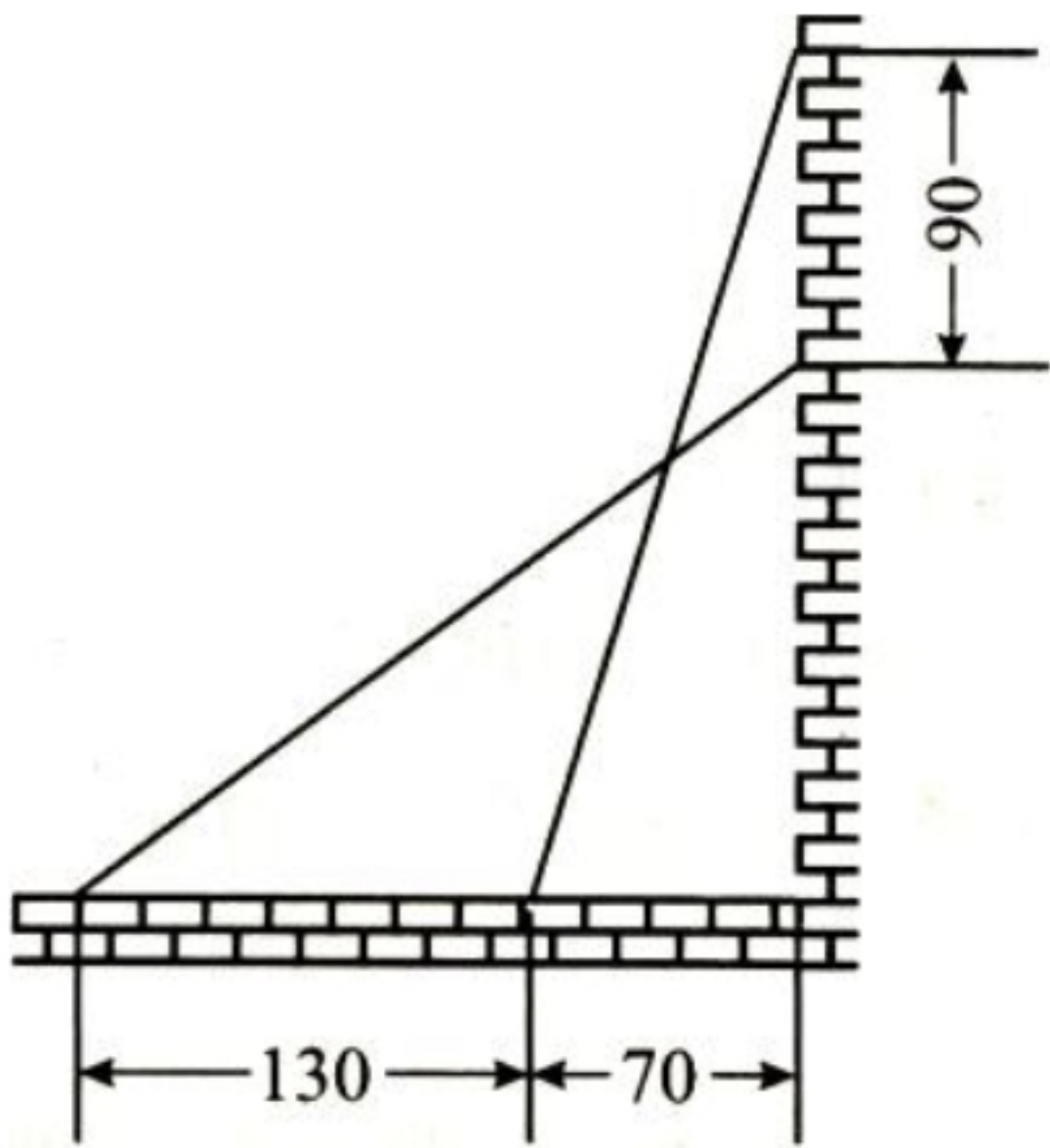


图 3-4

12. 甲、乙、丙、丁四人，每三个人的平均年龄加上余下一人的年龄分别为 29，23，21 和 17. 这四人中最大年龄与最小年龄的差是多少？



超越篇

1. 丙看到甲、乙两人正在解下面这个方程组：
$$\begin{cases} \square x + \square y = 2536, \\ \square x + \square y = 704. \end{cases}$$

其中未知数前面的系数被甲和乙遮住了. 甲计算得出方程的解是 $x=7, y=3$; 而乙误把“2536”看作“1536”, 得到的解是 $x=4, y=4$. 试问: 方程组四个被遮住的系数中最小的一个是多少?

2. 幼儿园有三个班, 甲班比乙班多 4 人, 乙班比丙班多 4 人. 老师给小孩分枣, 甲班每个小孩比乙班每个小孩少分 3 个枣; 乙班每个小孩比丙班每个小孩少分 5 个枣, 结果甲班比乙班总共多分 3 个枣, 乙班比丙班总共多分 5 个枣. 问: 三个班总共分了多少个枣?

3. 下表显示了一次钓鱼比赛的结果:

n	0	1	2	3	...	13	14	15
钓了n条鱼的人数	9	5	7	23	...	5	2	1

已知: ①冠军钓到 15 条鱼;
②钓到 3 条或 3 条以上的选手平均每人钓到了 6 条鱼;
③钓到 12 条或者 12 条以下的选手平均每人钓到了 5 条鱼.
请问: 一共有多少名选手参赛? 这些选手一共钓到了多少条鱼?

4. A、B 两地相距 2400 米, 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发, 相向而行, 两人在途中某处相遇后, 甲又继续行进 18 分钟到达 B 地, 乙又继续行进 50 分钟到达 A 地, 请问: 甲比乙每分钟多走多少米?

5. 甲、乙两车运一堆货物, 甲车单独运比乙车单独运要少运 5 次; 如果一起运, 各运 6 次就刚好运完. 问



甲车单独运要几次运完？

6. 一个从小到大排列的等差数列，如果把这个数列的首项除以 2，末项乘以 2，这些数的平均数就增加了 7；如果把首项乘以 2，末项除以 2，平均数就少了 2。已知这个等差数列中所有数的和等于 245，求这个数列的末项。

7. 一个水池，顶部有一个进水管，底部有一个出水管。如果只打开进水管，50 分钟可以把水池灌满；如果只打开出水管，60 分钟可以把一池水放完，现在水池在中间的某个位置出现了一条与池底平行的裂缝，如果只打开进水管，需要 80 分钟才能放满一池水，而只打开出水管只需 46.5 分钟即可放完一池水，请问：裂缝出现在离池底几分之几高度的地方？

8. “太平洋号”和“北冰洋号”两艘潜艇在海下沿直线同向潜航，“北冰洋号”在前，“太平洋号”在后。在某个时刻，“太平洋号”发出声波，间隔 2 秒后，再次发出声波，当声波传到“北冰洋号”时，“北冰洋号”会反射声波。已知“太平洋号”的速度是每小时 54 千米，第一次和第二次探测到“北冰洋号”反射的回波的间隔时间是 2.01 秒，声波传播的速度是每秒 1185 米。请问：“北冰洋号”的速度是每小时多少千米？



第 4 讲 浓度问题与经济问题

内容概述

实际生活中与浓度或经济有关的百分数应用题。掌握浓度问题中溶液、溶质、浓度的概念，熟练处理两种溶液混合的问题。掌握经济问题中成本、利润、利润率等概念，熟悉相关问题的计算，体会浓度问题与经济问题的联系和区别。

典型问题

提高篇

1. 在 200 克浓度为 15% 的盐水中加入 50 克盐，这时盐水浓度变为多少？然后再加入 150 克水，浓度变为多少？最后又加入 200 克浓度为 8% 的盐水，浓度变为多少？

2. (1) 在 120 克浓度为 20% 的盐水中加入多少克水，才能把它稀释成浓度为 10% 的盐水？
(2) 在 900 克浓度为 20% 的糖水加入多少克糖，才能将其配成浓度为 40% 的糖水？

3. 现有浓度为 20% 的盐水 100 克，加入相同质量的盐和水后，变成了浓度为 30% 的盐水，请问：加了多少克盐？

4. 在浓度为 40% 的酒精溶液中加入 5 千克水，浓度变为 30%。再加入多少千克纯酒精，浓度才能变成 50%？

5. 两个杯子里分别装有浓度为 40% 与 10% 的盐水，将这两杯盐水倒在一起混合后，盐水浓度变为 30%。若



再加入 300 克 20%的盐水，浓度变为 25%。请问：原有 40%的盐水多少克？

6. (1)一部电话的进价是 250 元，售价是 320 元，这部电话的利润率是多少？
(2)一个鼠标的进价是 108 元，定价是 180 元，实际上打七五折出售，这个鼠标的利润率是多少？
(3)一件皮衣的进价是 800 元，标价是 1440 元，结果没人来买。店主决定打折出售，但希望利润率不能低于 35%，请问：这件皮衣最低可以打几折？

8. 某商店卖出两件商品，其中一件比进价高 10%出售，另一件比进价低 10%出售，结果两件的售价都是 990 元，试问：这两件商品售出后，商店是赚了还是赔了？

8. 甲、乙两种商品，甲商品的成本是 125 元，乙商品的成本比甲商品低 16%，现有以下三种销售方案：
①甲商品按 30%的利润率定价，乙商品按 40%的利润率定价；
②甲、乙都以 35%利润率定价；③甲、乙的定价都是 155 元。
请问：选择哪种方案最赚钱？这时能盈利多少元？

9. 一件衣服，第一天按 80%的利润率定价，无人来买；第二天在此基础上再打九折，还是无人来买；第三



天再降价 96 元，终于卖出，已知卖出的价格是进价的 1.3 倍，求这件衣服的进价。

10. 费叔叔有 10000 元钱，打算存入银行两年。

办法一：存两年期的整存整取定期储蓄，年利率为 4.7%，到期后可取出本金和利息一共多少元？

办法二：先存一年期的整存整取定期储蓄，年利率为 4%；到期后将本金和利息再存一年，最后本金和利息一共多少元？

拓展篇

1. 一个瓶子内最初装有 25 克纯酒精，先倒出 5 克，再加入 5 克水后摇匀，这时溶液的浓度是多少？接着又倒出 5 克，加入 5 克水，此时溶液的浓度变为多少？

2. 阿奇从冰箱里拿出一瓶 100% 的汇源纯果汁，一口气喝了五分之一后又放回了冰箱。第二天妈妈拿出来喝了剩下的五分之一，觉得太浓，于是就加水兑满，摇匀之后打算明天再喝，第三天阿奇拿出这瓶果汁，一口气喝得只剩一半了。他担心妈妈说他喝得太多，于是就加了些水把果汁兑满，请问：这时果汁的浓度是多少？

3. (1) 有浓度为 20% 的糖水 500 克，另有浓度为 56% 的糖水 625 克，将它们混合之后，糖水的浓度是多少？
(2) 将浓度为 75% 的糖水 32 克稀释成浓度为 30% 的糖水，需加入水多少克？

4. 有浓度为 20% 的硫酸溶液 450 克，要配制成 35% 的硫酸溶液，需要加入浓度为 65% 的硫酸溶液多少克？



5. 有甲、乙、丙三瓶糖水，浓度依次为 63%，42%，28%，其中甲瓶有 11 千克。先将甲、乙两瓶中的糖水混和，浓度变为 49%；然后把丙瓶中的糖水全部倒入混合液中，得到浓度为 35%的糖水。请问：原来丙瓶有多少千克糖水？

6. 甲、乙、丙三瓶糖水各有 30 克、40 克、20 克，将这三瓶糖水混合后，浓度变为 30%。已知甲瓶的浓度比乙瓶和丙瓶混合溶液的浓度高 9%，甲瓶的浓度比乙瓶的浓度高 8%。请求出丙瓶糖水的浓度。

7. 如果取 40 克甲种酒精溶液和 60 克乙种酒精溶液混合，那么浓度为 62%；如果取同样质量的甲种酒精和乙种酒精混合，那么浓度为 61%。请问：甲、乙两种酒精溶液的浓度分别是多少？

8. 某台空调按 30% 的利润率定价，换季促销时打 8 折售出后，获得了 100 元利润。请问：

(1) 这台空调的成本是多少元？

(2) 最后的利润率是多少？

9. A、B 两种商品，A 商品成本占定价的 80%，B 商品按 20% 的利润率定价。冬冬的妈妈一次性购买了 1 件 A 商品和 1 件 B 商品，商店给她打了九折后，还获利 36 元。现在知道 B 商品的定价为 240 元，求 A 商品的定价。



10. 大超市和小超市出售同一种商品，大超市的进价比小超市的进价便宜 10%。大超市按 30% 的利润率定价，小超市按 28% 的利润率定价，大超市的定价比小超市的定价便宜 22 元。请问：

(1) 大超市这种商品的进价是多少元？

(2) 大超市每件商品赚多少元？小超市每件商品赚多少元？

11. 某玩具厂生产某种款式的变形金刚，如果按原定价销售，每个可获利润 48 元。现在打八八折促销，结果销售量增加了一倍，获得的利润增加了 25%。请问：打折后每个变形金刚的售价是多少元？

12. 某家商店购入一批苹果，在运输过程中花去 100 元运费，后来决定将这些苹果的价格降到原定价的 70% 卖出，这样所得的总利润就只有原计划的 $\frac{1}{3}$ 。已知这批苹果的进价是每千克 6 元 4 角，原计划可获得利润 2700 元。问：这批苹果一共有多少千克？

超越篇

1. 有一杯盐水，如果加入 200 克水，它的浓度就变为原来的一半；如果加入 25 克盐，它的浓度则变为原来的两倍，问：这杯盐水原来的浓度是多少？



2. 现有甲、乙、丙三种硫酸溶液. 如果把甲、乙按照 3:4 的质量比混合, 得到浓度为 17.5% 的硫酸; 如果把甲、乙按照 2:5 的质量比混合, 得到浓度为 14.5% 的硫酸; 如果把甲、乙、丙按照 5: 9: 10 的质量比混合, 可以得到浓度为 21% 的硫酸, 请求出丙溶液的浓度.

3. 甲桶中有若干千克纯水, 乙桶中有若干千克纯酒精, 第一次从甲桶往乙桶倒水, 使得乙桶中液体的质量增加 2 倍; 第二次从乙桶往甲桶倒, 使乙桶中液体的质量减少四分之一; 第三次再从甲桶往乙桶倒, 使甲桶中液体的质量减少五分之一. 最后甲桶中液体的质量恰好等于最初乙桶中液体的质量, 请问: 最后甲、乙两桶中液体的浓度分别等于多少?

4. 有甲、乙、丙 3 瓶酒精溶液, 它们的质量比是 3: 2: 1. 如果把两瓶酒精混合后再按原来的质量分配到各自的瓶中, 称为一次操作. 现在先对甲、乙两瓶酒精进行一次操作, 再对乙、丙两瓶酒精进行一次操作, 最后对丙、甲两瓶酒精进行一次操作. 三次操作后, 甲、乙两瓶溶液的浓度分别是 67% 和 61%. 求最初丙溶液的浓度.

5. 水果店进了一批水果, 希望卖出去之后得到 50% 的利润. 当售出六成数量的水果时, 由于天气原因水果无法保存, 于是商店决定打折处理, 结果还是有一成数量的水果烂了, 最终只得到了所期望利润的 34%. 请问: 商店打折处理时打了几折?



6. 某商店将甲、乙两种奶糖混合在一起. 甲种每份 100 克, 售价 1.65 元; 乙种每份 100 克, 售价 1.2 元, 原来打算将甲种的两份混合到乙种的一份中去, 后来改变混合的方式, 将甲种的一份混合到乙种的两份中去, 问: 顾客买 10 千克这种奶糖能比原来省多少元钱?

7. 有甲、乙、丙三瓶溶液, 甲比乙浓度高 6%, 乙的浓度则是丙的 4 倍, 如果把乙溶液倒入甲中, 就会使甲溶液的浓度比原来下降 2.4%; 如果把丙溶液倒入乙溶液中, 就会使乙溶液的浓度比原来下降 2.25%; 如果把甲、丙两瓶溶液混合, 则混合液的浓度正好等于乙溶液的浓度. 请问: 甲、乙、丙三瓶溶液的重量比是多少? 它们的浓度分别是多少?

8. 商店进了一批商品, 按 40% 加价出售. 在售出八成后, 为了尽快销完, 决定五折处理剩余商品, 而且商品全部出售后, 突然被征收了 150 元的附加税, 这使得商店的实际利润率只是预期利润率的一半, 那么这批商品的进价是多少元? (注: 附加税算作成本)

第 5 讲 立体几何

内容概述



掌握长方体、立方体、圆柱、圆锥的体积和表面积计算公式；学会计算由基本立体图形通过切割、拼接而构成的复杂立体固形的体积和表面积；掌握平面图形通过折叠、旋转所得立体图形的相关计算。

典型问题

提高篇

1. 一个长方体的长、宽、高分别为 3 厘米、2 厘米、1 厘米。若它的棱长总和等于另一个正方体的棱长总和，则长方体与正方体的表面积之比是多少？长方体体积比正方体体积少多少立方厘米？

2. 如图 5-1 所示，将长为 13 厘米，宽为 9 厘米的长方形硬纸板的四角去掉边长为 2 厘米的正方形，然后沿虚线折叠成长方体容器。这个容器的体积是多少立方厘米？如果四角去掉边长为 3 厘米的正方形呢？

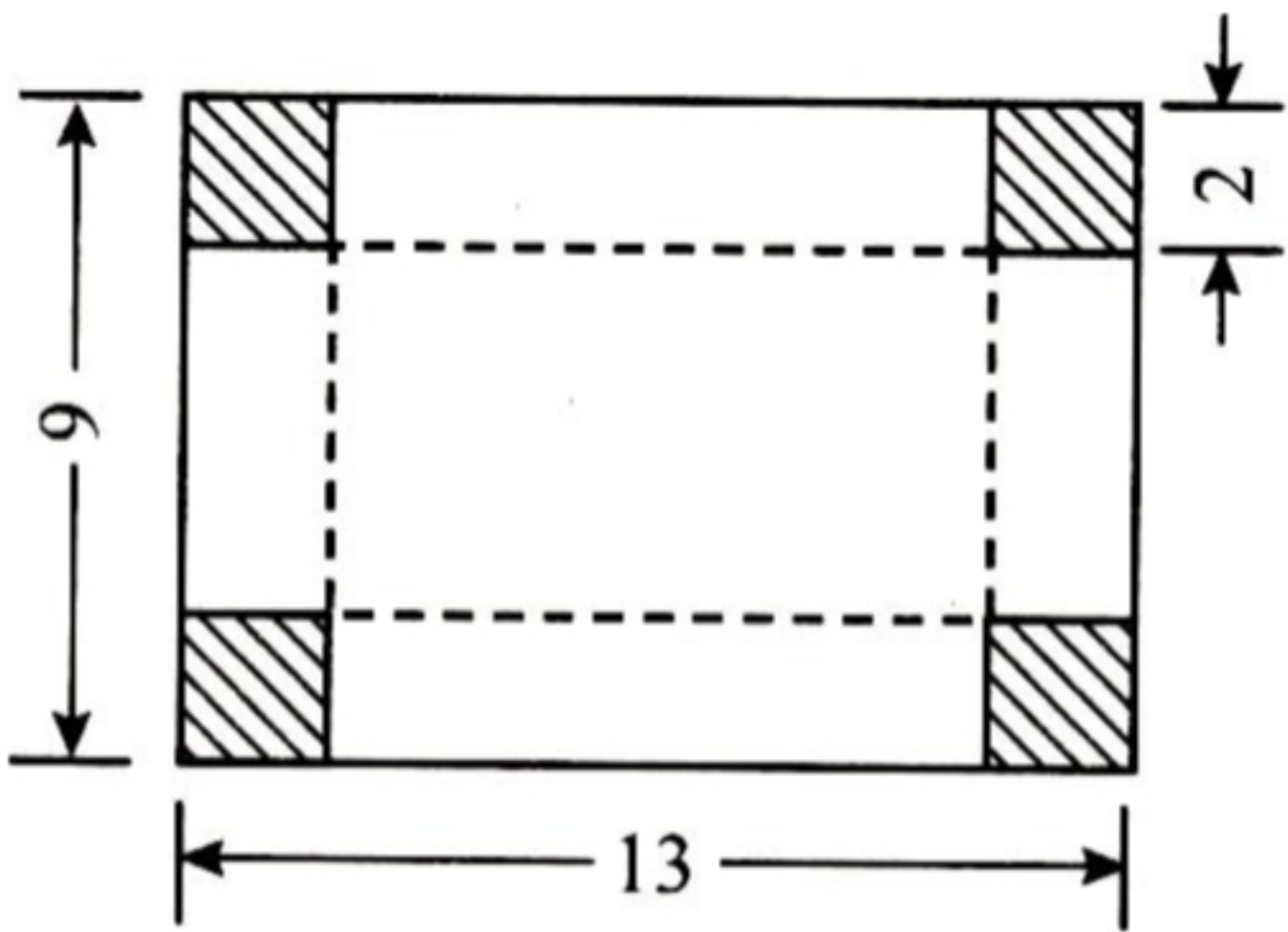


图 5-1

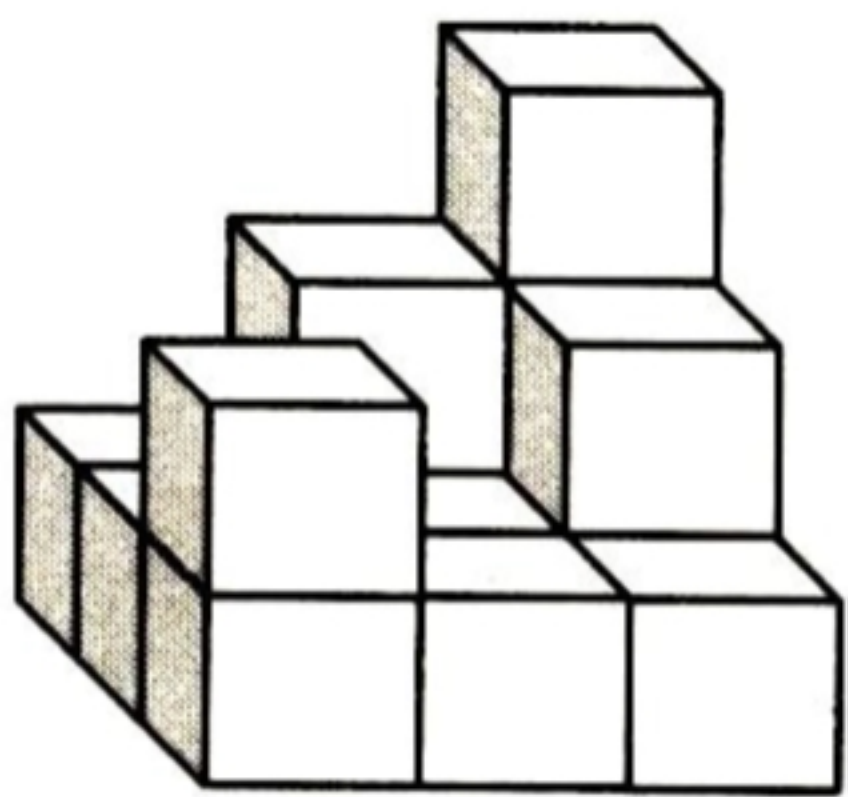
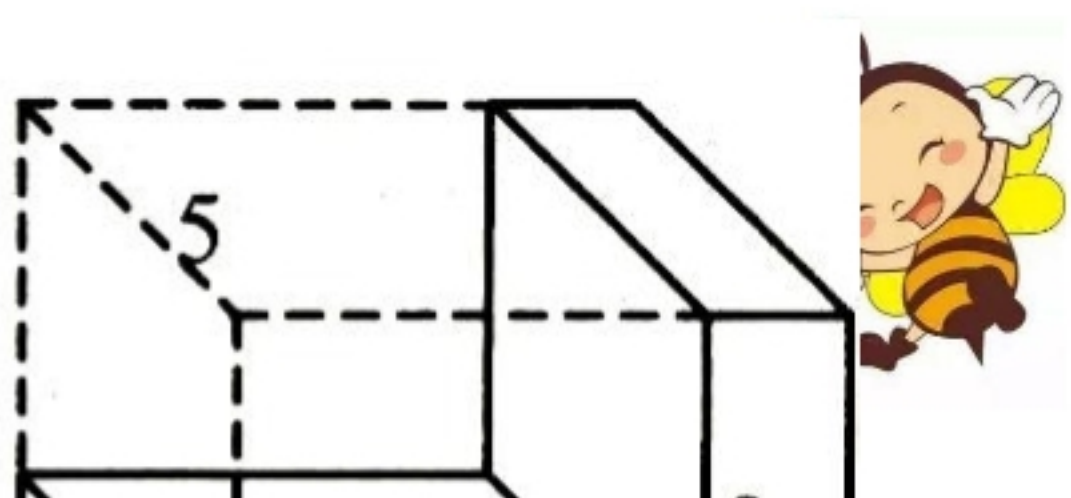
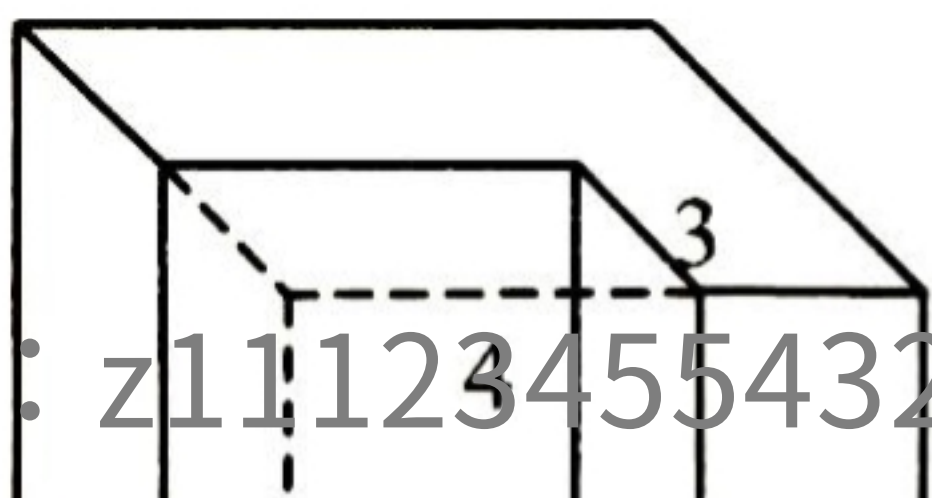


图 5-2

3. 用棱长是 1 厘米的小立方体拼成如图 5-2 所示的立体图形，这个图形的表面积是多少平方厘米？

4. (1)如图 5-3 所示，将一个棱长为 6 的正方体从某个角切掉一个长、宽、高分别为 4、3、5 的长方体，剩余部分的表面积是多少？

(2)如图 5-4 所示，将一个棱长为 5 的正方体，从左上方切去一个长、宽、高分别为 5、4、3 的长方体，它的表面积减少了百分之几？



5. 如图 5-5 所示，有一个棱长为 2 厘米的正方体，从正方体的上面正中向下挖一个棱长为 1 厘米的正方体小洞；接着在小洞的底面正中再向下挖一个棱长为 $\frac{1}{2}$ 厘米的小洞；第三个小洞的挖法与前两个相同，棱长为 $\frac{1}{4}$ 厘米，最后得到的立体图形的表面积是多少平方厘米？

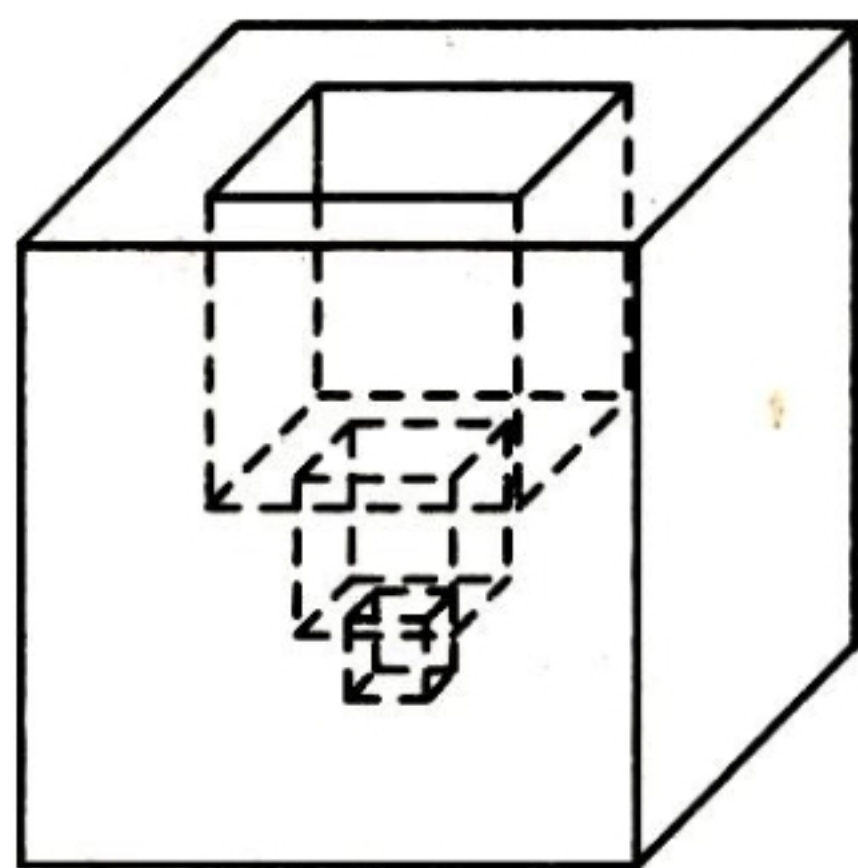


图 5-5

6. (1)如图 5-6，将 4 块棱长为 1 的正方体木块排成一排，拼成一个长方体．那么拼合后这个长方体的表面积，比原来 4 个正方体的表面积之和少了多少？
 (2)一个正方体形状の木块，棱长为 1，如图 5-7 所示，将其切成两个长方体，这两部分的表面积总和是多少？如果在此基础上再切 4 刀（如图 5-8 所示），将其切成大大小小共 18 块长方体，这 18 块长方体表面积总和又是多少？

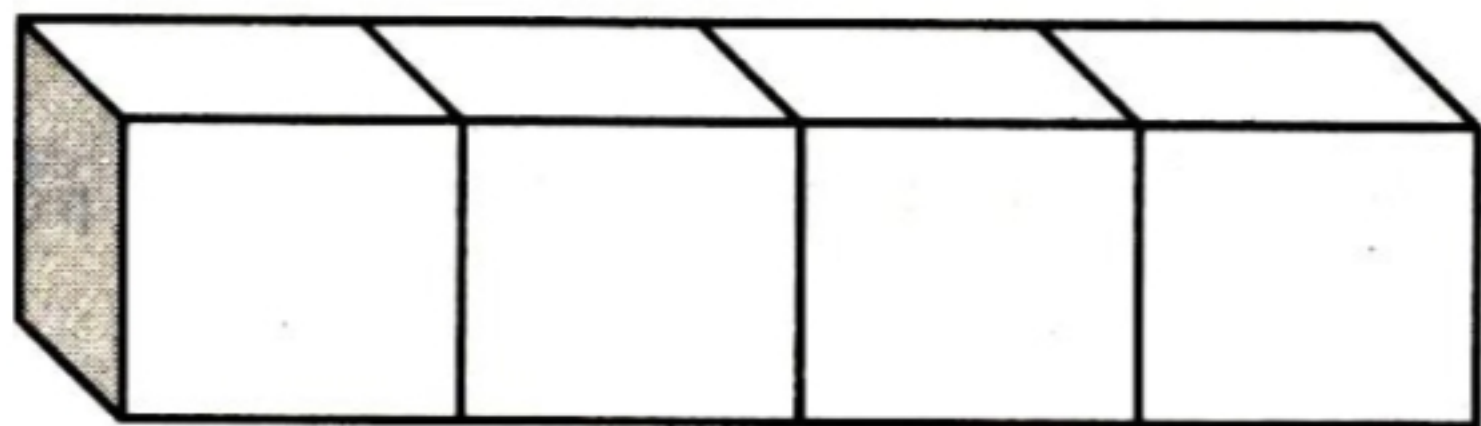


图 5-6

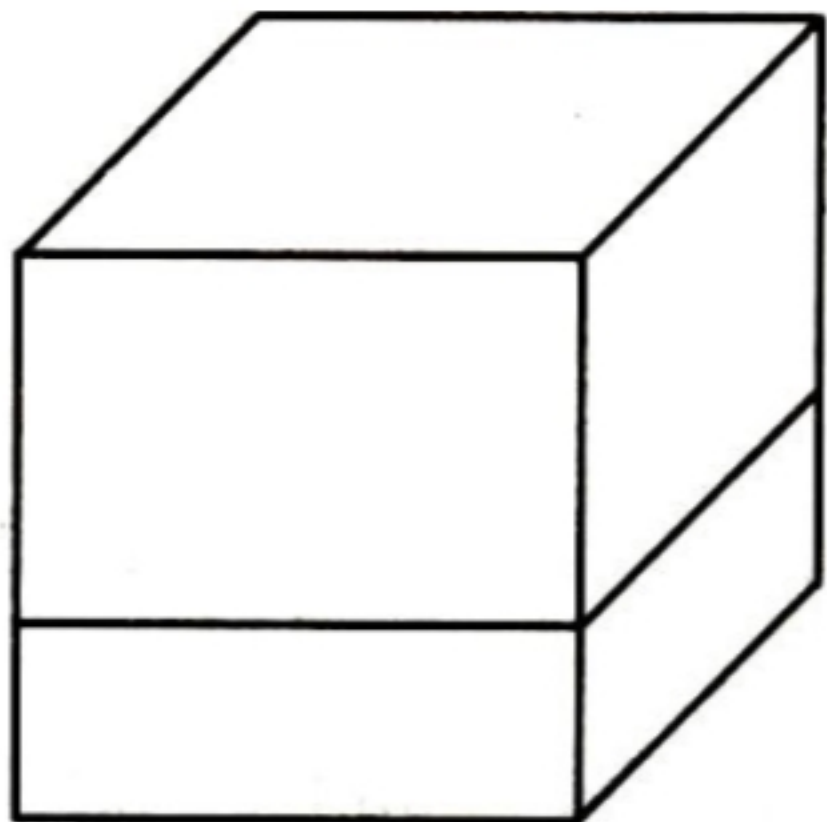


图 5-7

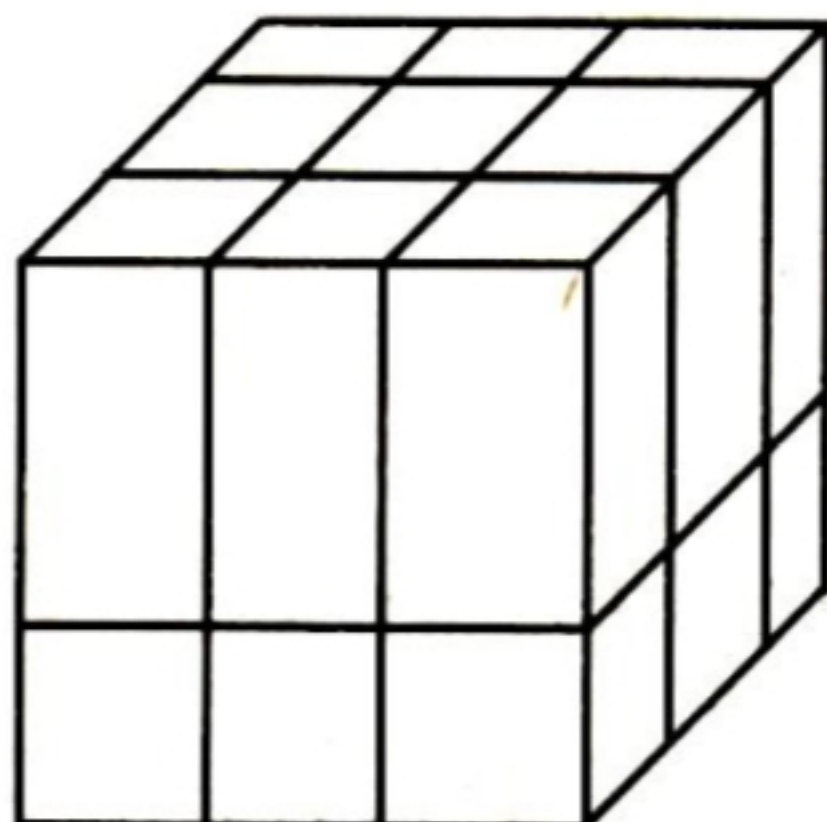
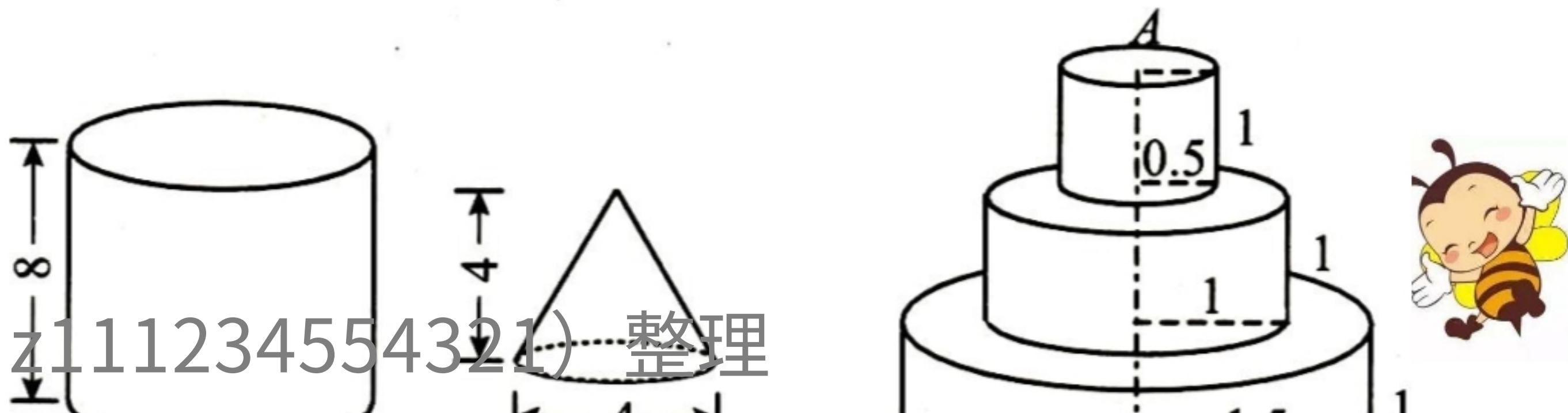


图 5-8

7. 如图 5-9 所示，有一个圆柱和一个圆锥，它们的高和底面直径都标在图上，单位是厘米．请问：圆锥体积与圆柱体积的比是多少？



8. 如图 5-10 所示，一块三层蛋糕，由三个高都为 1 分米，底面半径分别为 1.5 分米、1 分米和 0.5 分米的圆柱体组成．请问：

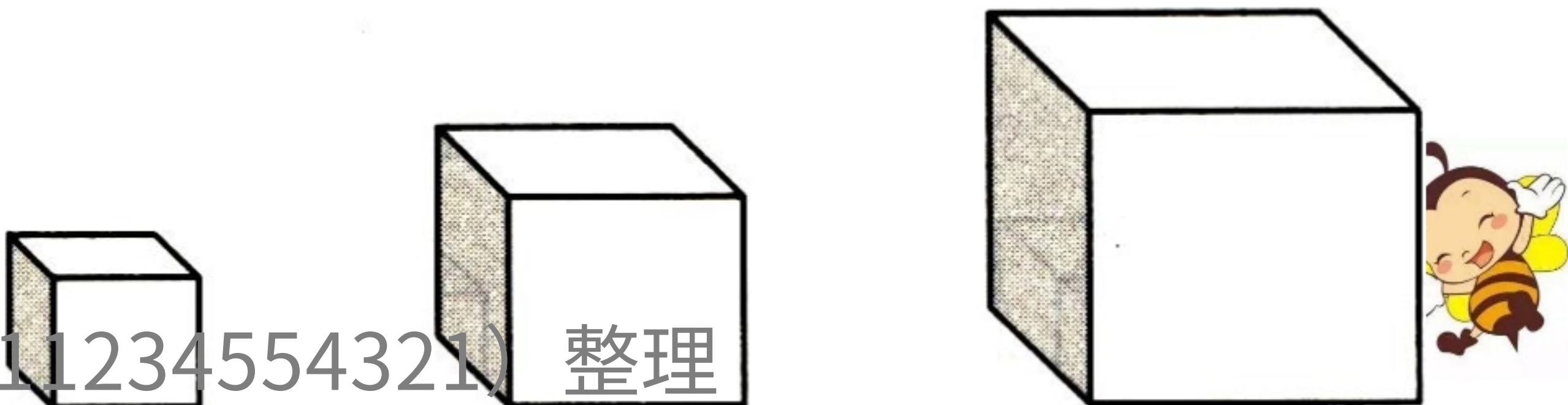
- (1)这个蛋糕的表面积是多少平方分米？（ π 取 3.14）
- (2)如果沿经过中轴线 AB 的平面切一刀，将该蛋糕分成完全相同的两部分，那表面积之和又是多少？

9. 有大、中、小三个立方体水池，它们的内部棱长分别是 6 米、3 米、2 米，三个池子都装了半池水．现将两堆碎石分别沉没在中、小水池的水里，两个水池的水面分别升高了 6 厘米和 4 厘米．如果将这两堆碎石都沉没在大水池的水里，大水池的水面会升高多少厘米？（结果精确到小数点后两位）

10.有一个高 24 厘米，底面半径为 10 厘米的圆柱形容器，里面装了一半水，现有一根长 30 厘米，底面半径为 2 厘米的圆柱体木棒．将木棒竖直放入容器中，使棒的底面与容器的底面接触，这时水面升高了多少厘米？

拓展篇

1. 如图 5-11，将三个表面积分别为 54 平方厘米、96 平方厘米和 150 平方厘米的铁质正方体熔铸成一个大正方体（不计损耗）．求这个大正方体的体积．



2. 一个长方体，如果长增加 2 厘米，则体积增加 40 立方厘米；如果宽增加 3 厘米，则体积增加 90 立方厘米；如果高增加 4 厘米，则体积增加 96 立方厘米，求这个长方体的表面积。

3. 如图 5-12 所示，有 30 个棱长为 1 米的正方体堆成一个四层的立体图形。请问：这个立体图形的表面积等于多少？

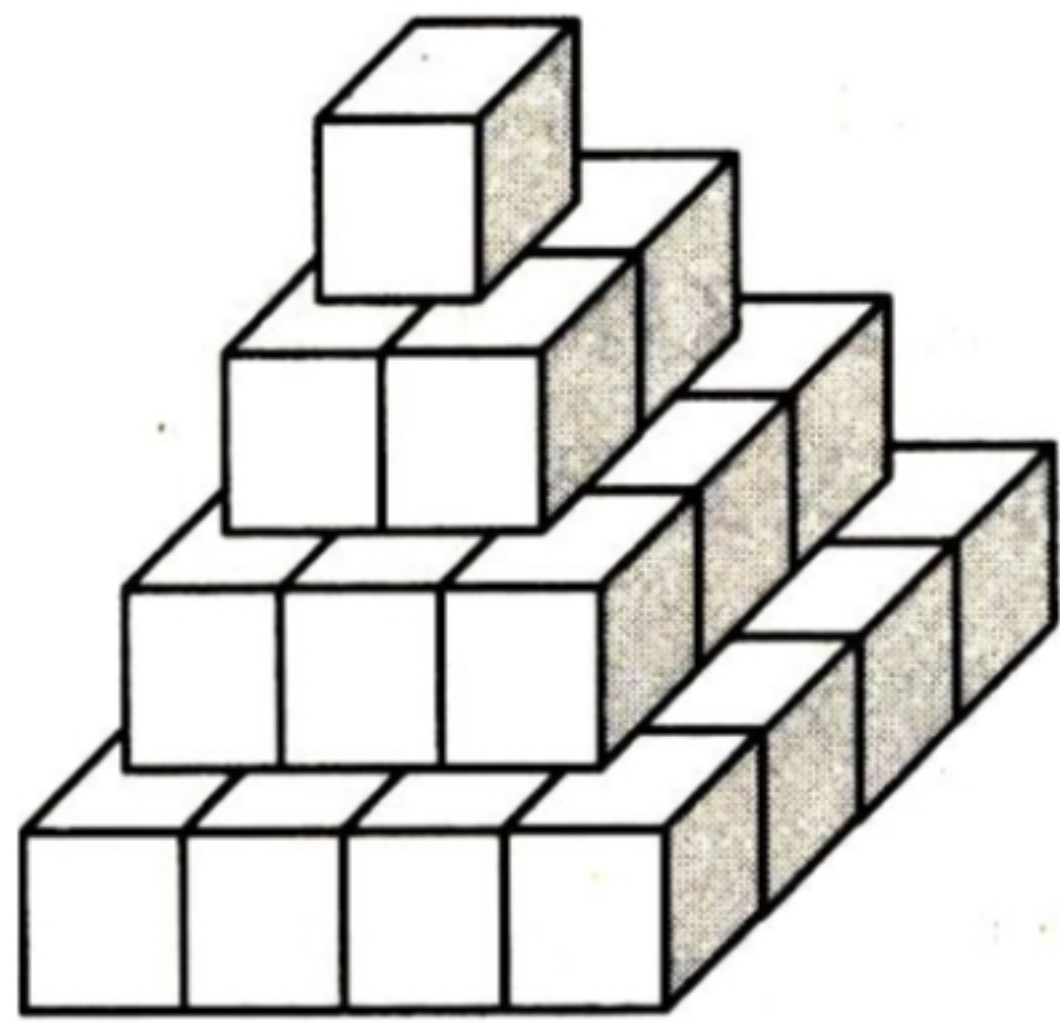


图 5-12

4. 如图 5-13 所示，将一个棱长为 10 的正方体从顶点 A 切掉一个棱长为 4 的正方体，得到如图 5-14 所示的立体图形，这个立体图形的表面积是多少？如果再从顶点 B 切掉一个棱长为 6 的正方体，那么剩下的立体图形的表面积又是多少？

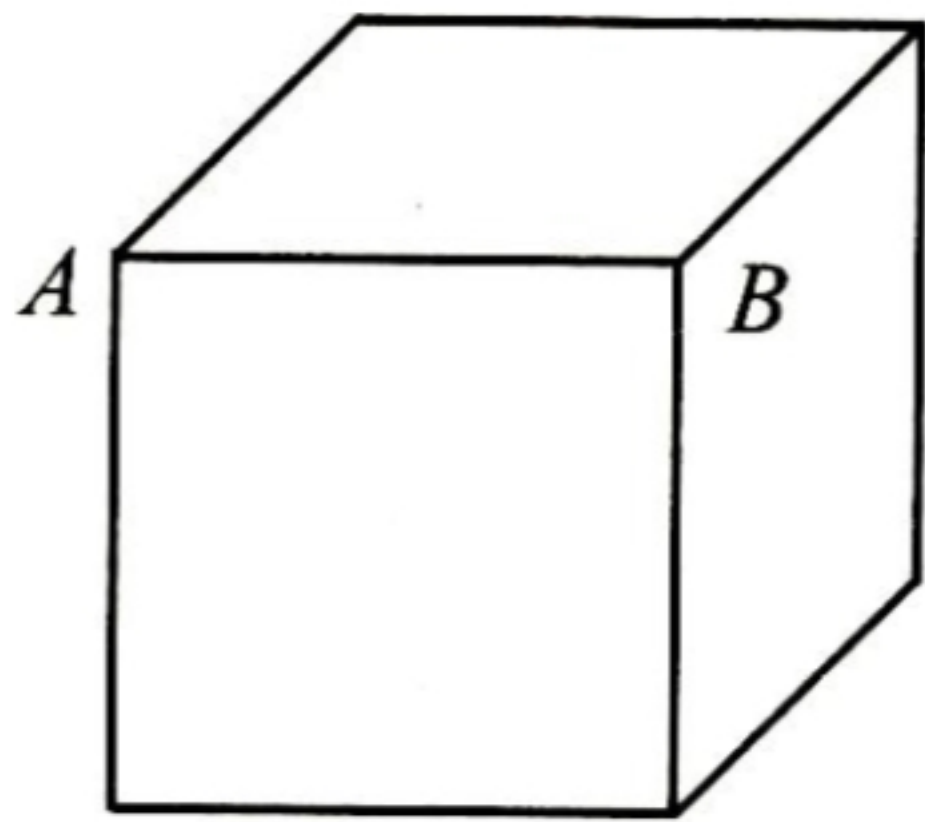


图 5-13

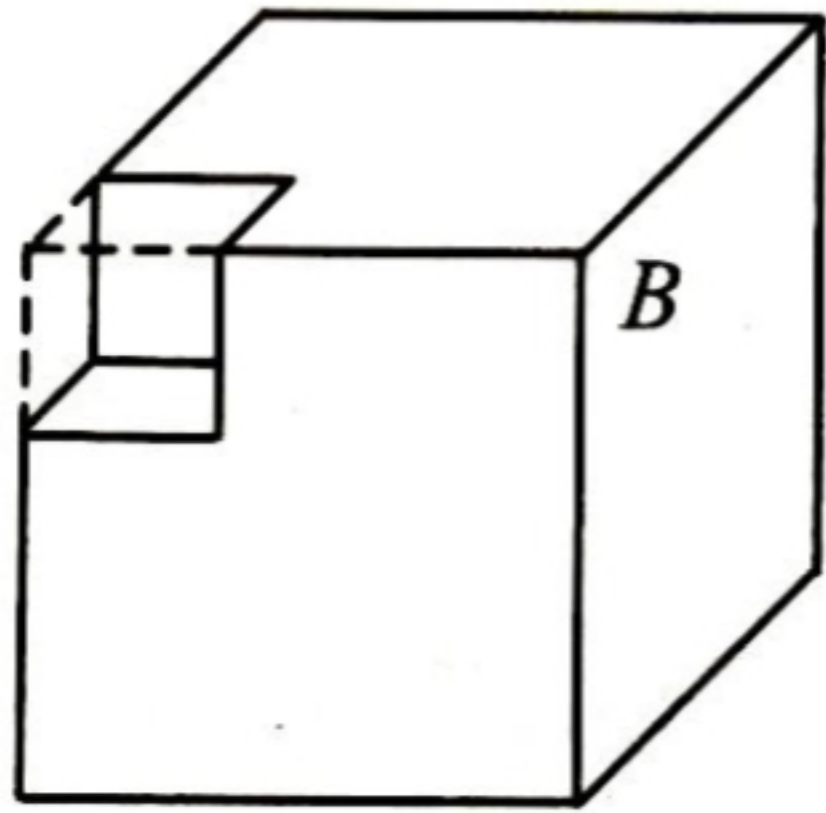
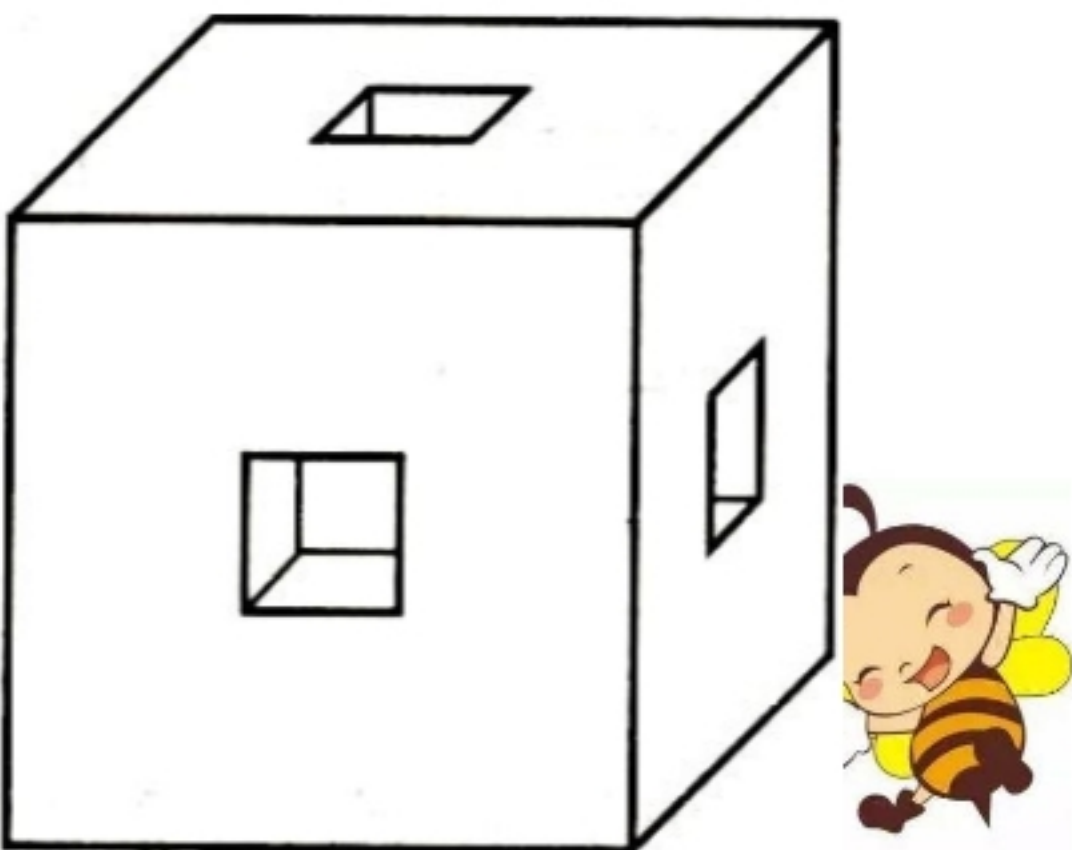
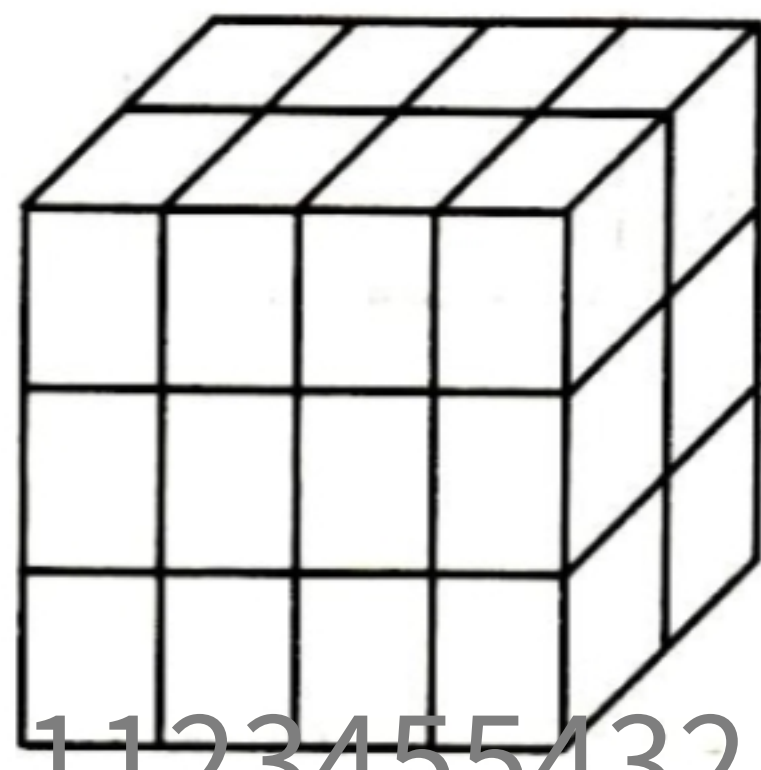


图 5-14

5. 一个正方体被切成 24 个大小形状一模一样的小长方体（如图 5-15 所示），这些小长方体的表面积之和为 162 平方厘米。请问：原正方体的体积是多少？



5. 图 5-16 是一个棱长为 4 厘米的正方体，分别在前、后、左、右、上、下各面的中心位置挖去一个棱长 1 厘米的小正方体，做成一种玩具．该玩具的表面积是多少平方厘米？如果把这些洞都打穿，表面积又变成了多少？

7. 一个无盖木盒从外面量时，其长、宽、高分别为 10 厘米、8 厘米、5 厘米，已知木板厚 1 厘米，那么做一个木盒，需要这样的木板多少平方厘米？这个木盒的容积又是多少？

8. 有一根长为 20 厘米，直径为 6 厘米的圆钢，在它的两端各钻一个 4 厘米深，底面直径也为 6 厘米的圆锥形的孔，做成一个零件（如图 5-17 所示）．这个零件的体积为多少立方厘米？（ π 取 3.14）

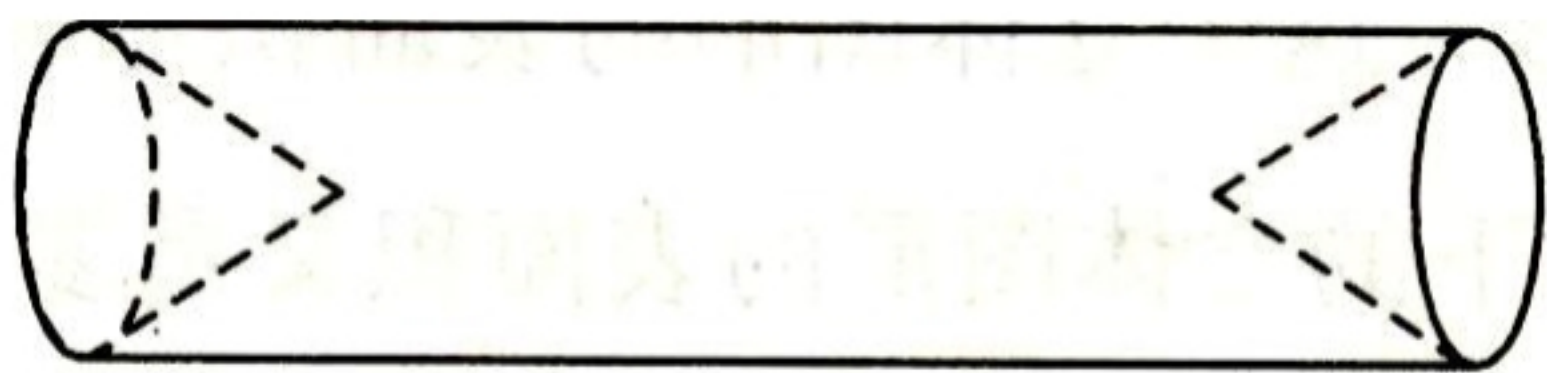


图 5-17

9. 现有一块长、宽、高分别为 10 厘米、8 厘米、6 厘米的长方体木块，把它切成体积尽可能大且底面在长方体表面上的圆柱体木块，这个圆柱体木块的体积为多少？（ π 取 3）

10. 张大爷去年用长 2 米、宽 1 米的长方形苇席围成了一个容积最大的圆柱体粮囤，今年他改用长 3 米、宽 2 米的长方形苇席来围，也同样围成容积最大的圆柱体粮囤，请问：今年粮囤的容积是去年粮囤容积的多少倍？



11. 左边正方形的边长为 4，右边正方形对角线长度为 6。如果按照图 5-18 中所示的方式旋转，那么得到的两个旋转体的体积之比是多少？

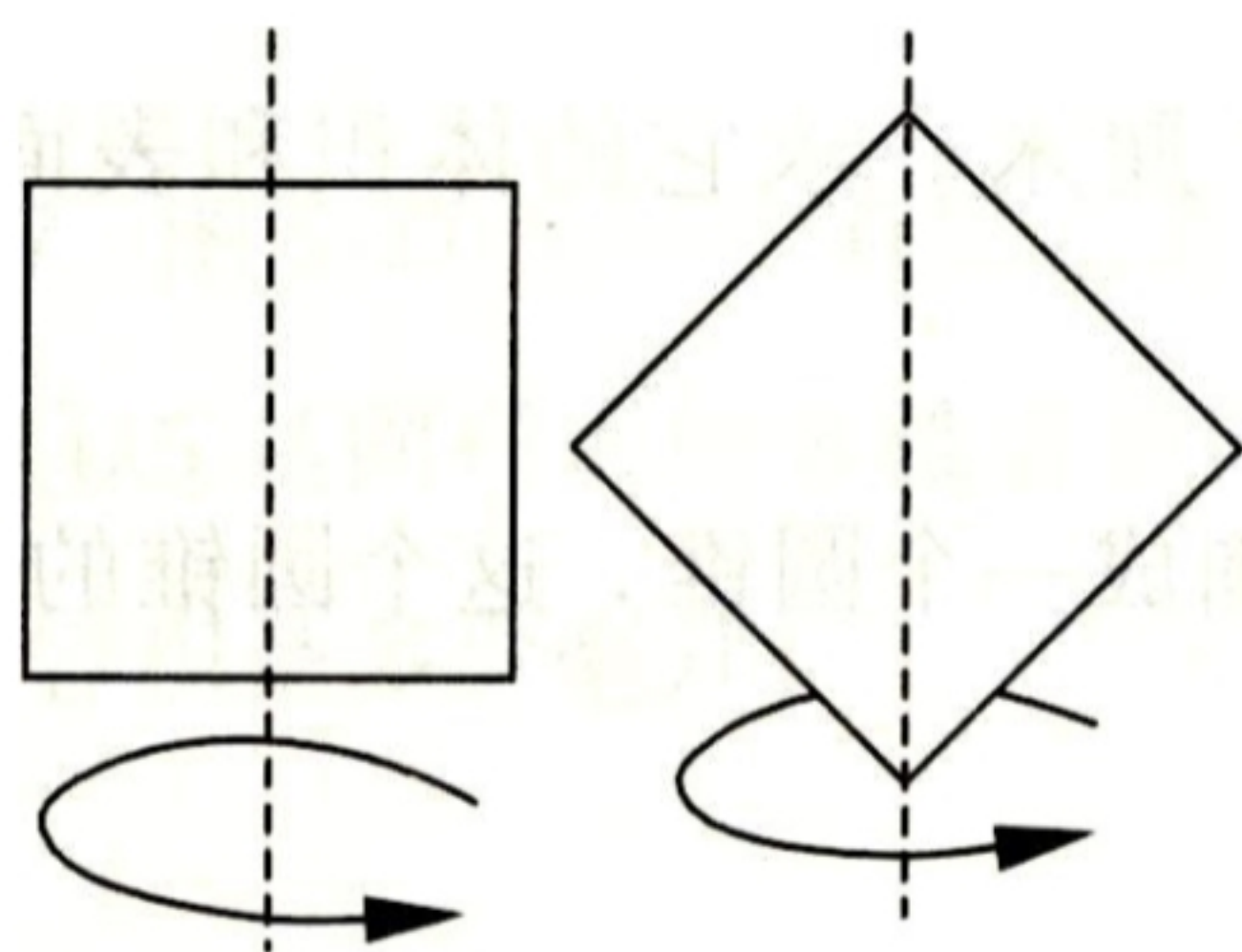


图 5-18

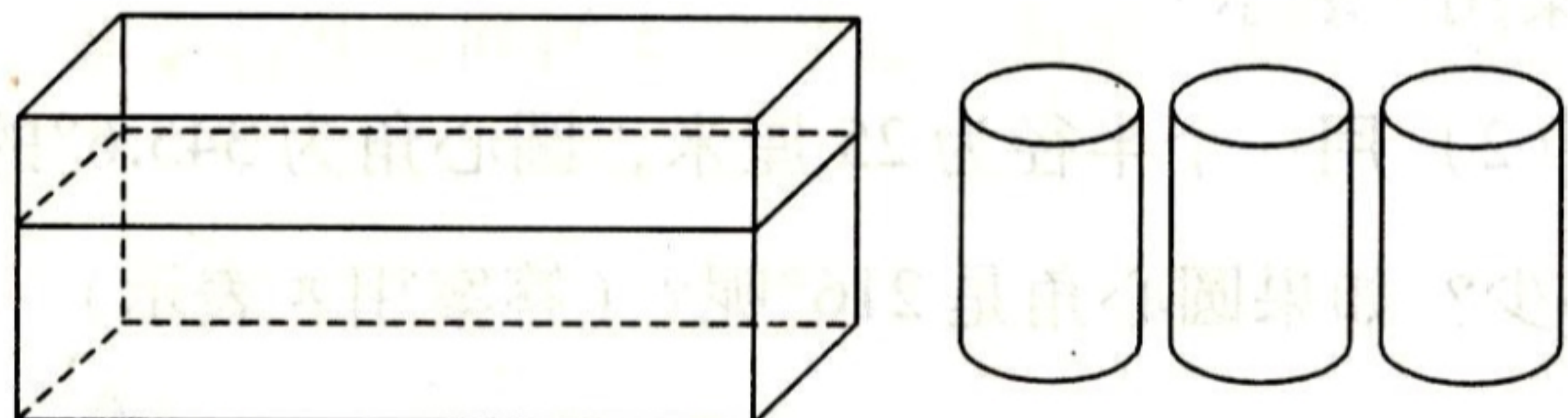


图 5-19

12. 如图 5-19 一个底面长 30 分米，宽 10 分米，高 12 分米的长方体水池，存有四分之三池水，请问：

- (1) 将一个高 11 分米，体积 330 立方分米的圆柱放入池中，水面的高度变为多少分米？
- (2) 如果再放入一个同样的圆柱，水面高度又变成了多少分米？
- (3) 如果再放入一个同样的圆柱，水面高度又变成了多少分米？

超越篇

1. 有一个棱长为 20 的大立方体，在它的每个角上按如图 5 -20 所示的方式各做一个小立方体，于是得到 8 个小立方体。在这些立方体中，上面 4 个的棱长为 12，下面 4 个的棱长为 13. 请问：所有这 8 个小立方体公共部分的体积是多少？

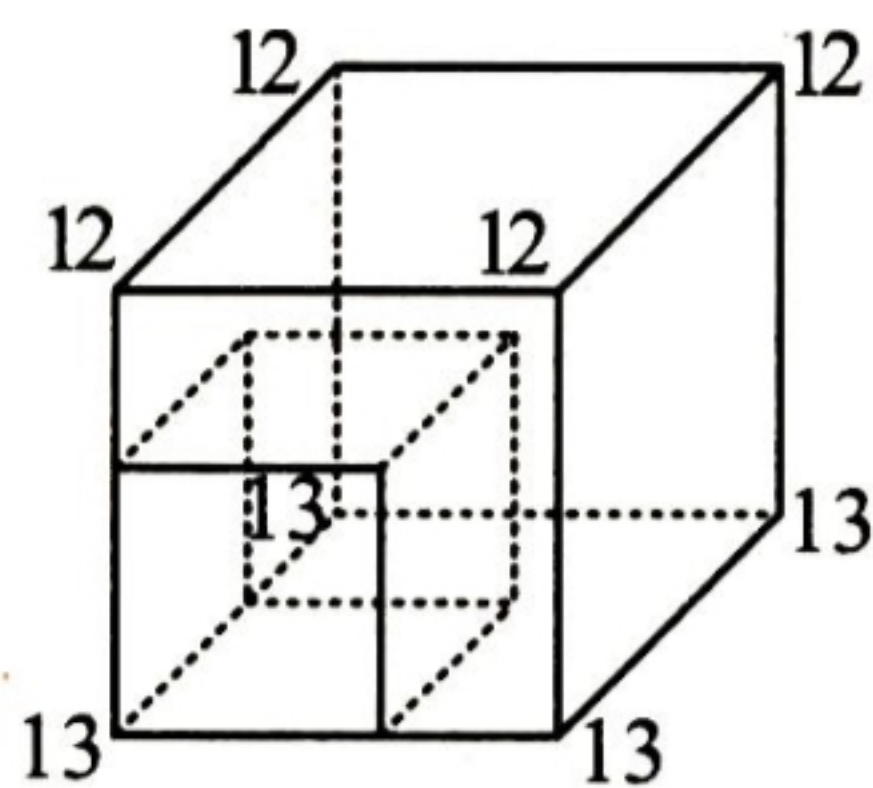


图 5-20

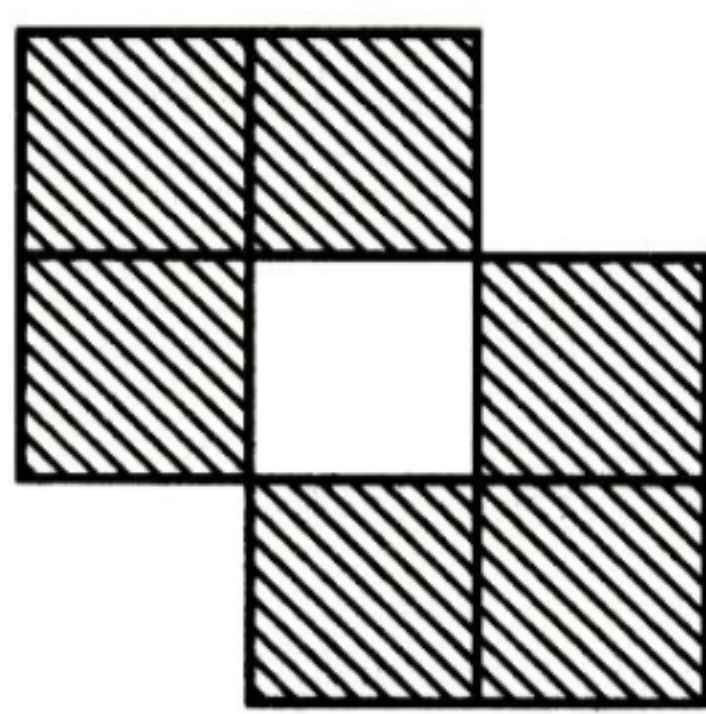


图 5-21

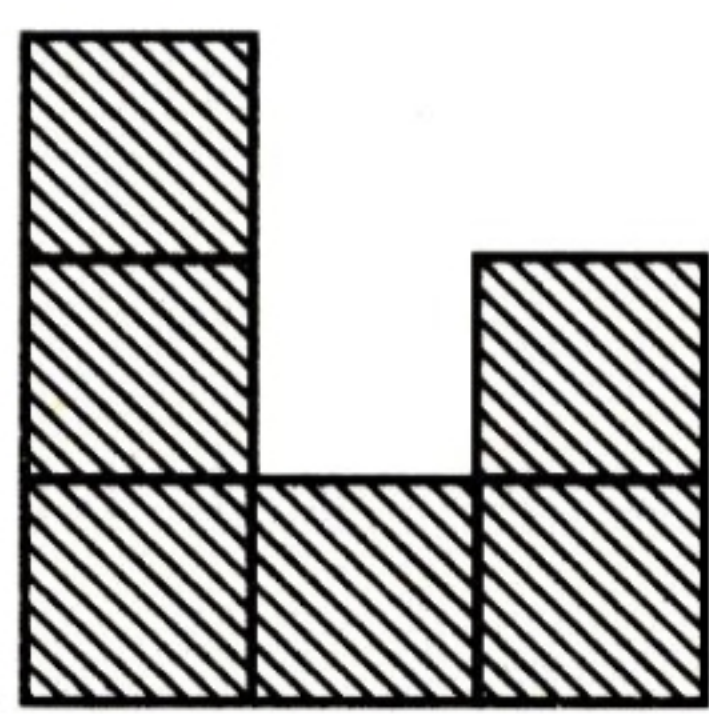


图 5-22

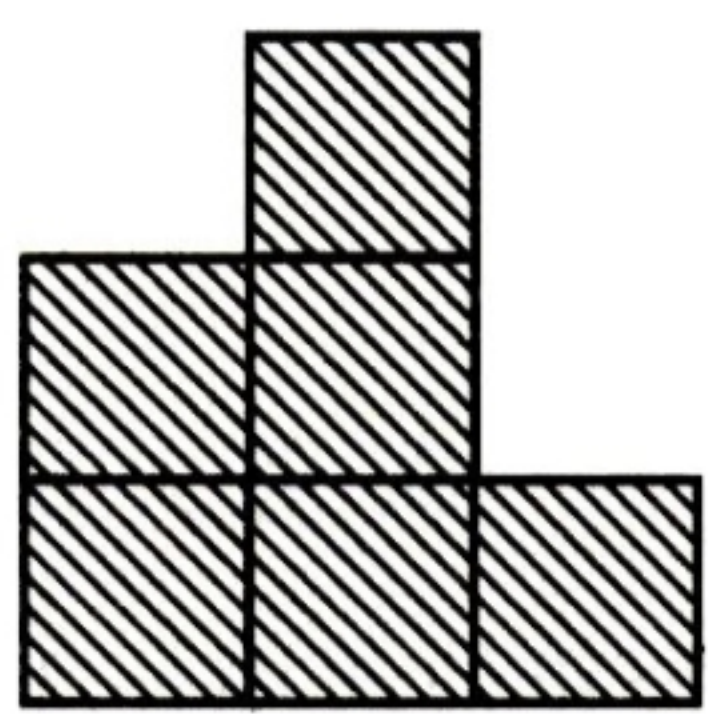


图 5-23



2. 地上有一堆小立方体，从上面看时如图 5-21 所示，从前面看时如图 5-22 所示，从左边看时如图 5-23 所示．这一堆立方体一共有几个？如果每个小立方体的棱长为 1 厘米，那么这堆立方体所堆成的立体图形表面积为多少平方厘米？

3. (1)已知一个圆锥的底面直径为 6 厘米，高为 4 厘米．求它的体积和表面积；（答案用 π 表示）
 (2)用一个半径为 25 厘米，圆心角为 345.6° 的扇形围成一个圆锥，这个圆锥的体积是多少？如果圆心角是 216° 呢？（答案用 π 表示）

4. 将图 5 -24、图 5-25 中的平面图形分别折叠成一个四棱锥和三棱柱，这两个立体图形的体积分别是多少？
 （图 5 -24 正中央是一个面积为 18 平方厘米的正方形，每边上分别有一个腰长为 5 厘米的等腰三角形；图 5-25 中的图形由三个长方形和两个直角三角形组成．）

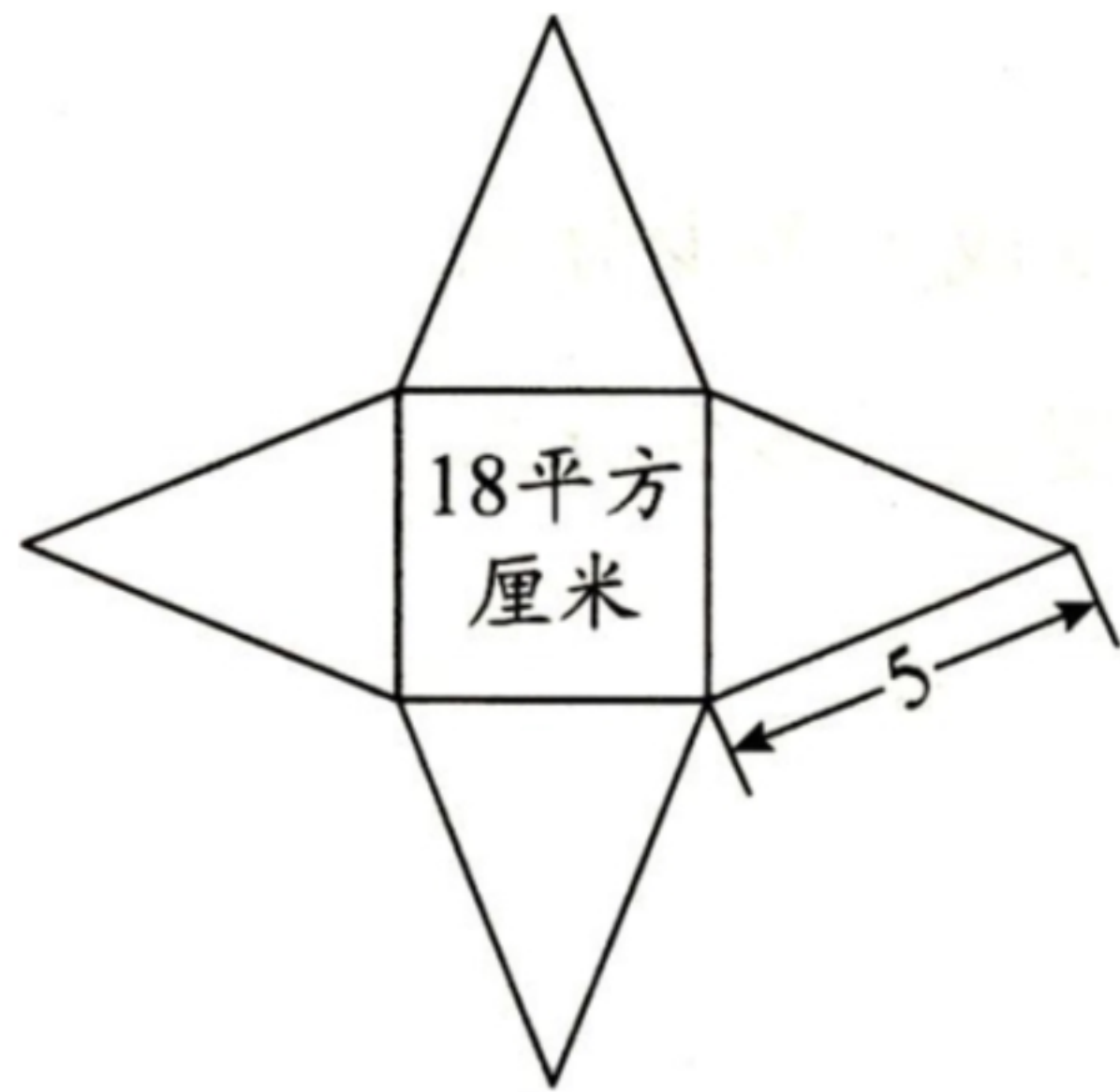


图 5-24

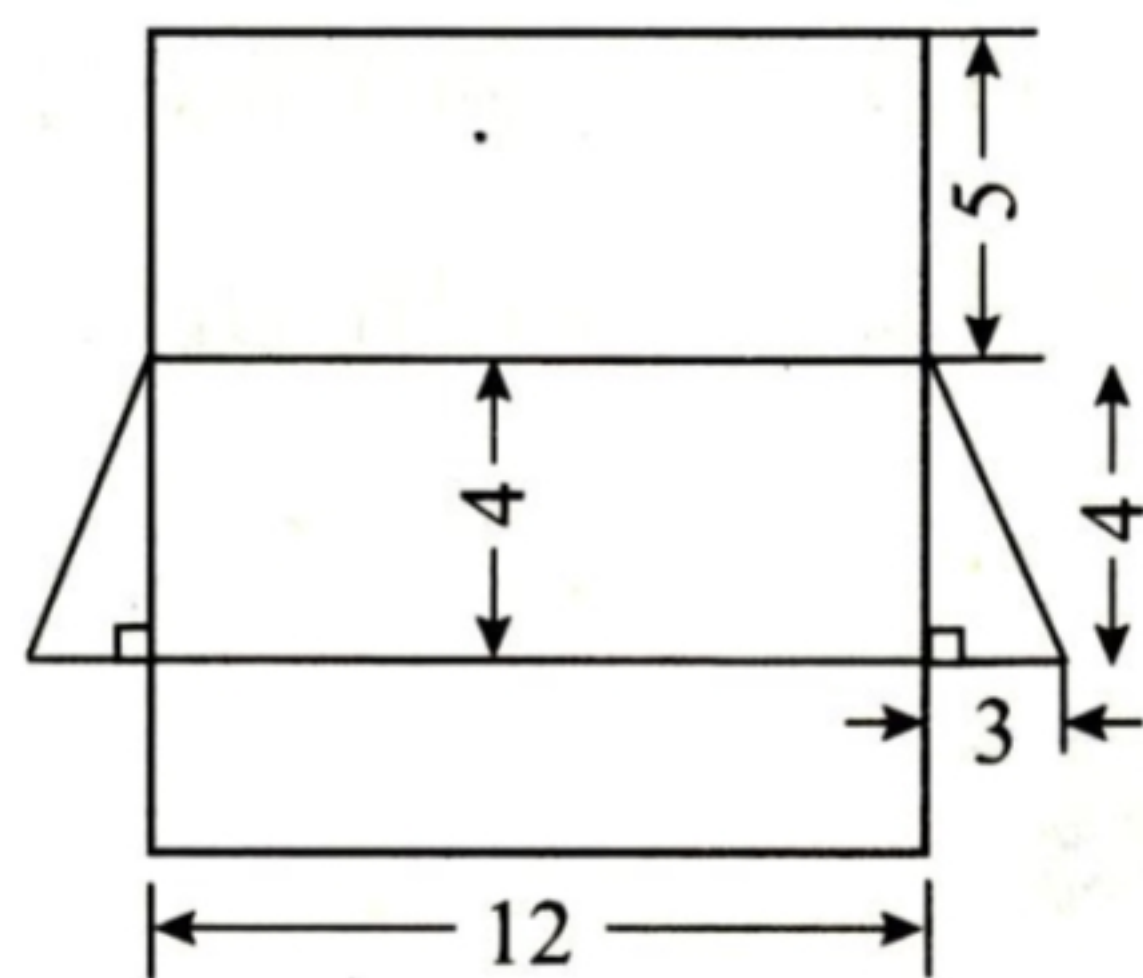


图 5-25

5. 一个透明的封闭盛水容器，由一个圆柱体和一个圆锥体组成，如图 5-26 圆柱体的底面直径和高都是 12 厘米，其内有一些水，正放时水面离容器顶 11 厘米，倒放时，水面离顶部 5 厘米．请问：这个容器的容积是多少立方厘米？（ π 取 3.14）

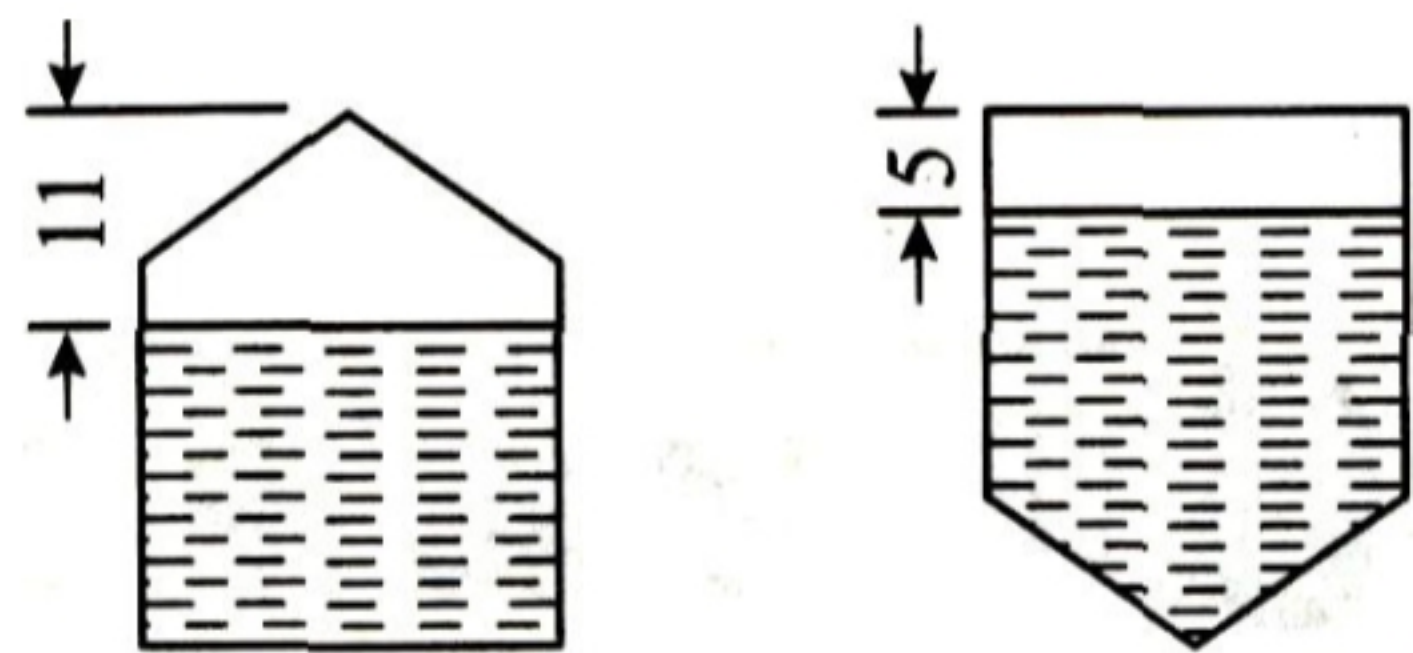


图 5-26



6. 有一个长方体水池，底面为边长 60 厘米的正方形，里面插着一根长 1 米的木桩，木桩的底面是一个边长 15 厘米的正方形，木桩有一部分浸在水中，一部分露出水面．现在将木桩提起来 24 厘米（仍有部分浸在水里），那么露出水面的木桩浸湿部分面积为多少平方厘米？

7. 图 5 -27 是一个有底无盖的容器的平面展开图，其中①是边长为 18 厘米的正方形，②③④⑤是同样大的等腰直角三角形，⑥⑦⑧⑨是同样大的等边三角形．那么，这个容器的容积是多少毫升？

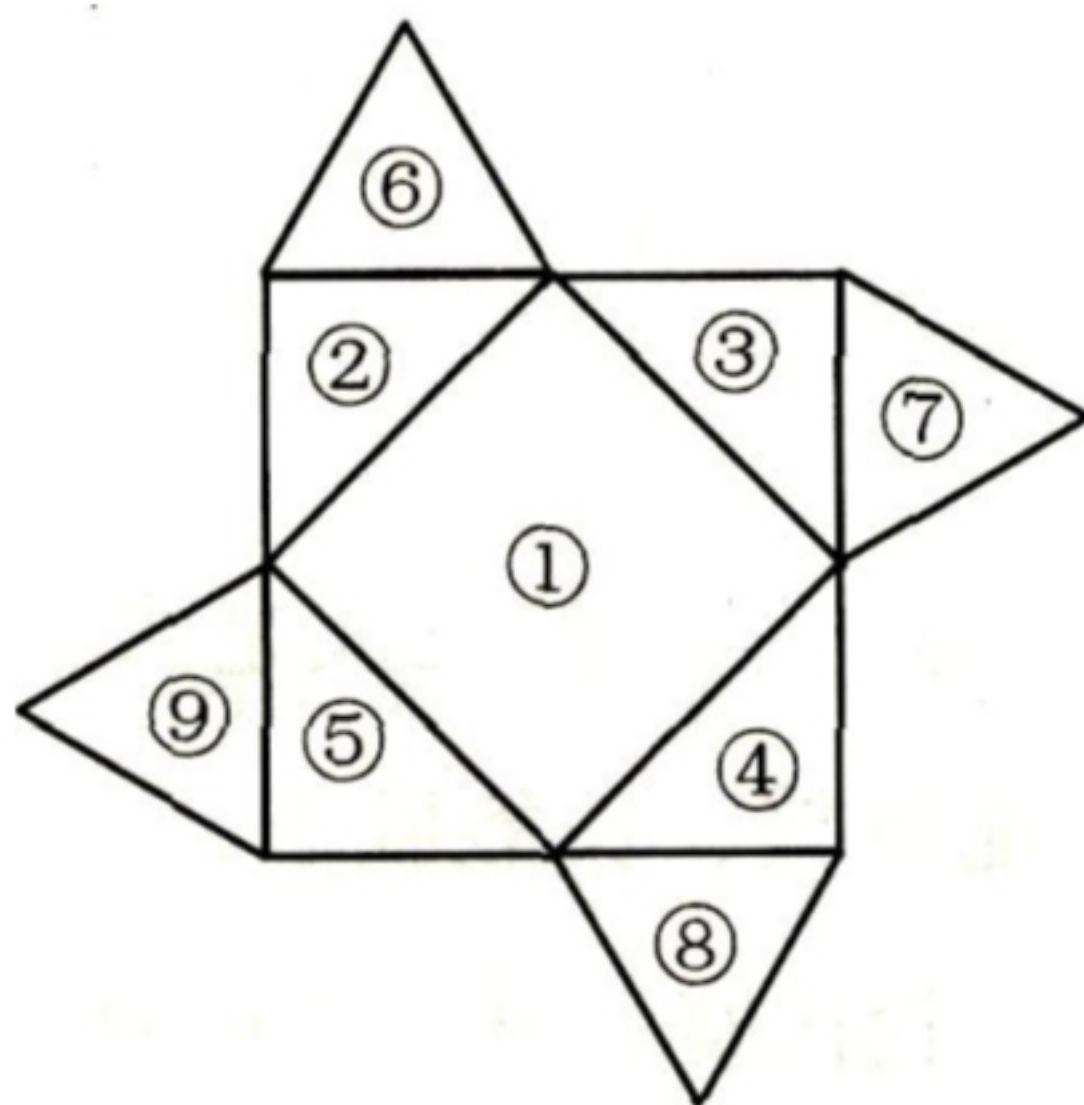


图 5-27

9. 有一个三棱柱和一个正方体，三棱柱的底面是一个等边三角形，边长恰好等于正方体的面对角线长度，三棱柱的高恰好等于正方体的体对角线长度，如果正方体的棱长为 6，那么三棱柱的体积为多少？

第 6 讲 逻辑推理（二）

内容概述



体育比赛形式的逻辑推理问题，学会将比赛双方以及胜平负关系的情况用点线图表示，借助表格来统计得分与得失球数，有时还可利用总得分数来进行分析。需要从整体考虑或从极端情况分析的，具有一定综合性的逻辑推理问题。

典型问题

提高篇

1. 甲、乙两队进行象棋对抗赛，甲队的三人是张、王、李，乙队的三人是赵、钱、孙，按照以往的比赛成绩看，张能胜钱，钱能胜李，李能胜孙，但是第一轮的比赛他们都没有成为对手。请问：第一轮比赛的分别是谁对谁？

2. 甲、乙、丙、丁与小强这 5 位同学一起参加象棋比赛，每两人都要赛一盘。到目前为止，甲赛了 4 盘，乙赛了 3 盘，丙赛了 2 盘，丁赛了 1 盘。问：小强已经赛了几盘？

3. 甲、乙、丙三名选手参加马拉松比赛，起跑后甲处在第一的位置，在整个比赛过程中，甲的位置共发生了 7 次变化。比赛结束时甲是第几名？（注：整个比赛过程中没有出现三人跑在同一位置的情形。）

4. 有 10 名选手参加乒乓球单打比赛，每名选手都要和其它选手各赛一场，而且每场比赛都分出胜负，请问：(1)总共有多少场比赛？(2)这 10 名选手胜的场数能否全都相同？(3)这 10 名选手胜的场数能否两两不同？

5. 6 支足球队进行单循环比赛，即每两队之间都比赛一场。每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分，平局各得 1 分，请问：(1)各队总得分之和最多是多少分？最少是多少分？(2)如果在比赛中出现了 6 场平局，那么各队总得分之和是多少？



6. 红、黄、蓝三支乒乓球队进行比赛，每队派出 3 名队员参赛。比赛规则如下：参赛的 9 名队员进行单循环赛决出名次，按照获胜场数进行排名，并按照排名获得一定的分数，第一名得 9 分，第二名得 8 分，……，第九名得 1 分；除产生个人名次外，每个队伍还会计算各自队员的得分总和，按团体总分的高低评出团体名次。最后，比赛结果没有并列名次。其中个人评比的情况是：第一名是一位黄队队员，第二名是一位蓝队队员，相邻的名次的队员都不在同一个队。团体评比的情况是：团体第一的是黄队，总分 16 分；第二名是红队，第三名是蓝队。请问：红队队员分别得了多少分？

7. 5 支球队进行单循环赛，每两队之间比赛一场，每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分，打平则双方各得 1 分，最后 5 支球队的积分各不相同，第三名得了 7 分，并且和第一名打平。请问：这 5 支球队的得分，从高到低依次是多少？

8. 有 A、B、C 三支足球队，每两队比赛一场，比赛结果为：A：两胜，共失 2 球；B：进 4 球，失 5 球；C：有一场踢平，进 2 球，失 8 球。则 A 与 B 两队间的比分是多少？

9. 一次考试共有 10 道判断题，正确的画“√”，错误的画“×”，每道题答对得 10 分，答错得 0 分，满分为 100 分。甲、乙、丙、丁四名同学的解答及甲、乙、丙三名同学的得分如图 6-1.请问：丁应该得多少分？

题号 学生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	得分
甲	×	×	√	√	×	×	√	×	√	√	70
乙	×	√	×	√	√	×	×	√	√	×	70
丙	√	×	×	×	√	√	√	×	×	×	60

10. 赵、钱、孙、李、周 5 户人家，每户至少订了 A、B、C、D、E 这 5 种报纸中的一种。已知赵、钱、孙、李分别订了其中的 2、2、4、3 种报纸，而 A、B、C、D 这 4 种报纸在这 5 户人家中分别有 1、2、2、2 家订户。周姓订户订有这 5 种报纸中的几种？报纸 E 在这 5 户人家中有几家订户？

拓展篇

1. 编号为 1、2、3、4、5、6 的同学进行围棋比赛，每 2 个人都要赛 1 盘。现在编号为 1、2、3、4、5 的同学已经赛过的盘数和他们的编号数相等。请问：编号为 6 的同学赛了几盘？

2. 五行（火水木金土）相生相克，其中每一个元素都生一个，克一个，被一个生和被一个克，水克火是我们熟悉的，有一个俗语叫做“兵来将挡，水来土掩”，是说土能克水。另外，水能生木，火能生土。请把五行的相生相克关系画出来。

3. A、B、C、D、E、F 六个国家的足球队进行单循环比赛（即每队都与其他队赛一场），每天同时在 3 个场地各进行一场比赛，已知第一天 B 对 D，第二天 C 对 E，第三天 D 对 F，第四天 B 对 C 请问：第五天与 A 队比赛的是哪支队伍？



4. A、B、C 三个篮球队进行比赛，规定每天比赛一场，每场比赛结束后，第二天由胜队与另一队进行比赛，败队则休息一天，如此继续下去，最后结果是 A 队胜 10 场，B 队胜 12 场，C 队胜 14 场，则 A 队共打了几场比赛？

5. 甲、乙、丙、丁四名同学进行象棋比赛，每两人都比赛一场，规定胜者得 2 分，平局各得 1 分，输者得 0 分，请问：(1)一共有多少场比赛？ (2)四个人最后得分的总和是多少？ (3)如果最后结果甲得第一，乙、丙并列第二，丁是最后一名，那么乙得了多少分？

6. 五支足球队进行循环赛，即每两个队之间都要赛一场，每场比赛胜者得 2 分，输者得 0 分，平局两队各得 1 分。比赛结果各队得分互不相同。已知：①第一名的队没有平过；②第二名的队没有输过；③第四名的队没有胜过，问：第一名至第五名各得多少分？全部比赛共打平过几场？

7. 四支足球队进行单循环比赛，即每两队之间都比赛一场，每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分，平局各得 1 分。比赛结束后，各队的总得分恰好是 4 个连续的自然数，问：输给第一名的队的总分是多少？

8. 甲、乙、丙、丁、戊五个同学的各科考试成绩如图 6-2 所示，已知：

- ①每门功课五个人的分数恰巧分别为 1、2、3、4、5；
- ②五个人的总分互不相同，且从高到低的顺序排列是：甲、乙、丙、丁、戊；
- ③丙有四门功课的分数相同。

请你把图 6-2 补充完整。



	语文	数学	英语	音乐	美术	总分
田						24
乙						
丙						
丁		4				
戊	3		5			

图 6 - 2

10. 一次足球赛，有 A、B、C、D 四个队参加，每两队都赛一场，按规则，胜一场得 2 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分．比赛结束后，B 队得 5 分，A 队得 1 分．所有场次共进了 9 个球，B 队进球最多，共进了 4 个球，C 队共失了 3 个球，D 队 1 个球也未进，A 队与 C 队的比赛比分是 2：3．问：A 队与 B 队的比赛比分是多少？

10. A、B、C、D 四个足球队进行循环比赛．赛了若干场后，A、B、C 三队的比赛情况如图 6-3：问：D 赛了几场？D 赛的几场的比分各是多少？

	场数	胜	平	负	进球	失球
A	3	2	1	0	2	0
B	2	1	1	0	4	3
C	2	0	0	2	3	6
D						

图 6-3

11. 九个外表完全相同的小球，重量分别是 1，2，…，9．为了加以区分，它们都被贴上了数字标签，可是有一天，不知被哪个调皮鬼重新乱贴了一通．我们用天平做了两次称量，得到如下结果：(1)①②>③④⑤⑥⑦； (2)③⑧=⑦，请问：⑨号小球的重量是多少？



12. A、B、C、D、E 五位同学分别从不同的途径打听到五年级数学竞赛获得第一名的那位同学的情况：

A 打听到的：姓李，是女同学，13 岁，东城区；

B 打听到的：姓张，是男同学，11 岁，海淀区；

C 打听到的：姓陈，是女同学，13 岁，东城区；

D 打听到的：姓黄，是男同学，11 岁，西城区；

E 打听到的：姓张，是男同学，12 岁，东城区。

实际上第一名同学的情况在上面都出现过，而且这五位同学的消息都仅有一项正确，那么第一名的同学应该是哪个区的，今年多少岁呢？

超越篇

1. 在一次射击练习中，甲、乙、丙 3 位战士各打了 4 发子弹，全部中靶。其命中情况如下：

①每人 4 发子弹所命中的环数各不相同； ②每人 4 发子弹所命中的总环数均为 17 环；

③乙有 2 发命中的环数分别与甲其中的 2 发一样，乙另 2 发命中的环数与丙其中的 2 发一样；

④甲与丙只有 1 发环数相同； ⑤每人每发子弹的最好成绩不超过 7 环。

问：甲与丙命中的相同环数是几？

2. 一次象棋比赛共有 10 位选手参加，他们分别来自甲、乙、丙 3 个队。每人都与其余 9 人比赛一盘，每盘胜者得 1 分，负者得 0 分，平局各得 0.5 分。结果乙队平均得分为 3.6 分，丙队平均得分为 9 分，那么甲队平均得多少分？



3. A、B、C、D、E 这 5 支球队进行循环赛，每两队之间比赛一场。每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分，打平则双方各得 1 分，最后 5 支球队的积分各不相同，从高到低依次为 D、A、E、B、C 又已知 5 支球队当中只有 A 没输过，只有 C 没赢过，而且 B 战胜了 E。请问：战胜过 C 的球队有哪些？

4. 10 名选手参加象棋比赛，每两名选手间都要比赛一次，已知胜一场得 2 分，平一场得 1 分，负一场不得分。比赛结果：选手们所得分数各不相同，前两名选手都没输过，前两名的总分比第三名多 20 分，第四名得分与后四名所得总分相等，问：前六名的分数各为多少？

5. 现有 A、B、C 共 3 支球队举行单循环比赛，即每两队之间都要比赛一场。比赛积分的规定是胜一场积 2 分，平一场积 1 分，负一场积 0 分，图 6-4 是一张记有比赛详细情况表格，但是，经过核对，发现表中恰好有 4 个数字是错误的，请你把正确的结果填入图 6-5 中。

	场数	胜	负	平	进球	失球	积分
A	2	2	0	1	0	2	3
B	2	1	1	0	3	6	2
C	1	0	1	2	0	1	1

图 6-4

	场数	胜	负	平	进球	失球	积分
A							
B							
C							

图 6-5

6. 9 个小朋友从前到后站成一列。现在将红黄蓝三种颜色的帽子各三顶分别戴在这些小朋友的头上。每个小朋友都只能看到站在他前面的小朋友帽子的颜色。后来统计了一下，发现他们看到的红颜色帽子的总次数等于他们看到的黄颜色帽子的总次数，也等于他们看到的蓝颜色帽子的总次数。已知从前往后数第三个小朋友戴着红帽子，第六个小朋友戴着黄帽子，请问：最后一个小朋友戴着什么颜色的帽子？



7. 有 A、B、C 三支球队进行比赛，每一轮比赛三个队之间各赛一场。每队胜一场得 2 分，平一场得 1 分，负一场不得分。如果三支球队共比赛了 7 轮，最后 A 胜的场数最多，B 输的场数最少，C 的得分最高（这些都没有并列）。请问：A 得了多少分？

8. 阿奇和 8 个好朋友去李老师家玩，李老师给每人发了一顶帽子，并在每个人的帽子上写了一个两位数，这 9 个两位数互不相同，且每个小朋友只能看见别人帽子上的数。

李老师在纸上写了一个自然数 A，问这 9 位同学：“你们知道自己帽子上的数能否被 A 整除吗？知道的请举手，”结果有 4 人举手。

李老师又问：“现在你们知道自己帽子上的数能否被 24 整除吗？知道的请举手。”结果有 6 人举手。

已知阿奇两次都举手了，并且这 9 位同学都足够聪明且从不说谎。请问：除了阿奇之外的人帽子上 8 个两位数的总和是多少？

第 7 讲 几何综合（一）

内容概述

复杂的长度、角度计算；复杂的直线形比例关系；具有一定综合性的直线形计算问题。



典型问题

提高篇

1. 图 7-1 中八条边的长度正好分别是 1、2、3、4、5、6、7、8 厘米. 已知 $a=2$ 厘米, $b=4$ 厘米, $c=5$ 厘米, 求图形的面积.

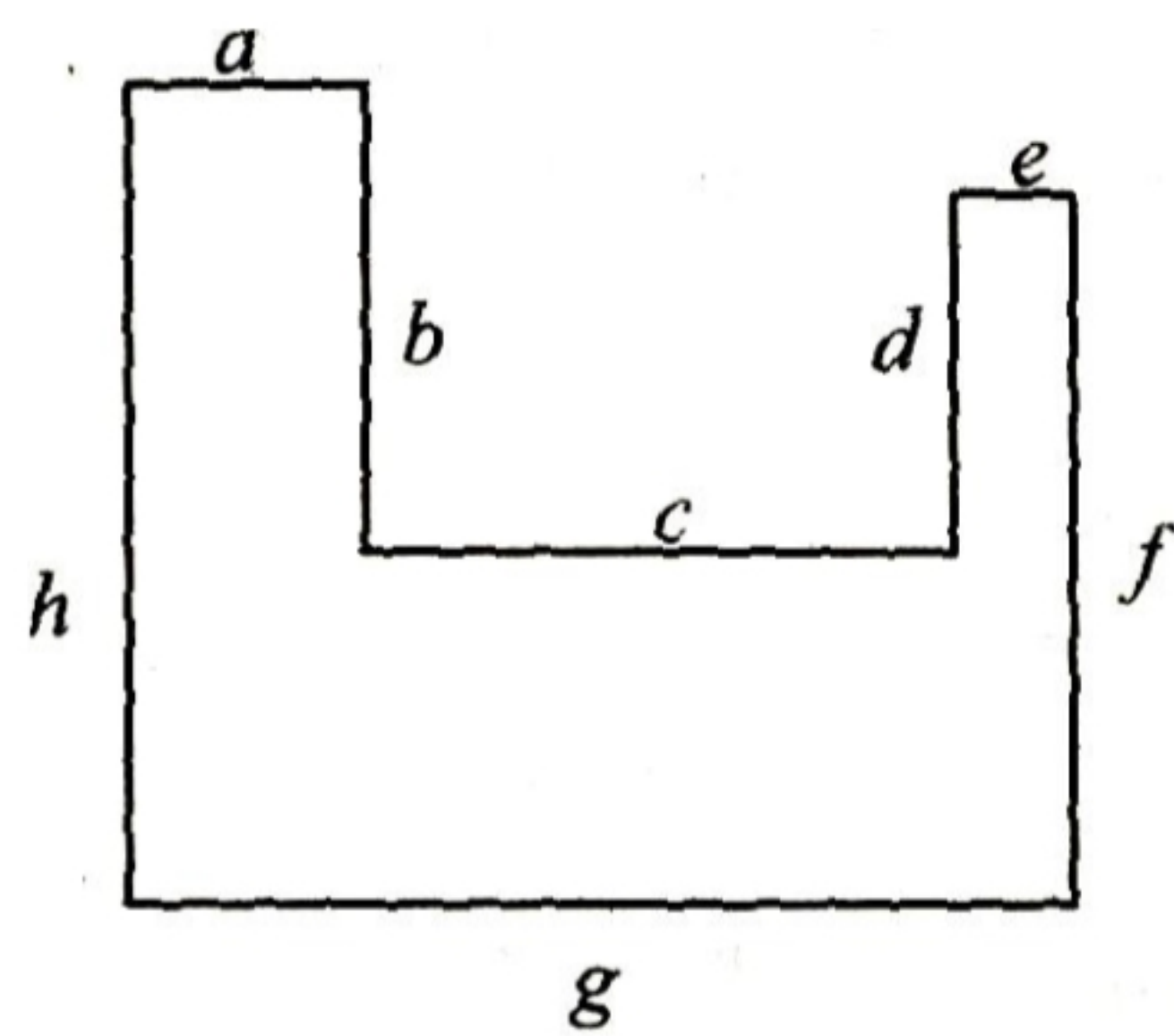


图 7-1

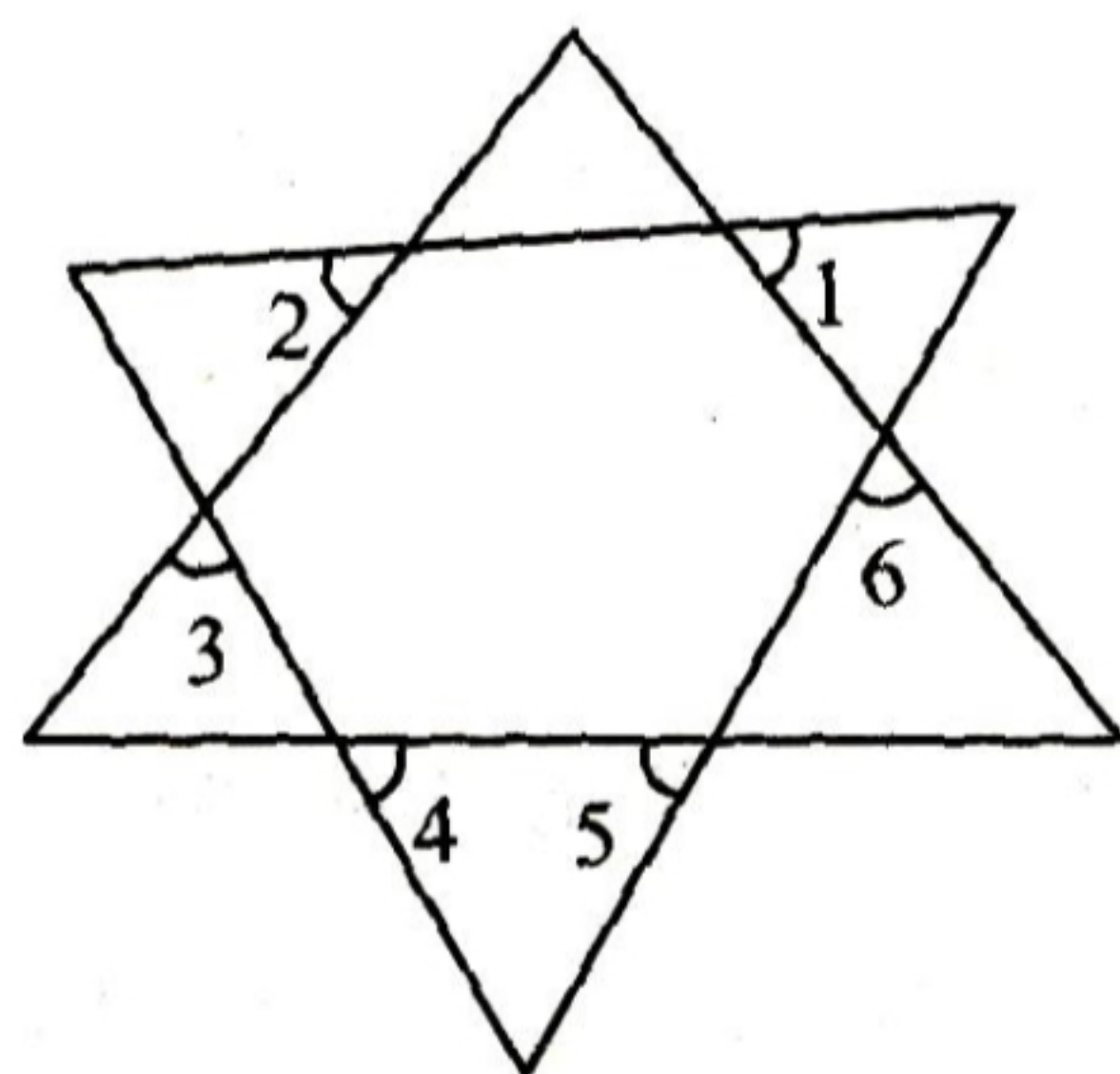


图 7-2

2. 如图 7-2 所示, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ 等于多少度?

3. 如图 7-3, 平行四边形 ABCD 的周长为 75 厘米, 以 BC 为底时高是 14 厘米, 以 CD 为底时高是 16 厘米. 求平行四边形 ABCD 的面积.

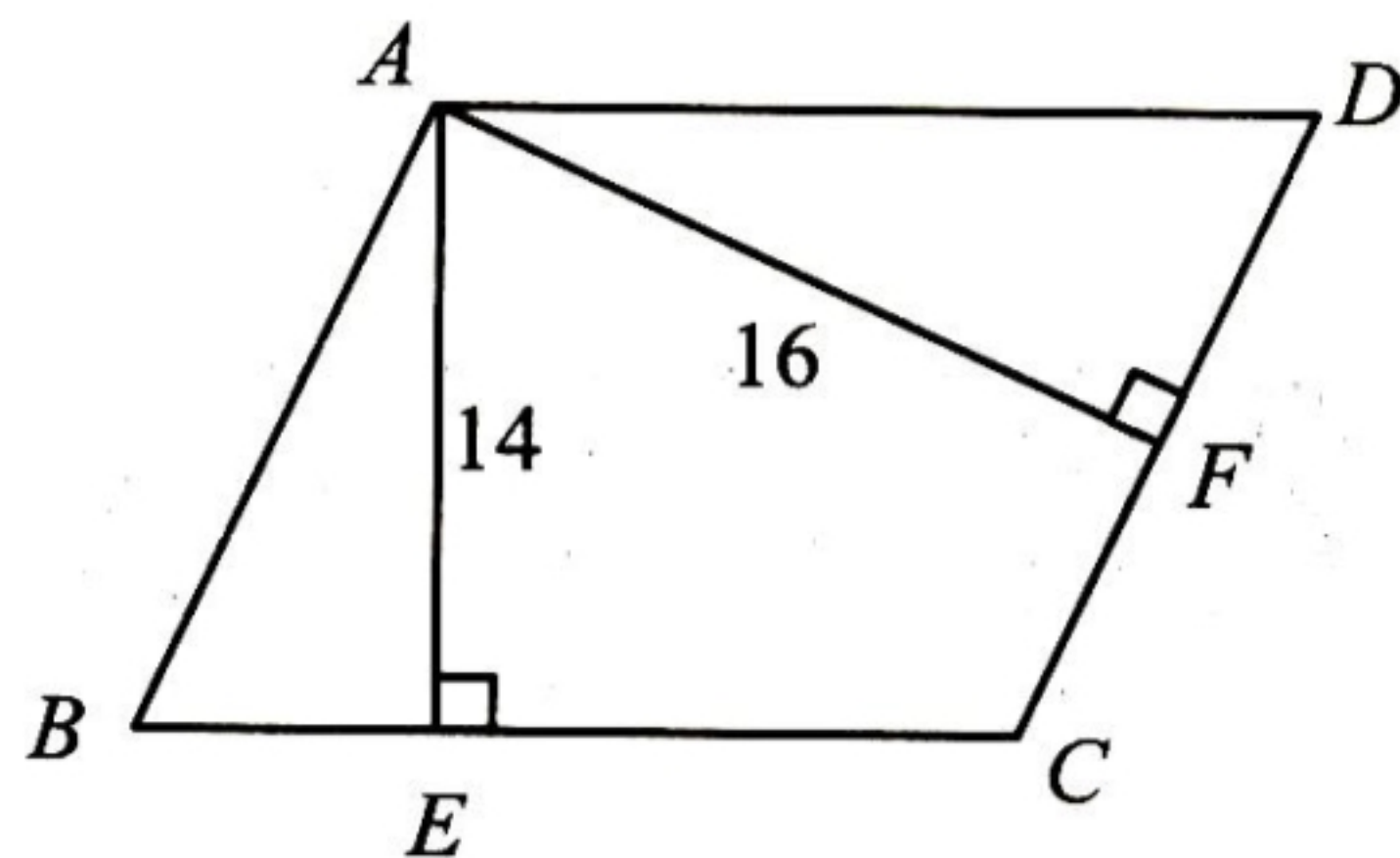
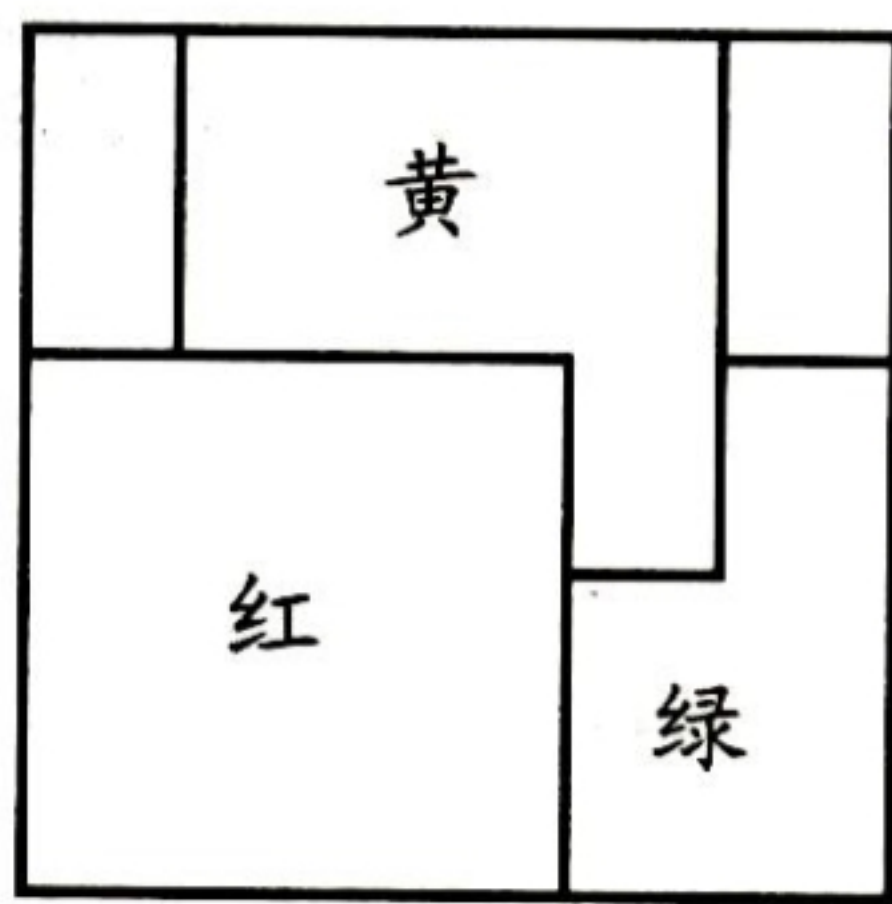
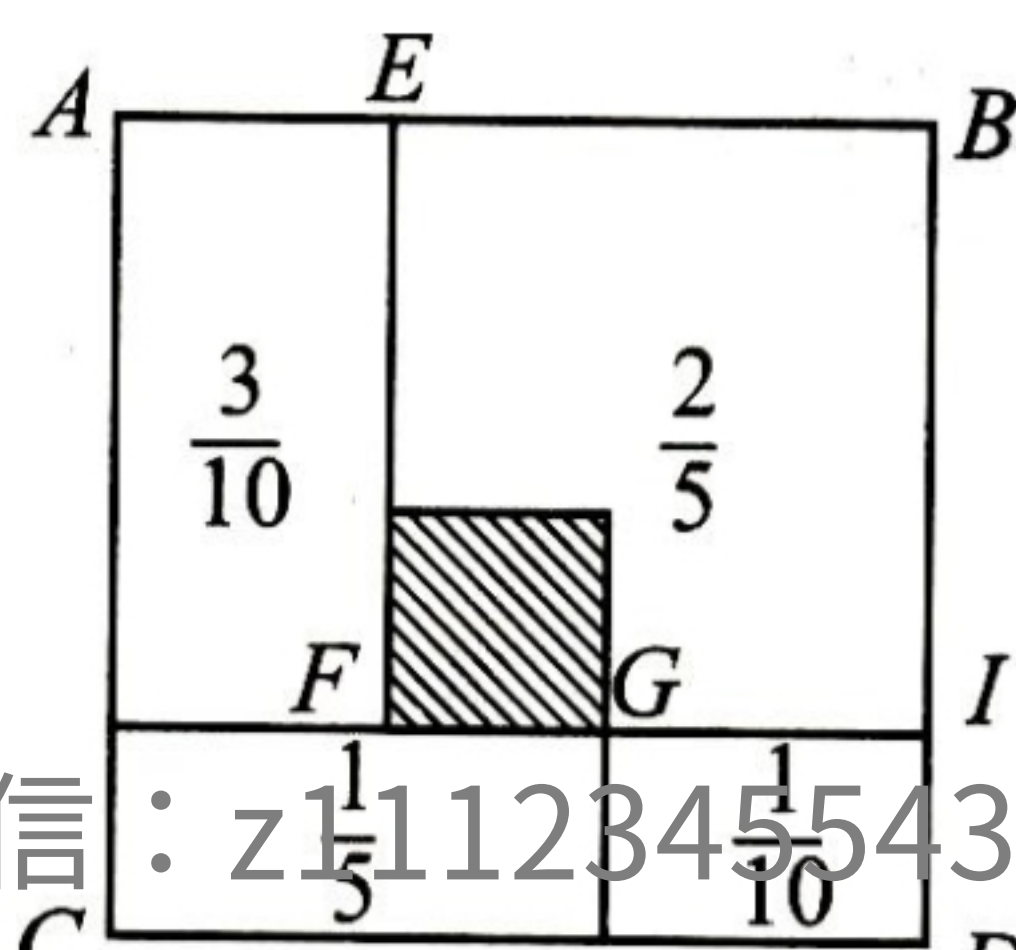


图 7-3

4. 如图 7-4, 一个边长为 1 米的正方形被分成 4 个小长方形, 它们的面积分别是 $\frac{3}{10}$ 平方米、 $\frac{2}{5}$ 平方米、 $\frac{1}{5}$ 平方米和 $\frac{1}{10}$ 平方米. 已知图中的阴影部分是正方形, 那么它的面积是多少平方米?



5. 如图 7-5，红、黄、绿三块大小一样的正方形纸片，放在一个正方体盒内，它们之间相互重叠，已知露在外面的部分中，红色的面积是 20，黄色的面积是 14，绿色的面积是 10.那么，正方体盒子的底面积是多少？

6. 如图 7-6，在三角形 ABC 中，IF 和 BC 平行，GD 和 AB 平行，HE 和 AC 平行. 已知 AG: GF: FC =4:3:2，那么 AH: HI: IB 和 BD: DE: EC 分别是多少？

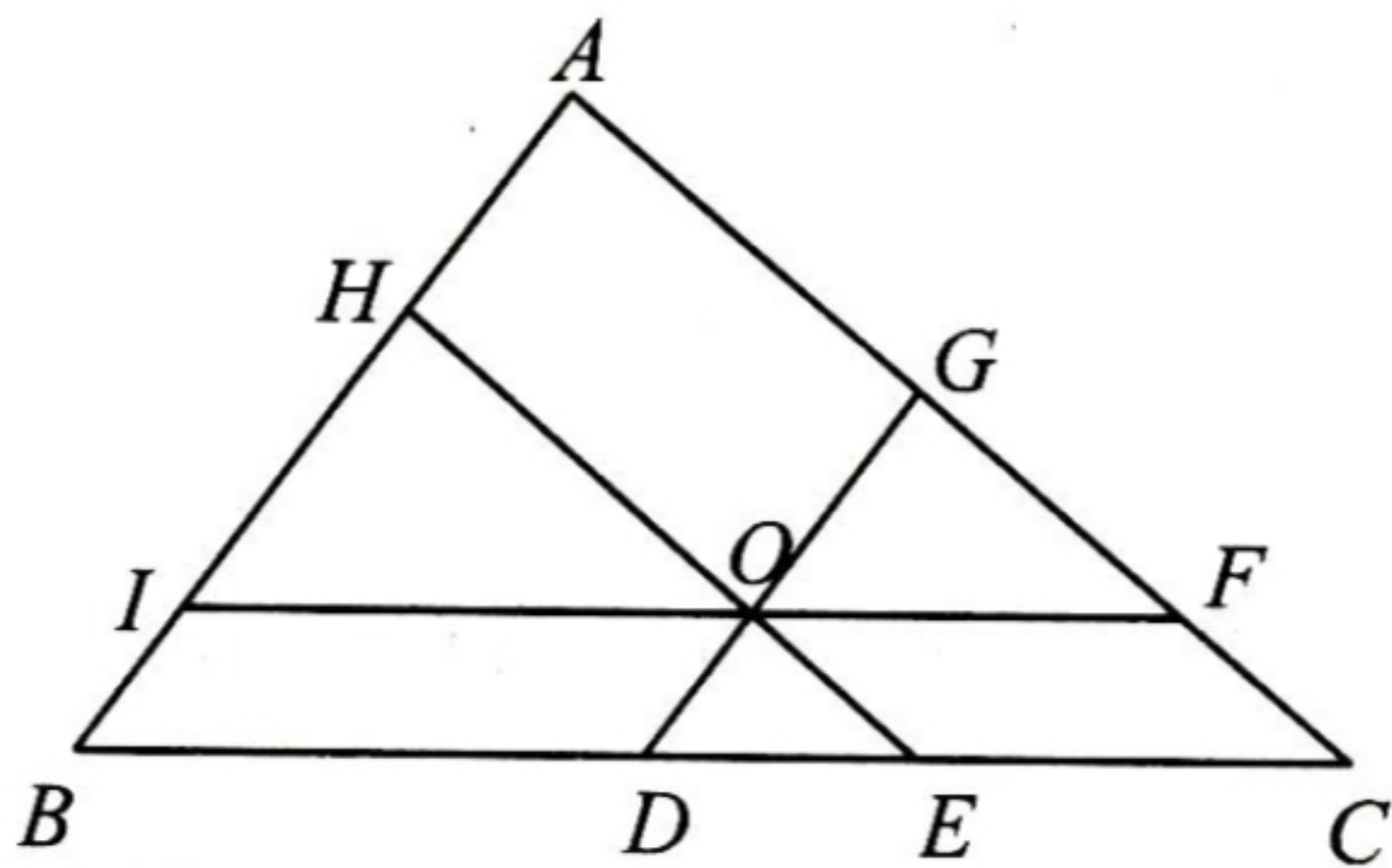


图 7-6

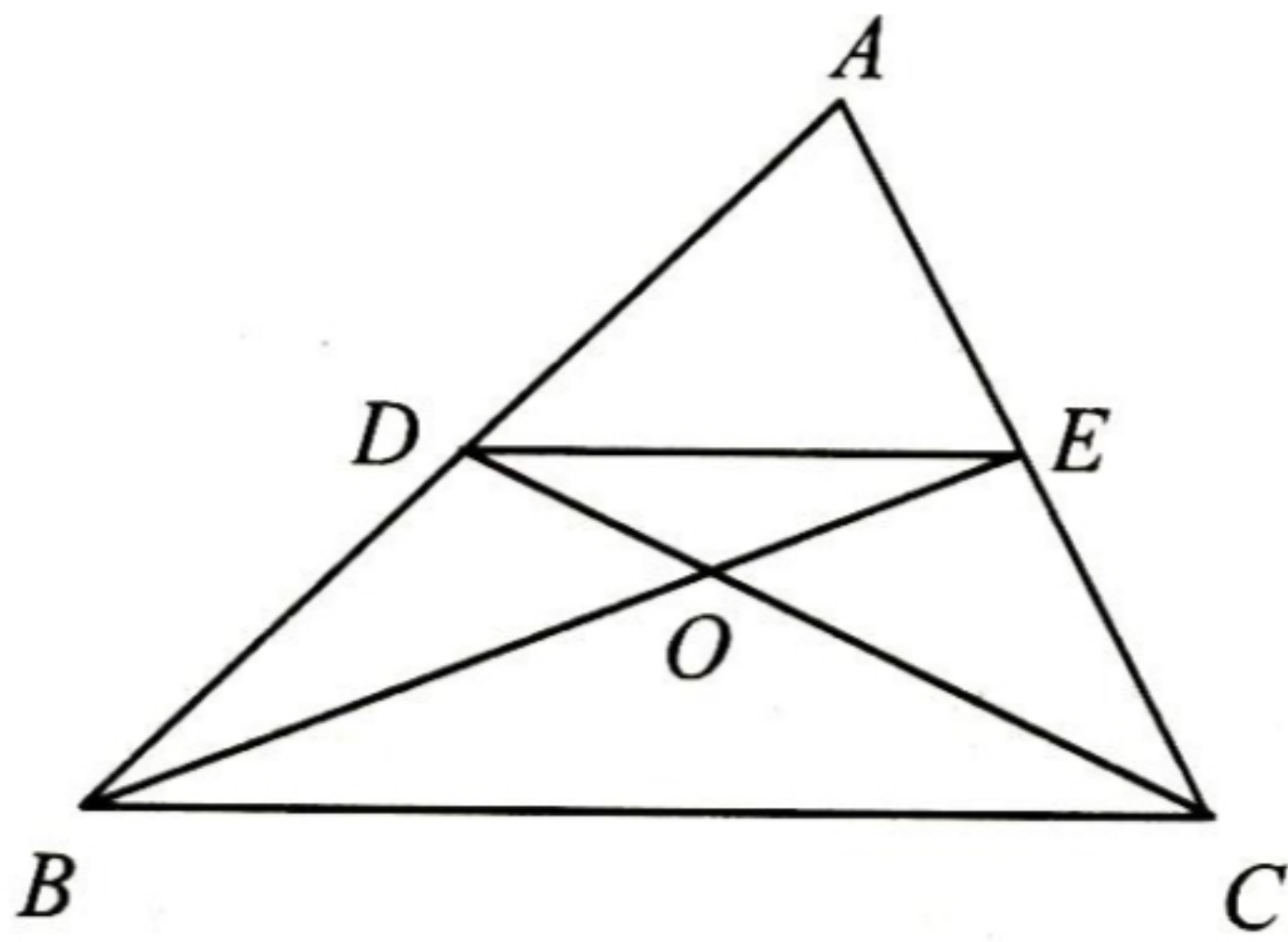


图 7-7

7. 如图 7-7，已知三角形 ABC 的面积为 1 平方厘米，D、E 分别是 AB、AC 边的中点，求三角形 OBC 的面积.

8. 在图 7-8 的正方形中，A、B、C 分别是 ED、EG、GF 的中点. 请问：三角形 CDO 的面积是三角形 ABO 面积的几倍？

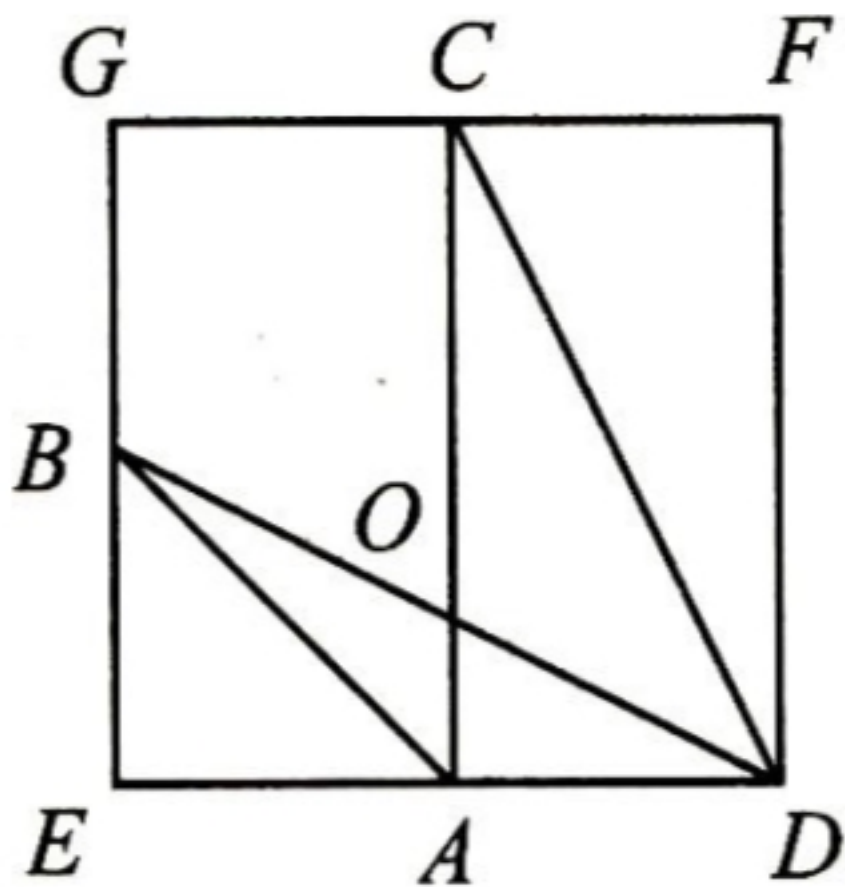


图 7-8



9. 如图 7-9，ABCD 是平行四边形，面积为 72 平方厘米，E、F 分别为边 AB、BC 的中点，则阴影部分的面积为多少平方厘米？

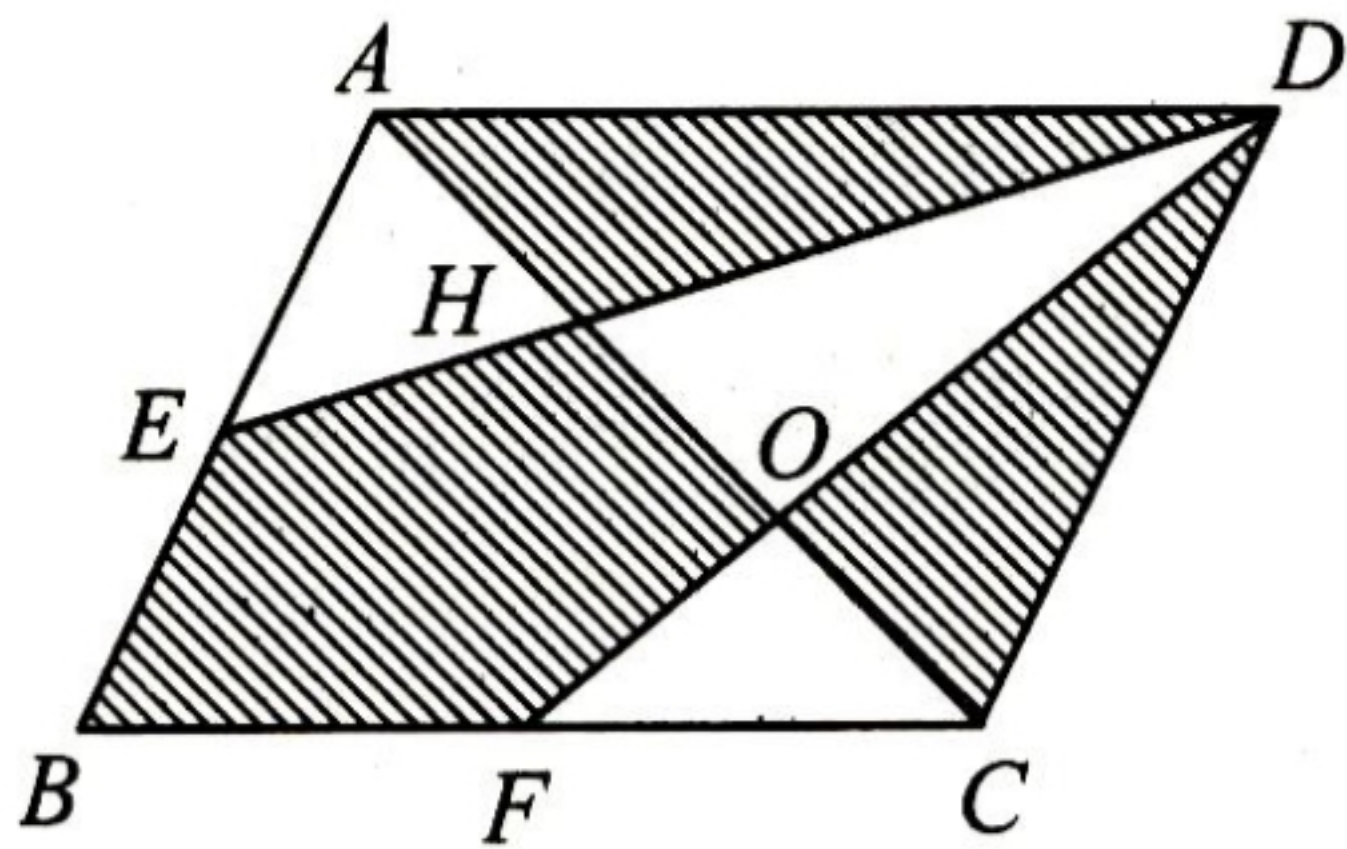


图 7-9

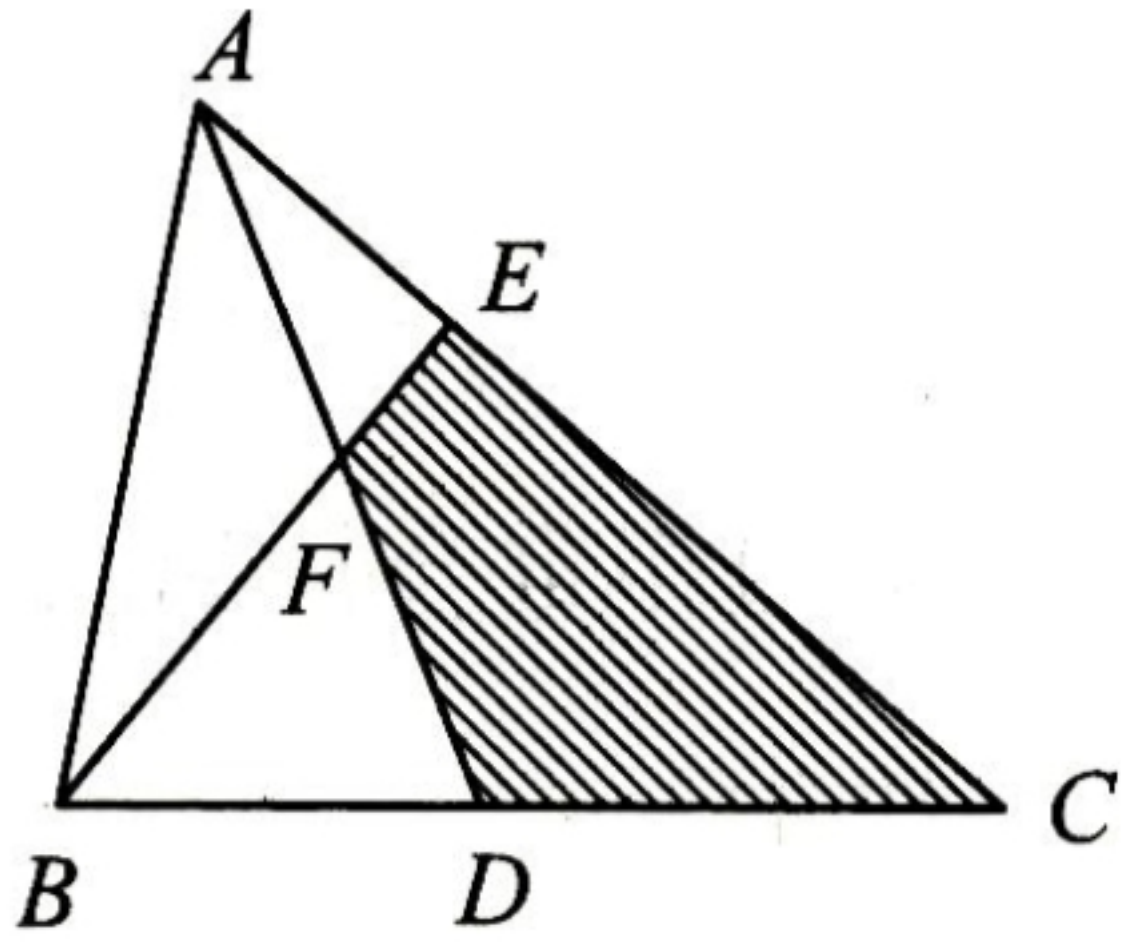


图 7-10

10. 如图 7-10，在三角形 ABC 中，CE=2AE，F 是 AD 的中点，三角形 ABC 的面积是 1，那么阴影部分的面积是多少？

拓展篇

1. 如图 7-11，A、B 是两个大小完全一样的长方形，已知这两个长方形的长比宽长 8 厘米，图 7-11 中的字母表示相应部分的长度，问：A、B 中阴影部分的周长哪个长？长多少？

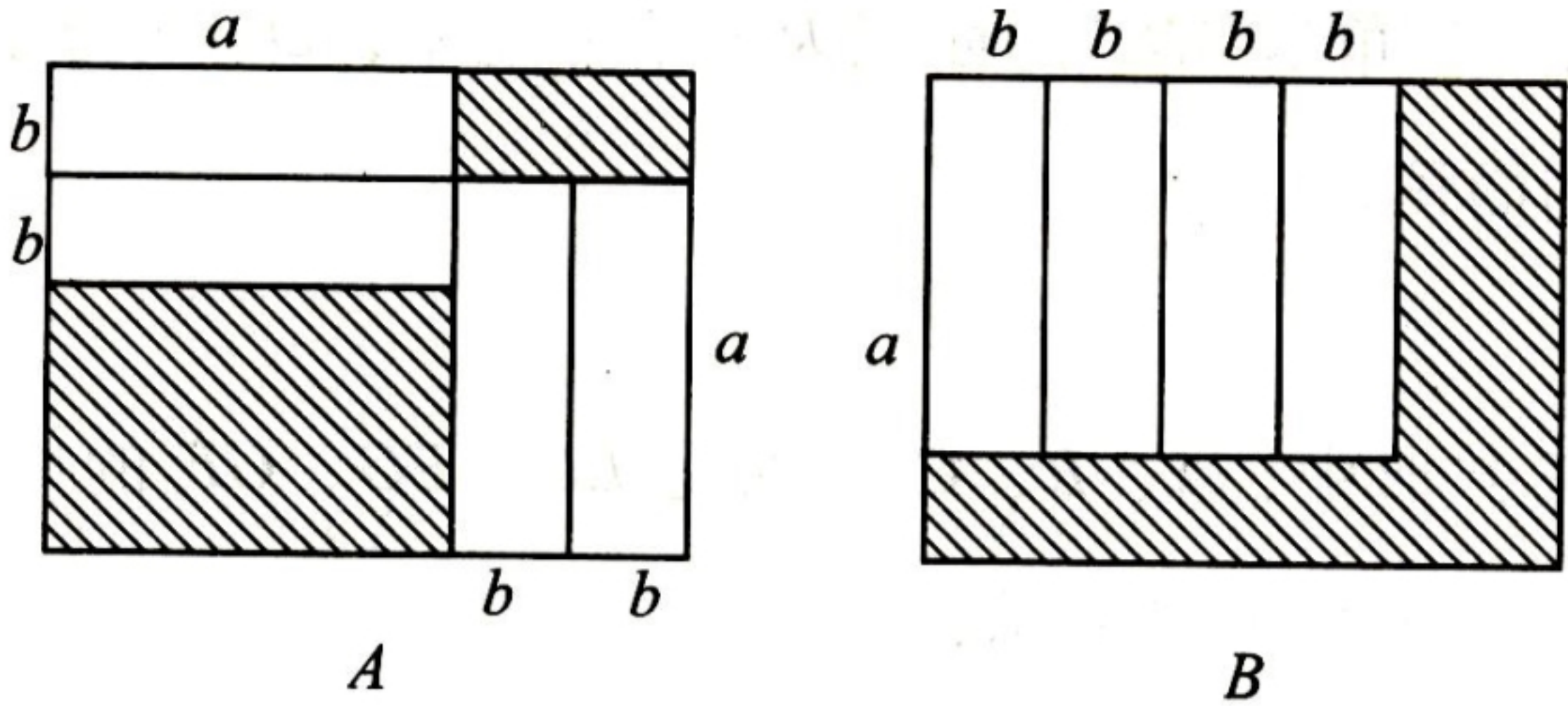


图 7-11

2. 如图 7-12. ABCDE 是正五边形，CDF 是正三角形，∠BFE 等于多少度？

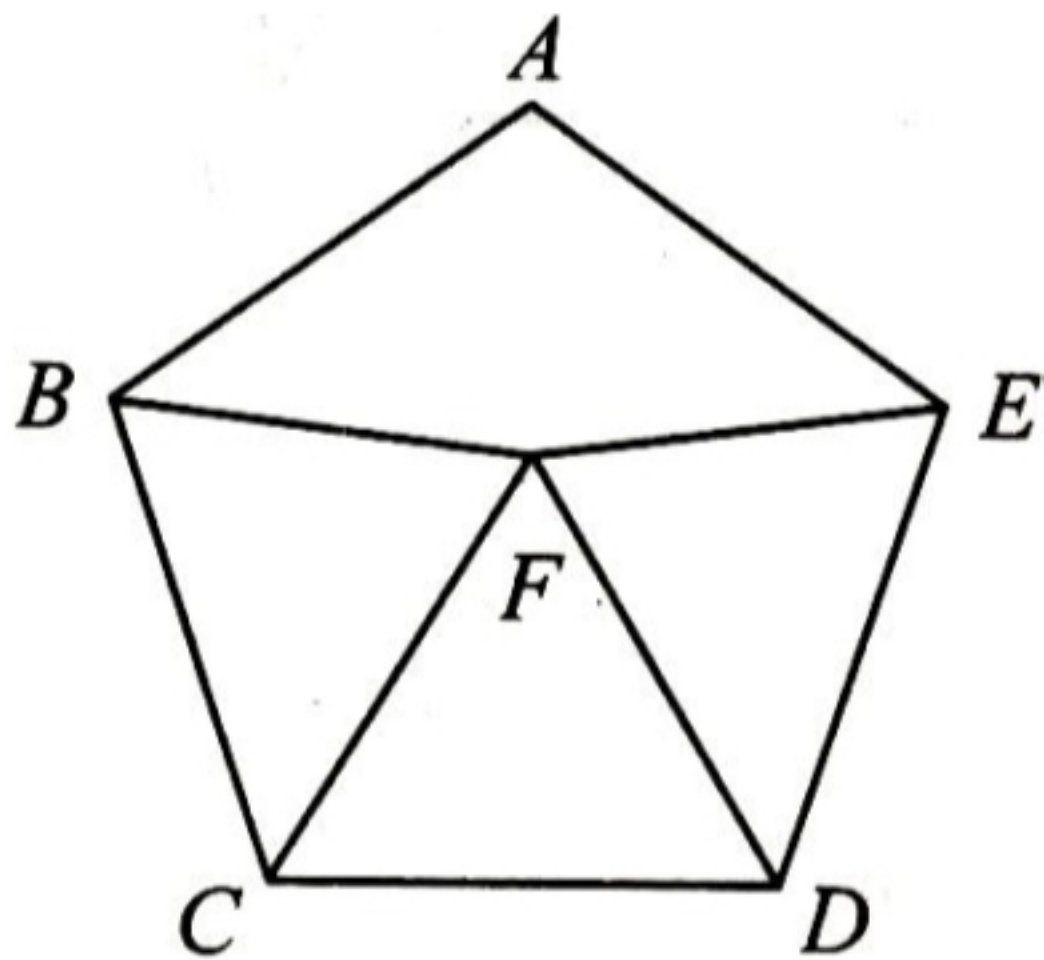


图 7-12



3. 一个各条边分别为 5 厘米、12 厘米、13 厘米的直角三角形，将它的短直角边对折到斜边上去与斜边相重合，如图 7-13 所示，问：图中的阴影部分（即折叠的部分）的面积是多少平方厘米？

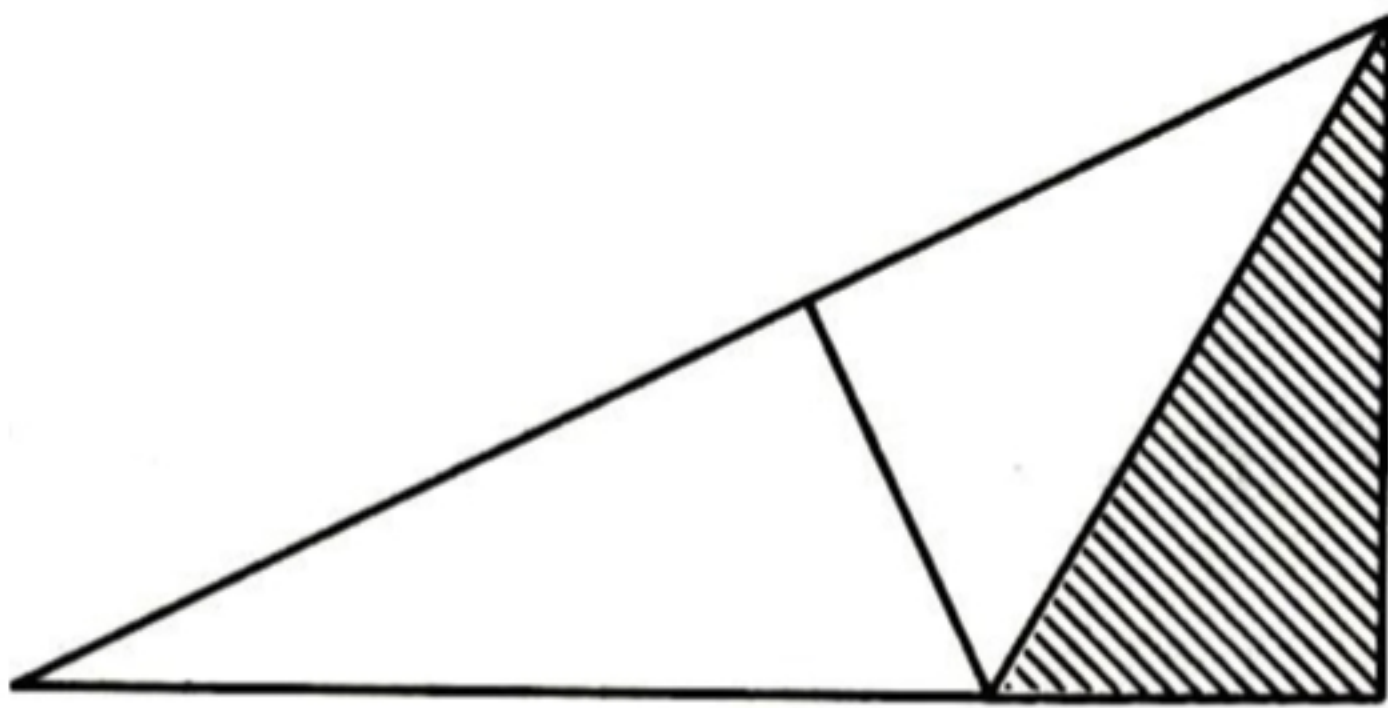


图 7-13

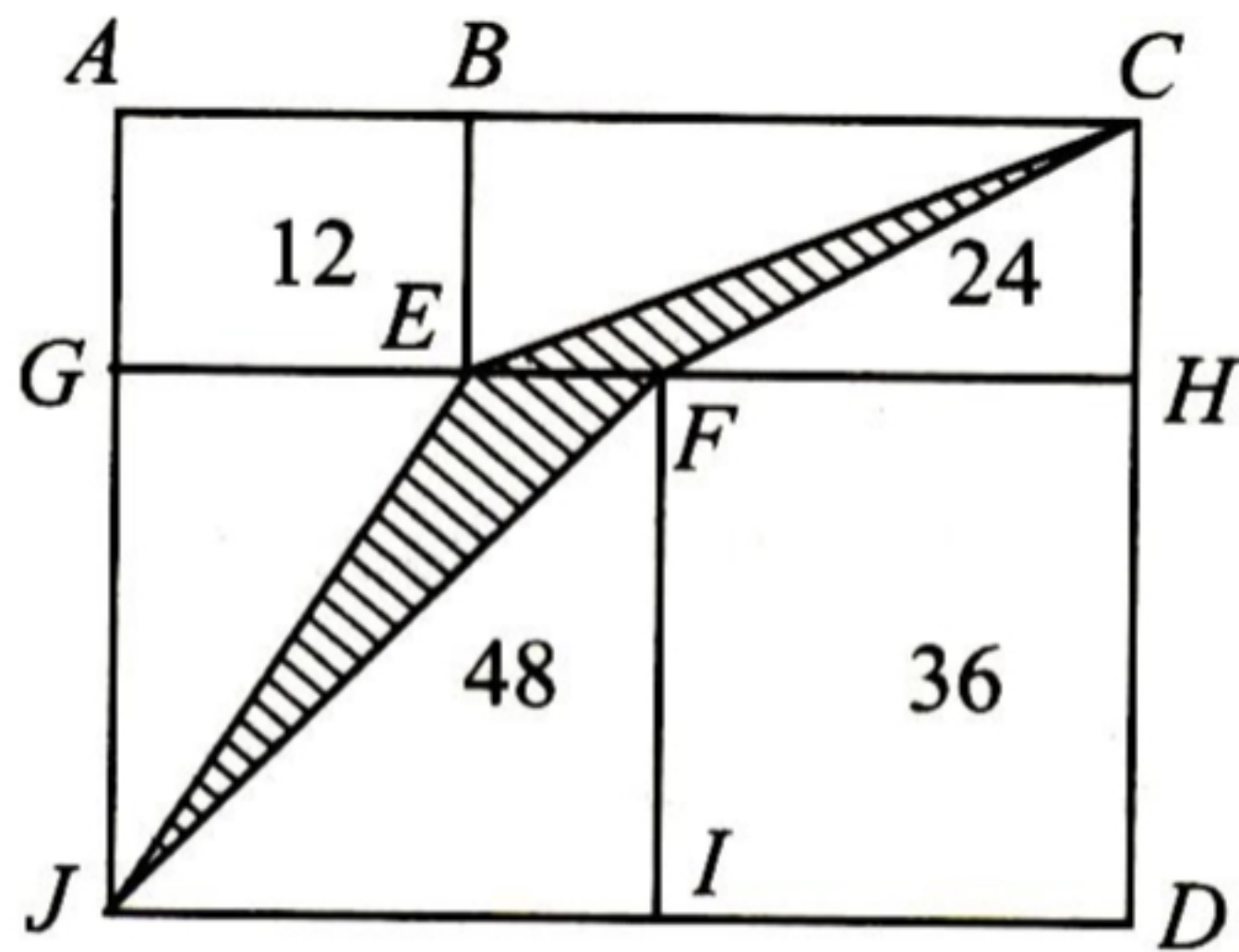


图 7-14

3. 在图 7-14 中大长方形被分为四个小长方形，面积分别为 12、24、36、48.请问：图中阴影部分的面积是多少？

5. 三个面积都是 12 的正方形放在一个长方形的盒子里面，如图 7-15，盒中空白部分的面积已经标出，求图中大长方形的面积.

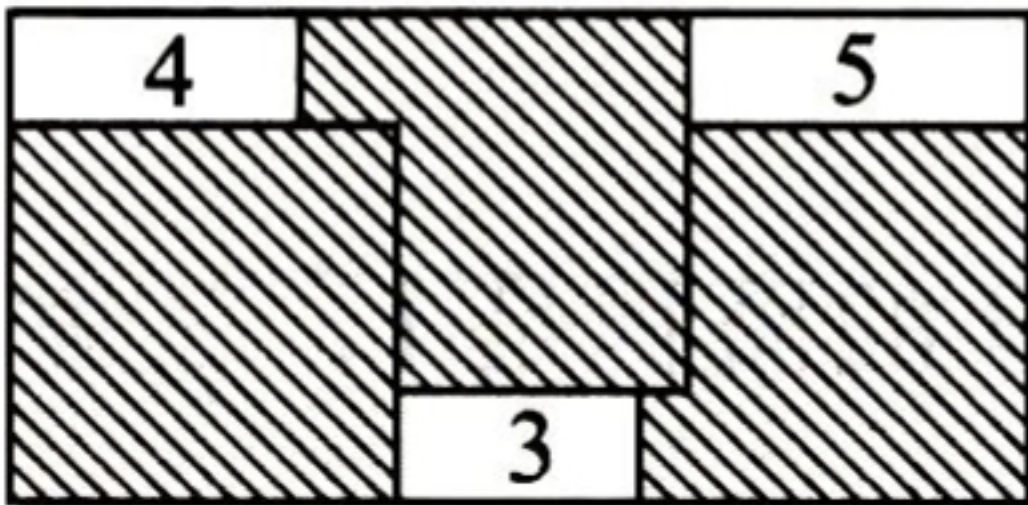


图 7-15

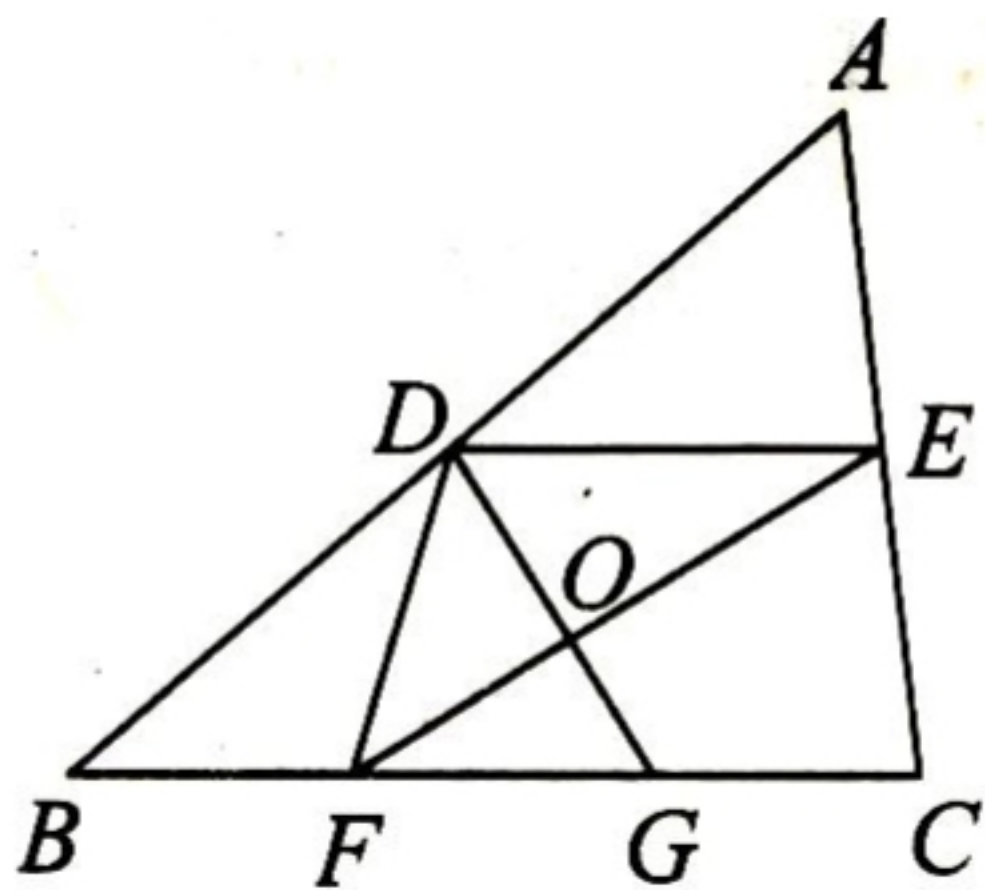


图 7-16

6. 如图 7-16，三角形 ABC 的面积为 1. D、E 分别为 AB、AC 的中点. F、G 是 BC 边上的三等分点. 请问：三角形 DEF 的面积是多少？三角形 DOE 的面积是多少？

7. 如图 7-17，梯形 $ABCD$ 的上底 AD 长 10 厘米，下底 BC 长 15 厘米．如果 EF 与上、下底平行，那么 EF 的长度为多少？

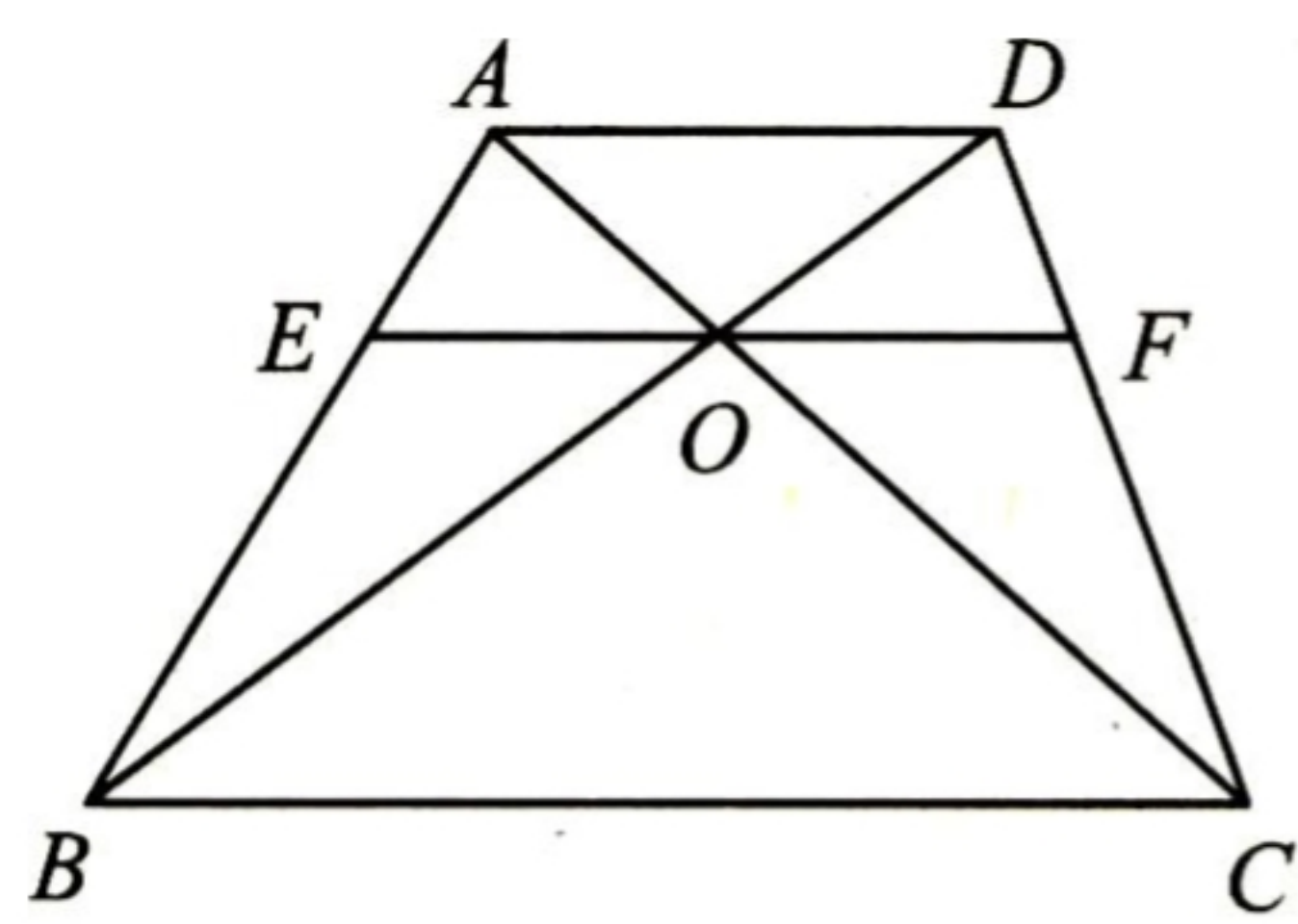


图 7-17

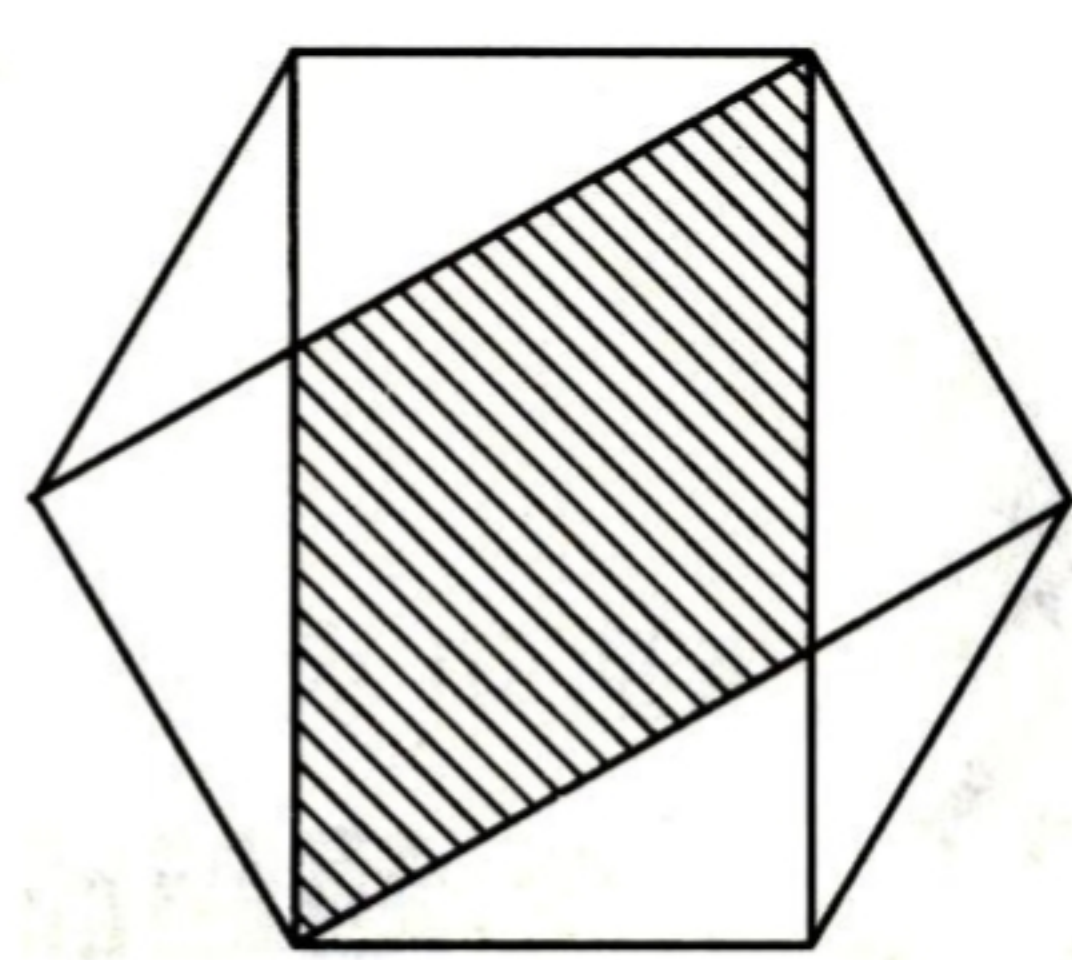


图 7-18

7. 如图 7-18，正六边形的面积为 6，那么阴影部分的面积是多少？

9. 两盏 4 米高的路灯相距 10 米，有一个身高 1.5 米的同学行走在这两盏路灯之间，那么他的两个影子总长度是多少米？

10. 如图 7-19， D 是长方形 $ABCD$ 一条对角线的中点，图中已经标出两个三角形的面积为 3 和 4，那么阴影直角三角形的面积是多少？

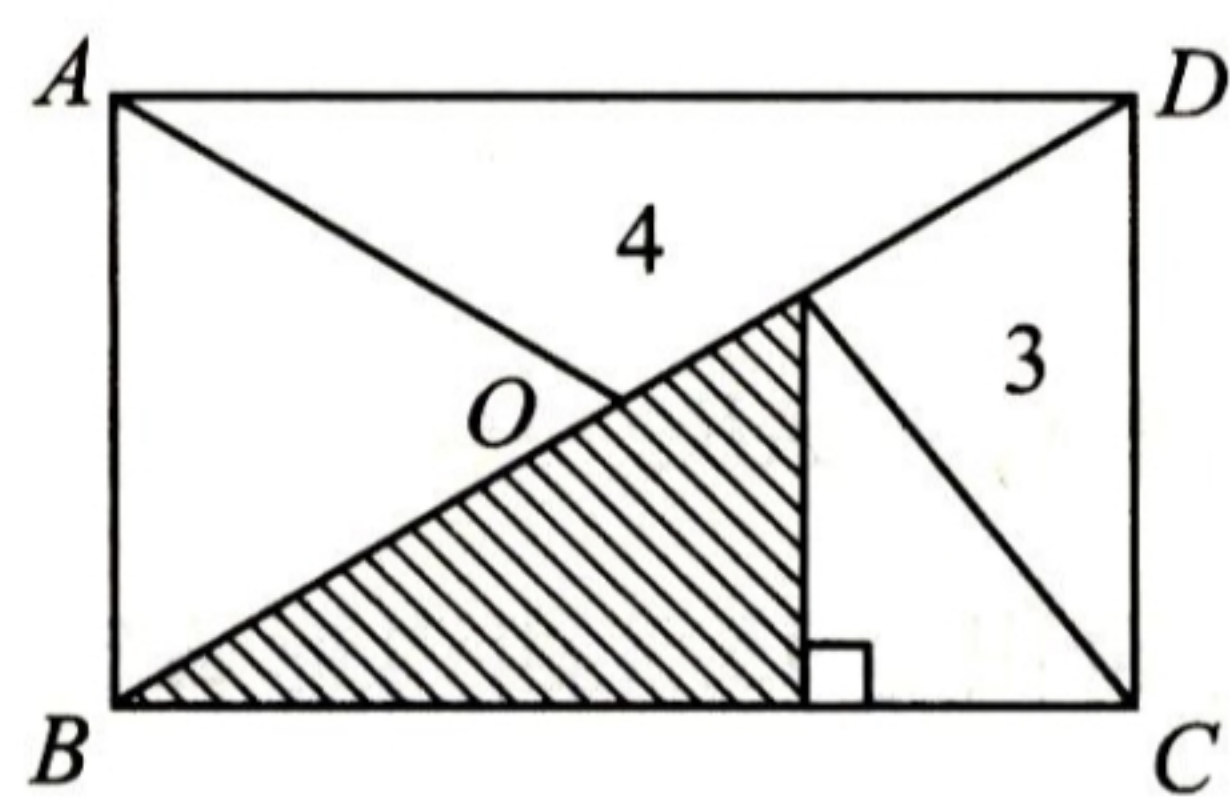


图 7-19

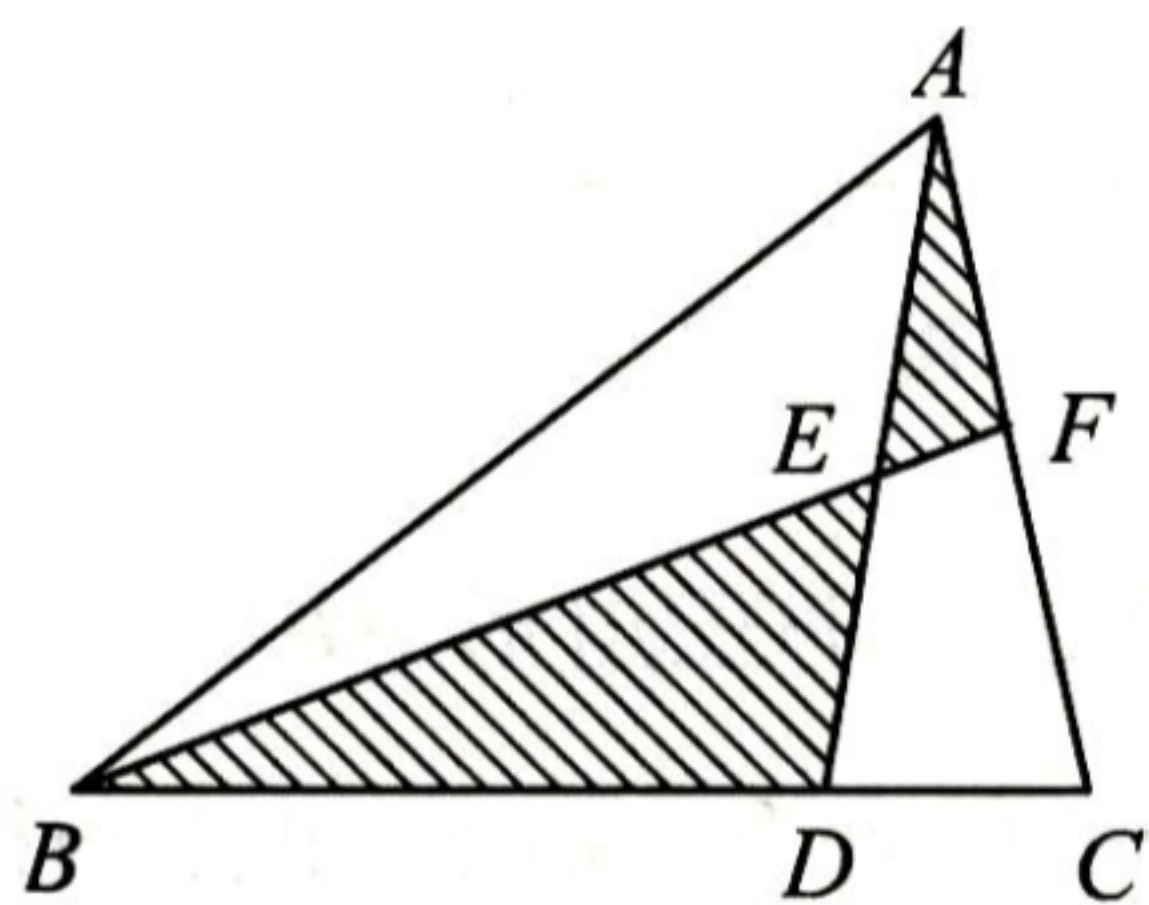


图 7-20



11. 如图 7-20，在三角形 ABC 中， $AE=ED$ ，D 点是 BC 的四等分点，阴影部分的面积占三角形 ABC 面积的几分之几？

12. 如图 7-21，在三角形 ABC 中，三角形 AEO 的面积是 1，三角形 ABO 的面积是 2，三角形 BOD 的面积是 3，则四边形 DCEO 的面积是多少？

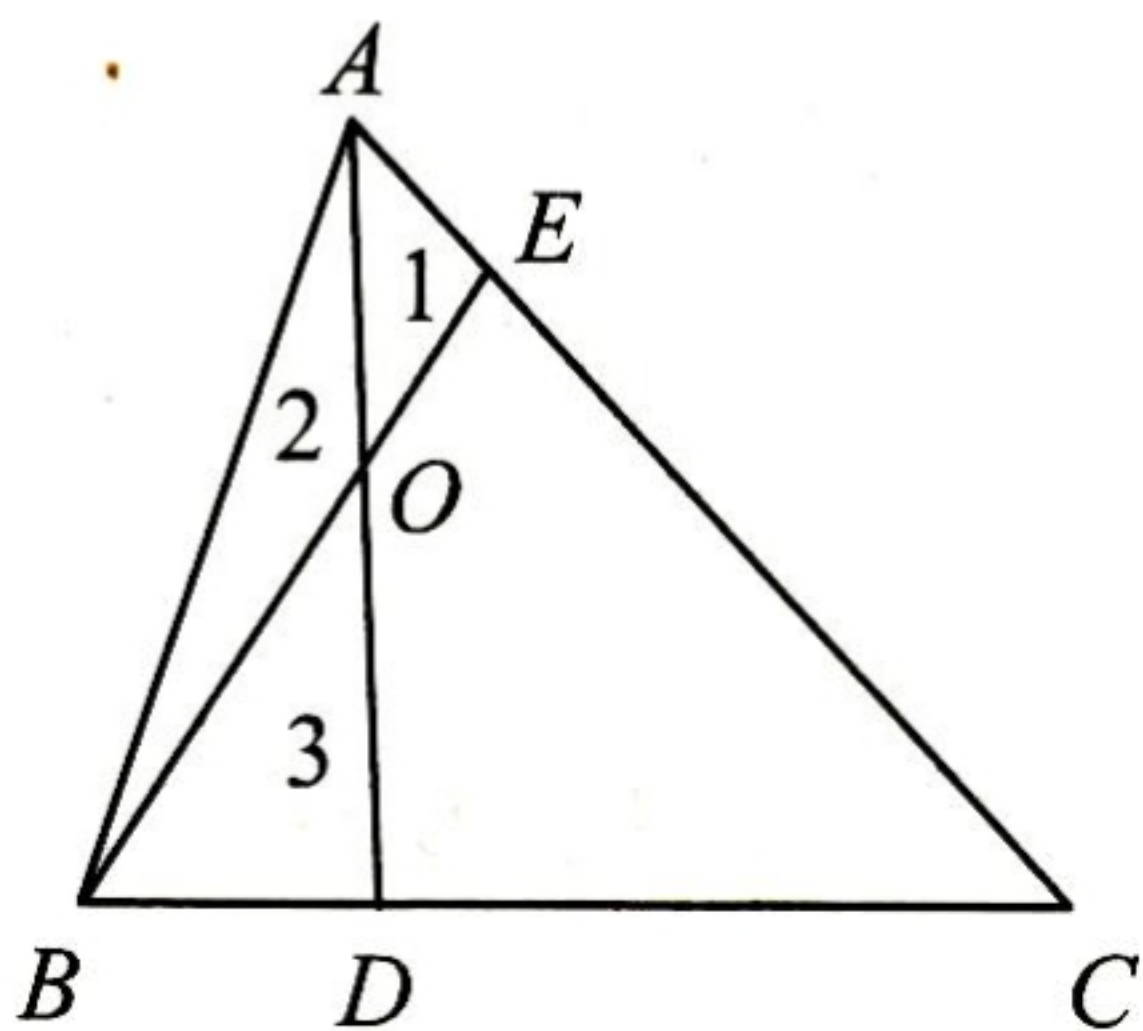


图 7-21

超越篇

1. 如图 7-22，长方形的面积是 60 平方厘米，其内 3 条长度相等且两两夹角为 120° 的线段将长方形分成了两个梯形和一个三角形。请问：一个梯形的面积是多少平方厘米？

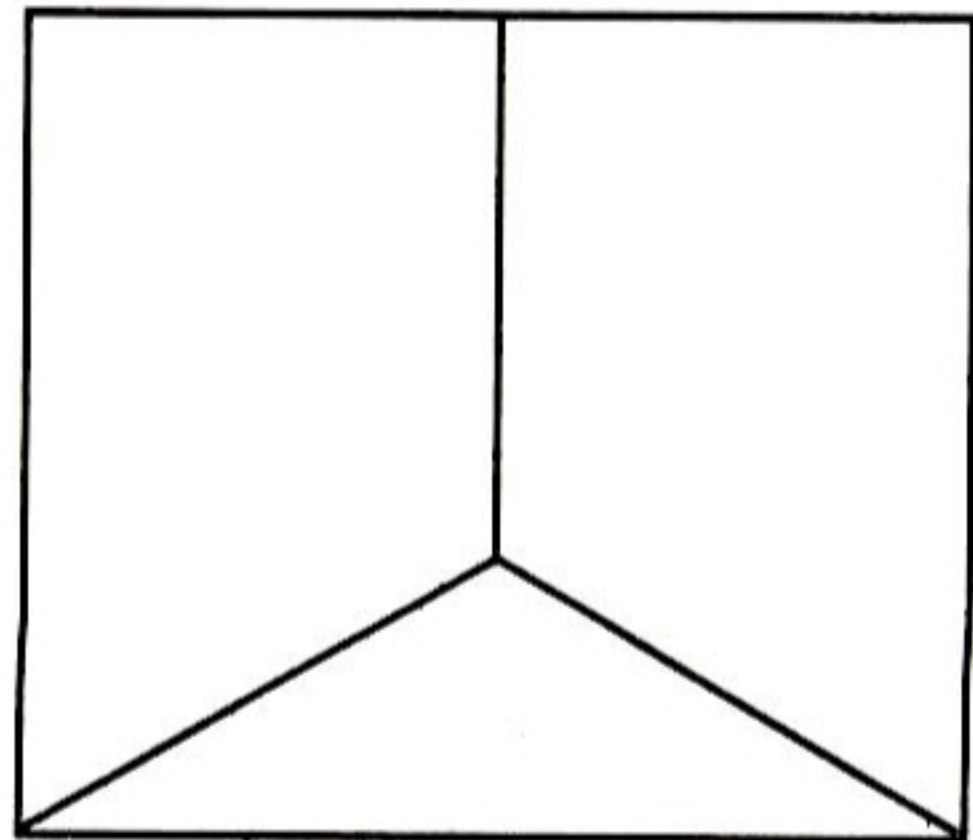


图 7-22

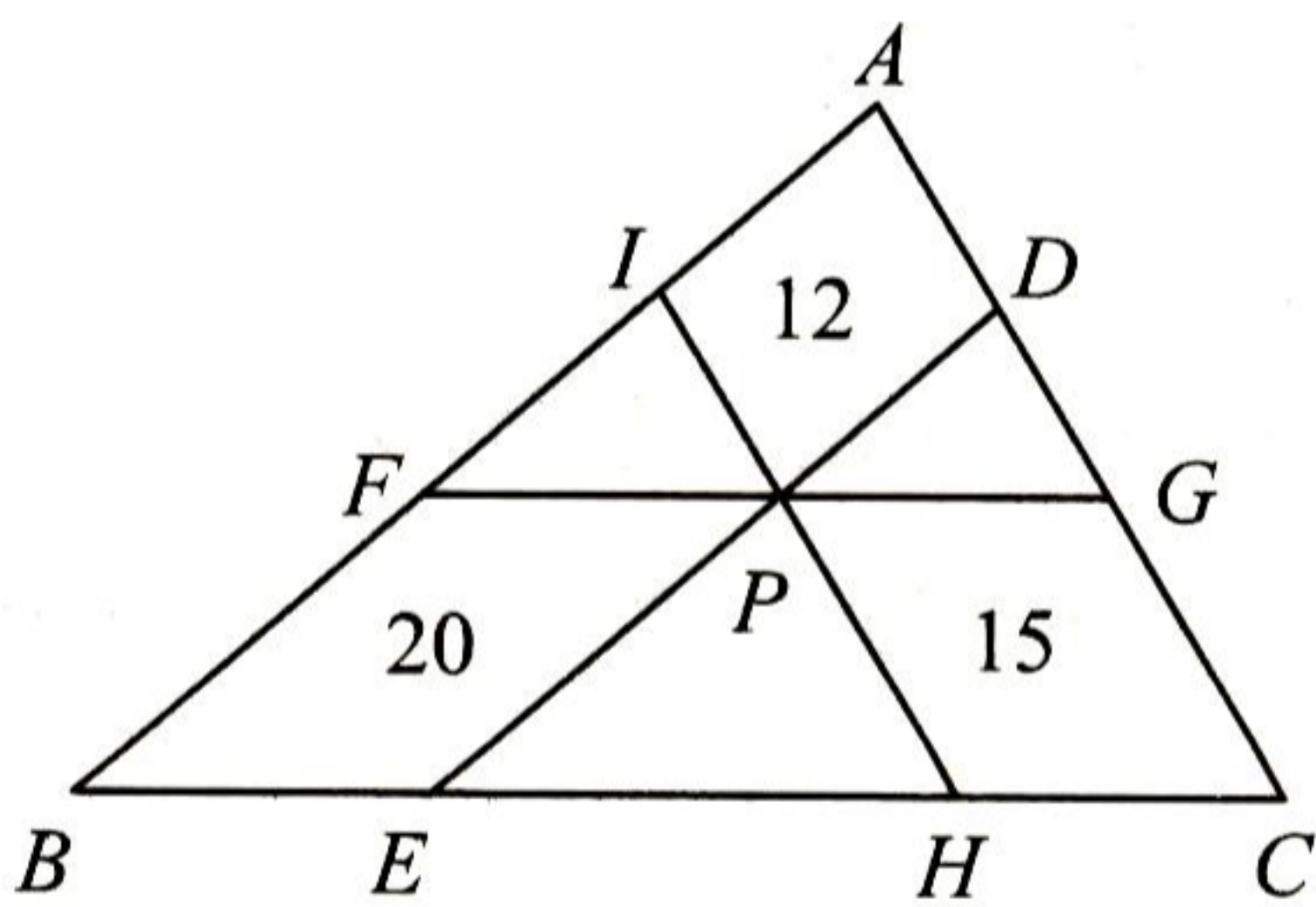


图 7-23

2. 如图 7-23，P 是三角形 ABC 内一点，DE 平行于 AB，FG 平行于 BC，HI 平行于 CA，四边形 AIPD 的面积是 12，四边形 PGCH 的面积是 15，四边形 BEPF 的面积是 20. 请问：三角形 ABC 的面积是多少？



3. 如图 7-24 所示，正方形 ABCD 的面积为 1. E、F 分别是 BC 和 DF 的中点，DE 与 BF 交于 M 点，DE 与 AF 交于 IV 点，那么阴影三角形 MFN 的面积为多少？

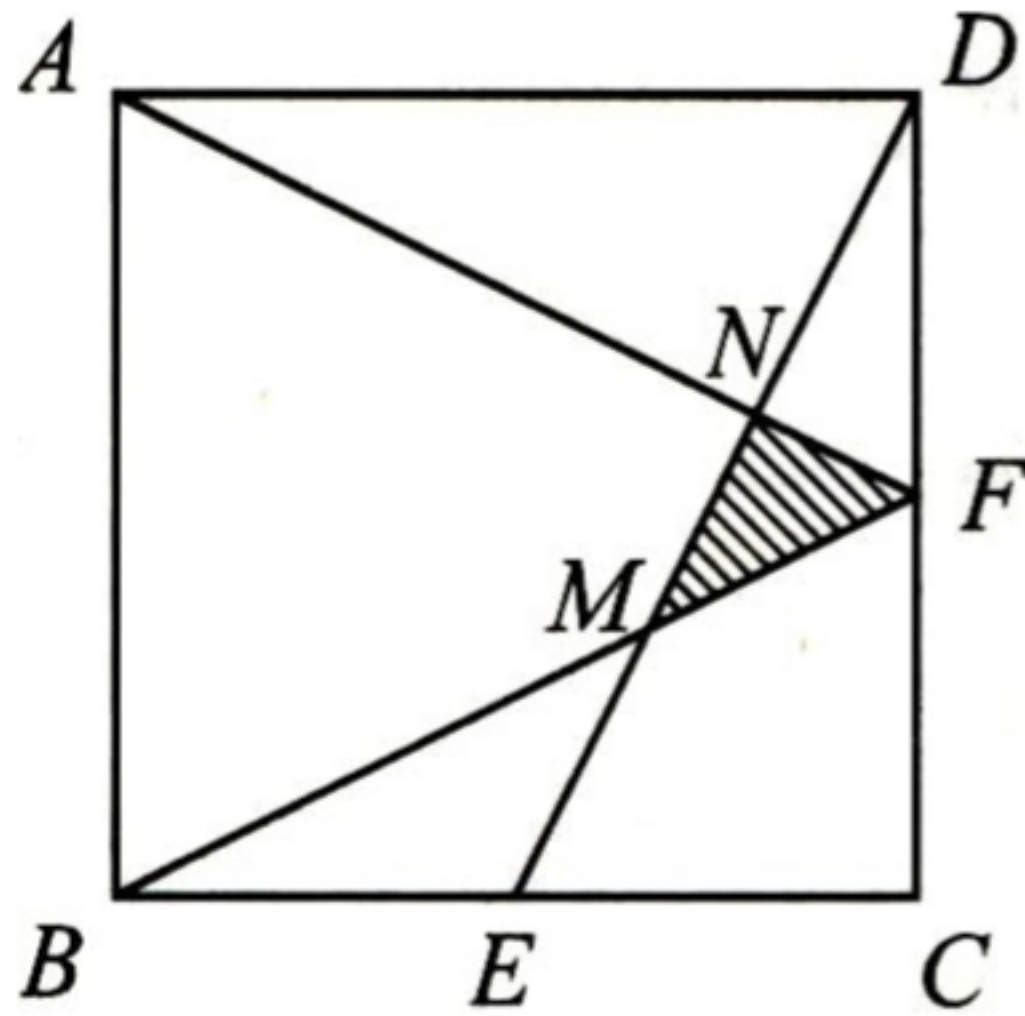


图 7-24

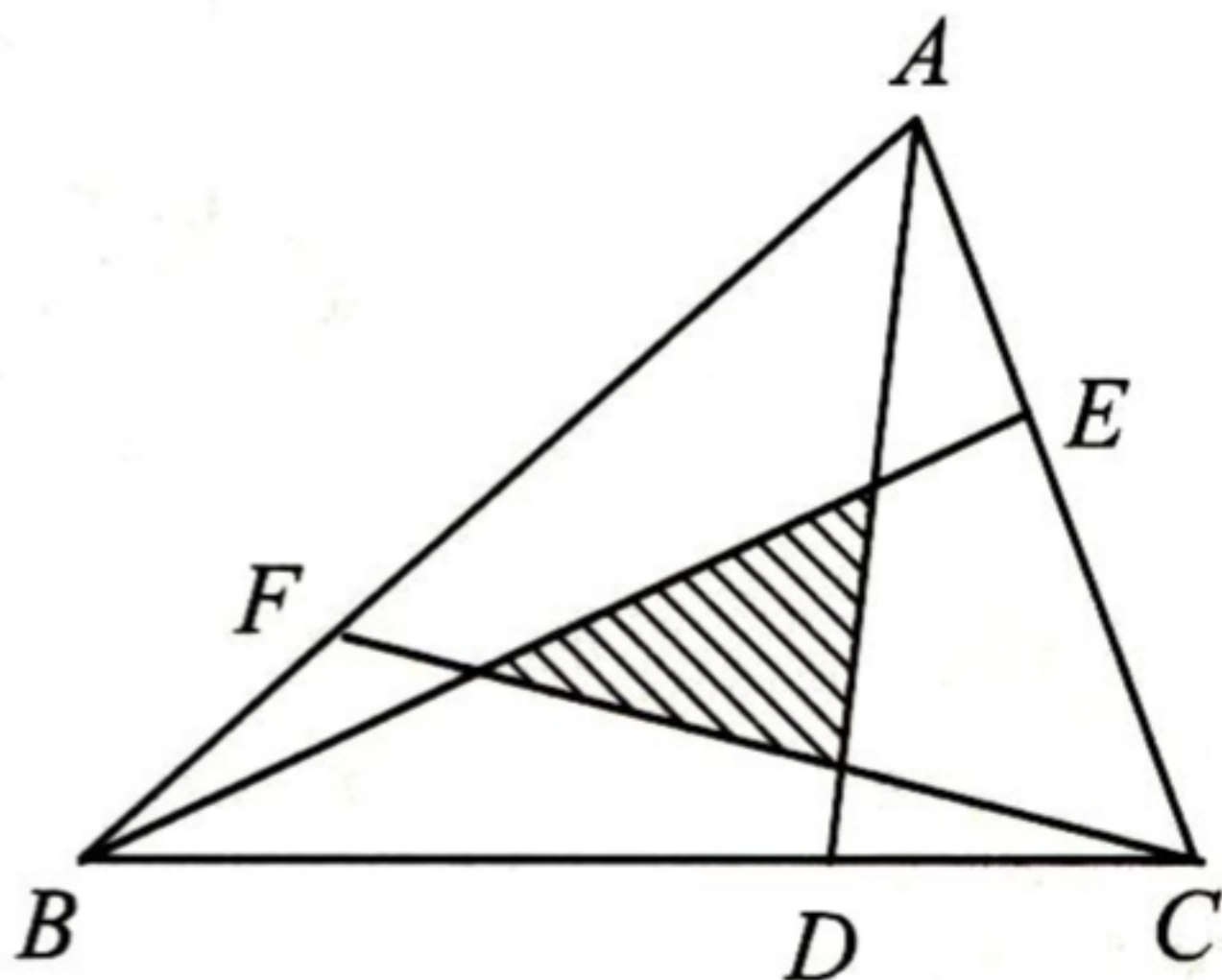
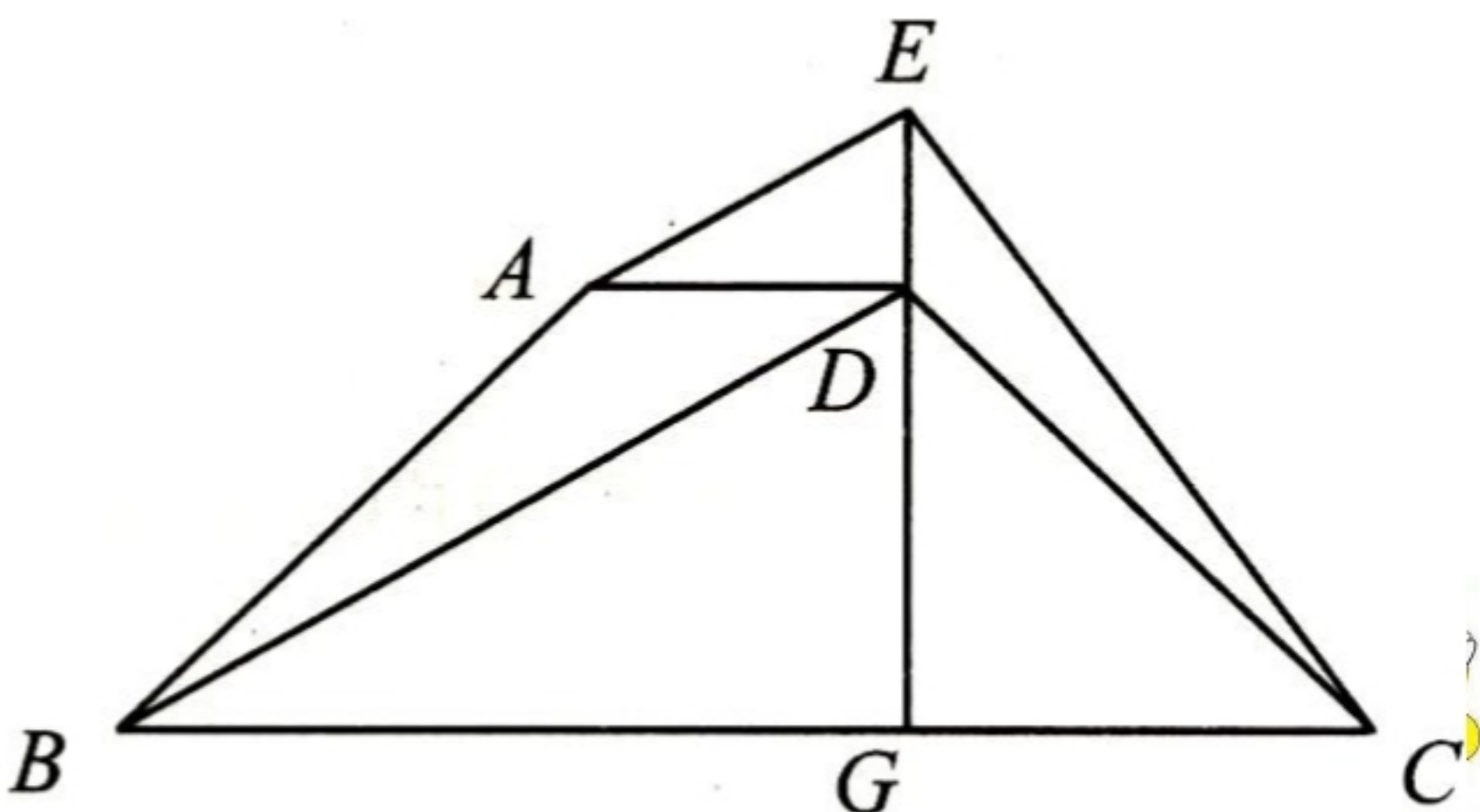
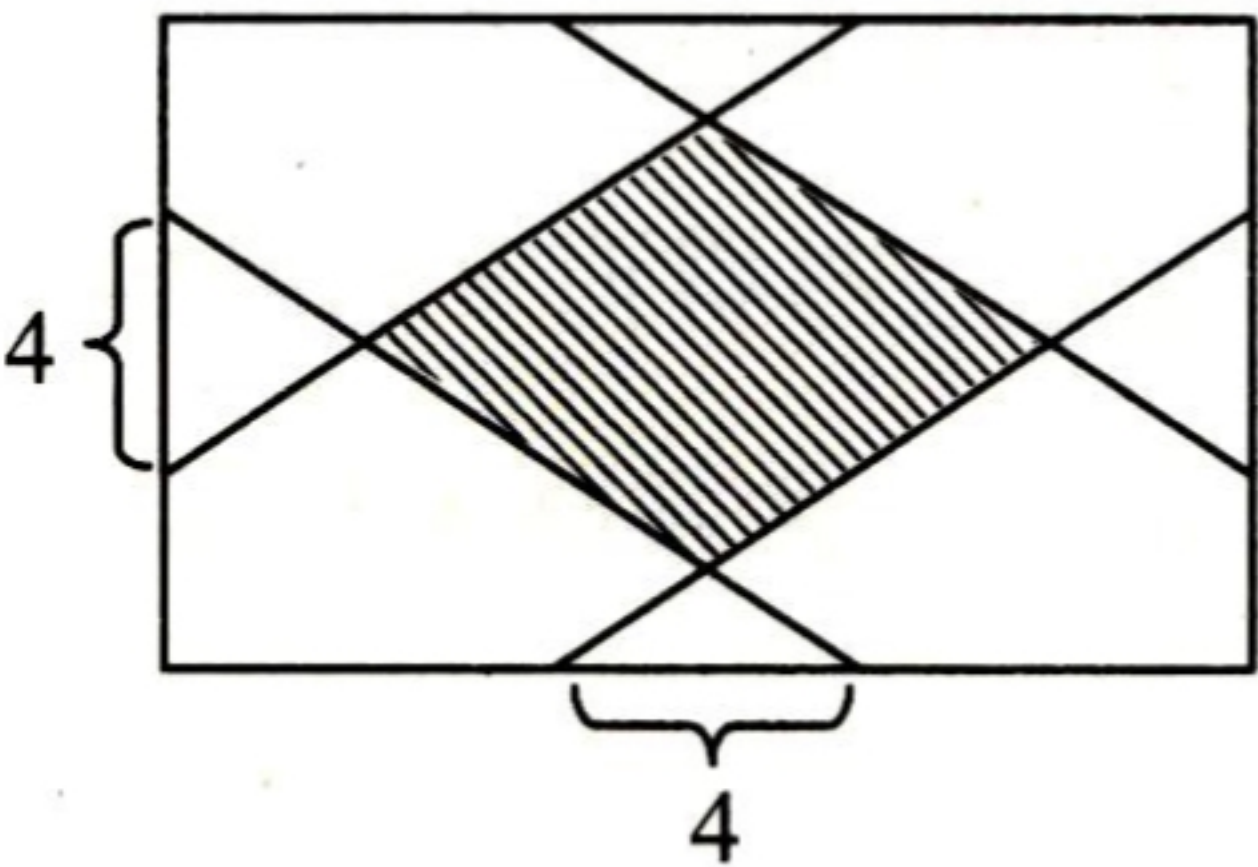


图 7-25

4.如图 7-25，三角形 ABC 的面积为 1，D、E、F 分别是三条边上的三等分点，求阴影三角形的面积.

5. 如图 7-26，小悦测出家里瓷砖的长为 24 厘米，宽为 10 厘米，而且还测出了边上的中间线段均为 4 厘米，那么中间菱形的面积是多少平方厘米？



6.如图 7-27，ED 垂直于等腰梯形 ABCD 的上底 AD，并交 BC 于 G，AE 平行于 BD， $\angle DCB = 45^\circ$ ，且三角形 ABD 和三角形 EDC 的面积分别为 75、45，那么三角形 AED 的面积是多少？

7. 在长方形 ABCD 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 上的点，将长方形的四个角分别沿着 HE、EF、FG、GH 对折后，A 点与 B 点重合，C 点与 D 点重合．已知 EH = 3，EF = 4，求线段 AD 与 AB 的长度比．

8. 如图 7-28，在长方形 ABCD 中，AE: ED= AF: AB= BG: GC.已知 $\triangle EFC$ 的面积为 20， $\triangle FGD$ 的面积为 16，那么长方形 ABCD 的面积是多少？

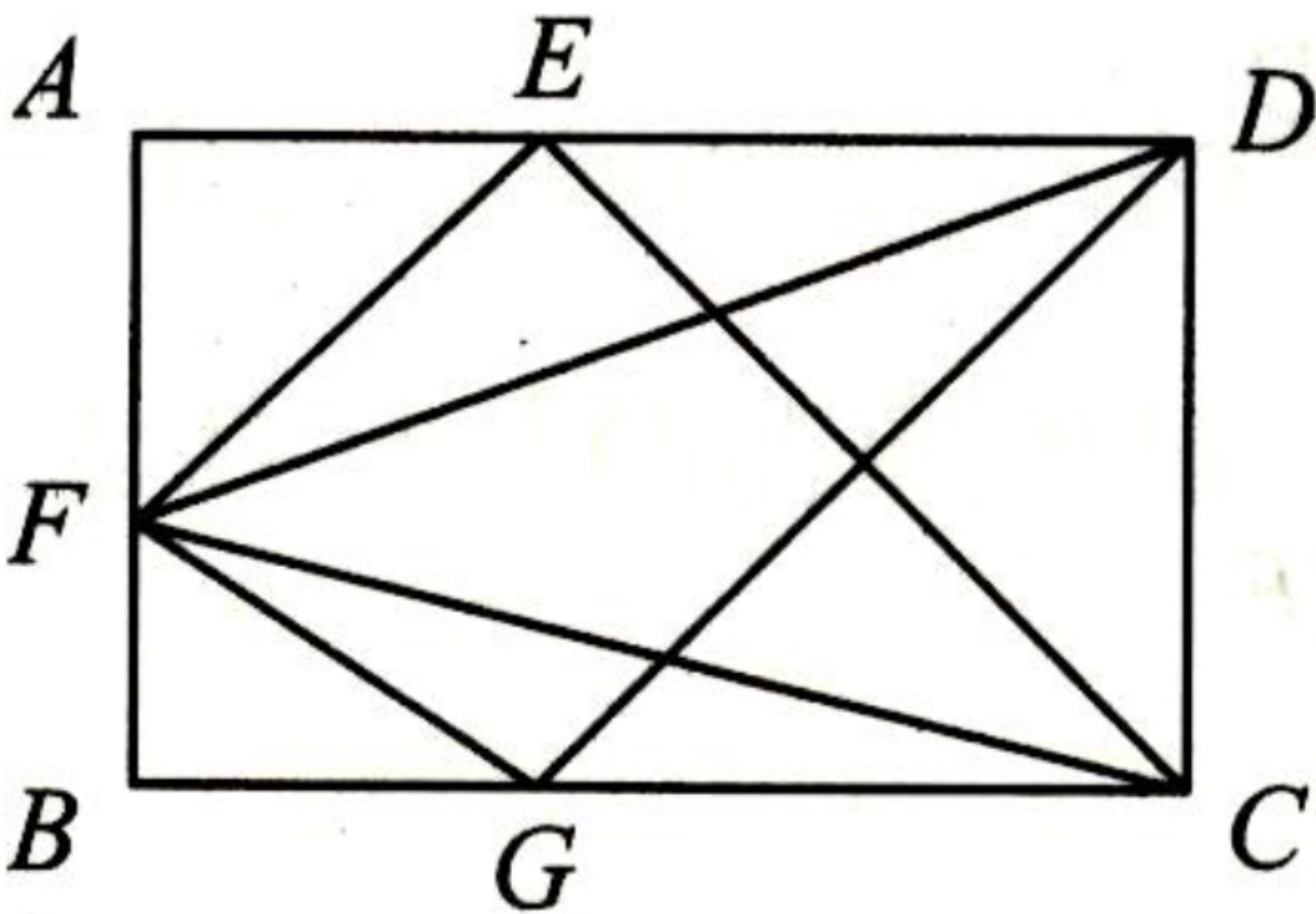


图 7-28

第 8 讲 数论综合（一）

内容概述

运用已学过的数论知识，解决综合性较强的各类数论问题；学会利用简单代数式处理数论问题.



典型问题

提高篇

1. 如果某整数同时具备如下三条性质：

- ①这个数与 1 的差是质数；
- ②这个数除以 2 所得的商也是质数；
- ③这个数除以 9 所得的余数是 5.

那么我们称这个整数为“幸运数”，求出所有的两位幸运数.

2. 一个五位数 $\overline{8\square 25\square}$ ，空格中的数未知，请问：

- (1)如果该数能被 72 整除，这个五位数是多少？
- (2)如果该数能被 55 整除，这个五位数是多少？

3. 在小于 5000 的自然数中，能被 11 整除、并且所有数字之和为 13 的数共有多少个？

4. 一个各位数字均不为 0 的三位数能被 8 整除，将其百位数字、十位数字和个位数字分别划去后可以得到三个两位数（例如，按此方法由 247 将得到 47、27、24）。已知这些两位数中一个是 5 的倍数，另一个是 6 的倍数，还有一个是 7 的倍数。原来的三位数是多少？



5. 26460 的所有约数中，6 的倍数有多少个？与 6 互质的有多少个？

6. 一个自然数 N 共有 9 个约数，而 $N-1$ 恰有 8 个约数，满足条件的自然数中，最小的和第二小的分别是多少？

7. 一个自然数，它最大的约数和次大的约数之和是 111，这个自然数是多少？

8. 有一个算式 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 。小明在上式中把一些“ $\times$ ”换成“ $\div$ ”，计算结果还是自然数，那么这个自然数最小是多少？

9. 一个两位数分别除以 7、8、9，所得余数的和为 20。问：这个两位数是多少？



10. 信息在战争中是非常重要的，它常以密文的方式传送．对方能获取密文却很难知道破译密文的密码，这样就达到保密的作用．有一天我军截获了敌军的一串密文：A378B421C，字母表示还没有被破译出来的数字．如果知道密码满足如下条件：

- ①密文由三个三位数连在一起组成，每个三位数的三个数字互不相同；
- ②三个三位数除以 12 所得到的余数是三个互不相同的质数；
- ③三个字母表示的数字互不相同且不全是奇数．

你能破解此密文吗？

拓展篇

1. 已知 $\overline{3a7} \times \overline{b0c}$ 是 495 的倍数，其中 a、b、c 分别代表不同的数字．请问：三位数 $\overline{abc}$ 是多少？

2. 11 个连续两位数乘积的末 4 位都是 0，那么这 11 个数的总和最小是多少？

3. 有一个算式 $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 小明在上式中把一些“ $\times$ ”换成“ $\div$ ”，计算结果还是自然数，那么这个自然数最小是多少？



4. 有 15 位同学，每位同学都有个编号，他们的编号是 1 号到 15 号. 1 号同学写了一个自然数，2 号说：“这个数能被 2 整除”，3 号接着说：“这个数能被 3 整除”……依此下去，每位同学都说，这个数能被他的编号数整除. 1 号一一作了验证：只有两个同学（他们的编号是连续的）说得不对，其余同学都对. 问：
(1)说的不对的两位同学他们的编号是哪两个连续的自然数？
(2)如果 1 号同学写的自然数是一个五位数，那么这个自然数为多少？

4. 有 2008 盏灯，分别对应编号为 1 至 2008 的 2008 个开关. 现在有编号为 1 至 2008 的 2008 个人来按动这些开关. 已知第 1 个人按的开关的编号是 1 的倍数（也就是说他把所有开关都按了一遍），第 2 个人按的开关的编号是 2 的倍数，第 3 个人按的开关的编号是 3 的倍数……依此做下去，第 2008 个人按的开关的编号是 2008 的倍数，如果刚开始的时候，灯全是亮着的，那么这 2008 个人按完后，还有多少盏灯是亮着的？

6. 狐狸和黄鼠狼进行跳跃比赛，狐狸每次跳 $4\frac{1}{2}$ 米，黄鼠狼每次跳 $2\frac{3}{4}$ 米，它们每秒钟都只跳一次，在比赛道路上，从起点开始每隔 $12\frac{3}{8}$ 米设有一个陷阱. 请问：当它们之中有一个掉进陷阱时，另一个跳了多少米？

7. 一个偶数恰有 6 个约数不是 3 的倍数，恰有 8 个约数不是 5 的倍数. 请问：这个偶数是多少？



8. 一个合数，其最大的两个约数之和为 1164.求所有满足要求的合数.

9. 已知 a 与 b 是两个正整数，且 $a > b$. 请问：

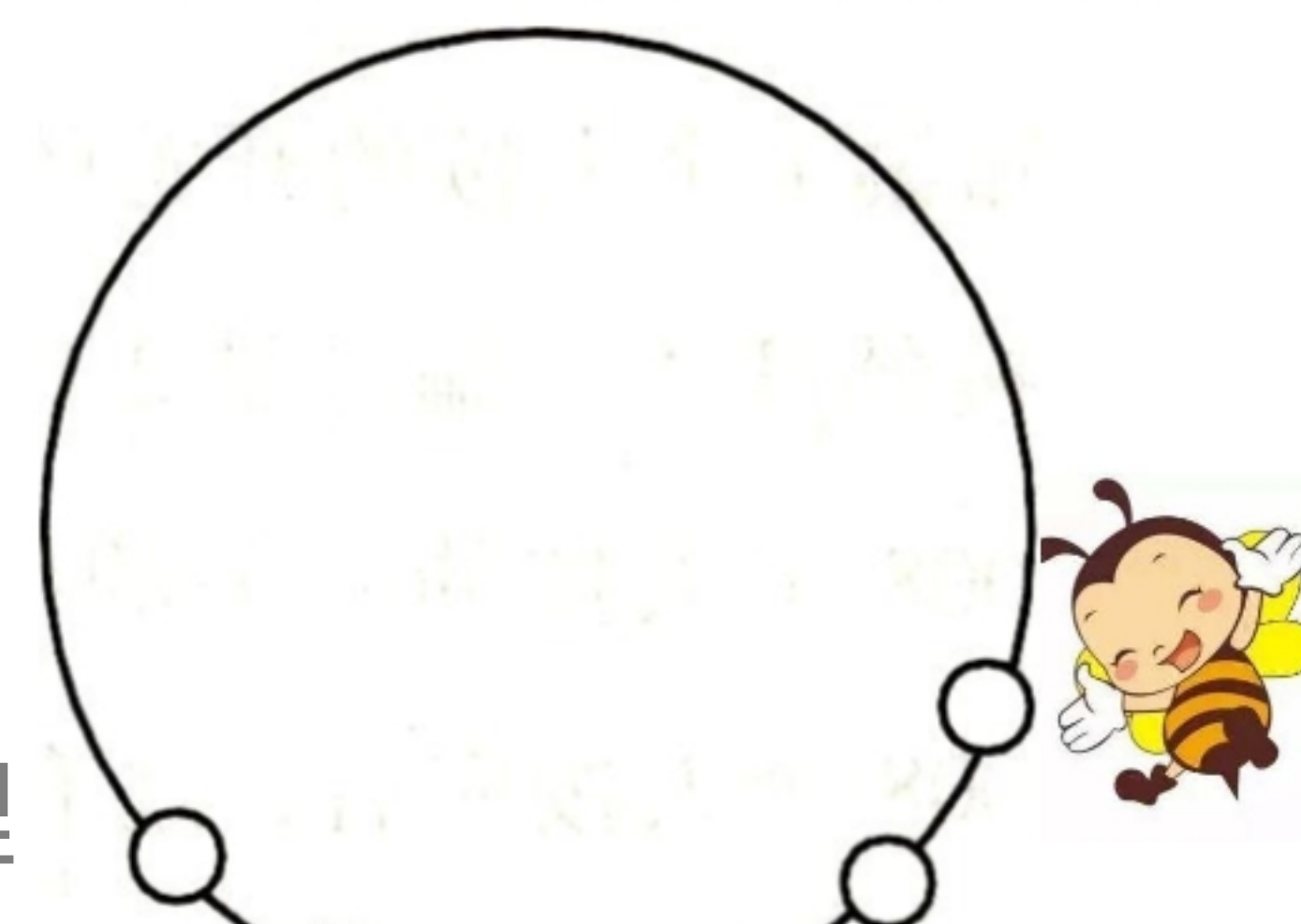
(1)如果它们的最小公倍数是 36，那么这两个正整数有多少种情况？

(2)如果它们的最小公倍数是 120，那么这两个正整数有多少种情况？

9. 已知 a 与 b 的最大公约数是 14， a 与 c 的最小公倍数是 350， b 与 c 的最小公倍数也是 350.满足上述条件的正整数 a 、 b 、 c 共有多少组？

11. 已知两个连续的两位数除以 5 的余数之和是 5，除以 6 的余数之和是 5，除以 7 的余数之和是 1. 求这两个两位数.

12. 如图 8-1，在一个圆圈上有几十个孔（不到 100 个）. 小明像玩跳棋那样从 A 孔出发沿着逆时针方向，每隔几个孔跳一步，希望一圈以后能跳回到 A 孔，他先试着每隔 2 个孔跳一步，结果只能跳到 B 孔，他又试着每隔 4 个孔跳一步，也只能跳到 B 孔. 最后他每隔 6 个孔跳一步，正好回到 A 孔. 问：这个圆圈上共有多少个孔？



超越篇

1. 有 6 个互不相同且不为 0 的自然数，其中任意 5 个数的和都是 7 的倍数，任意 4 个数的和都是 6 的倍数。请问：这 6 个数的和最小是多少？

2. 设 $N = 301 \times 302 \times \dots \times 2005 \times 2006$ ，请问：

(1) N 的末尾一共会出现多少个连续的数字“0”？

(2) 用 N 不断除以 12，直到结果不能被 12 整除为止，一共可以除以多少次 12？

3. 老师告诉贝贝和晶晶一个小于 5000 的四位数，这个四位数是 5 的倍数。贝贝计算出它与 $5!$ 的最小公倍数，晶晶计算出它与 $10!$ 的最大公约数，结果发现贝贝的计算结果恰好是晶晶的 5 倍。请问：这个四位数是多少？

4. 一个正整数，它分别加上 75 和 48 以后都不是 120 的倍数，但这两个和的乘积却能被 120 整除。这个正整数最小是多少？



5. a 、 b 、 c 是三个非零自然数. a 和 b 的最小公倍数是 300, c 和 a 、 c 和 b 的最大公约数都是 20, 且 $a > b > c$. 请问: 满足条件的 a 、 b 、 c 共有多少组?

6. 有一类三位数, 它们除以 2、3、4、5、6 所得到的余数互不相同 (可以含 0). 这样的三位数中最小的三个是多少?

7. 有一个自然数除以 15、17、19 所得到的商与余数之和都相等, 并且商和余数都大于 1, 那么这个自然数是多少?

8. 有 4 个互不相同的三位数, 它们的首位数字相同, 并且它们的和能被它们之中的 3 个数整除, 请写出这 4 个数,

第 9 讲 计算综合 (二)

内容概述

综合性较强的计算问题。

典型问题



提高篇

1. 计算: $\frac{1}{3} \times (4.3 \times 3\frac{3}{5} - 3.6 + 6.7 \div \frac{5}{18}) - (1.23 \div 13\frac{2}{3} - 5 - 0.09).$

2. 要使等式 $15.6 \div [2\frac{2}{3} \times (1.625 + \square) - 1\frac{1}{10}] - \frac{4}{15} \div \frac{2}{3} = 3\frac{3}{5}$ 成立, 方格内应该填入多少?

3. 计算: $\frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{20} + 5\frac{3}{5} \times \frac{1}{80}} \div 2\frac{1}{2}.$

4. 计算: $\frac{1950 + \frac{1}{2002}}{2002 + \frac{1}{1950}} - \frac{2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{3.5}.$

5. 计算下列繁分数:

(1) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}};$

(2) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}};$

(3) $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1987}}}.$



6. 算式 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ 的计算结果，小数点后第 2008 位是数字几？

7. 定义运算符号“ Δ ”满足： $a\Delta b = \frac{a+b}{a \times b}$. 计算下列各式：

(1) $100\Delta 102$; (2) $(3\Delta 4) \Delta 5$ (3) $\frac{(1\Delta 2)\Delta 3}{1\Delta(2\Delta 3)}$.

8. 已知 $333\frac{111}{112} : \square = 37 : \frac{54+55+56+57+58}{4+5+6+7+8}$ ，那么方框所代表的数是什么？

9. 如图 9-1，每一条线段的长度规定为它的端点上两数之和，图中 6 条线段的长度总和是多少？

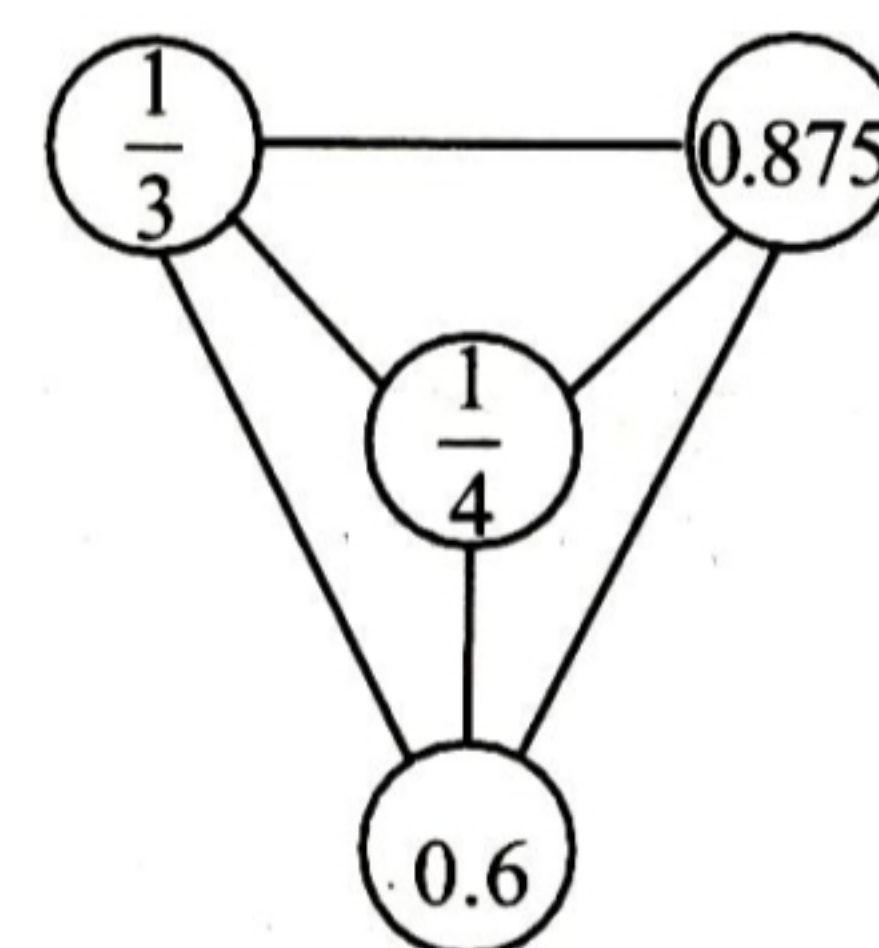


图 9-1



10. 我们规定： $\triangle n = n \times (n+1)$ ，比如： $\triangle 1 = 1 \times 2$ ， $\triangle 2 = 2 \times 3$ ， $\triangle 3 = 3 \times 4$ 。请问：

(1) 如果要使等式 $\frac{1}{\triangle 1} + \frac{1}{\triangle 2} + \frac{1}{\triangle 3} + \cdots + \frac{1}{\triangle 99} = \frac{\square}{\triangle 100}$ 成立，那么方框内应填入什么数？

(2) 计算： $\triangle 1 + \triangle 2 + \triangle 3 + \cdots + \triangle 100$ 。

拓展篇

1. 计算： $(3.85 \div \frac{5}{18} + 12.3 \times 1\frac{4}{5}) \div 3\frac{1}{4}$ 。

2. 计算： $\frac{\frac{7}{18} \times 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{3} - 3\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}} \div 2\frac{7}{8}$ 。

3. 计算： $\frac{19\frac{5}{9} + 3\frac{9}{10} - 5.22}{19\frac{5}{9} - 6\frac{27}{50} + 5.22} \div (\frac{1993 \times 0.4}{1995 \times 0.5} + \frac{1.6}{1995})$ 。



4. 我们规定：符号“O”表示选择两数中较大数的运算，例如： $3.5 \text{ O } 2.9 = 2.9 \text{ O } 3.5 = 3.5$ 。符号“△”表示选择两数中较小数的运算，例如： $3.5 \triangle 2.9 = 2.9 \triangle 3.5 = 2.9$ 。请计算：

$$\frac{(0.625 \triangle \frac{23}{33}) \times (\frac{155}{384} \text{ O } 0.4)}{(\frac{1}{3} \text{ O } 0.3) + (\frac{235}{104} \triangle 2.25)}.$$

5. 计算： $(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975}) \times (\frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}) - (\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}) \times (\frac{579}{357} + \frac{753}{975}).$

6. 算式 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}) \times 2004$ 计算结果的小数点后第2004位数字是多少？

7. 古埃及人计算圆形面积的方法是：将直径减去直径的 $\frac{1}{9}$ ，然后再平方。由此看来，古埃及人认为圆周率 π 等于多少？（结果精确到小数点后两位数字）



8. (1)将下面这个繁分数化为最简真分数:

$$\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

(2)若下面的等式成立,工应该等于多少?

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{x+\frac{1}{4}}}}=\frac{8}{11}.$$

7. 已知符号 “*” 表示一种运算, 它的含义是: $a*b=\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+A)}$, 已知 $2*3=\frac{1}{4}$, 那么: (1)A

等于多少? (2)计算 $(1*2)+(3*4)+(5*6)+\cdots+(99*100)$.

10.已知 $A=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{1999\times 2000}$, $B=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{1999}$
比较 A 和 B 的大小, 并计算出它们的差.

11.根据图 9-2 中 5 个图形的变化规律, 求第 99 个图形中所有圆圈 (实心圆圈与空心圆圈) 的个数.

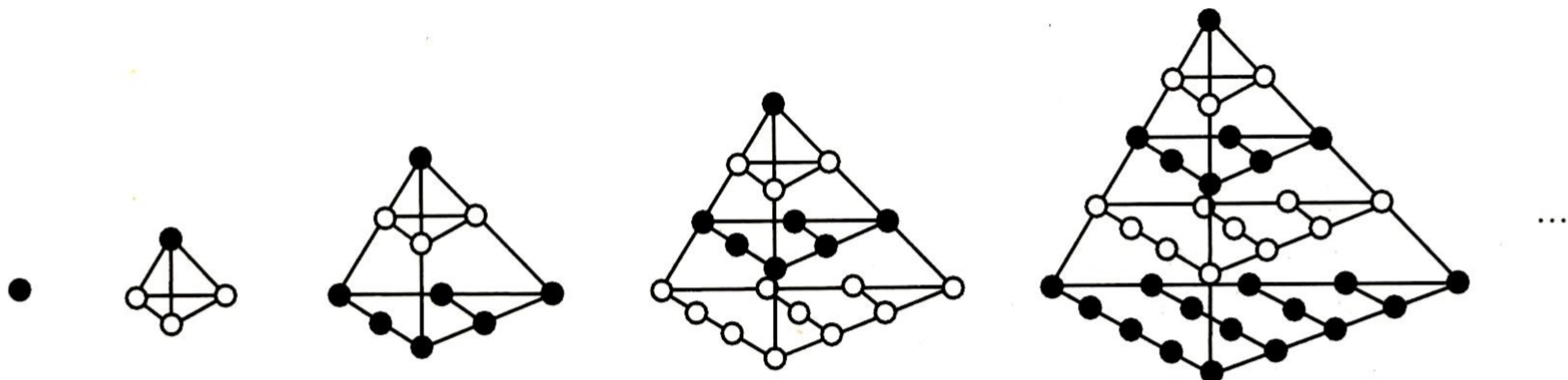


图 9-2



12. 定义： $a_n = \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{1}) \times (1+\frac{1}{2}) \times (1+\frac{1}{3}) \times \cdots \times (1+\frac{1}{n})}$

(1) 求出 $a_1, a_2, a_{100}, a_{200}$ 的大小； (2) 计算： $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4} + \cdots + \frac{100}{a_{100}}$.

超越篇

1. $1\frac{4}{17} \times (2\frac{2}{3} - \frac{3}{4}) - \frac{6\frac{6}{7} - 3\frac{9}{13}}{3\frac{3}{7} - 2\frac{2}{11}} \times \frac{13}{33} + \frac{17 + \frac{11}{12}}{1 - \frac{4}{21}}$.

2. 真分数 $\frac{a}{27}$ 化为小数后，如果小数点后连续 2004 个数字之和是 8684，那么 a 可能等于多少？



3. 定义运算“ Ω ”满足：① $a\Omega 1 = a$, ② $a\Omega n = 2 \times [a\Omega(n-1)] + a$. 已知 $m\Omega 4 = 30$ 。问：
(1) m 等于多少？ (2) $m\Omega 8$ 等于多少？

4. 已知： $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100}$, $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{96}{97} \times \frac{98}{99}$, $C = \frac{1}{10}$ 。请比较 A、B、C 三个数的大小。

5. 求下列两个算式结果的整数部分：

$$(1) \frac{11 \times 66 + 12 \times 67 + 13 \times 68 + 14 \times 69 + 15 \times 70}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100;$$

$$(2) \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{29^2}}$$

6. 定义运算： $a \oplus b = a + b - \frac{a \times b}{2008}$. 请问

(1)定义的运算是否满足交换律？

(2)请根据定义计算下面两个算式：

$$\textcircled{1} 2009 \oplus (2009 \times 2008);$$

$$\textcircled{2} \underbrace{2009 \oplus \cdots \oplus 2009}_{2009 \text{ 个 } 2009} \oplus 2008 \oplus \underbrace{(2009 \times 2008) \oplus \cdots \oplus (2009 \times 2008)}_{2008 \text{ 个 } 2009 \times 2008}.$$



(3) 计算 $\underbrace{2009 \oplus \cdots \oplus 2009}_{2009 \text{ 个 } 2009} \oplus (2 \times 2008) \oplus \underbrace{(2009 \times 2008) \oplus \cdots \oplus (2009 \times 2008)}_{2008 \text{ 个 } 2009 \times 2008}$ 的大小

7.计算

$$24 \times \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{24 \times 25} \right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \cdots + \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + 12^2} \right).$$

8.计算

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2008}\right)^2 + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007}\right)^2 + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)^2 \\ & + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

第十讲 行程问题（六）

内容概述

灵活应用比例分析的行程问题，需考虑路程、时间、速度三个量之间的各种正反比关系；综合性较强，运动路线或路况复杂的行程问题；需零进行优化设计的行程问题。

典型问题



提高篇

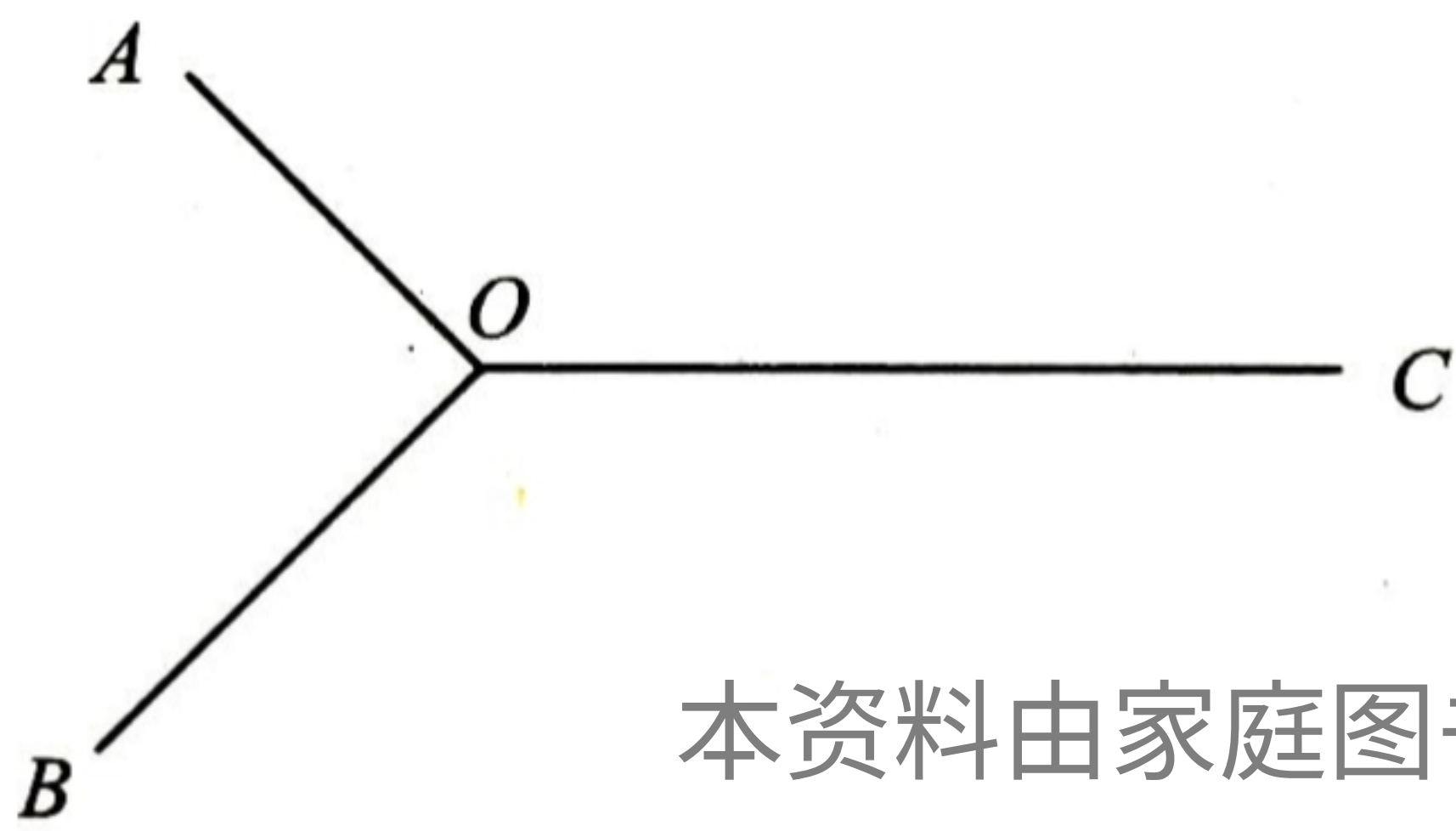
1. 姐弟俩正要从公园门口沿马路向东去博物馆，而他们回家则要从公园门口沿马路向西行，他们商量是先回家取车，再骑到博物馆，还是直接从公园门口走到博物馆，姐姐算了一下：如果从公园到博物馆距离超过 2 千米，则回家取车比较省时间；如果公园和博物馆的距离不足 2 千米，那么直接走过去省时间。已知骑车与步行的速度比为 4:1，那么公园门口到他们家的距离是多少千米？

2. 有甲、乙、丙三辆汽车，各以一定的速度从某地出发同向而行。乙比丙晚出发 10 分钟，出发后 40 分钟追上丙；甲比乙晚出发 20 分钟，出发后 1 小时 40 分钟追上丙。请问：甲出发多少分钟后才能追上乙？

3. 客车、货车分别从甲、乙两地出发相向而行。如果两车都在 6:00 出发，那么会在 11:00 相遇，如果客车和货车分别于 7:00 和 8:00 出发，那么会在 12:40 相遇。现在客车和货车分别于 10:00 和 8:00 出发，它们将在什么时候相遇？

4. 两条公路成十字交叉，甲从十字路口南 1200 米处向北直行，乙从十字路口处向东直行。甲、乙同时出发 10 分钟后，两人与十字路口的距离相等；出发 100 分钟后，两人与十字路口的距离再次相等，此时他们距十字路口多少米？

5. A、B、C、D 四个小镇之间的道路分布如图 10-1 所示，其中 A、D 两镇相距 20 千米，B、D 两镇相距 30 千米。某天甲、乙两人同时从 B 镇出发，甲到达 D 镇后再向 A 镇走，到达 A 镇后又立刻返回，而乙到达 D 镇后直接向 C 行进。丙从 C 镇与甲、乙两人同时出发，在距离 D 镇 15 千米处与乙相遇。当丙到达 D 镇后又向 A 镇前行，在与 D 镇相距 6 千米的地方与甲相遇，已知甲、乙的速度比为 8:9，求 O、C 两镇之间的距离。



6. 甲、乙两车分别从 A、B 两地同时出发相向而行，甲车速度为 32 千米 / 时，乙车速度为 48 千米 / 时。它们分别到达 B 地和 A 地后，甲车速度提高四分之一，乙车速度减少六分之一。如果它们第一次相遇与第二次相遇地点相距 74 千米，那么乙车比甲车早多少小时返回出发点？

7. 甲、乙两人同时从山脚开始爬山，到达山顶后就立即下山，他们两人下山的速度都是各自上山速度的 2 倍。甲到山顶时，乙距山顶还有 400 米；甲回到山脚时，乙刚好下到半山腰。求从山脚到山顶的距离。

8. 从甲市到乙市有一条公路，它分成三段：在第一段上，汽车速度是每小时 40 千米；在第二段上，汽车速度是每小时 90 千米；在第三段上，汽车速度是每小时 50 千米，已知第一段公路的长恰好是第三段的 2 倍。现有两辆汽车分别从甲、乙两市同时出发，相向而行，1 小时 20 分后，在第二段公路上从甲到乙方向的 $\frac{1}{3}$ 处相遇，请问：甲、乙两市相距多少千米？

9. 一支轻骑摩托小分队奉命把一份重要文件送到距驻地很远的指挥部，每辆摩托车装满油最多能行 150 千米，且途中没有加油站。由于一辆摩托车无法完成任务，队长决定派两辆摩托车执行任务，其中一辆摩托车负责把文件送到指挥部，另一辆则在中途供给油料后安全返回驻地。请问：指挥部距小分队驻地最远可能是多少千米？



10. 甲、乙两班学生到离校 24 千米的飞机场参观，但只有一辆汽车，一次只能乘坐一个班的学生，为了尽快到达飞机场，两个班商定，由甲班先坐车，乙班先步行，同时出发，甲班学生在途中某地下车后步行去飞机场，汽车则立即返回接在途中步行的乙班学生．如果甲、乙两班学生步行速度相同，都为 5 千米 / 时，汽车的速度为 35 千米 / 时．请问：汽车应在距飞机场多少千米处返回接乙班学生，才能使两班学生同时到达飞机场？

拓展篇

1. 一辆轿车和一辆巴士都从 A 地到 B 地，巴士速度是轿车速度的 $\frac{4}{5}$ ．巴士要在两地的中点停 10 分钟，轿车中途不停车，轿车比巴士在 A 地晚出发 11 分钟，早 7 分钟到达 B 地．如果巴士是 10 点出发的，那么轿车超过巴士时是 10 点多少分？

2. 客车和货车同时从甲、乙两地相向开出，已知客车行完全程需 10 小时，货车行完全程需 15 小时．两车在中途相遇后，货车又行了 90 千米，这时客车行完了全程的 80%，求甲、乙两地的距离．

3. 甲、乙两人从 A、B 两地同时出发相向而行，相遇时乙比甲多行了 100 米，如果甲出发后在距离 AB 中点 220 米处把速度提高到原来的 3 倍，则相遇时甲比乙多行了 100 米，求 A、B 两地的距离，



4. 甲、乙两人同时从山脚开始爬山，到达山顶后就立即下山。他们两人下山的速度都是各自上山速度的 2 倍。甲与乙在离山顶 400 米处相遇，当甲回到山脚时，乙刚好下到半山腰，求山脚到山顶的距离。

5. 某天早上 8 点甲从 B 地出发，同时乙从 A 地出发追甲，结果在距离 B 地 9 千米的地方追上。如果乙把速度提高一倍，而甲的速度不变，那么将在距离 A 地 2 千米处追上。请问：A、B 两地相距多少千米？

6. 如图 10-2，A、B 两地相距 54 千米，D 是 AB 的中点。甲、乙、丙三人骑车分别同时从 A、B、C 三地出发，甲骑车去 B 地，乙骑车去 A 地，丙总是经过 D 之后往甲、乙两人将要相遇的地方骑，结果三人在距离 D 点 5400 米的 E 点相遇。如果乙的速度提高到原来的 3 倍，那么丙必须提前 52 分钟出发三人才能相遇，否则甲、乙相遇的时候，丙还差 6600 米才到 D。请问：甲的速度是每小时多少千米？

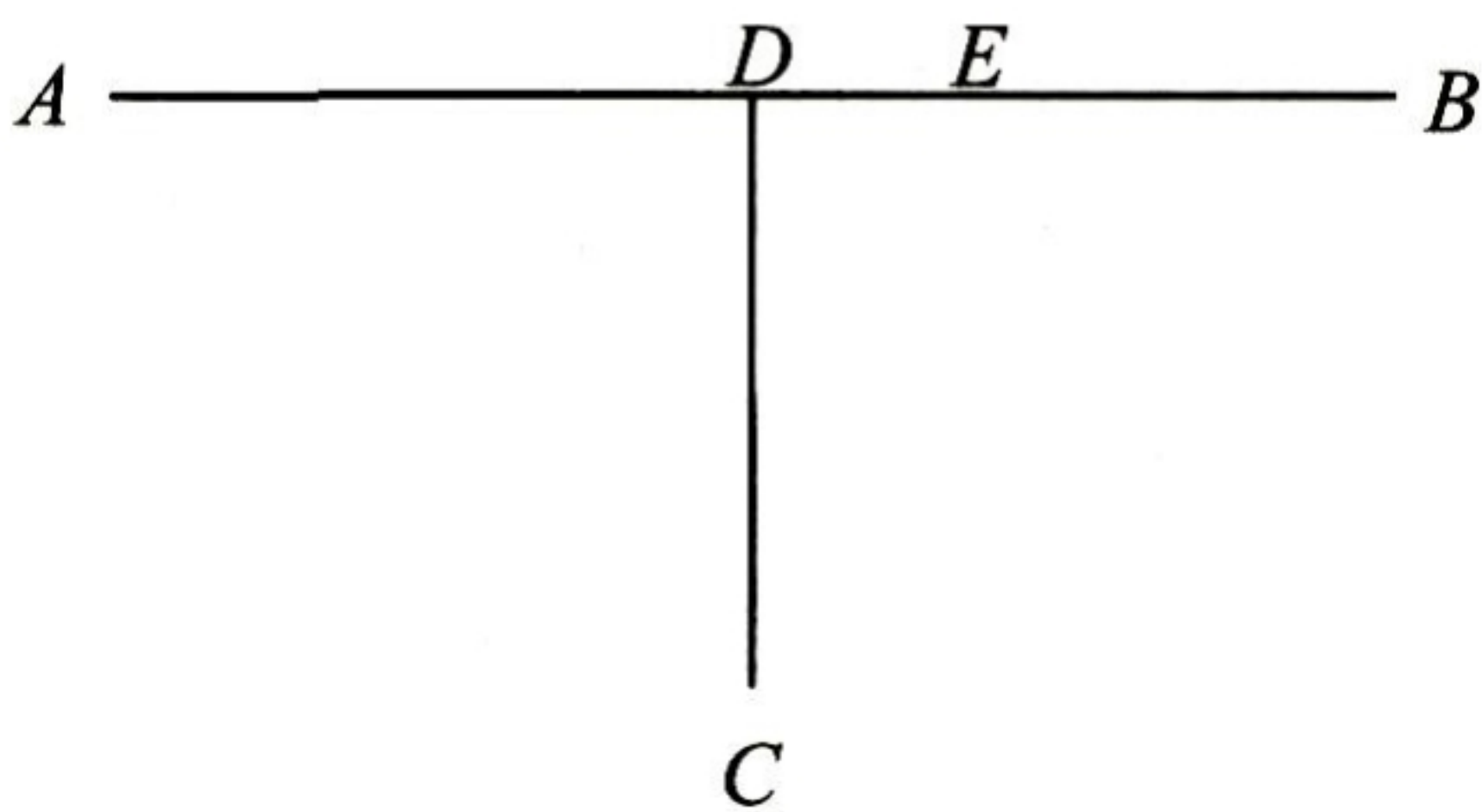


图 10-2

7. 甲、乙两地是电车发车站，每隔一定时间两地同时发出一辆电车，每辆电车都是每隔 4 分钟遇到迎面开来的一辆电车。小张和小王分别骑车从甲、乙两地同时出发，相向而行。小张每隔 5 分钟遇到迎面开来的一辆电车，小王每隔 6 分钟遇到一辆迎面开来的电车。如果电车行驶全程需要 56 分钟，那么小王与小张在途中相遇时，他们已经出发了多少分钟？



8、米老鼠从 A 到 B，唐老鸭从 B 到 A，米老鼠与唐老鸭的速度比为 6 : 5，M 是 A、B 的中点。在 A、M 之间有一 C 点，距离 M 点 26 千米，此处有一个魔鬼，谁经过他都要减速 25%；B、M 之间有一 D 点，距离 M 点 4 千米，此处有一个仙人，谁经过他都会加整 25%；现在米老鼠和唐老鸭同时出发，且同时到达各自的目的地，请问：A、B 两地相距多少千米？

9、自动扶梯由下向上匀速运动，甲从顶部向下走到底部，共走了 150 级；乙从底部向上走到顶部，共走了 75 级。如果甲的速度是乙的速度的 3 倍，那么扶梯可见部分共有多少级？

10、四辆汽车分别停在一个十字路口的四条岔路上，它们与路口的距离都是 18 千米，四辆车的最大时速分别为 40 千米、50 千米、60 千米和 70 千米。现在四辆汽车同时出发沿着公路行驶，那么最少要经过多少分钟，它们才能设法相聚在同一地点？

11、某种小型飞机加满油最多能飞行 1500 千米，但不够从 A 地飞到 B 地。如果从 A 地派 3 架这样的飞机，通机实现空中供油，可以使其中一架飞机飞到 B 地，另两架安全返回 A 地，那么 A、B 两地最远相距多少千米？



12、现在两支球队同时从某地到 9 千米外的体育馆进行比赛，但只有一辆汽车接送，且每次只能乘坐一支球队。已知队员步行速度均为 6 千米/时；汽车满载的速度为 27 千米/时，空载的速度为 36 千米/时。请问：比赛早会在两队出发后多少分钟开始？（两队均到场即可开始。）

超越篇

1.如图 10-3 所示，A、B、C、D 四个球按顺时针方向均匀分布在周长 48 米的圆周上，分别以 1 米/秒、2 米/秒、4 米/秒的速度做顺时针运动。当有两球碰到一起的时候，两个球相互交换速度，但运行方向不变；当三个球碰到一起的时候，中间球的速度不变，其它两个球相互交换速度。请问：从四个球同时出发开始，经过多少秒四个球第一次同时碰到一起？（不考虑球的半径）

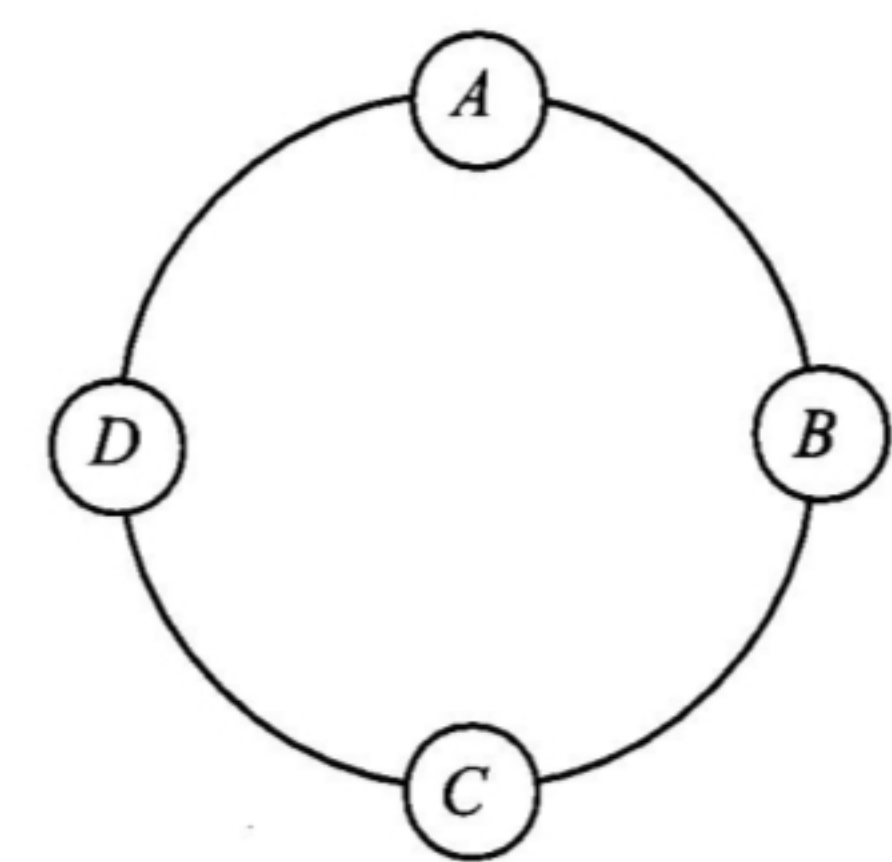


图 10-3

2、A、B、C 三地依次分布在由西向东的同一条道路上，甲、乙、丙分别从 A、B、C 同时出发，甲、乙向东，丙向西。乙、丙在距离 B 地 18 千米处相遇，甲、丙在 B 地相遇，而当甲在 C 地追上乙时，丙已经走过 B 地 32 千米。试问：A、C 间的路程是多少千米？



3、甲、乙、丙同时从山脚开始爬山，到达山顶后立即下山，不断往返运动。已知山坡长 360 米，甲、乙、丙的速度比为 6 : 5 : 4，并且甲、乙、丙的下山速度都是各自上山速度的 1.5 倍。经过一段时间后，甲到达山顶时，看见乙正在下山，此时乙距离山脚不到 180 米（乙不在山脚）。求此时丙离山顶的距离。

4、甲、乙、丙三人从 A 地出发向 B 地前进，A、B 两地之间的距离为 18.6 千米。已知甲步行速度为 3 千米/时，骑车速度为 15 千米/时，乙步行速度为 6 千米/时，骑车速度为 15 千米/时，丙步行速度为 5 千米/时，骑车速度为 18 千米/时。现在只有一辆自行车，请通过合理安排使得甲、乙、丙在最短时间内同时到达 B 地，那么至少需要多少分钟？（骑车可以带人，但只能带一人。）

5、商场里有一架自动扶梯，冬冬和阿奇都从 1 楼乘扶梯到 2 楼，科科乘扶梯的同时还向前往上行走，阿奇乘扶梯的同时还向后往下行走。两人到达 2 楼的时候冬冬一共向上迈了 18 级台阶，阿奇一共向下迈了 10 级台阶，已知冬冬往上走速度和阿奇往下走速度的比为 12 : 5，请问：从 1 楼到 2 楼的扶梯一共有多少级台阶？

6、A、B 两地相距 125 千米，甲、乙两人骑自行车分别从 A、B 两地同时出发，相向而行。丙骑摩托车以每小时 63 千米的速度，与甲同时从 A 地出发，在甲、乙两人间来回穿梭(与乙相遇立即返回，与甲相遇也立即返回)。若甲车速度为每小时 9 千米，且当丙第二次回到甲处时(甲、丙同时出发的那一次为丙第零次回到甲处)，甲、乙两人相距 45 千米。问：当甲、乙两人相距 20 千米时，甲与丙相距多少千米？



7、甲、乙、丙、丁四车同时在一条路上行驶：甲车 12 点追上丙车，14 点与丁相遇，16 点与乙相遇；乙车 17 点与丙相遇，18 点追上丁。问：丙和丁几点几分相遇？

8、3 月 25 日正午 12 点，甲、乙两艘轮船分别从 A、B 两港同时出发，相向而行。航行中的每天正午 12 点，这两艘轮船都会放出一只信鸽，以相同的速度飞向 B 港报信。已知甲船 3 月 31 日放出的信鸽“阿呆”与乙船 4 月 1 日放出的信鸽“阿瓜”同时到达 B 港。4 月 7 日正午 12 点，乙船到达了 A 港，此时乙船放出了它在整个航程中的最后一只信鸽，而该信鸽恰好与甲船同时到达 B 港。已知除了“阿呆”与“阿瓜”之外，还有一对信鸽也是同时到达 B 港，请求出这对信鸽到达 B 港的准确时间。

第 11 讲 不定方程

内容概述

学会求二元一次不定方程与多元一次不定方程组的整数解，通常利用整除性、大小估计等方法进行分析；注意对多个未知数进行恰当的消元，化简方程。

典型问题

提高篇



1. 有两种不同规格的油桶若干个，大油桶能装 8 千克油，小油桶能装 5 千克油，44 千克油恰好装满这些油桶。问：大、小油桶各几个？

2. 有 150 个乒乓球分装在大、小两种盒子里，大盒每盒装 12 个，小盒每盒装 7 个。问：需要大、小盒子各多少个才能恰好把这些球装完？

3. 小花狗和波斯猫是一对好朋友，它们在早晚见面时总要叫上几声表示问候。若是早晨见面，小花狗叫 2 声，波斯猫叫 1 声；若是晚上见面，小花狗叫 2 声，波斯猫叫 3 声，细心的小娟对它们的叫声统计了 15 天，发现它们并不是每天早晚都见面，在这 15 天内它们共叫了 61 声。问：波斯猫至少叫了多少声？

4. 庙里有若干个大和尚和若干个小和尚共七百多人，已知 7 个大和尚每天共吃 41 个馒头，19 个小和尚每天共吃 60 个馒头，平均每个和尚每天恰好吃 4 个馒头。请问：庙里共有多少个和尚？

5. 某单位的职工到郊外植树，其中有男职工，也有女职工，并且有 $\frac{1}{3}$ 的职工各带一个孩子参加。男职工每人种 13 棵树，女职工每人种 10 棵树，每个孩子种 6 棵树，他们一共种了 216 棵树。请问：其中有多少名男职工？



6. 新学期开始了，几个老师带着一些学生去搬全班的 100 本教科书。已知老师和学生共 14 人，每个老师能搬 12 本，每个男生能搬 8 本，每个女生能搬 5 本，恰好一次搬完，问：搬书的老师、男生、女生各有多少人？

7. 新发行的一套珍贵的纪念邮票共三种不同的面值：20 分、40 分和 50 分，其中面值 20 分的邮票售价 5 元，面值 40 分的邮票售价 8 元，面值 50 分的邮票售价 9 元。小明花了 156 元买回了总面值为 8.3 元的邮票，那么三种面值的邮票分别买了多少张？

8. 小萌在邮局寄了三种信，平信每封 8 分，航空信每封 1 角，挂号信每封 2 角，她共用了 1 元 2 角 2 分，那么小萌寄的这三种信的总和最少是多少封？

9. 有纸币 60 张，其中 1 分、1 角、1 元和 10 元各有若干张。请你判断：这些纸币的总面值能否恰好是 100 元？



10. 快餐店有三种汉堡，鱼肉汉堡每个 7 元，鸡肉汉堡每个 9 元，牛肉汉堡每个 14 元，小明去快餐店买汉堡。他付款 100 元，找回 8 元。请问：小明买了多少个鸡肉汉堡？

拓展篇

1. 甲级铅笔 7 角一支，乙级铅笔 3 角一支，张明用 5 元钱买这两种铅笔，钱恰好花完，请问：张明共买了多少支铅笔？

2. 采购员去超市买鸡蛋。每个大盒里有 23 个鸡蛋，每个小盒里有 16 个鸡蛋（盒子不能拆开）。采购员要恰好买 500 个鸡蛋，他一共要买多少盒？

3. 在第二次世界大战中，苏联军队每个步兵师有 9000 人，每个航空兵师有 8000 人。在一场战役中，苏军司令部从两个集团军抽调了相同数量的师参与战斗，一共有 27.1 万人。如果这两个集团军都是由步兵师和航空兵师组成，那么苏军参与战斗的有多少个步兵师，多少个航空兵师？



4. 甲、乙两个小队的同学去植树. 甲小队有一人植树 12 棵, 其余每人都植树 13 棵; 乙小队有一人植树 8 棵, 其余每人都植树 10 棵, 已知两小队植树棵数相等, 且每小队植树的棵数都是四百多棵. 问: 甲、乙两小队共有多少人?

5. 将一根长为 380 厘米的合金铝管截成若干根长为 36 厘米和 24 厘米两种型号的短管, 加工损耗忽略不计, 问: 剩余部分的管子最少是多少厘米?

6. 某次数学比赛, 用两种不同的方式判分. 一种是答对 1 题给 5 分, 不答给 2 分, 答错不给分; 另一种是先给 40 分, 答对 1 题给 3 分, 不答不给分, 答错扣 1 分, 某考生两种判分方法均得 71 分, 请问: 这次比赛共考了多少道题?

7. 我国古代数学家张丘建在《算经》一书中提出了“百鸡问题”: 鸡翁一值钱五, 鸡母一值钱三, 鸡雏三值钱一. 百钱买百鸡, 问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何? 这个问题是说: 每只公鸡价值 5 文钱, 每只母鸡价值 3 文钱, 每 3 只小鸡价值 1 文钱. 要想用 100 文钱恰好买 100 只鸡, 公鸡、母鸡和小鸡应该分别买多少只?



8. 小李去文具店买圆珠笔、铅笔和钢笔，每种笔都只能整盒买，不能单买。钢笔 4 支一盒，每盒 5 元；圆珠笔 6 支一盒，每盒 6 元；铅笔 10 支一盒，每盒 7 元。小李总共花了 97 元，买了 90 支笔。请问：三种笔分别买了多少盒？

9、在新年联欢会上，某班组织了一场飞镖比赛。如图 11-1，飞镖的靶子分为三块区域，分别对应 17 分、11 分和 4 分。每人可以扔若干次飞镖，脱靶不得分，投中靶子就可以得到相应的分数。试问：如果比赛规定恰好投中 100 分才能获奖，要想获奖至少需要投中几个飞镖？如果规定恰好投中 120 分才能获奖，要想获奖至少需要投中几个飞镖？

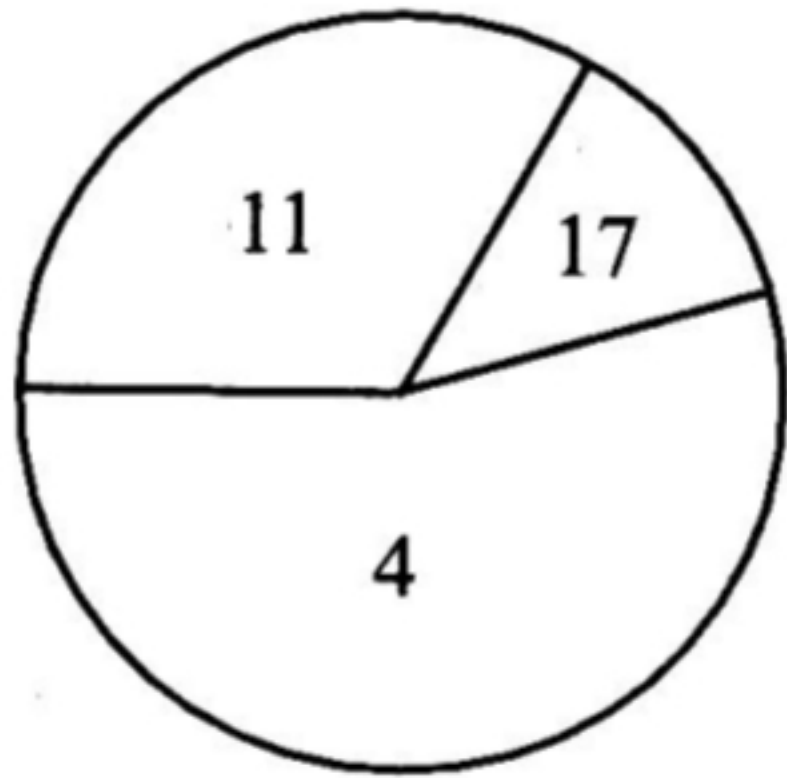


图 11-1

10、阿奇到商店买糖，巧克力糖 13 元一包，奶糖 17 元一包，水果糖 7.8 元一包，酥糖 10.4 元一包，最后他共花了 360 元，且每种糖都买了。请问：阿奇共买了多少包奶糖？

11、小悦、冬冬去超市买水果。小悦买了 2 千克桔子、3 千克苹果和 4 千克梨，共花了 28.5 元，冬冬买了 3 千克桔子、5 千克苹果和 7 千克梨，共花了 47.7 元。结账的时候碰到老师，老师买了 6 千克桔子和 3 千克苹果，那么老师应该花了多少钱？

12、红、蓝两种笔的单价都是整数元，并且红笔比蓝笔贵。小明买红笔、蓝笔各一支，共用了 23 元。小



强打算用 109 元来买这两种笔(也允许只买其中一种),可是他无论怎么买,都不能把 109 元恰好用完.求红笔的单价.

超越篇

1、求不定方程 $35x+64y=1625$ 的所有自然数解.

2、一个水果批发市场运进苹果、梨和桃子各若干筐,共 1355 斤.其中苹果每筐 60 斤,每斤定价 1.5 元;梨每筐 55 斤,每斤定价 1.5 元;桃子每筐 45 斤,每斤定价 1.8 元.批发市场是以定价的 70% 购人这些水果的,如果全部售完,将获得 638.1 元的利润,请问:批发市场运进三种水果各多少筐?

3、雨轩图书馆内有两人桌、三人桌和四人桌共五十多张,其中两人桌的数量为四人桌数量的 2 倍.这天除了某张桌子坐满外,其它两人桌每桌都只坐 1 人,三人桌每桌都只坐 2 人,四人桌每桌都只坐 3 人,且恰好平均每 11 人占用 17 个座位.请问:图书馆两人桌、三人桌、四人桌分别有多少张?



4、采购员用一张万元支票去购物，买了若干个单价 590 元的 A 种商品和若干个单价 670 元的 B 种商品，其中 B 种商品多于 A 种商品，最后找回了几张 100 元钞票和不到 10 张 10 元钞票．如果把 A、B 两种商品的数量调换，找回的 100 元和 10 元的钞票张数正好也调换，那么这两种商品分别买了多少个？

5、有甲、乙、丙、丁四种货物，若购买甲 1 件、乙 5 件、丙 1 件、丁 3 件共需 195 元；若购买甲 2 件、乙 1 件、丙 4 件、丁 2 件共需 183 元；若购买甲 2 件、乙 6 件、丙 6 件、丁 5 件共需 375 元．现在购买甲、乙、丙、丁各一件共需多少元？

6、国庆节，公司发给唐师傅一张 1000 元的礼券，但只允许购买 A、B、C、D、E 五种商品，并且必须正好把礼券用完．已知这五种商品每盒的价格和重量如下表．

商品	A	B	C	D	E
单价(元)	70	110	190	290	310
重量(千克)	1.5	2	1	10	3

如果唐师傅最多只能带走 20 千克商品，且一定要购买 D 商品，共有多少种不同的买法？



7、现有一架天平和很多个 13 克和 17 克的砝码，用这些砝码，不能称出的最大整数克重量是多少?(砝码只能放在天平的一边)

8、现有 1.7 升和 4 升的两个空桶和一个大桶里的 100 升汽油，用这两个空桶要倒出 1 升汽油，至少需要倒多少次?

第 12 讲 进位制与取整符号

内容概述

掌握进位制的概念及相关计算，掌握自然数在不同进位制之间的转化方法，并学会恰当利用进位制解决一些数论问题. 掌握取整符号 $[]$ 与取小数部分符号 $\{ \}$ 的定义与基本性质，学会求解包含这两种符号的算式与方程.

典型问题

提高篇

1. 将下面的数转化为十进制的数： $(1111)_2$ ， $(1010010)_2$ ， $(4301)_5$ ， $(B08)_{16}$.



2. 请将十进制数 90 转化成二进制、七进制和十六进制的数.

3. 请将七进制数 $(403)_7$ 化成五进制的数, 将五进制数 $(403)_5$ 化成七进制的数.

4. (1)在二进制下进行加法: $(101010)_2 + (1010010)_2$;
(2)在七进制下进行加法: $(1203)_7 + (64251)_7$;
(3)在九进制下进行加法: $(178)_9 + (8803)_9$.

5. 用 a、b、c、d、e 分别代表五进制中 5 个互不相同的数字, 如果 $(\overline{ade})_5$, $(\overline{adc})_5$, $(\overline{aab})_5$, 是由小到大排列的连续正整数, 那么 $(\overline{ade})_5$ 所表示的整数写成十进制的表示是多少?

6. 记号 $(25)_k$ 表示七进制的数, 如果 $(52)_k$ 是 $(25)_k$ 的 2 倍, 那么, $(123)_k$ 在十进制表示的数是多少?



7. 一个自然数的四进制表达式是一个三位数，它的三进制表达式也是一个三位数，而且这两个三位数的数码顺序恰好相反。请问：这个自然数的十进制表示是多少？

8. 计算： $[27 \times \frac{25}{26}] - \{27 \times \frac{25}{26}\} + [3.14] \times \{3.14\}.$

9. 计算： $[\frac{16 \times 1}{17}] + [\frac{16 \times 2}{17}] + \dots + [\frac{16 \times 15}{17}] + [\frac{16 \times 16}{17}].$

10. 求方程 $2[x] - 9\{x\} = 0$ 的解的个数.



拓展篇

- (1) 请将下面的数转化为十进制的数： $(2011)_3$ 、 $(7C1)_{16}$ ；

(2) 请将十进制数 101 转化为二进制的数，641 转化为三进制的数，1949 转化为十六进制的数。
- 请将三进制数 $(12021)_3$ 化成九进制的数，将八进制数 $(742)_8$ 化成二进制的数。
- (1) 在七进制下计算： $(326)_7 + (402)_7$ 、 $(326)_7 \times (402)_7$ ；

(2) 在十六进制下计算： $(35E6)_{16} + (78910)_{16}$ 。
- 算式 $(4567)_m + (768)_m = (5446)_m$ 是几进制数的加法？ $(534)_n \times (25)_n = (16214)_n$ 是几进制数的乘法？

5. 自然数 $x = (\overline{abc})_{10}$ 化为二进制后是一个 7 位数 $(\overline{1abcabc})_2$. 请问: x 等于多少?

6. 一个自然数的七进制表达式是一个三位数, 它的九进制表达式也是一个三位数, 而且这两个三位数的数码顺序恰好相反. 这个自然数的十进制表示是多少?

7. 某出版社在印刷一本数学科普书的时候, 发现他们印刷的页码每一页都只含数字 0 至 5, 即从第一页开始这本书的页码依次为 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 那么这本书的第 365 页的页码是多少?

8. 如果 $[x] = 3, [y] = 0, [z] = 1$. 求:

(1) $[x - y]$ 的所有可能值; (2) $[x + y - z]$ 的所有可能值.



9、计算（结果用 π 表示）

$$(1)\{\{\pi\}+\pi\}+\{[\pi]+\pi\}+[\{\pi\}+\pi]+[[\pi]+\pi]; \quad (2)[10-2\pi]+[\pi]\times\{\pi\}.$$

10、计算：
$$\left[\frac{23\times 1}{41}\right]+\left[\frac{23\times 2}{41}\right]+\cdots+\left[\frac{23\times 39}{41}\right]+\left[\frac{23\times 40}{41}\right].$$

11、解方程 (1) $x+2\{x\}=3[x]$; (2) $3x+5[x]-49=0$.

12、解方程 $\left[\frac{x}{1}\right]+\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]+\left[\frac{x}{10}\right]=110$, 其中 x 是整数。



超越篇

1. a 、 b 是自然数， a 进制数 $(47)_a$ 和十进制数 $(74)_a$ 相等， $a + b$ 的最小值是多少？
2. 现有一个百位为 3 的三位数(十进制)，把它分别化成九进制的数和八进制的数后，仍然是三位数。且首位数字分别为 4 和 5。这样的三位数中最大的是多少？最小的是多少？一共有多少个？
3. 在十进制的表示中，三个依次增大的两位数恰构成公差为 6 的等差数列；而在五进制的表示中，这三个数的数字和是依次减少的。符合这样要求的等差数列有多少个？
4. 现有六个筹码，上面分别标有数值：1，3，9，27，81，243。任意搭配这些筹码(也可以只选择 1 个筹码)可以得到多少个不同的和？将这些和加起来，总和为多少？将这些和从小到大排列起来，第 45 个是多少？



4. 计算: $\left[\frac{13 \times 1}{21}\right] + \left[\frac{13 \times 2}{21}\right] + \cdots + \left[\frac{13 \times 82}{21}\right] + \left[\frac{13 \times 83}{21}\right]$.

5. 计算: $\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2^{10}}{3}\right]$.

7. 一副双色牌中, 红、黑两种颜色各有 12 张牌, 每种颜色的牌上分别写着 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2048 这 12 个数. 小梁从中任意抽取一些牌, 计算抽出的牌面上所有数的和.
- (1)若算出的和为 2008, 则小梁最多可能抽取了多少张牌?(2)若算出的和为 183, 则小梁共有多少种抽取牌的方法?(3)如果小梁有 3 种抽牌的方法使得和为某个正整数 n , 求, z 的值.

8. (1)在 $\left[\frac{1^2}{2008}\right], \left[\frac{2^2}{2008}\right], \left[\frac{3^2}{2008}\right], \cdots, \left[\frac{2008^2}{2008}\right]$ 中共出了多少个互不相同的数?



(2)在 $[\frac{2008}{1}], [\frac{2007}{2}], [\frac{2006}{3}], \dots, [\frac{1}{2008}]$ 中共出现了多少个互不相同的数？

第 13 讲 应用题综合（一）

内容概述

与生活相关的形式多样的应用题，需要结合实际情况具体分析；条件比较隐藏，数量关系较为复杂的应用题；具有不确定性，需要进行简单判断的应用题。

典型问题

提高篇

1. 一个骗子到商店买了 5 元的东西，他付给店员 50 元钱，然后店员把剩下的钱找给了他；这时他又说自己有零钱，于是给店员 5 元的零钱，并且要回了开始给出的 50 元，请问：这个骗子一共骗了多少钱？



2. 在水平地面上匀速行驶的拖拉机速度是每秒 5 米，已知拖拉机前轮直径 0.8 米，后轮直径 1.25 米．设某一时刻两轮上与地面的接触点为 A 和 B，那么经过多少秒后，A 和 B 再次同时与地面接触？（圆周率取近似值 3）

3. 一个容器装了 $\frac{3}{4}$ 的水，现有大、中、小三种小球，第一次把 1 个中球沉入水中；第二次将中球取出，再把 3 个小球沉入水中；第三次取出所有的小球，再把 1 个大球沉入水中．最后将大球从水中取出，此时容器内剩下的水是最开始的 $\frac{2}{9}$ ．已知每次从容器中溢出的水量情况是：第一次是第三次的一半；第三次是第二次的一半．求大、中、小三球的体积比。

4. 星期天早晨，冬冬发现闹钟因电池能量耗尽停了．他换上新电池，估计了一下时间，把闹钟的时间调到 8:00.然后冬冬离家前往天文馆．他到达天文馆时，看到天文馆的标准时钟显示的时间是 9:15.一个半小时后，冬冬从天文馆出发以同样的速度回家，到家时看到闹钟显示的时间是 11:20，这时冬冬应该把闹钟调到几点几分时间才是准确的？

5. 从甲地到乙地有两种方法：①立即步行前往；②等待公共汽车坐车前往．表 13-1 中列出了从甲地到乙地所用的最短时间随两地之间距离的变化情况，已知步行速度、汽车速度以及等待公车的时间都是固定的．请问：当两地相距 24 千米的时候，从甲地到达乙地的最短时间是多少分钟？

表 13-1

甲、乙距离	最短时间
3 千米	20 分钟
6 千米	30 分钟
9 千米	36 分钟



6. 某种商品由于实行进口限制，在买卖时会征收高达 40% 的税。比如甲以 100 元的价格卖出该商品，在收到买方 100 元货款之后，需要付给国家 40 元的税；乙以 100 元的价格买入该商品时，则在付给卖方 100 元货款后，还需要再付给国家 40 元的税。现在甲以 45 万元的总价买入一批该商品，然后再转手卖给乙，在整个买卖交易过程中，甲还自己出钱支付了 30000 元的运费（该费用不征税）。为了让这笔买卖不亏本，甲至少应以多少万元的价格卖给乙？如果以此价格成交，那么从头到尾国家从甲、乙身上收取了多少万元的税？

7. 一条双向铁路上有 11 个车站，相邻两站都相距 7 千米。从早晨 7 时开始，有 18 列货车由第 11 站顺次发出，每隔 5 分钟发出一列，都驶向第 1 站，速度都是每小时 60 千米。早晨 8 时，由第 1 站发出一列客车，向第 11 站驶去，时速是 100 千米。在到达终点站前，货车与客车都不停靠任何一站，问：在哪两个相邻站之间，客车能与 3 列货车先后相遇？

8. 有一只小蚂蚁在一根弹性充分好的橡皮筋上的 A 点，以每秒 1 厘米的速度向前爬行，从小蚂蚁开始爬行的时候算起，橡皮筋在 2 秒后、4 秒后、6 秒后、8 秒后、10 秒后……都均匀地伸长为原来的 2 倍。那么在开始爬行 9 秒后，这只小蚂蚁离 A 点多少厘米？



9. 有一座塔，从地面到塔顶要通过塔内部的螺旋形通道上去，如图 13-1，通道的长度是 420 米，共转了三圈半．小明从 P 点以每分钟 60 米的速度下塔，小亮从 Q 点以每分钟 40 米的速度上塔，如果两人同时出发，那么刚好形成正上方与正下方的关系共有多少次？分别是出发之后几分钟？（两人相遇不算）

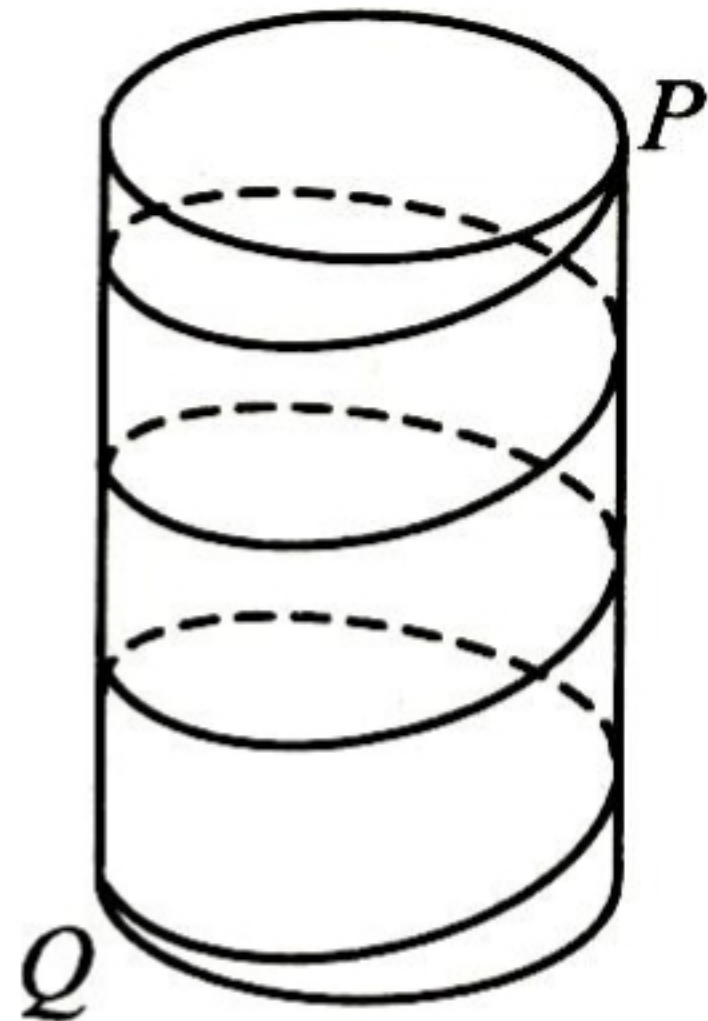


图 13-1

10. 阿奇读一本故事书，如果他第一天读 25 页，以后每天都比前一天多读 5 页，那么到最后一天时，还剩下 47 页；如果他第一天读 40 页，以后每天都比前一天多读 5 页，那么到最后一天时，还剩下 37 页．请问：这本故事书最少共有多少页？

拓展篇

1. 甲、乙、丙、丁四个人去餐馆大吃了一顿，因为甲的钱包落在宿舍，所以饭钱就由乙、丙、丁三个人出．回到宿舍以后，甲找到了钱包，想要把钱还给其他三人，结果乙摆摆手说：“不用了，我反正还欠你 4 块钱，正好抵了．”丙说：“你把我那份给丁吧，我正好欠他 9 块钱．”于是甲只付钱给丁，给了 31 元．那么在餐馆付饭钱的时候，乙、丙、丁分别付了多少元？

2. 2008 年 3 月 1 日起，我国实行新的税率标准，费用扣除标准调高为 2000 元 / 月．表 13-2 是工资、薪金所得项目税率表：

表 13-2

级别	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元部分	25
...	...	...

表中“全月应纳税所得额”是指从月工资、薪金收入中减去 2000 元后的余额，它与相应税率的乘积就是应交的税款数。则在这种税率实行期间：

(1)王先生某个月的工资、薪金收入为 4480 元，该月份他缴纳的税款是多少元？

(2)张先生某月份交纳了 1165 元个人所得税，该月份张先生工资、薪金收入是多少元？

3. 有大小一样，张数相同的黑白两种颜色的正方形纸片，阿奇先用白色纸片拼成中间没有缝隙的长方形，然后用黑色纸片围绕已经拼成的白色长方形继续拼成更大的长方形，之后又用白色纸片拼下去，……，这样重复拼。当阿奇用黑色纸片拼过 5 次以后，黑、白纸片正好用完。请问：黑色纸片至少有多少张？

4. 有一辆杂技自行车，前轮的半径是 $4\frac{1}{11}$ 分米，后轮的半径是 $3\frac{1}{3}$ 分米，那么当后轮转的圈数比前轮多 10 圈的时候，这辆车前进了多少米？（圆周率取近似值 3.14.）

5. 两个农妇共带 100 个鸡蛋到市场上去卖，第一个农妇带的鸡蛋比第二个农妇少，但两人所卖的总钱数相同。第一个农妇对第二个农妇说：“我要有你那么多鸡蛋，按我的价钱卖就能把它们卖 180 元，”第二个农妇回答说：“我要有你那么多的鸡蛋，按我的价钱卖只能把它们卖 80 元。”请问：两个农妇各有多少个鸡蛋？



6. 张先生向商店订购了每件定价 100 元的某种商品 80 件. 张先生对商店经理说:“如果你肯减价, 那么每减价 1 元, 我就多订购 4 件,” 经理算了一下, 若减价 1%, 由于张先生多订购, 获得的利润反而比原来多 52 元. 那么按张先生的要求, 商店最多可以获得多少元利润?

7. 比赛用的足球是由黑、白两色皮子缝制的, 其中黑色皮子为正五边形, 白色皮子为正六边形, 并且黑色正五边形与白色正六边形的边长相等. 缝制的方法是: 每块黑色皮子的 5 条边分别与 5 块白色皮子的边缝在一起; 每块白色皮子的 6 条边中, 有 3 条边与黑色皮子的边缝在一起, 另 3 条边则与其他白色皮子的边缝在一起. 如果一个足球表面上共有 12 块黑色正五边形皮子, 那么, 这个足球应有白色正六边形皮子多少块?

8. 如图 13-2 所示, 相距 15 厘米的两条平行线 a 和 b 之间, 有直角三角形 A 和长方形 B. 直角三角形 A 沿着直线 a 以每秒 1 厘米的速度向右运动, 长方形 B 沿着直线 b 以每秒 2 厘米的速度向左运动. 请问: A 与 B 有重叠部分的时间持续多久?其中重叠部分的面积保持不变的时间有多长?

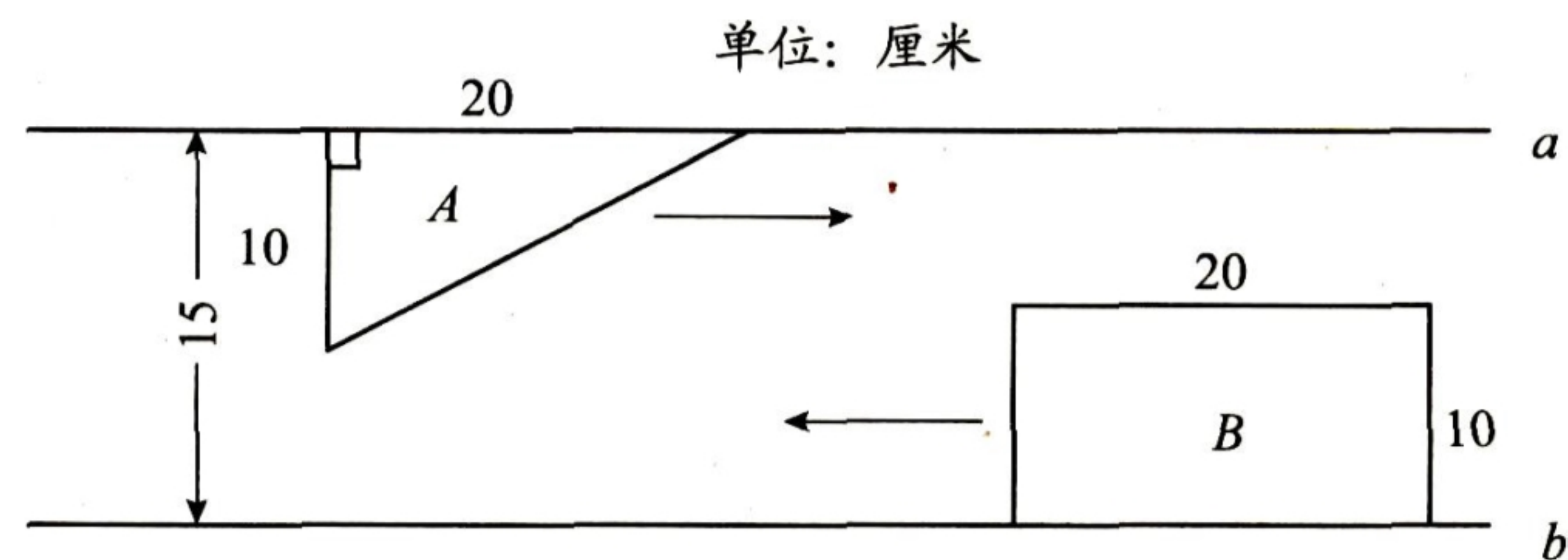


图 13-2

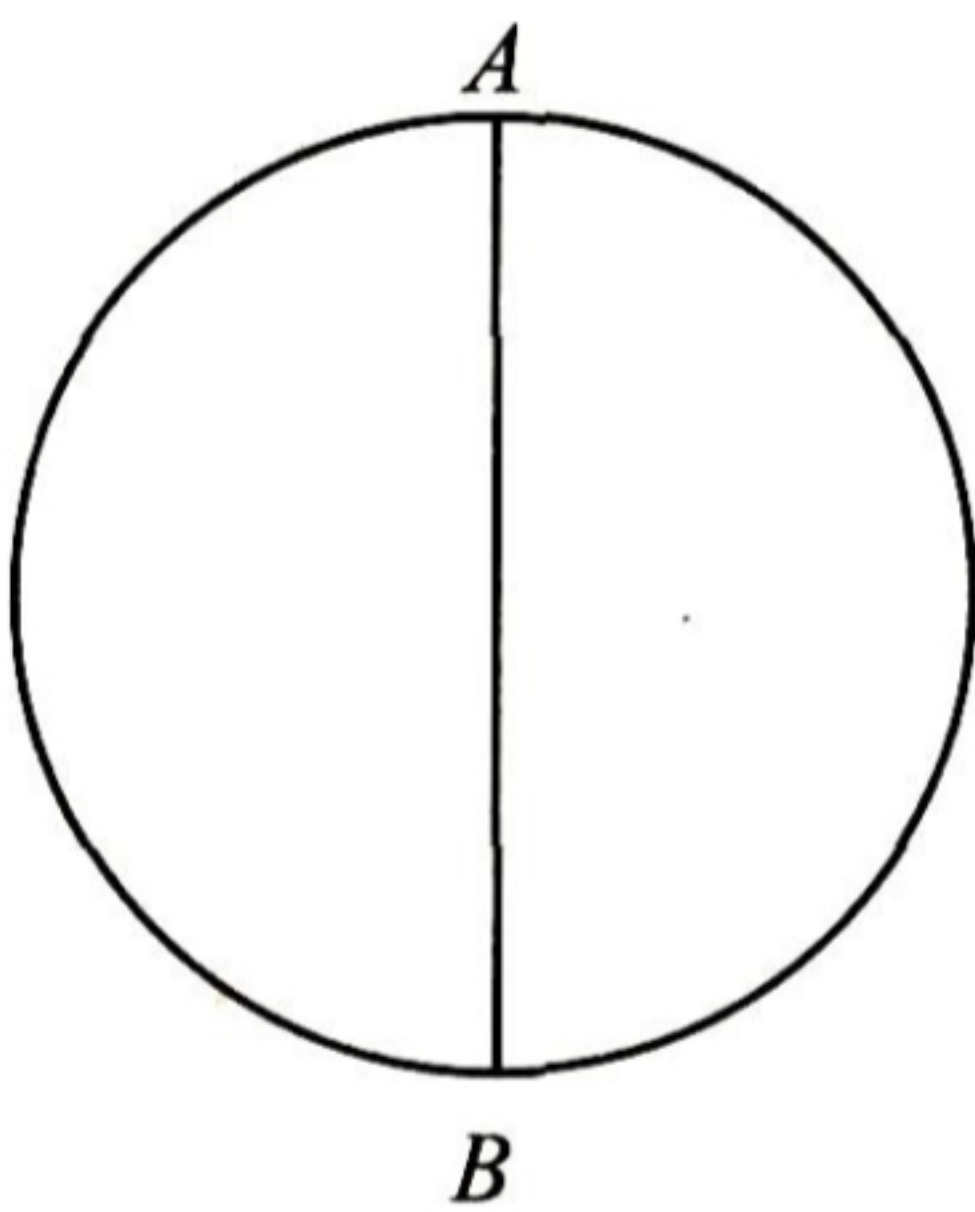


图 13-3

9. 如图 13-3 所示, A、B 两点把一个周长为 1 米的圆周等分成两部分. 蓝精灵从 B 点出发在这个圆周上沿逆时针方向作跳跃运动, 它每跳一步的步长是 $\frac{1}{100}$ 米, 如果它跳到 A 点, 就会经过特别通道 A 点滑向 B 点, 并从 B 点继续起跳, 当它经过一次特别通道, 圆的半径就扩大一倍. 已知蓝精灵跳了 1000 次, 那

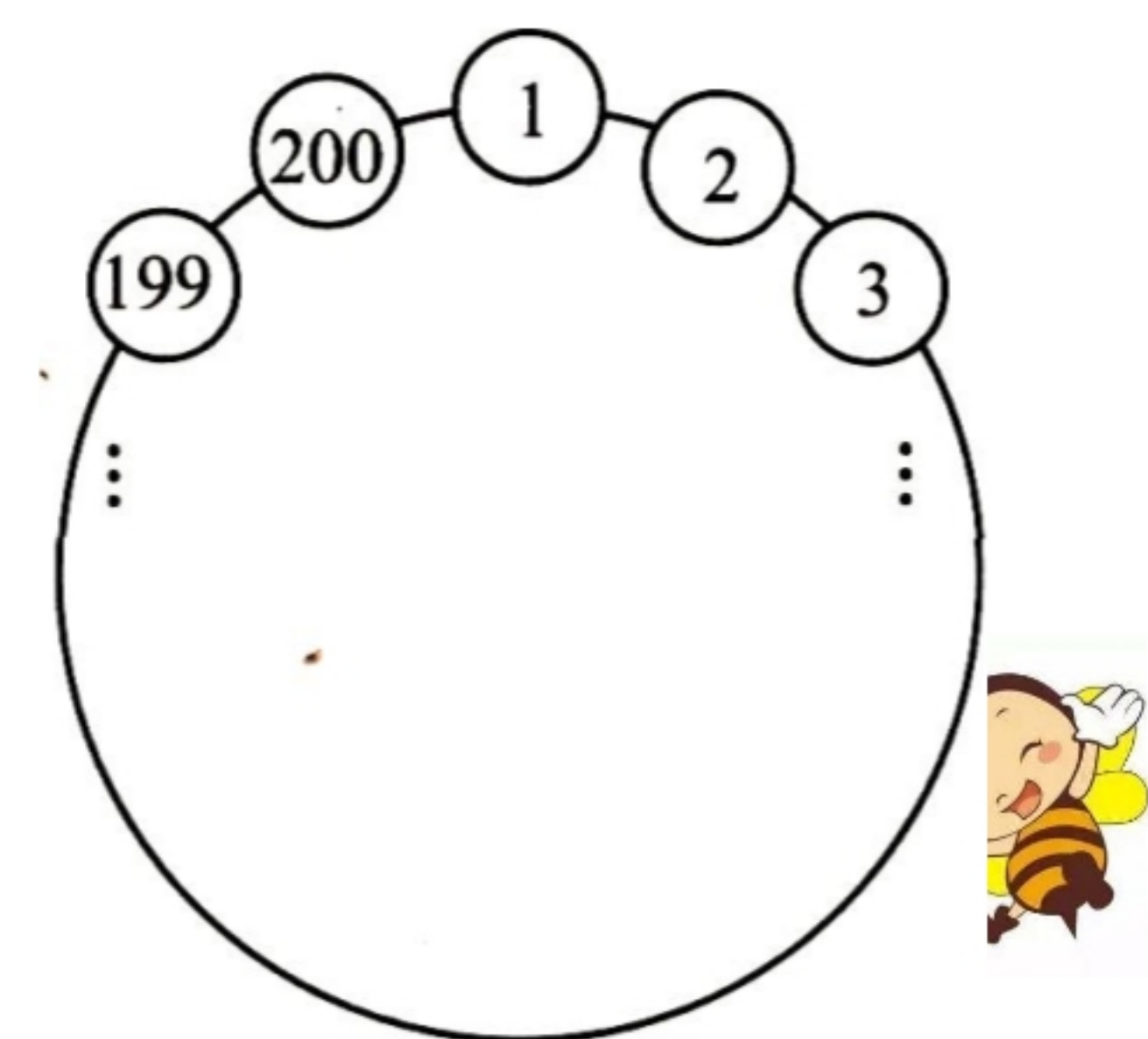


跳完后圆周长等于多少米？

10. 汽车轮胎如果放在前轮可以行驶 50000 千米，如果放在后轮可以行驶 30000 千米。现有一辆汽车，允许在恰当的时候将前轮和后轮互换，那么最多可以行驶多少千米而不需要购买新的轮胎？如果在行驶过程中只允许前、后轮对调一次，那么应当在行驶多少千米的时候将前、后轮对调？

11. 在 A、B 之间有一段笔直的公路，在其两个三等分点处各有一棵树。早上 9：30 时有一辆汽车从 A 出发，以固定的速度沿公路行驶，于当天早上 10：00 到达 B。一辆摩托车在当天早上 9：25 从 B 出发，以变化的速度开往 A 地。摩托车手记得他和汽车在某棵树处相遇，但记不清是哪棵树了，他只知道以摩托车的最快速度从 B 到 A 恰好要 15 分钟。如果摩托车手能够根据上述信息推断出自己是在哪棵树处遇到汽车的，那么摩托车最晚什么时间之前到达 A 地？

12. 如图 13—4 所示，在一个大圆周上均匀分布着 200 个小球，沿顺时针方向依次编号为 1，2，3，…，200。每个小球均以各自编号的速度沿顺时针方向绕圆周运动(单位是米 / 秒)，当在某一个时刻有若干小球相遇在一起时，这些小球就会合并成一个小球，并以原来这些小球速度的平均值继续沿顺时针方向运动。经过充分长的时间之后，圆周上最终剩下几个球在运动？速度等于多少？



超越篇

1. 小军驾驶的轿车被警察拦了下来，原因是在高速路上超速驾驶，仪器记录上显示小军的平均速度达到了 110 千米 / 时。为了免于处罚，小军辩解道：“刚才我花了两个半小时通过这段高速路，我敢保证在每一个小时的时间间隔内，我开的距离都不超过 100 千米，因此我开车的平均速度不可能是 110 千米/时。你的记录仪器一定有问题。”于是警察又查询了电子记录，发现小军所说属实，虽然总感觉有些不对劲，却又不知如何反驳小军，于是就放过了他。请问：小军的辩解错在哪里？

2. 甲、乙、丙三个人一起买一件古董，他们三个人出钱的比是 2：2：1。第一次三个人只付了总钱数的 50%，乙比丙多付了 2750 元，但是这些钱中包含乙替甲垫付的 550 元。几天之后甲又单独向丙借了 2000 元，向乙借了 500 元、几天之后这三个人发现古董的价格提高了 20%，并且由于甲缺钱。三个人的出钱的比改成了 1：2：2。请问：三个人还要分别各付多少元，才能使得他们在付完古董的钱后互不相欠？

3. A、B、C 三种零件共 153 个，每人加工 1 个 A 零件都需 3 分钟，加工 1 个 B 零件都需 5 分钟，加工 1 个 C 零件都需 7 分钟。现在有甲、乙、丙三名工人同时开始加工这三种零件，甲加工的第一个零件是 A，乙加工的第一个零件是 B，丙加工的第一个零件是 C。如果加工完第一个零件后，他们都改去加工另一种零件，并且不再改变所加工零件的种类，结果恰好同时完成。求 A、B、C 三种零件的个数。



4. 有一个菜贩很不老实，他有一架动过手脚的天平，这架天平的两臂不等长。普通天平平衡的条件是左右两边的物品重量相等，但做过手脚的天平平衡时两边重量不相等，而是成一个固定的比例。

当菜贩向农民们购买货物时，他把货物放在天平臂较短的一侧，这样称起来较轻，他可以少付一些钱；当他销售货物时，就把货物放在天平臂较长的一侧，这样称起来较重，他可以收入较多的钱。用上述手法，第一次他向农民购买 6 袋蕃茄 1 袋花生，称出总重量为 25 千克。第二次他向农民购买 9 袋蕃茄 3 袋花生，称出总重量是 50 千克。

终于恶有恶报，他的秘密被聪明的阿凡提知道了，阿凡提让农民存了 24 袋蕃茄和 7 袋花生，然后一起去卖给菜贩。阿凡提执意把货物放在天平臂较长的一侧，由于农民也在场，菜贩不敢说出天平的秘密，只好按阿凡提的办法称，称得总重量是 180 千克。菜贩收了这批菜之后，从此不敢再用假天平骗人了。你能求出菜贩在上面三次交易中亏了多少千克蕃茄，亏了多少千克花生吗？

5. 某项工程打算请甲、乙、丙三队来承包。如果由甲、乙两队承包，2.4 天可以完成，需支付工程款 18000 元；如果由乙、丙两队承包，3.75 天可以完成，需支付工程款 15000 元；如果由甲、丙两队承包， $2\frac{6}{7}$ 天可以完成，需支付工程款 16000 元。现在进行合理分工，要求在一个星期内完工，至少要花费多少工程款？

6. 三轮挎斗摩托车有前、左后和右后三个车轮。如果把轮胎放在前轮可以行驶 45000 千米，如果把轮胎放在左后轮可以行驶 20000 千米。如果把轮胎放在右后轮可以行驶 36000 千米。现有一辆刚刚换上新轮胎的三轮挎斗摩托车，可以在恰当的时候将两个轮胎对换。请问：

(1) 这辆三轮摩托车最多可以行驶几千米而不需要购买新的轮胎？

(2) 在这期间最少需要对换几次轮胎？请说明理由；

(3) 请详细叙述在行驶多少千米之后如何对调这些轮胎。



7. 甲容器有 60% 的酒精溶液 10 升，乙容器有 40% 的酒精溶液 30 升．现在我们以 0.3 升 / 分的速度向甲容器加浓度为 20% 的酒精溶液，同时以 0.5 升 / 分的速度向乙容器加浓度为 60% 的酒精溶液．请问：多少分钟后甲、乙容器内酒精溶液的浓度相同？

8. 如图 13—5 所示，三角形 ABC 是一个以 A 为直角顶点的直角三角形，其中 AB 长 20 米，AC 长 15 米．甲从 A 点出发以 2 米 / 秒的速度不停地在 A、B 之间往返，乙从 C 点出发以 1 米 / 秒的速度不停地在 A、C 之间往返．在某些时刻，甲到达 D 点，乙到达 E 点，四边形 DECB 恰好成为一个梯形．求梯形 DECB 面积的最小值．

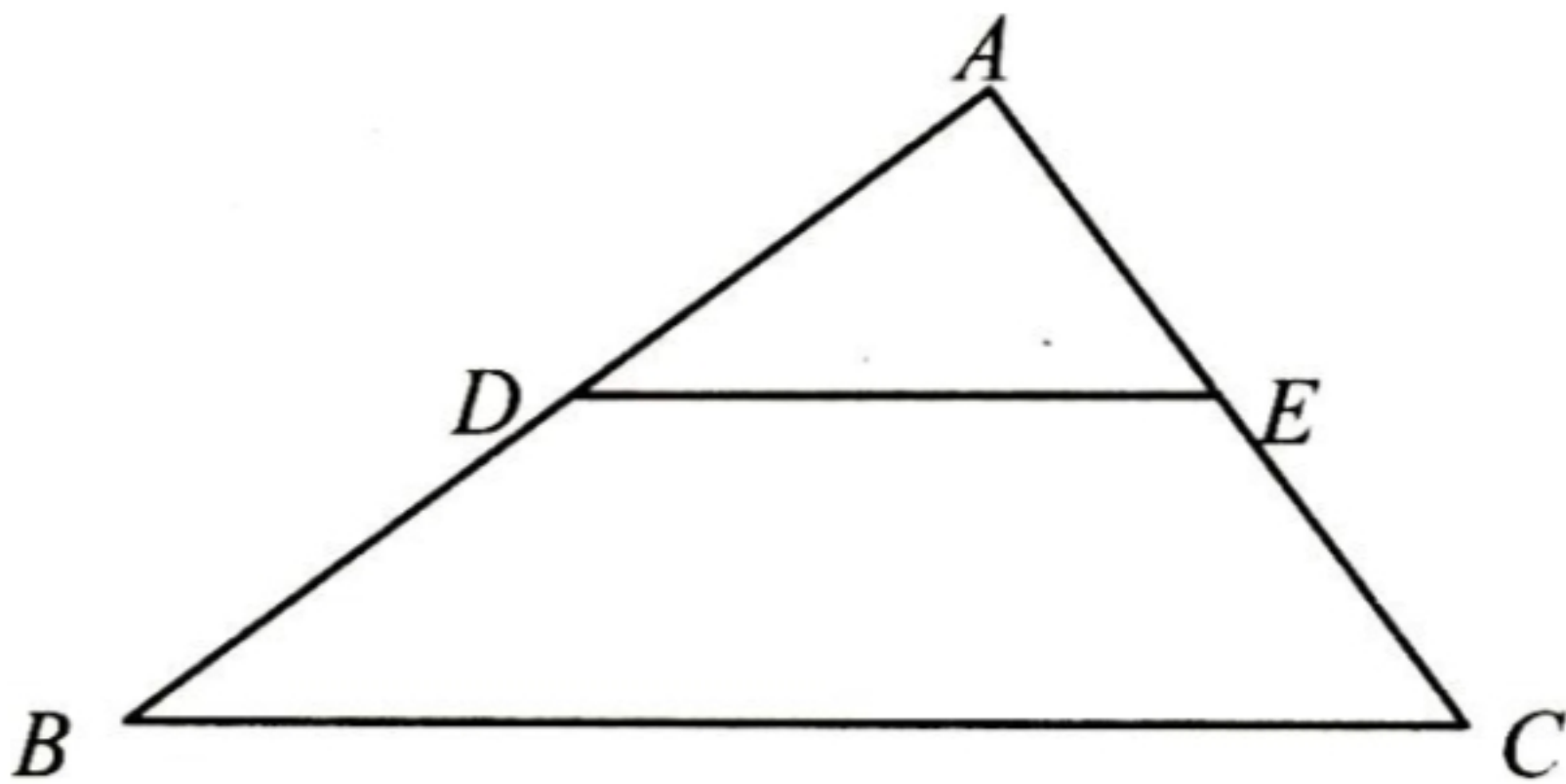


图 13-5



第 14 讲 计数综合（三）

内容概述

建立递推的思想，将问题的复杂情形与简单情形联系起来；学会观察和发现递推关系；利用树形图、列表等方法处理某些递推关系，另外，综合运用各种方法处理与数字相关的复杂计数问题。

典型问题

提高篇

1. 一个楼梯共有 10 级台阶，规定每步可以迈一级台阶或二级台阶。走完这 10 级台阶，一共可以有多少种不同的走法？
2. 小悦买了 10 块巧克力，她每天最少吃一块，最多吃 3 块，直到吃完，共有多少种吃法？
3. 用 1×2 的小方格覆盖 2×7 的长方形，共有多少种不同的覆盖方法？



4. 如果在一个平面上画出 4 条直线，最多可以把平面分成几个部分？如果画 20 条直线，最多可以分成几个部分？

5. 甲、乙、丙三名同学练习传球，每人都可以把球传给另外两个人中的任意一个．先由甲发球，经过 6 次传球后球仍然回到了甲的手中．请问：整个传球过程共有多少种不同的可能？

6. 一个三位数，有相邻两个数字的和为 16，那么这样的三位数共有多少个？

7. 由 1、3、4 组成的各位数字之和为 9 的多位数共有多少个？

8. 一个各位数字互不相等的五位数不含数字 0，且数字和为 18，这样的五位数共有多少个？



9. 一个十位数只含有数字 1 或 2，且不含两个连续的数字 1，一共有多少个这样的十位数？

10. 一个六位数由 1、2、3、4、5 组成，而且任意相邻两个数位的数字之差都是 1，这样的六位数有多少个？

拓展篇

1. 老师给冬冬布置了 12 篇作文，规定他每天至少写 1 篇，如果冬冬每天最多能写 3 篇，那么共有多少种写完作文的方法？

2. 用 10 个 1×3 的长方形纸片覆盖一个 10×3 的方格表，共有多少种覆盖方法？



3. 现有 14 块糖，如果阿奇每天吃奇数块糖，直到吃完，那么阿奇共有多少种吃法？

4. 如果在一个平面上画出 8 条直线，最多可以把平面分成几个部分？如果画 8 个圆，最多可以把平面分成几个部分？

5. 四个人分别穿着红、黄、绿、蓝四种颜色的球衣练习传球，每人都可以把球传给另外三个人中的任意一个。先由红衣人发球，并作为第 1 次传球，经过 8 次传球后球仍然回到红衣人手中。请问：整个传球过程共有多少种不同的可能？

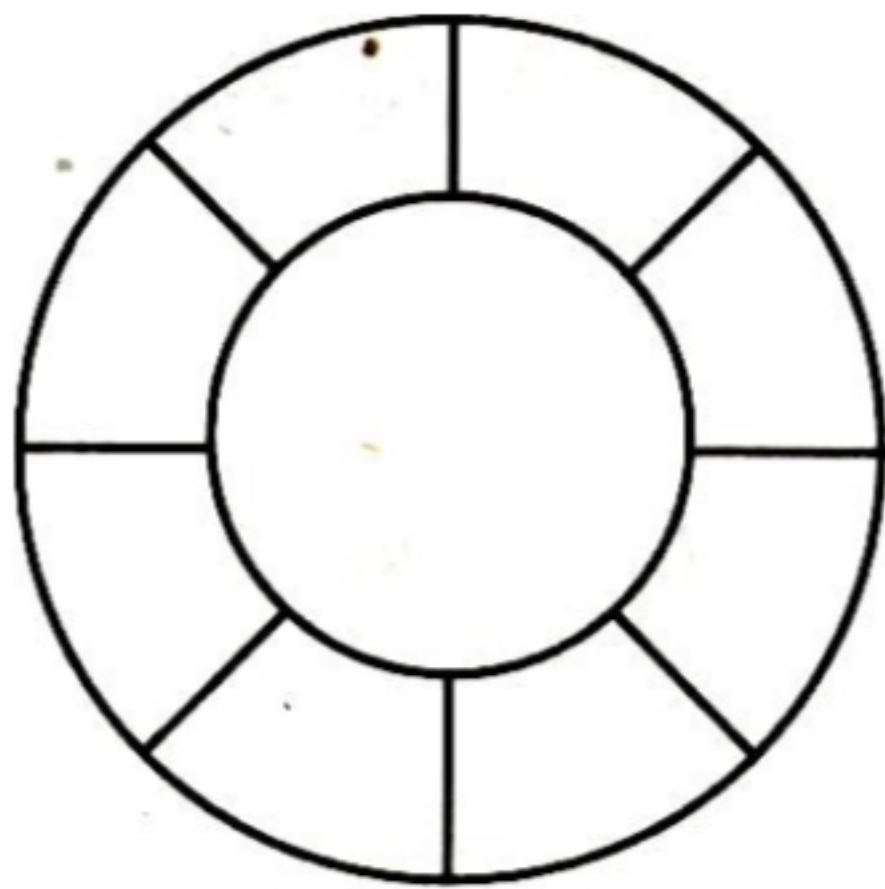


图 14-1

6. 如图 14-1 所示，一个圆环被分成 8 部分，现将每一部分染上红、黄、蓝三种颜色之一，要求相邻两部分颜色不同，共有多少种染色方法？

7. 圆周上有 10 个点 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 以这些点为端点连结 5 条线段，要求任两条线段之间都没有公共点，共有多少种连结方式？



8. 在有些多位数的各位数字中，奇数的个数比偶数的个数多，例如 1370、36712 等。请问：在 1 至 10000 中有多少个这样的多位数？

9. 有些自然数存在相邻的两位数字顺次为 7 和 5，例如 1975、75675 等，但 432579。不算在内。请问：具有这种性质的六位数有多少个？

10. 用 1 至 9 这 9 个数字组成一个没有重复数字的九位数，满足以下要求：每一位上的数字要么大于它前面的所有数字，要么小于它前面的所有数字。请问：这样的九位数共有多少个？

11. 一个七位数，每一位都是 1、2 或者 3，而且没有连续的两个 1，这样的七位数一共有多少个？



12. 满足下面性质的四位数称为“好数”：它的个位比十位大，十位比百位大，百位比千位大，并且任意相邻两位数字的差都不超过 3。例如 1346、2579 是好数，但 1567 就不是好数。请问：一共有多少个好数？

超越篇

1. 一个九位数，它只由数字 1、2 和 3 组成，而且它的任意连续两位数都不等于 12、21、22 或 31，这样的自然数有多少个？如果还要求数字 1、2 和 3 每个数字都至少出现一次，则这样的九位数有多少个？

2. (1)如果在一个平面上画出 8 个三角形，最多可以把平面分成多少个部分？(2)如果在一个平面上画出 3 个四边形、2 个圆、1 条直线，最多可以把平面分成多少个部分？

3. 如图 14—2 所示，阴影部分是一个圆环，4 条直线最多可以把这个阴影分成多少个部分？

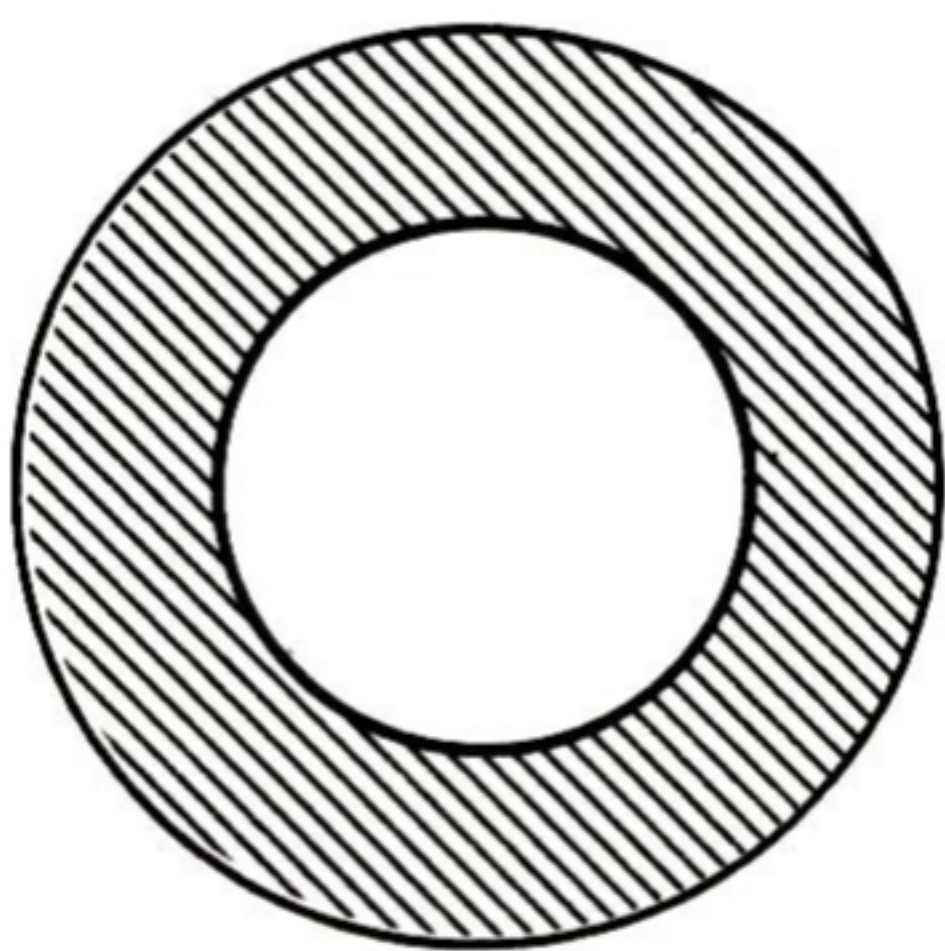


图 14-2

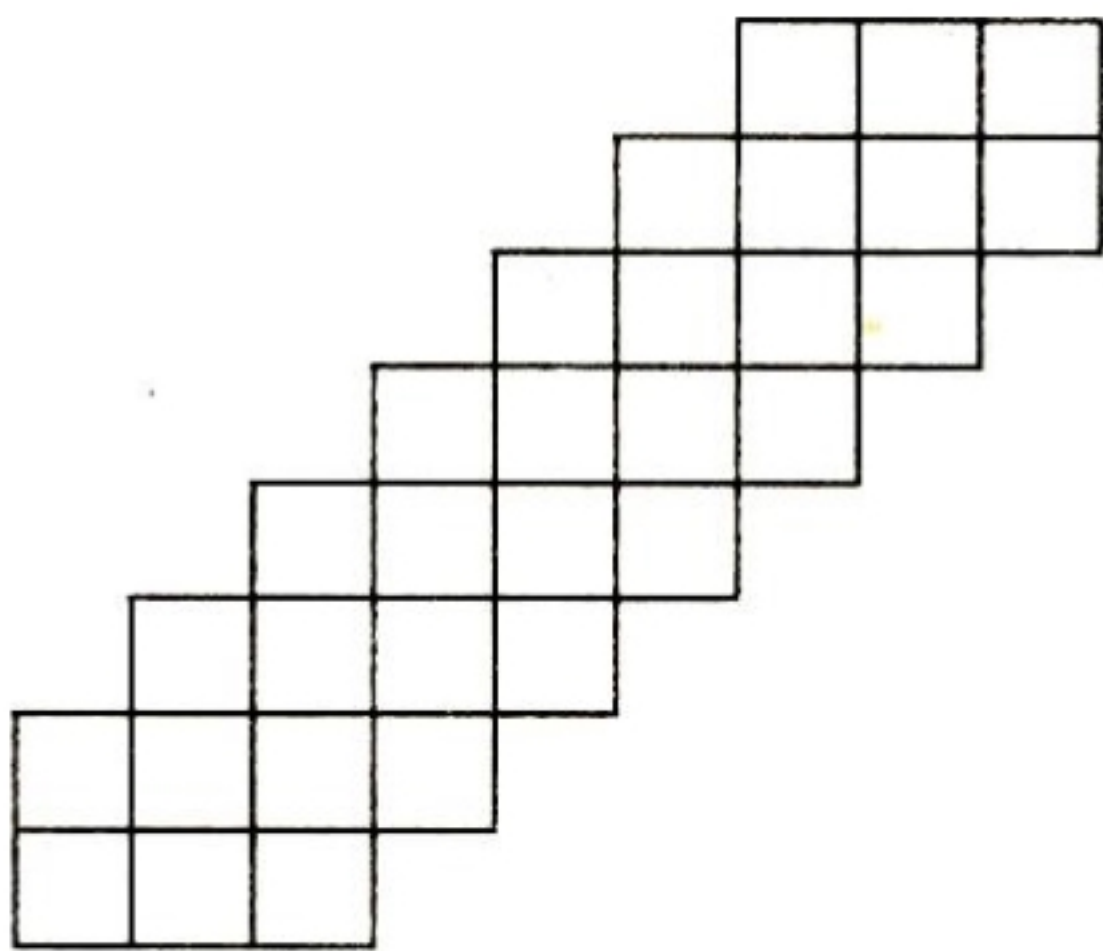


图 14-3



4. 用 15 个 1×2 的小纸片覆盖图 14—3，共有多少种不同的覆盖方法？

5. 对一个自然数作如下操作：如果是偶数则除以 2，如果是奇数则加 1，如此进行下去直到得数为 1 操作停止．问：经过 9 次操作变为 1 的数有多少个？

6. 用 4 种不同的颜色将图 14—4 中的圆圈分别涂色，要求有线段连结的两个相邻的圆圈必须涂不同的颜色，共有多少种涂法？(不允许旋转、翻转图 14—4)

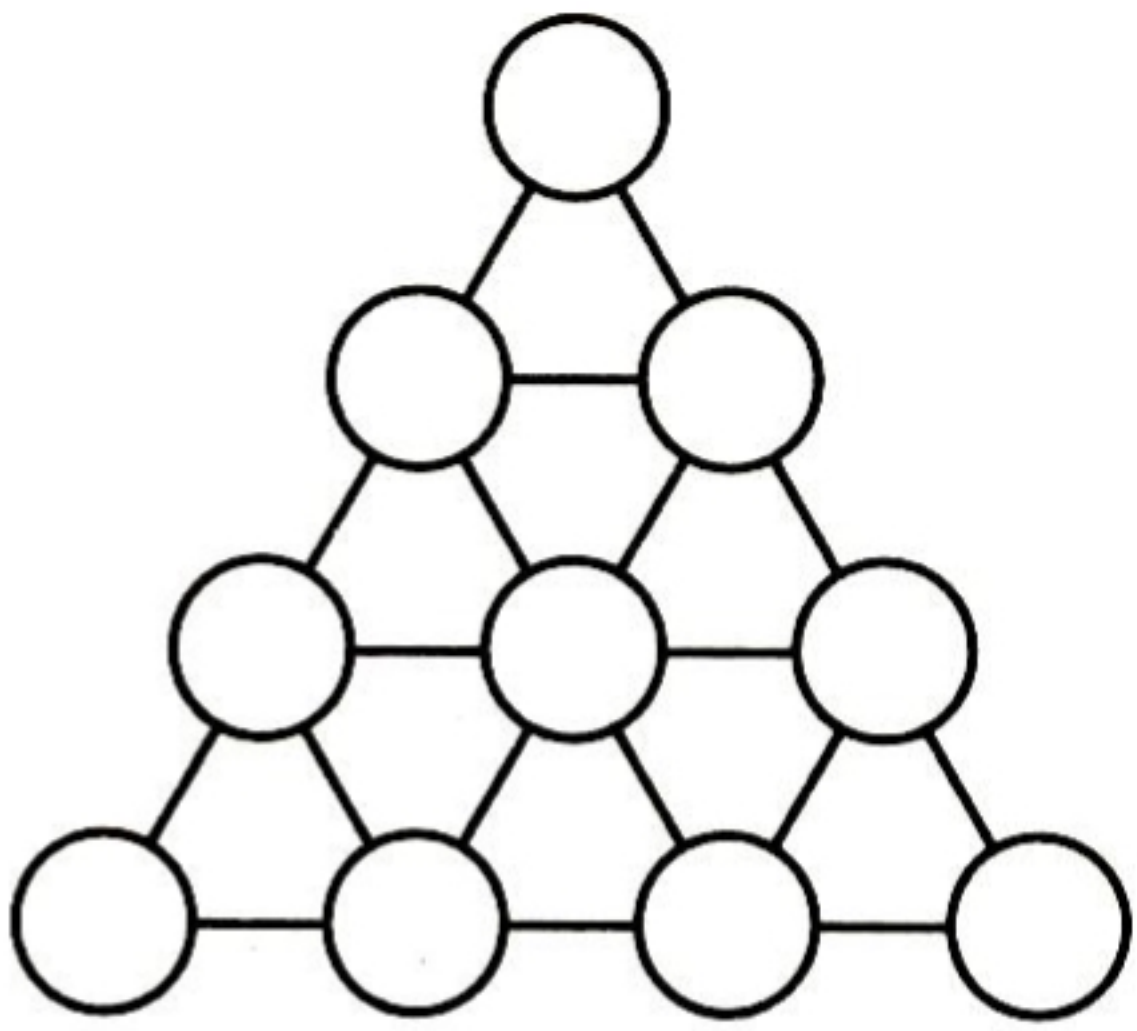


图 14-4

7. 圆周上有 15 个点 $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ ，以这些点为顶点连出 5 个三角形，要求任意两个三角形没有公共点，共有多少种连结方式？

8. 有一年级到六年级的同学各一人，排成一列领取糖果．如果一个高年级的同学站在一个低年级的同学



前面，那么这个低年级的同学就会产生一次“怨言”（一个人可以有多次“怨言”）。在一种排列顺序里，我们把所有“怨言”的总数叫“怨言数”。例如：六位同学按下面的顺序排列：一年级、四年级、三年级、二年级、六年级、五年级，那么这六位同学产生的“怨言”次数依次为 0、0、1、2、0、1，这种排列的“怨言数”就是 4。请问：有多少种“怨言数”为 7 的排列顺序？

第 15 讲 几何综合（二）

内容概述

综合运用各种方法处理具有相当难度的几何问题。掌握几何变换的初步技巧，例如平移、翻转、旋转等，必要时可利用辅助线进行分析。

典型问题

提高篇

1. 图 15-1 中有半径分别为 5 厘米、4 厘米、3 厘米的三个圆，A 部分（即两小圆重叠部分）的面积与阴影部分的面积相比，哪个大？大多少？

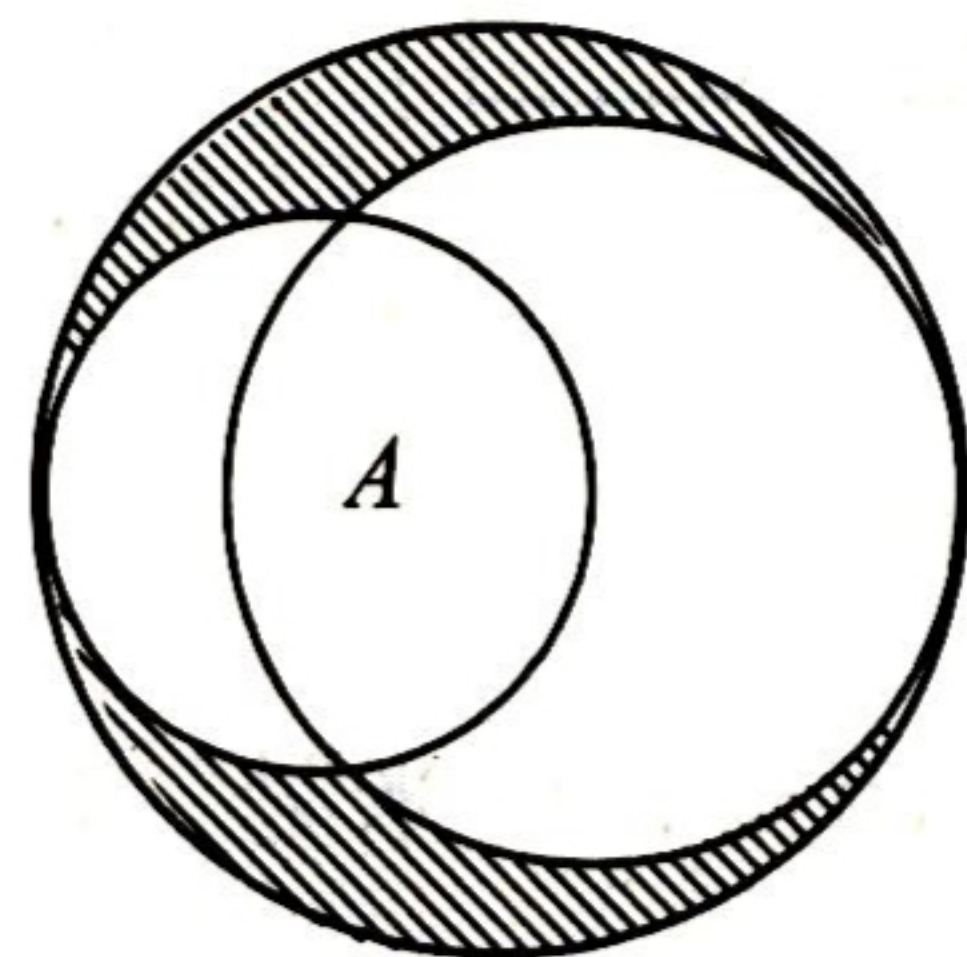


图 15-1

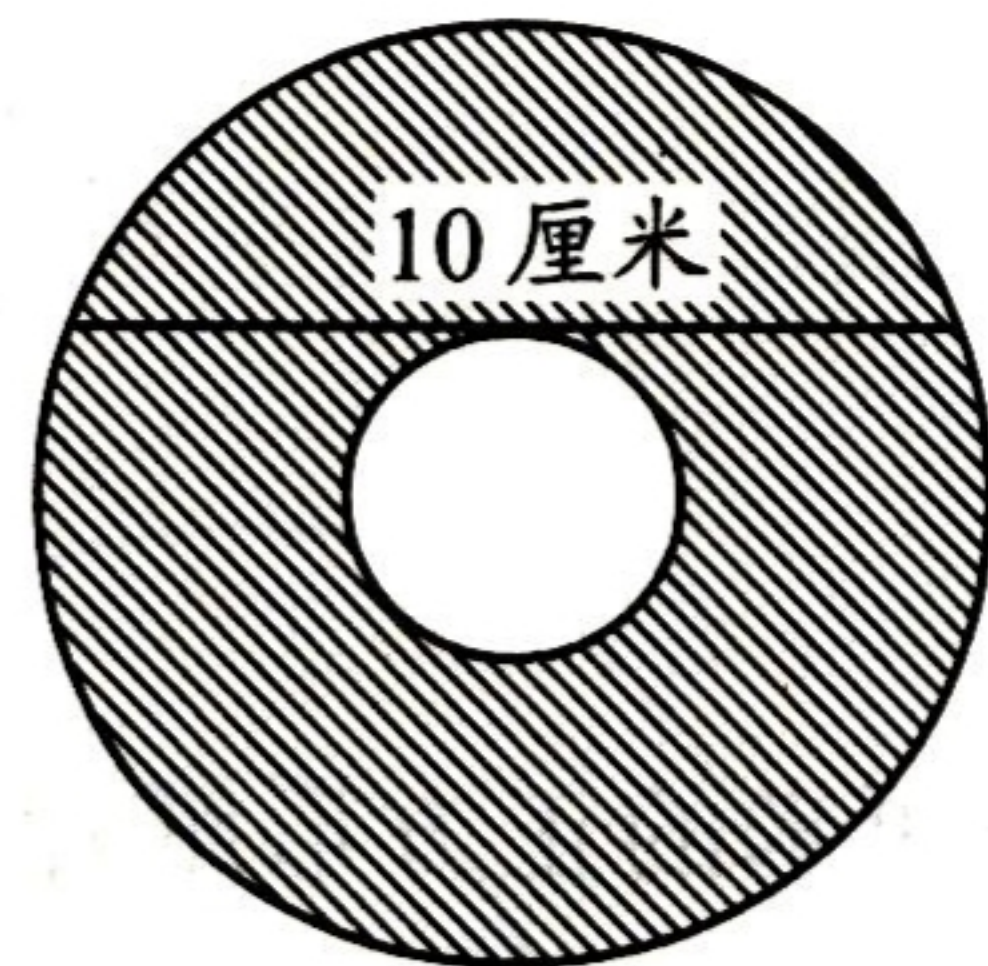


图 15-2

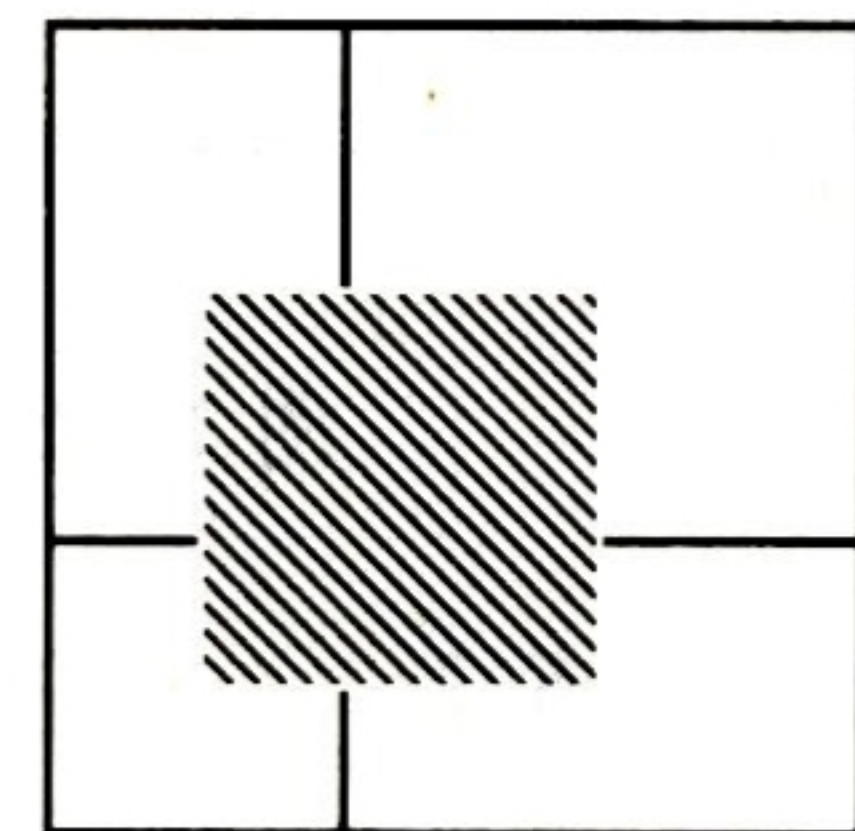


图 15-3

2. 如图 15-2，在两个同心圆上有一条两端点都在大圆上的线段与小圆相切，其长度为 10 厘米。求阴影部分的面积。（ π 取 3.14）



3. 如图 15-3，大正方形中有三个小正方形，右上角正方形的面积为 27，左下角正方形的面积为 12，中间阴影正方形的 2 个顶点分别位于右上角和左下角正方形的中心． 请问：中间阴影正方形的面积是多少？

4. 如图 15-4，将一个梯形分成四个三角形，其中两个三角形的面积分别为 10 与 12.已知梯形的上底长度是下底的 $\frac{2}{3}$ ． 请问：阴影部分的总面积是多少？

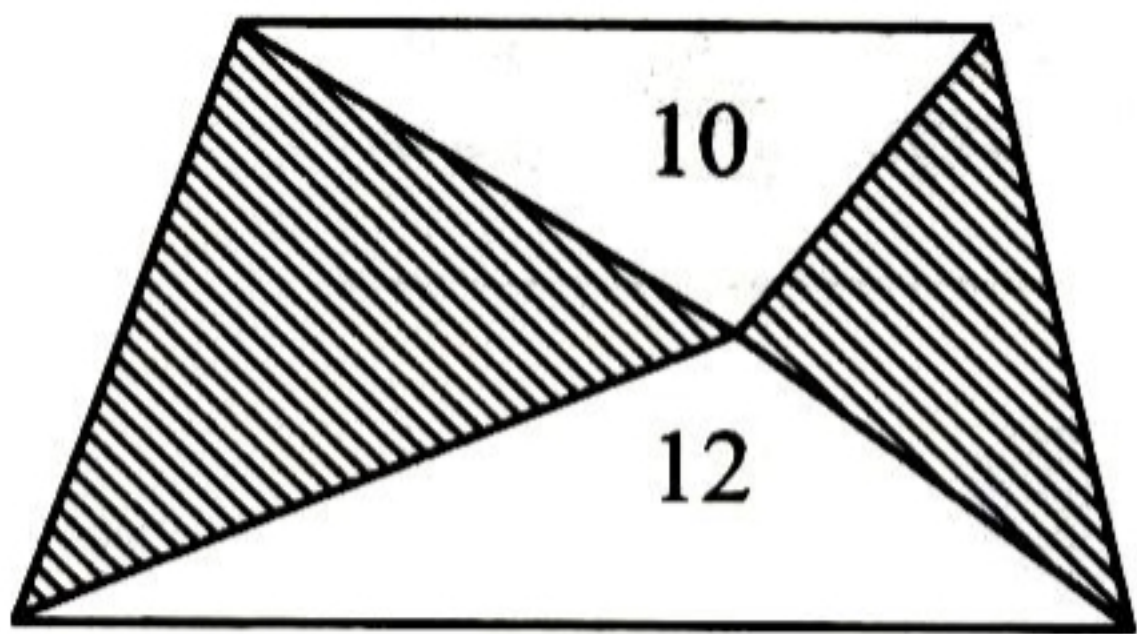


图 15-4

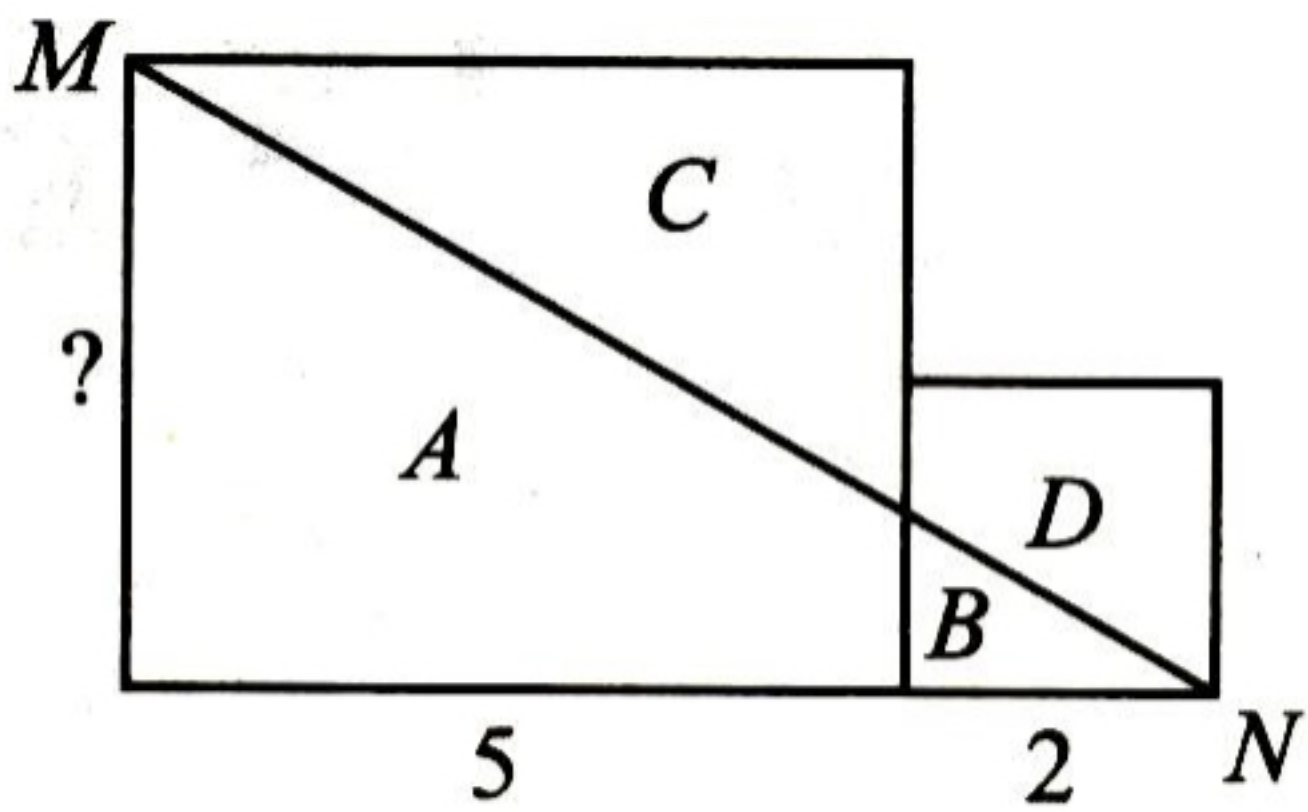
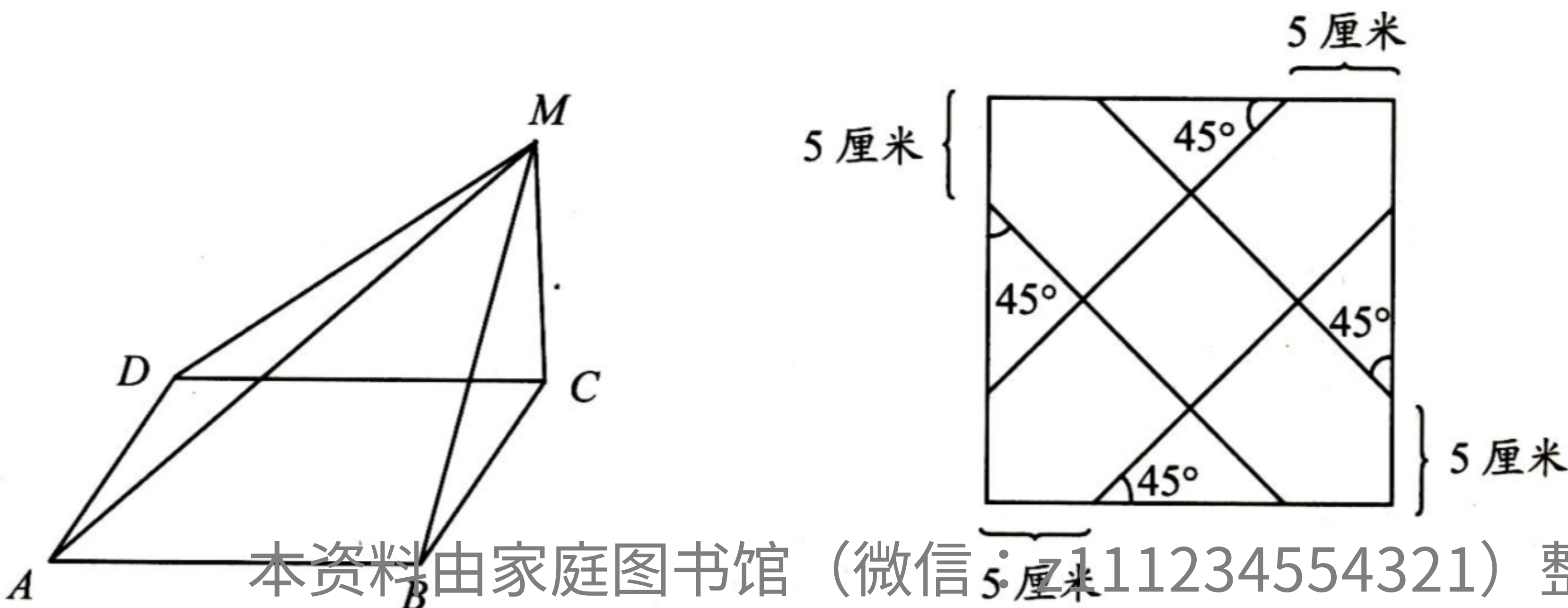


图 15-5

5. 图 15-5 是由一个边长为 2 厘米的正方形和一个长为 5 厘米的长方形拼成的，线段 MN 把它们各分成两部分，已知 A、B 两块的面积和是 C、D 两块面积和的 1.5 倍． 请问：长方形的宽是多少厘米？

6. 图 15-6 中四边形 ABCD 为平行四边形，三角形 MAB 的面积为 11 平方厘米，三角形 MCD 的面积为 5 平方厘米． 请问：平行四边形 ABCD 的面积是多少平方厘米？



7. 如图 15-7，一张边长为 18 厘米的正方形纸片，从距离四角 5 厘米处，用剪刀剪出 45° 的角度，纸片中间会形成一个小正方形，这个小正方形的面积是多少平方厘米？

8. 如图 15-8 所示，平行四边形 $ABED$ 与平行四边形 $AFCD$ 的面积都是 30 平方厘米．其中 AF 垂直于 ED ， AO 、 OD 、 AD 分别长 3、4、5 厘米．求三角形 OEF 的面积和周长．

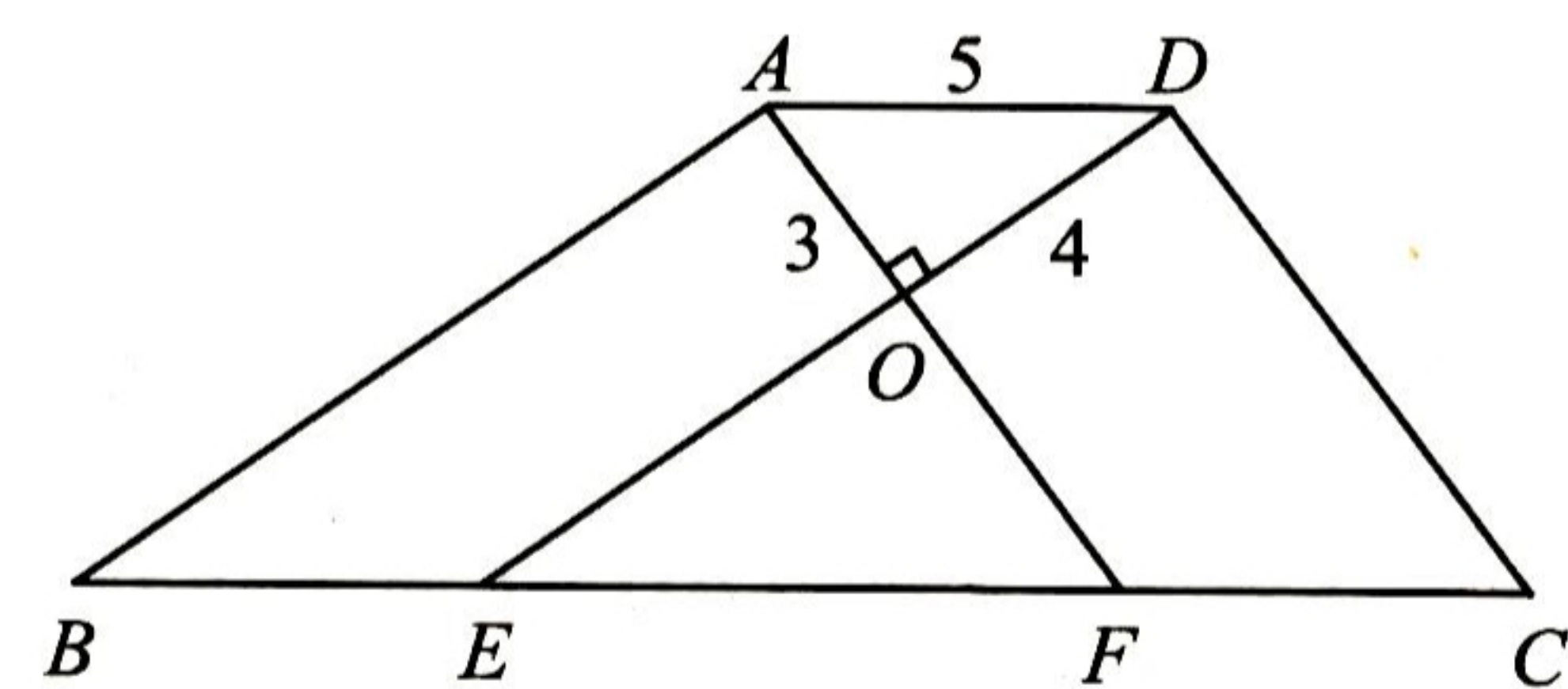


图 15-8

9. 如图 15-9. $ABCD$ 是直角梯形， $AB = 4$ ， $AD = 5$ ， $DE = 3$.求： (1)三角形 OBC 的面积；(2)梯形 $ABCD$ 的面积.

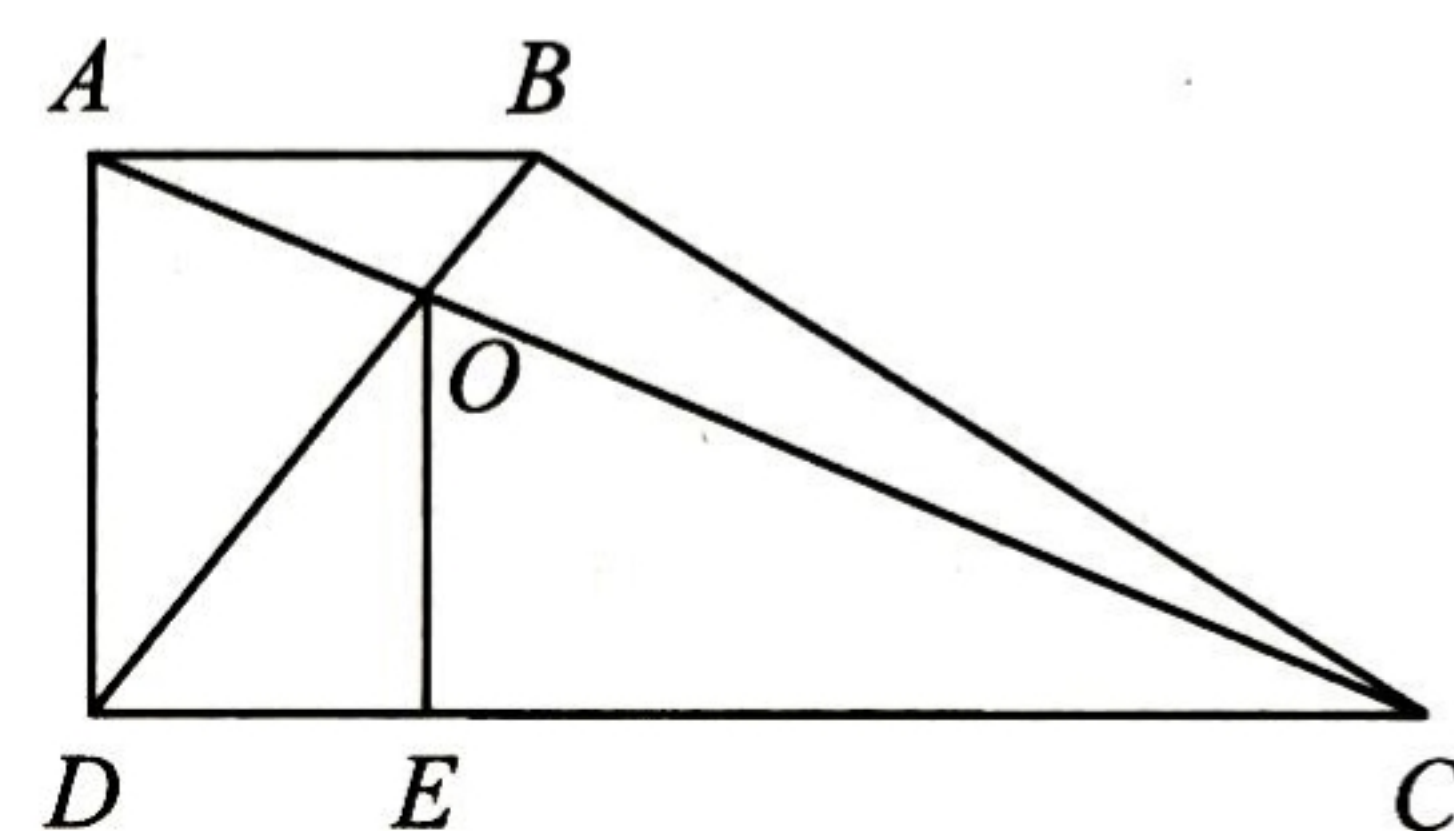


图 15-9

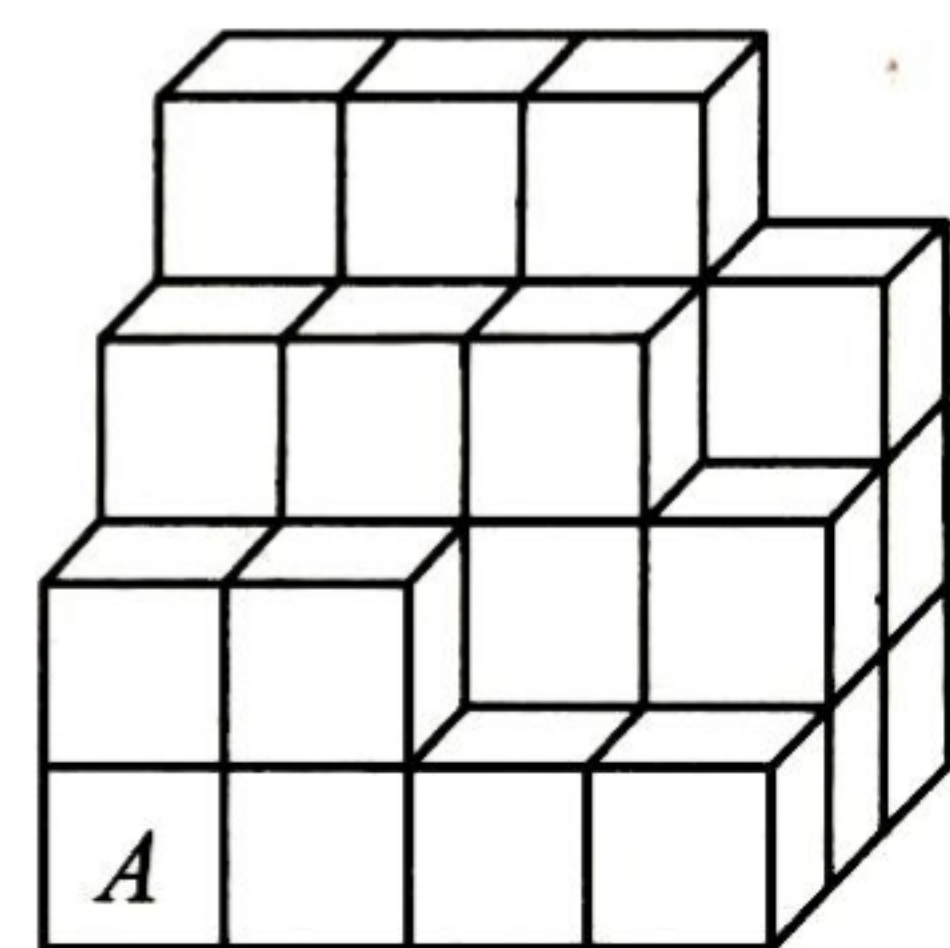


图 15-10



10. 有一些黑、白两种颜色的小正体积木，把它们摆成如图 15-10 所示的形状．已知相邻的积木颜色不同（有公共面的两块积木叫做相邻的积木），标有 A 的积木为黑色．图中共有黑色积木多少块？

拓展篇

1. 如图 15-11，正方形 ABCD 的面积是 64 平方厘米，E、F 分别为所在半圆弧的中点．求阴影部分的面积．（ π 取 3.14）

2. 图 15-12 中，阴影部分的面积是 25 平方厘米，求圆环的面积．（ π 取 3.14）

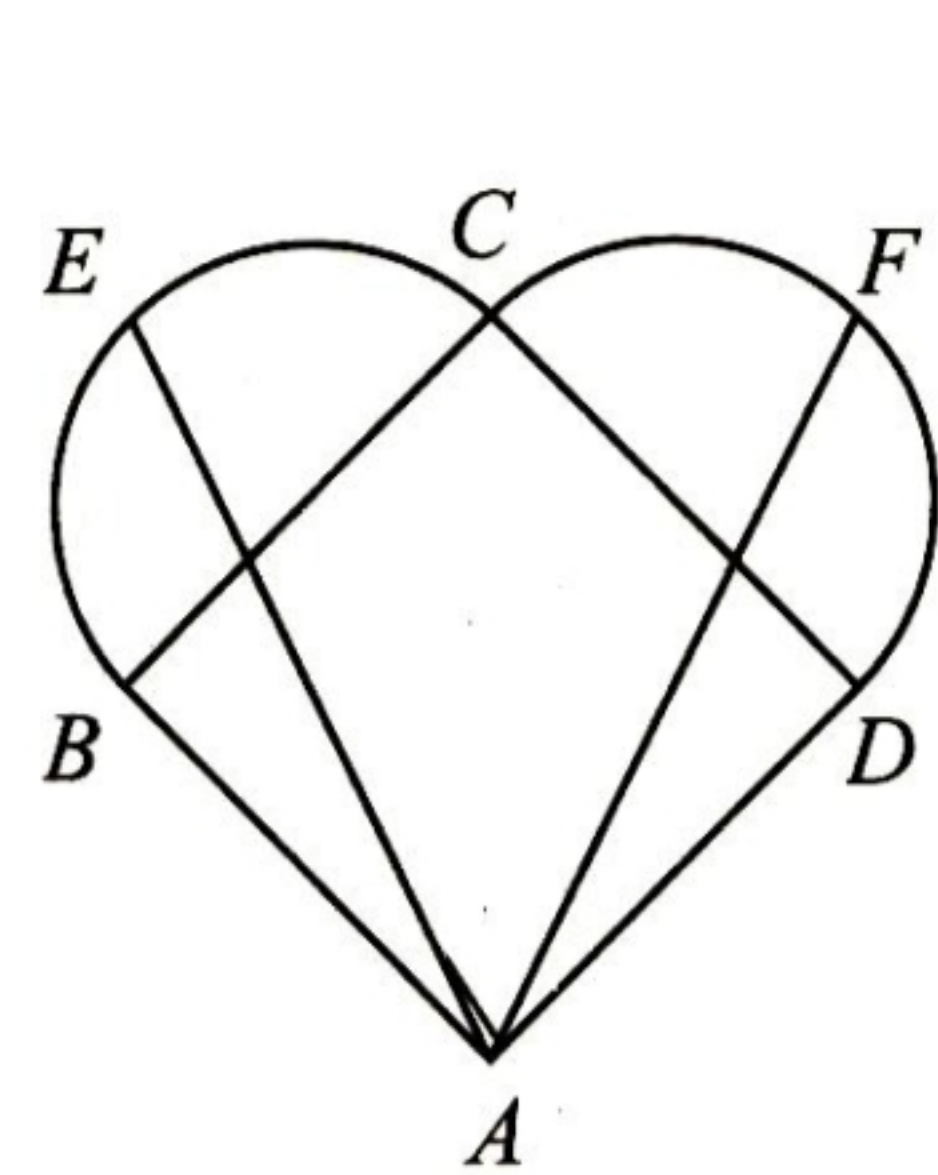


图 15-11

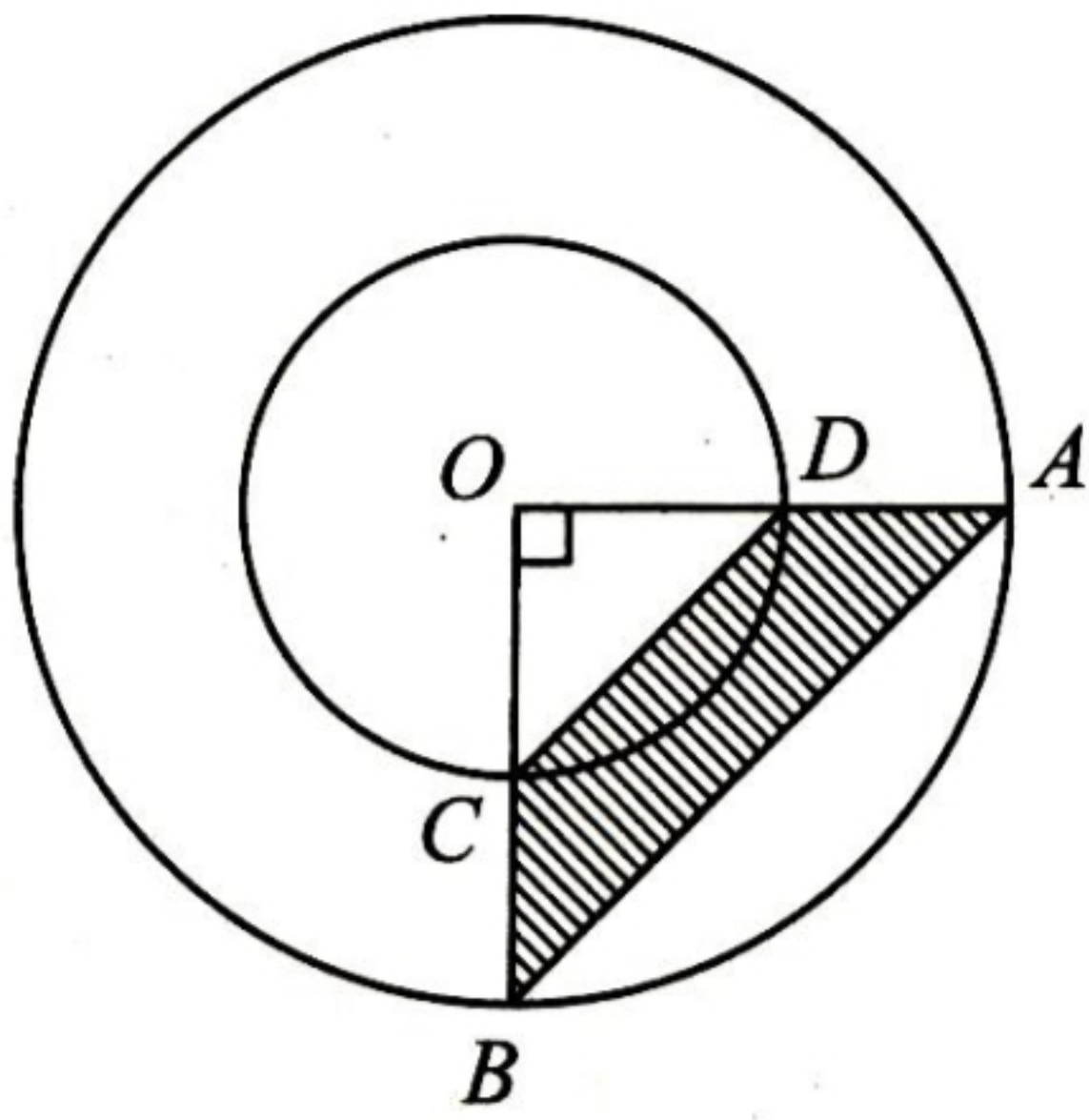


图 15-12

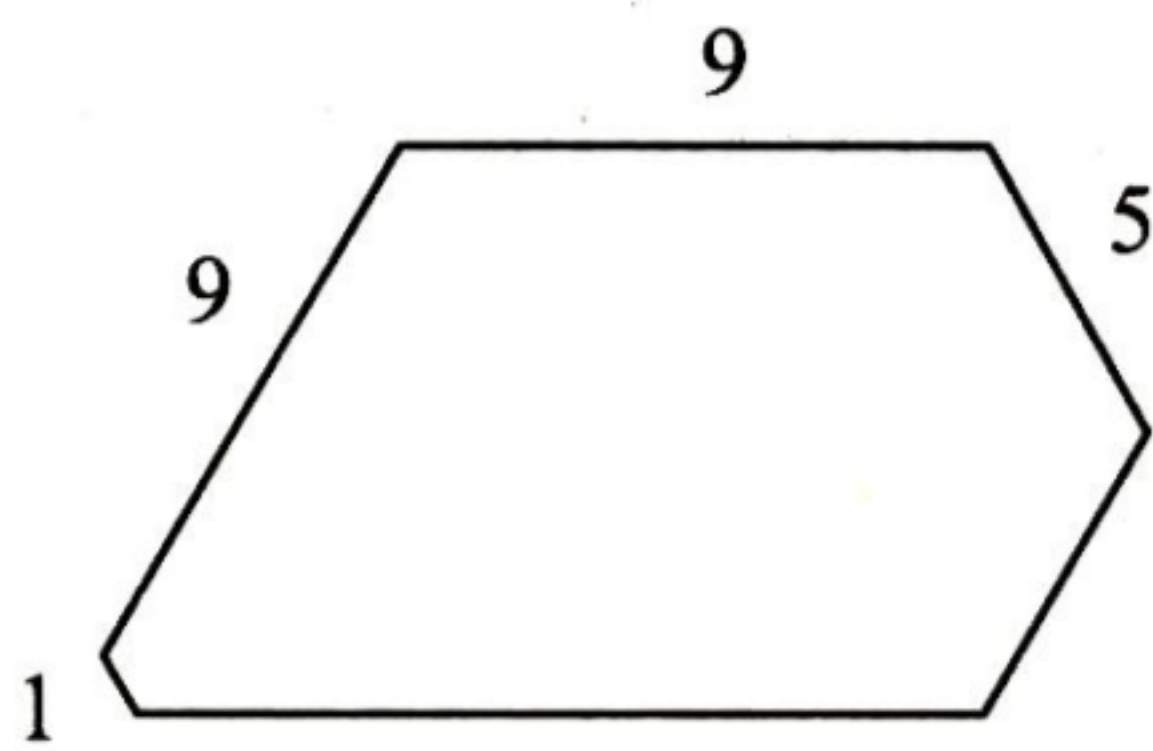


图 15-13

3. 如图 15-13，一个六边形的 6 个内角都是 120° ，其连续四边的长依次是 1 厘米、9 厘米、9 厘米、5 厘米．求这个六边形的周长．

4. 如图 15-14, 在长方形 ABCD 中, AB= 30 厘米, BC= 40 厘米, P 为 BC 上一点, PQ 垂直于 AC, PR 垂直于 BD.求 PQ 与 PR 的长度之和.

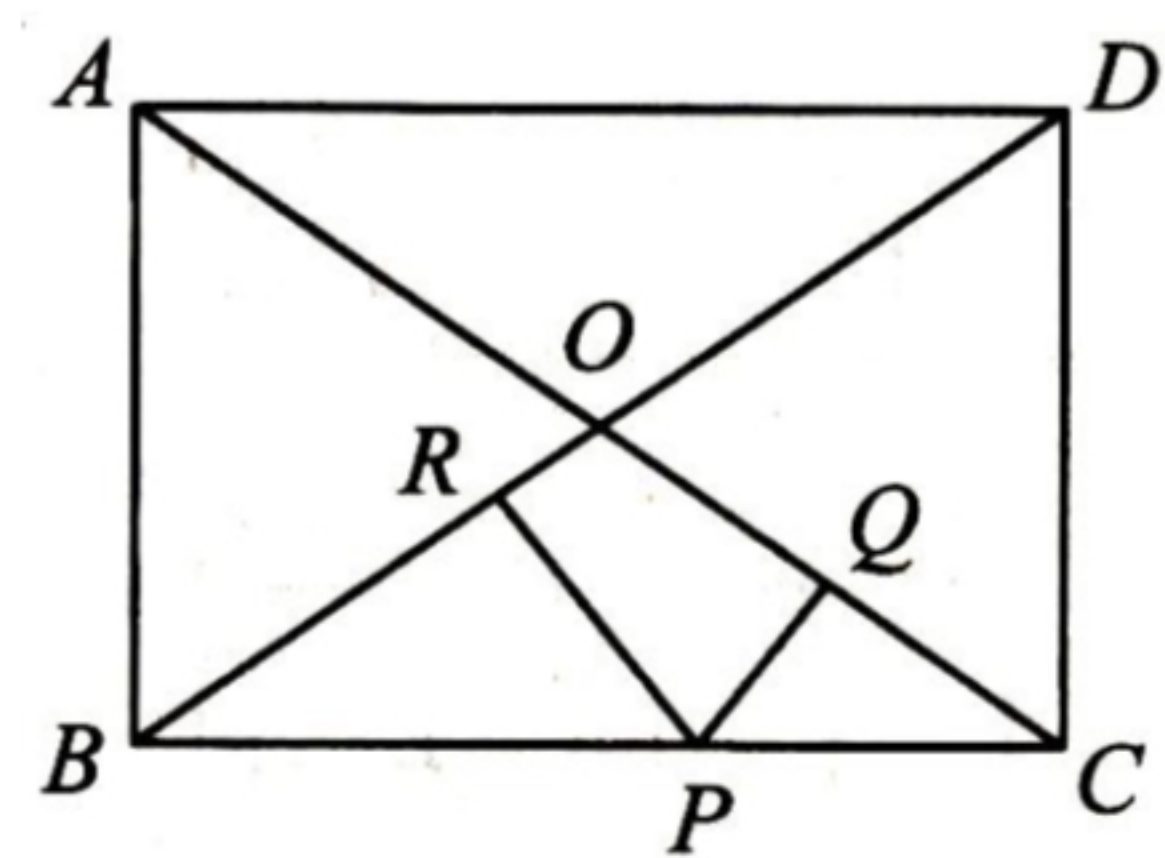


图 15-14

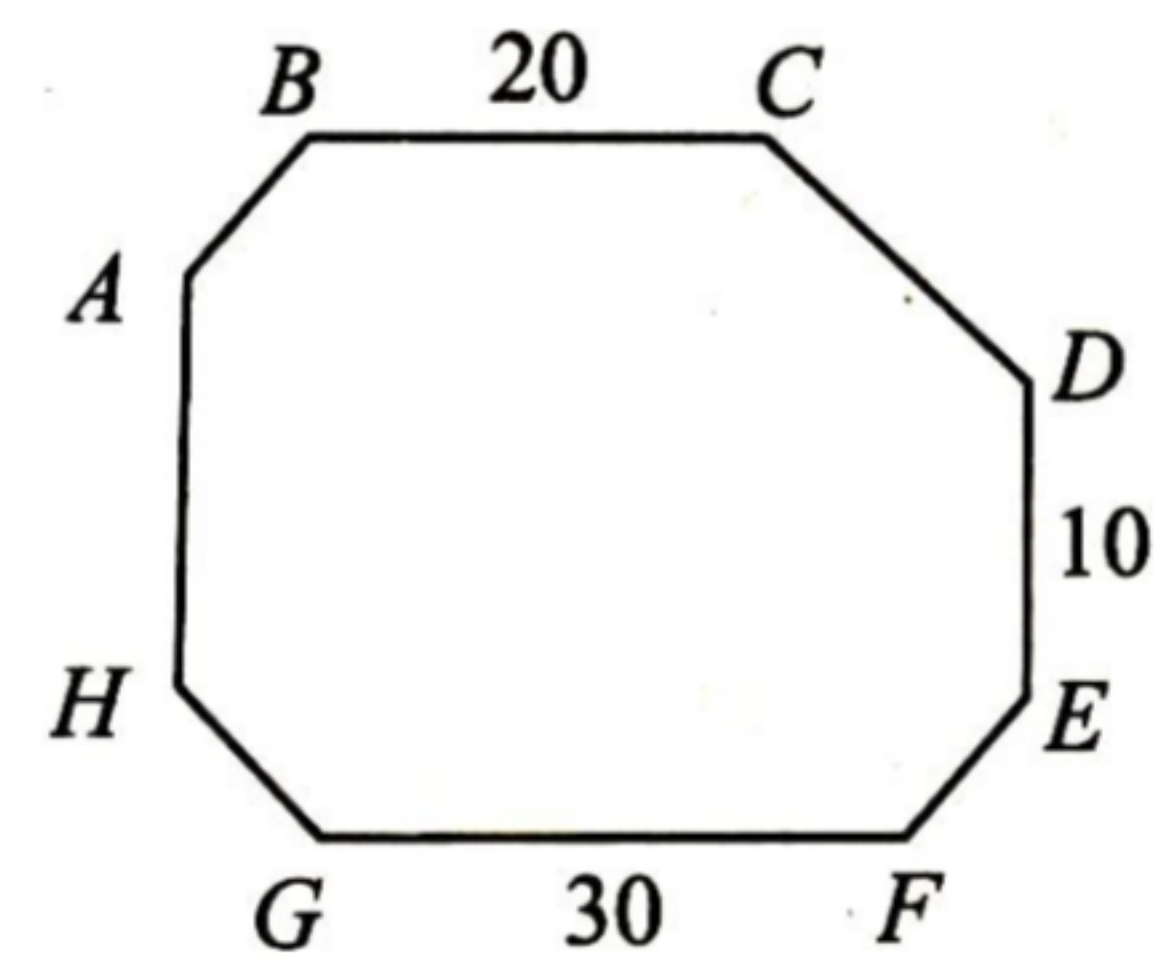


图 15-15

5. 如图 15-15, 八边形的 8 个内角都是 135° , 已知 AB=EF, BC=20, DE=10, FG= 30, 求 AH 的长度.

6. 如图 15-16, 已知 CD=5, DE =7, EF= 15, FG =6.直线 AB 将图形分成两部分, 左边部分面积是 38, 右边部分面积是 65.请问: 三角形 ADG 的面积是多少?

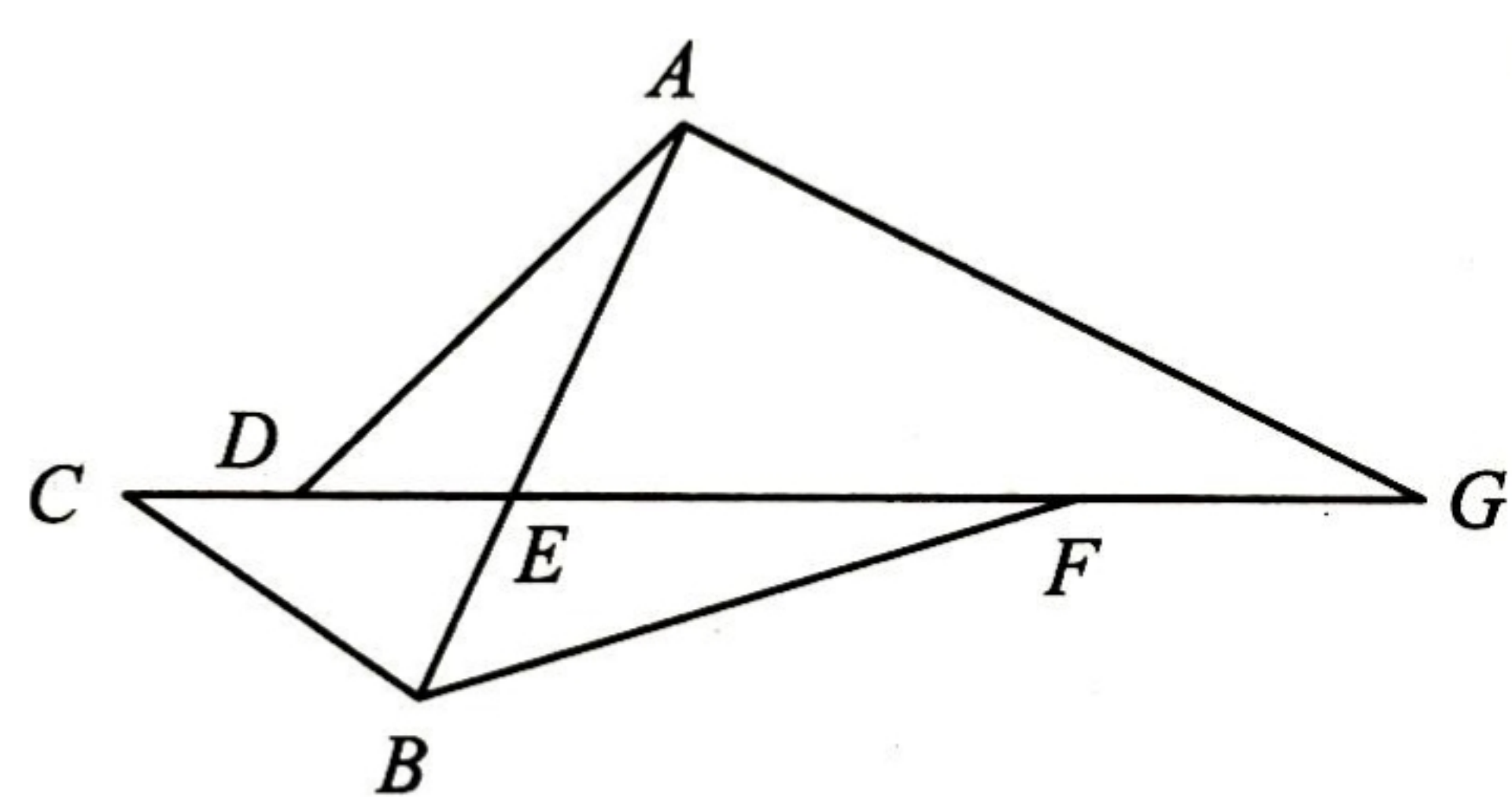


图 15-16

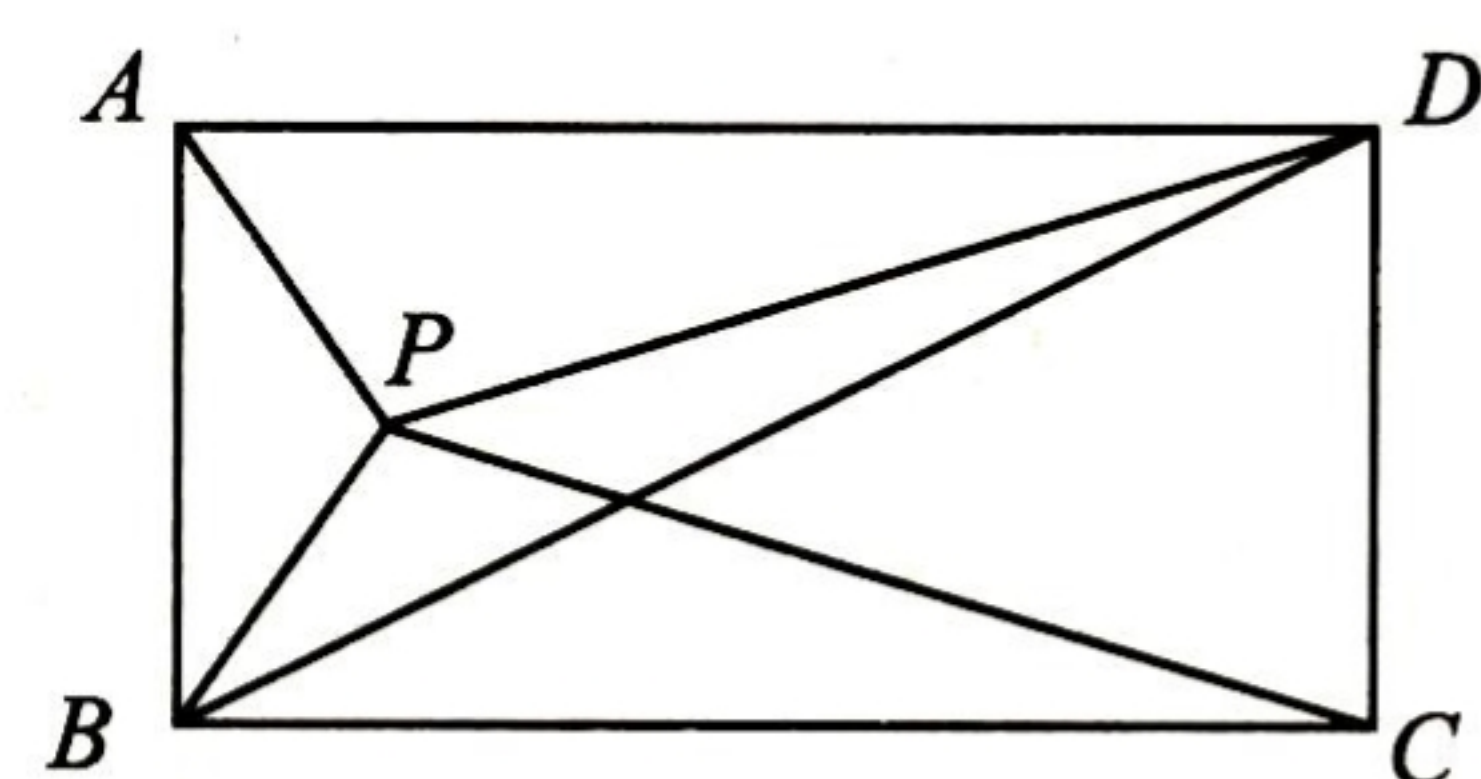


图 15-17

7. 如图 15-17 所示，P 为长方形 ABCD 内的一点．三角形 PAB 的面积为 5，三角形 PBC 的面积为 13．请问：三角形 PBD 的面积是多少？

8. 如图 15-18，四边形 ABCD 是一个长方形，AC 是对角线，试比较两块阴影区域 S_1 ，与 S_2 的面积大小．

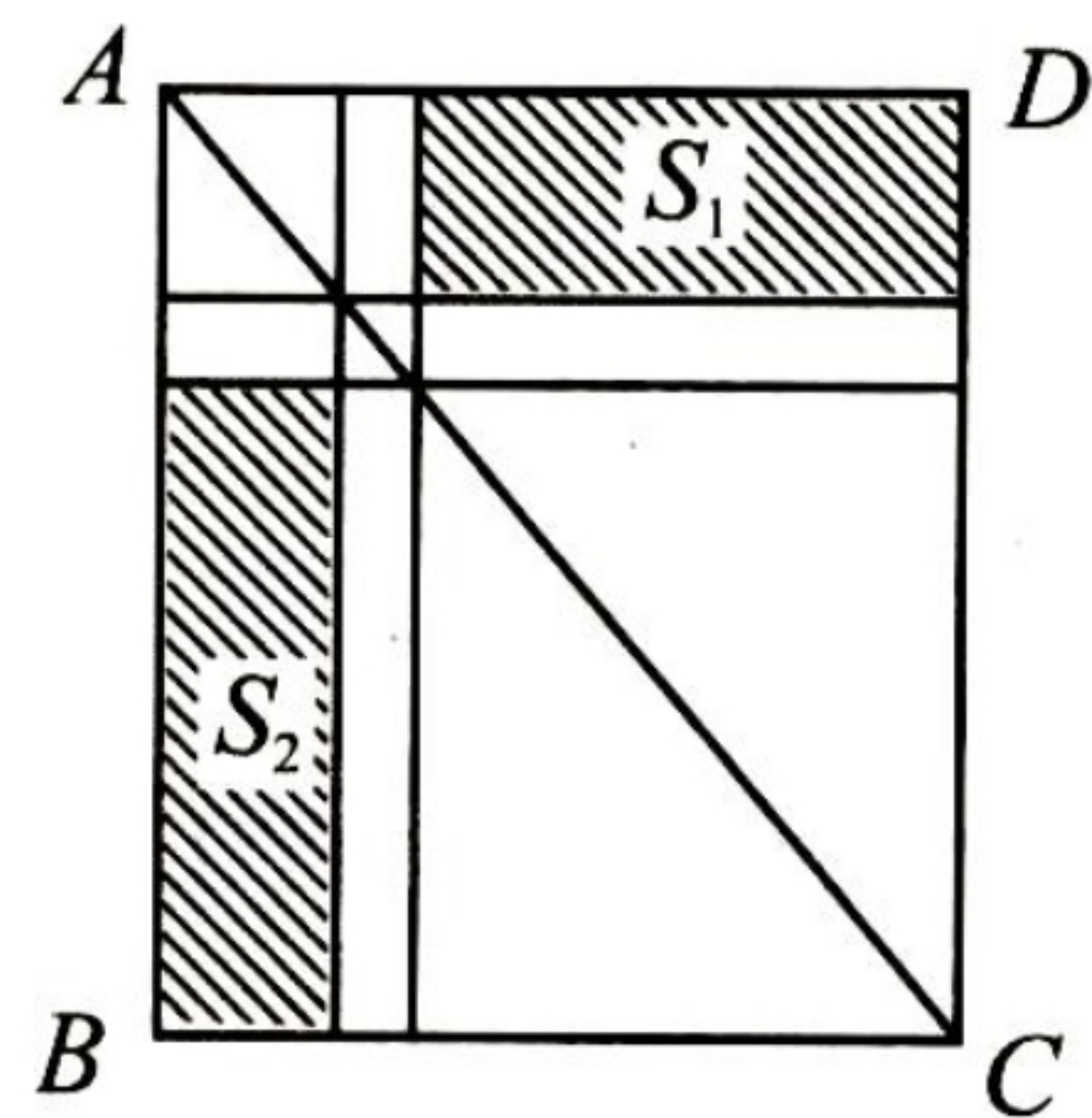


图 15-18

9. 如图 15-19 所示，一块半径为 2 厘米的圆板，从位置①起始，依次沿线段 AB、BC、CD 滚到位置②．如果 AB、BC、CD 的长都是 20 厘米，那么圆板经过区域的面积是多少平方厘米？（ π 取 3.14，答案保留两位小数．）

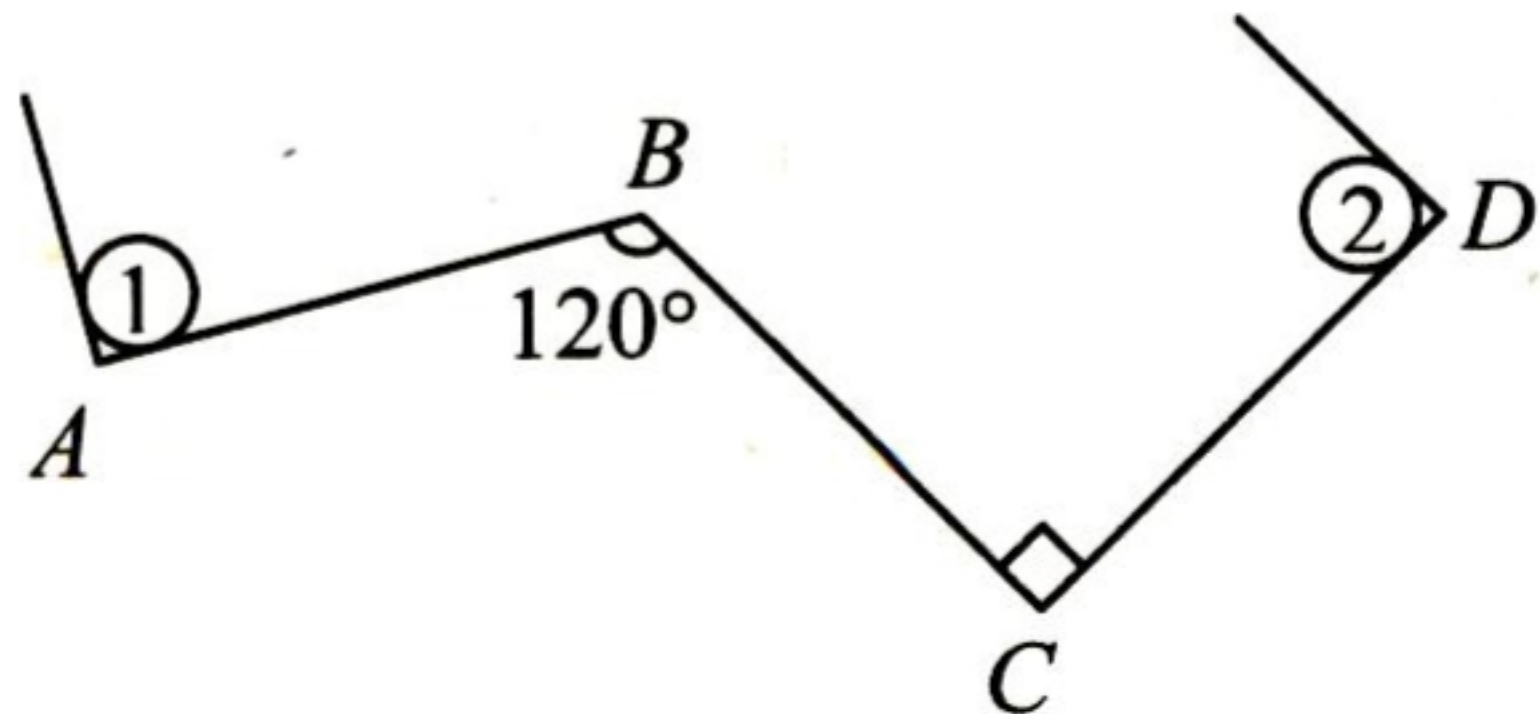


图 15-19

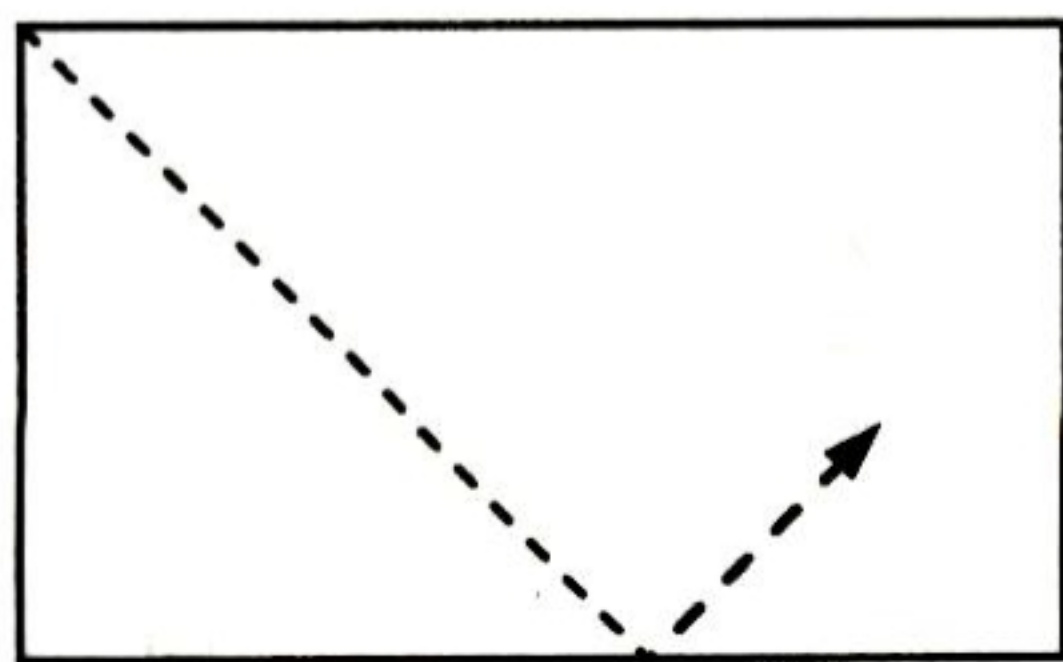


图 15-20



10. 如图 15-20，有一块长 5 厘米，宽 3 厘米的长方形木盘，先从某个顶点处沿 45° 方向打出一个小球，球碰到盘壁之后又沿 45° 方向弹出，当再次碰到盘壁时，仍沿 45° 方向弹出，如此继续，请问：当球再次碰到某个顶点之前它共碰壁几次？

11. 图 15-21 是一个 $5\times5\times5$ 的正方体，将其表面全部涂上红色，再分割成 $1\times1\times1$ 的小正方体．取出全部至少有一个面是红色的小正方体，组成表面全部是红色的实心长方体．求可以组成的长方体的最大体积．

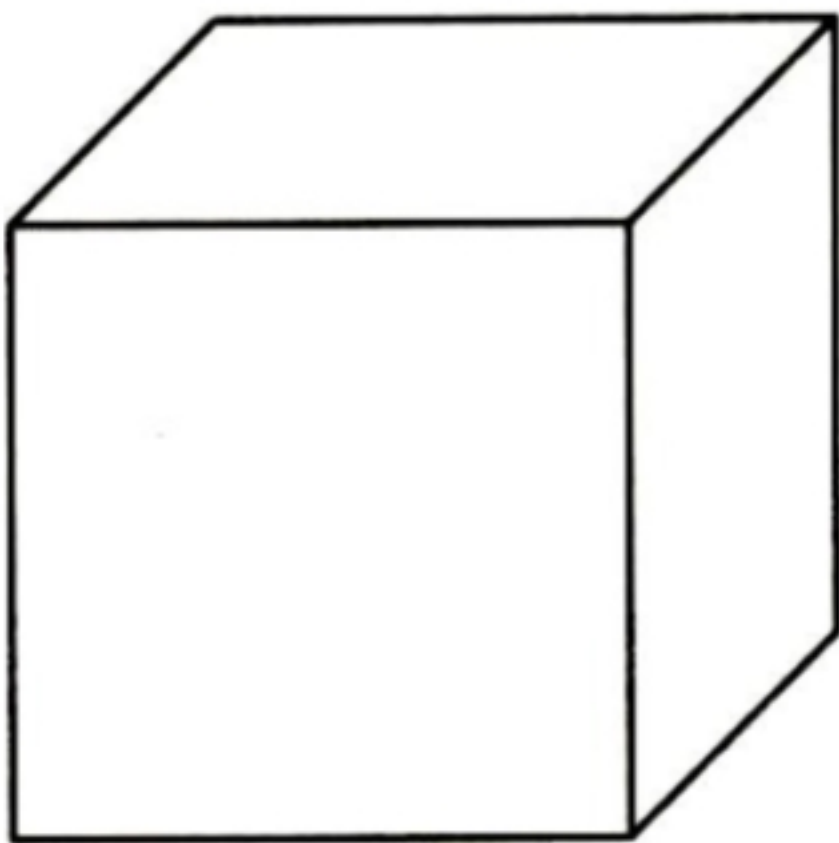


图 15-21

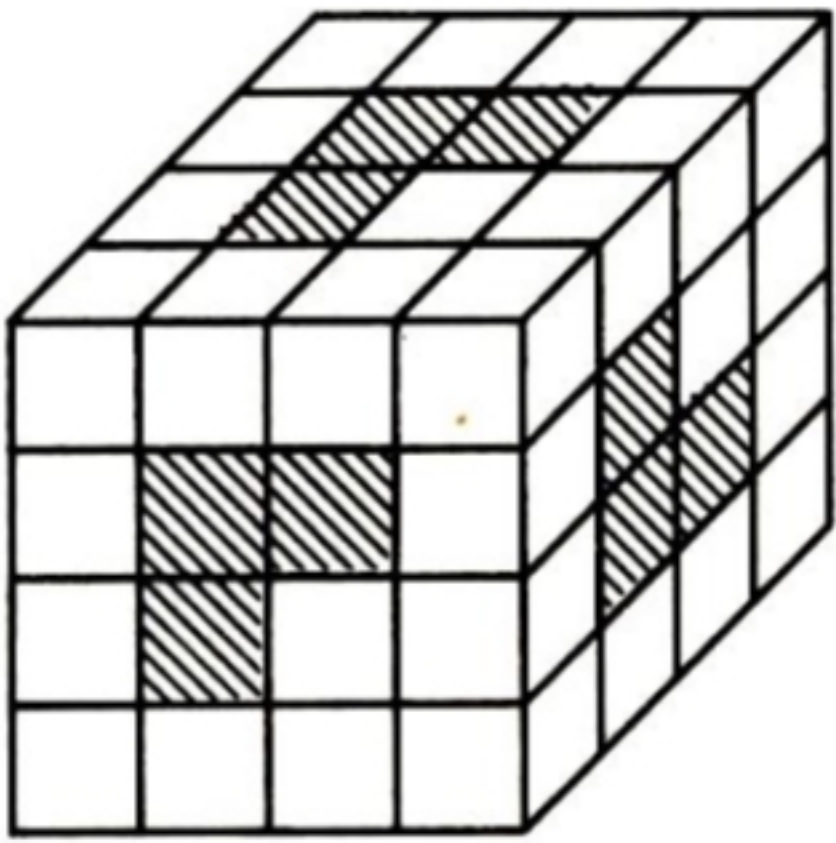


图 15-22

12. 图 15-22 是由若干个小正方体组成的．阴影部分是空缺的通道，一直通到对面．问：这个立体图形由多少个小正方体组成？

超越篇

1. 如图 15:23，四边形 CDEF 是正方形．四边形 ABCD 是等腰梯形，它的上底 AD=4 厘米，下底 BC =8 厘米．求三角形 ADE 的面积．

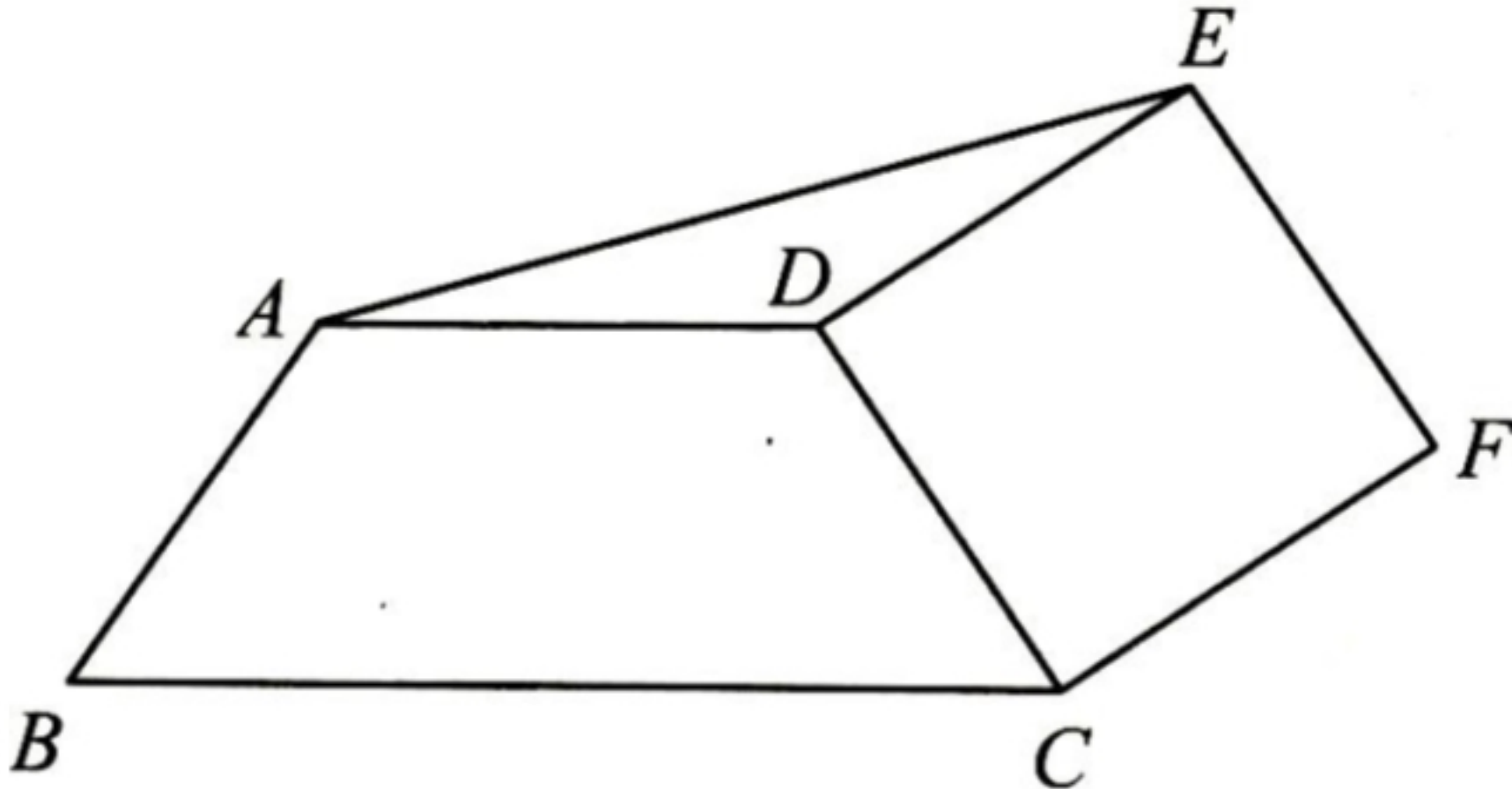


图 15-23

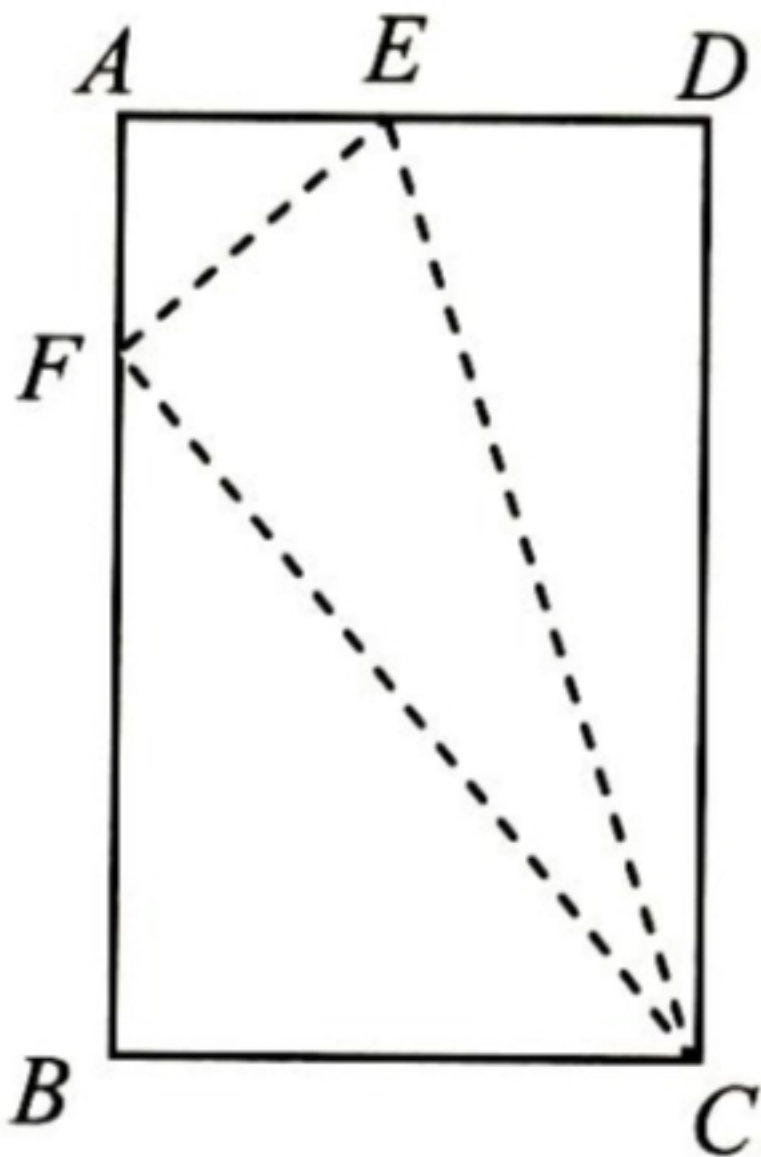


图 15-24

2. 如图 15-24, 把长方形 ABCD 的一个角折起来, 使得 D 点恰好与 AB 重合于 F. 已知 F 点是 AB 边上最靠近 A 的五等分点, 且 AF=1. 请问: 三角形 EDC 的面积等于多少?

3. 如图 15 -25, 在四边形 ABCD 中, AB= 30, AD= 48, BC=14, 且 $\angle ABD + \angle BDC = 90^\circ$, $\angle ADB + \angle DBC = 90^\circ$. 请问: 四边形 ABCD 的面积是多少?

4. 图 15-26 中外侧的四边形是一个边长为 10 厘米的正方形, 求阴影部分的面积.

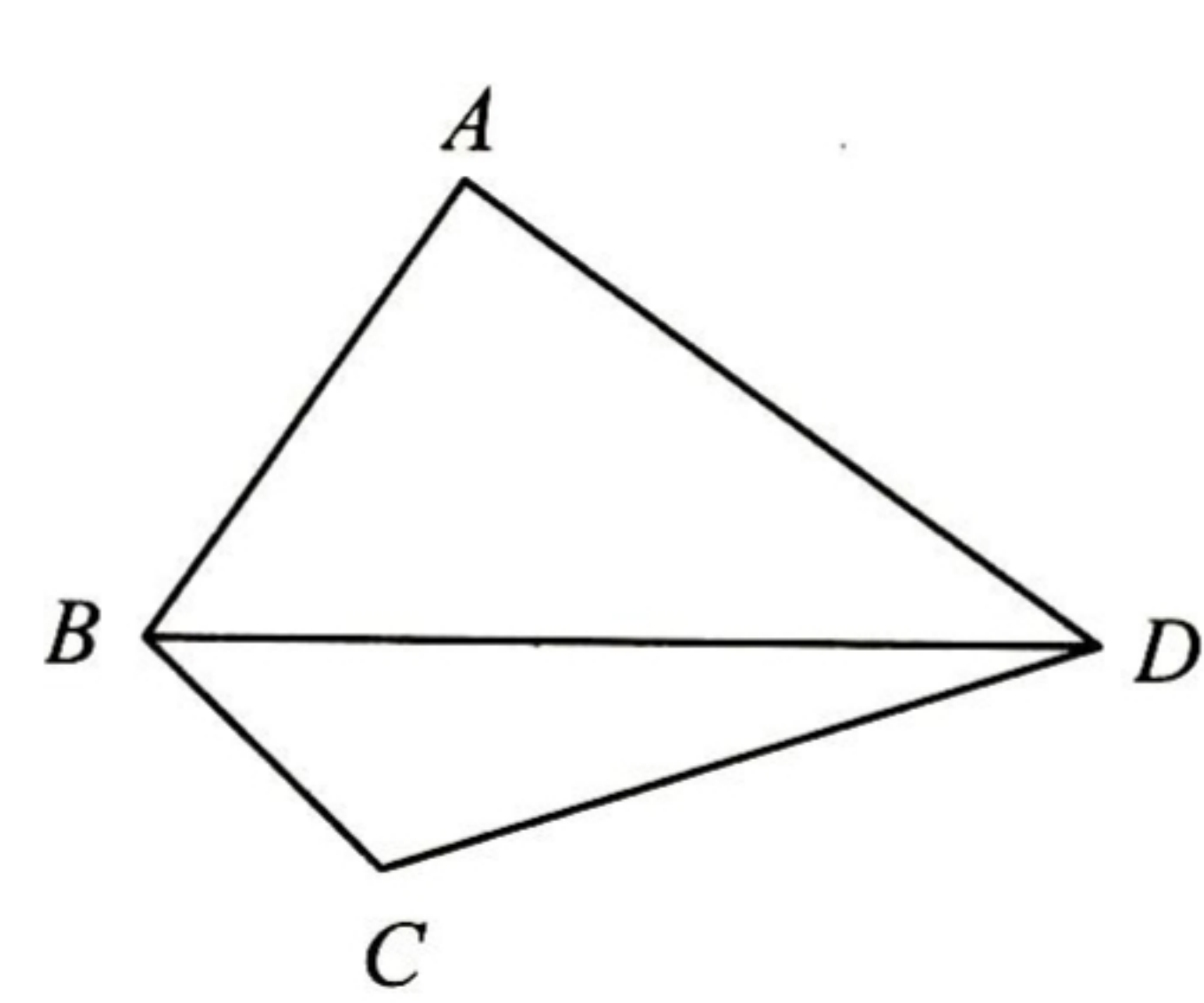


图 15-25

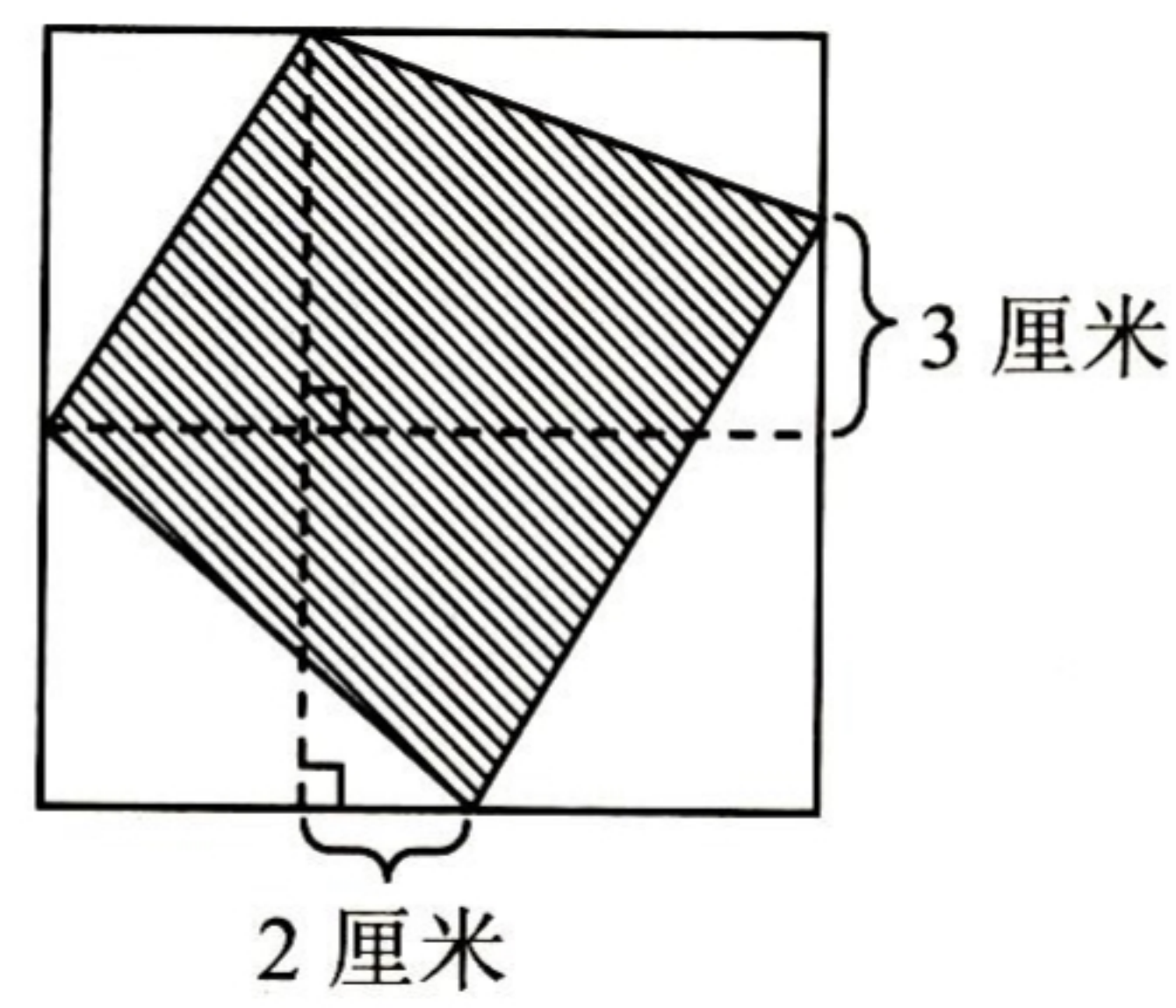


图 15-26

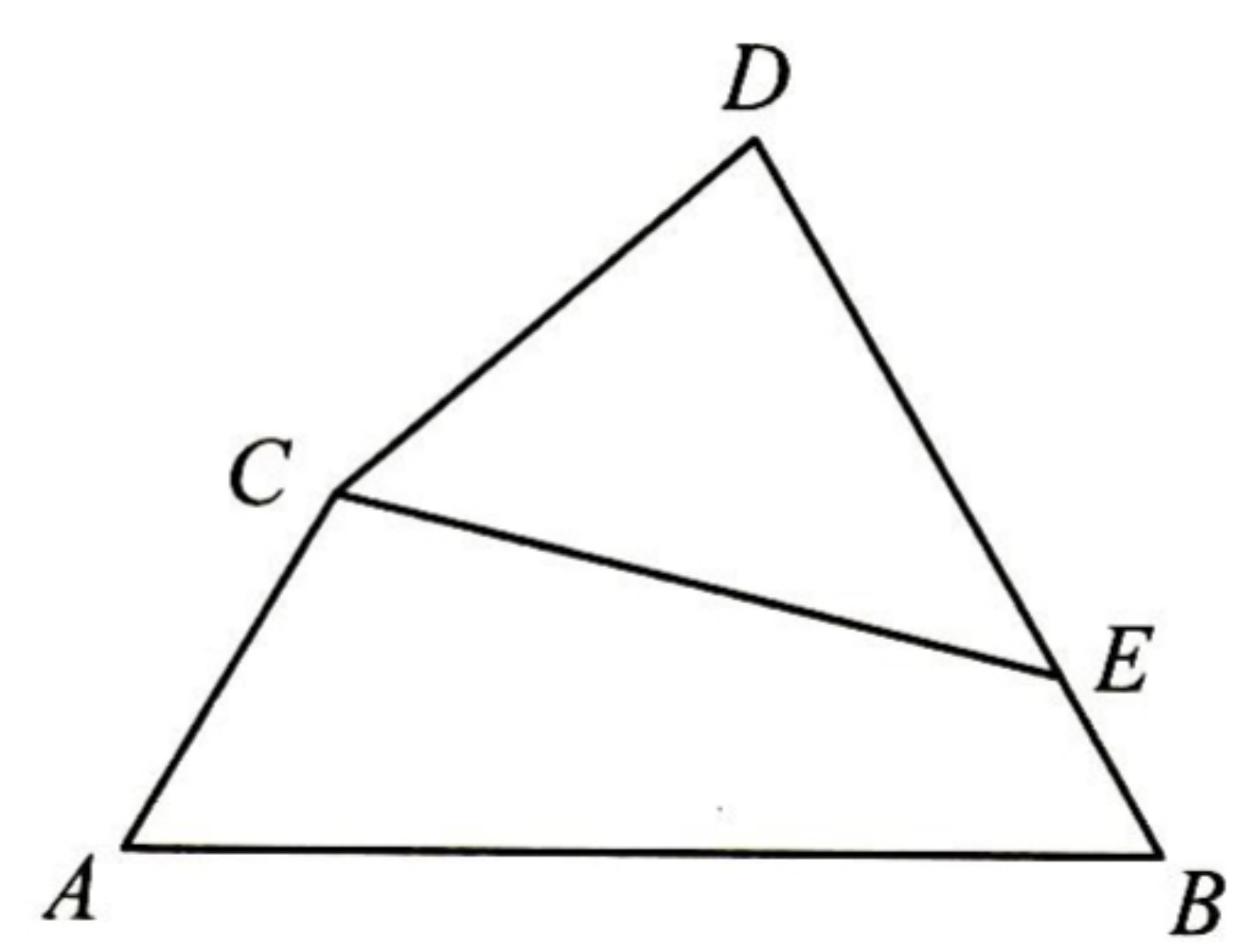


图 15-27

5. 如图 15-27, $\angle A = \angle B = 60^\circ$, 且 AB= 24, BD=16, AC=8, 而且三角形 CDE 的面积等于四边形 ABEC 的面积. 请问: DE 的长度是多少?



6 一如图 15 -28，已知三角形 ADE，三角形 CDE 和正方形 ABCD 的面积之比为 2：3：8，三角形 BDE 的面积是 4 平方厘米．四边形 ABCE 的面积是多少平方厘米？

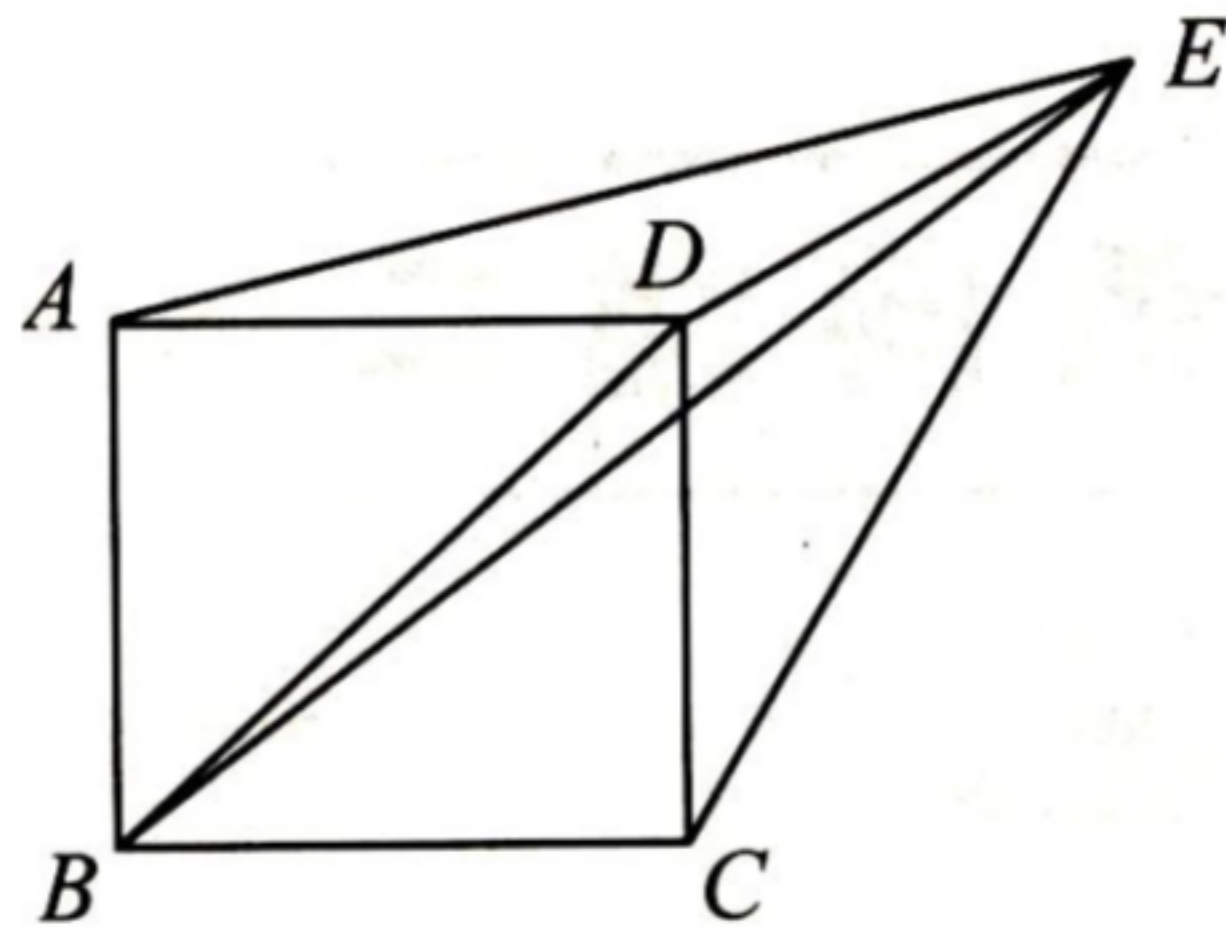


图 15-28

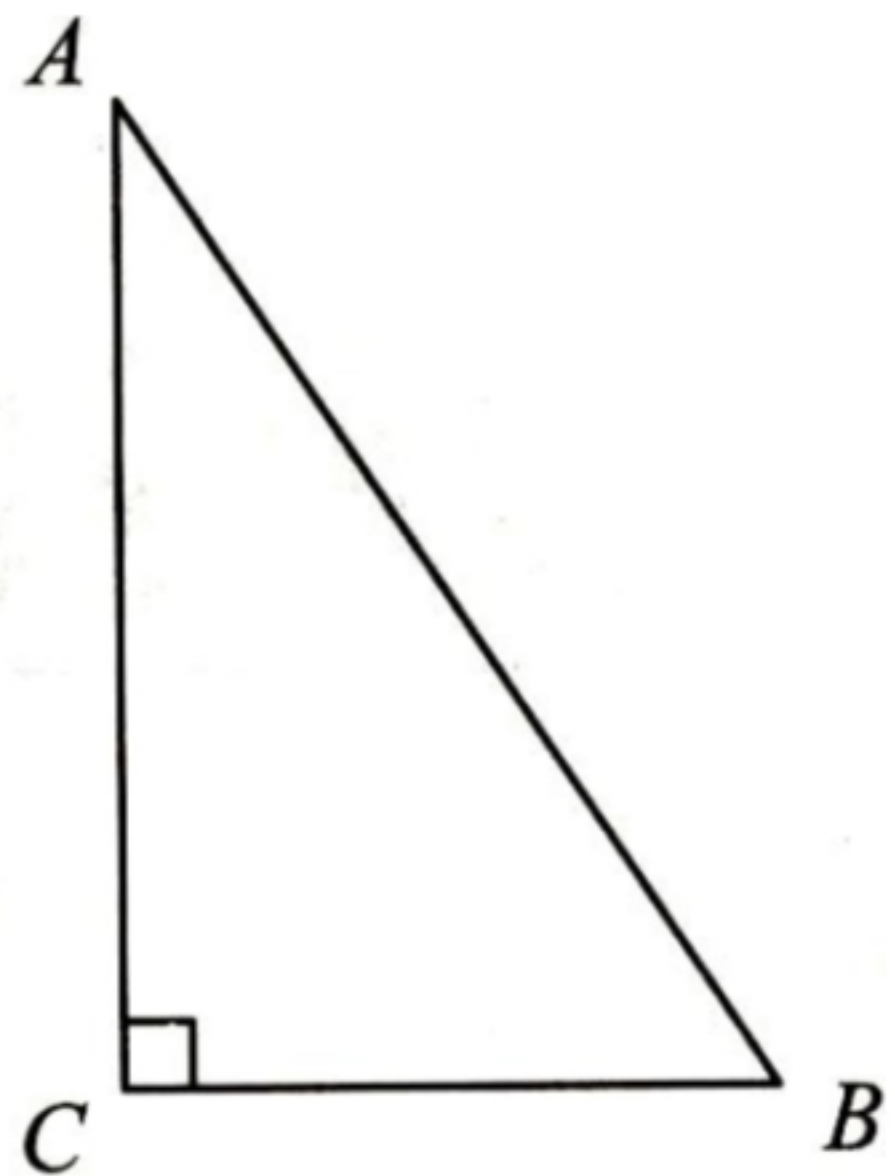


图 15-29

7. 如图 15 -29，有一个三角形台球桌，角 C 是直角，角 A 等于 30 度，从 A 点向 BC 的中点打出一个球，该球经过若干次反弹后，恰好落入某个袋中．请问：最少要反弹多少次？球最后落入哪一个袋中？

8. 如图 15 -30，正方形 PQRS 有三个顶点分别在三角形 ABC 的三条边上，且 BQ=QC.请求出正方形 PQRS 的面积.

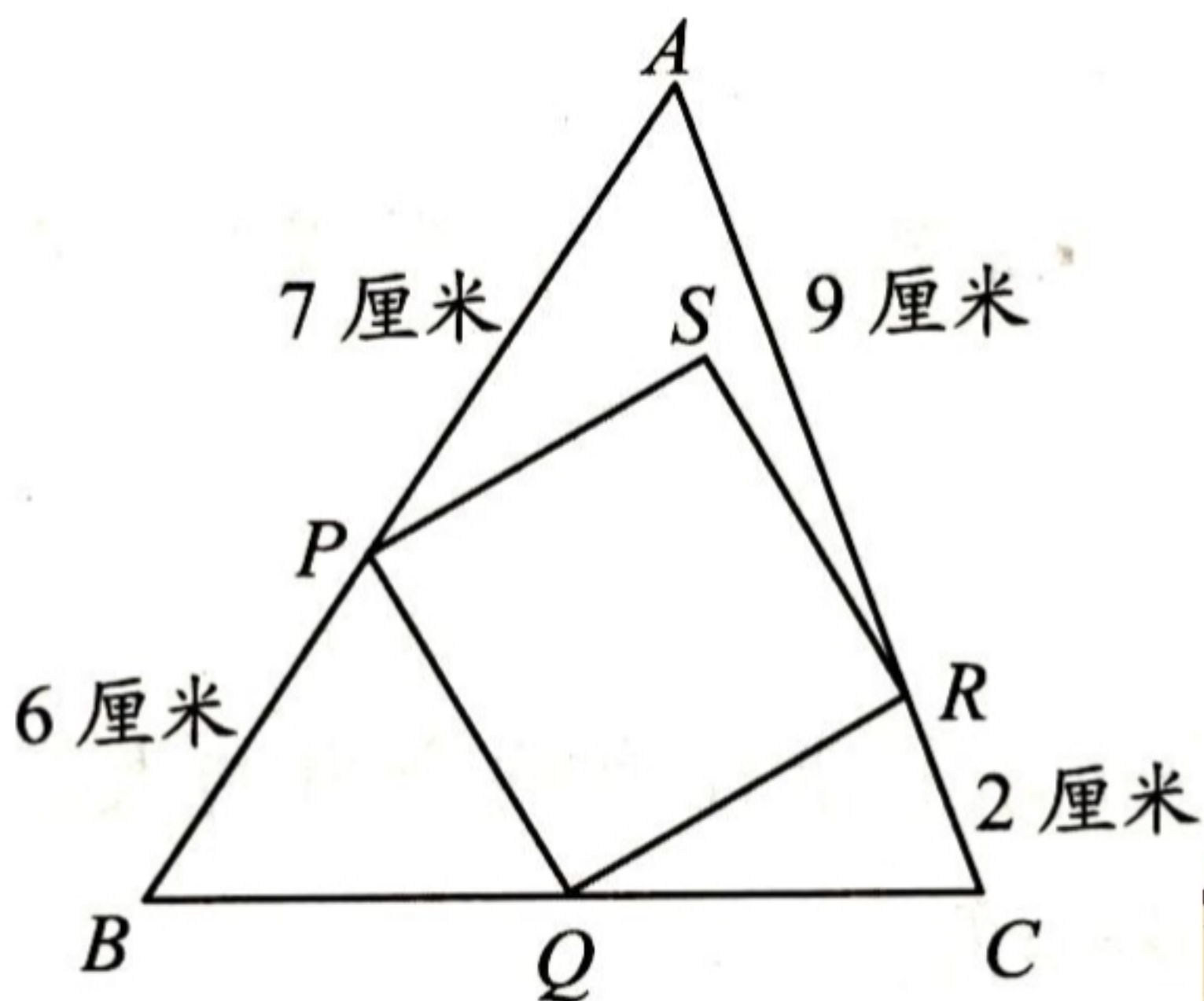


图 15-30

第 16 讲 最值问题（二）

内容概述

各种类型的复杂最值问题，通常采用枚举、局部调整和极端分析等方法．有些情况下，既要构造出取得最值的具体实例，又要对此方案的最优性进行论证．

典型问题

提高篇

1. 用 0, 1, 2, $\dots$, 9 这 10 个数字各一次组成 5 个两位数 a 、 b 、 c 、 d 、 e ．请问： $a - b + c - d + e$ 最大可能是多少？

2. 将 135 个人分成若干小组，要求任意两个组的人数都不同，最多可以分成多少组？这时，人数最少的那组有多少人？

3. 有 11 个同学计划组织一场围棋比赛，他们准备分为两组，每组进行单循环比赛，那么他们最少需要比赛多少场？



4. 我们知道，很多自然数可以表示成两个不同质数的和，例如 $8 = 3 + 5$ 。有的数有几种不同的表示方法，例如 $100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83$ 。请问：恰好有两种表示方法的最小数是多少？

5. 一个三位数除以它的各位数字之和，商最大是多少？商最小是多少？

6. (1)在分母是一位数的最简真分数中，两个不相等的分数最小相差多少？
(2)从 1 至 9 中选取四个不同的数字填入算式 $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$ 中，使算式的结果小于 1。这个结果最大是多少？

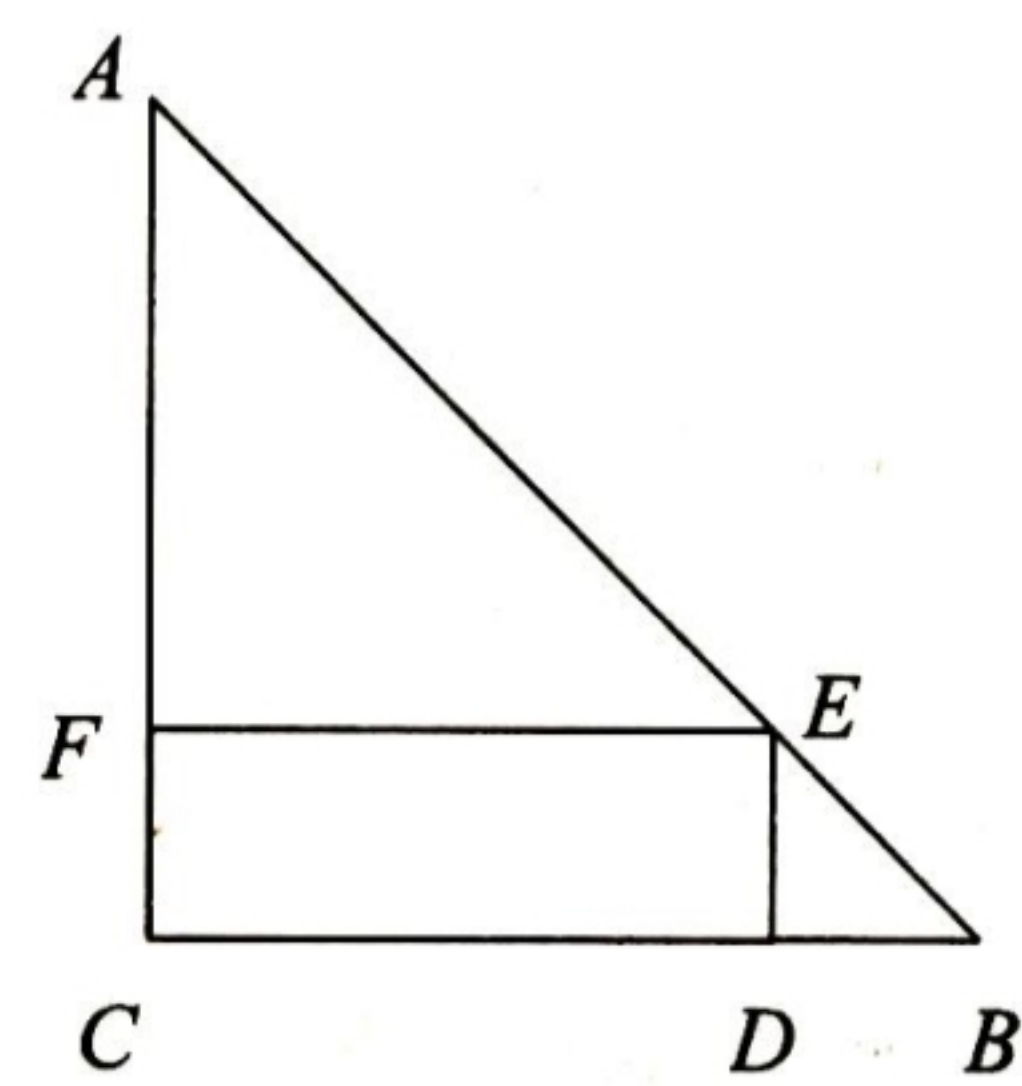


图 16-1

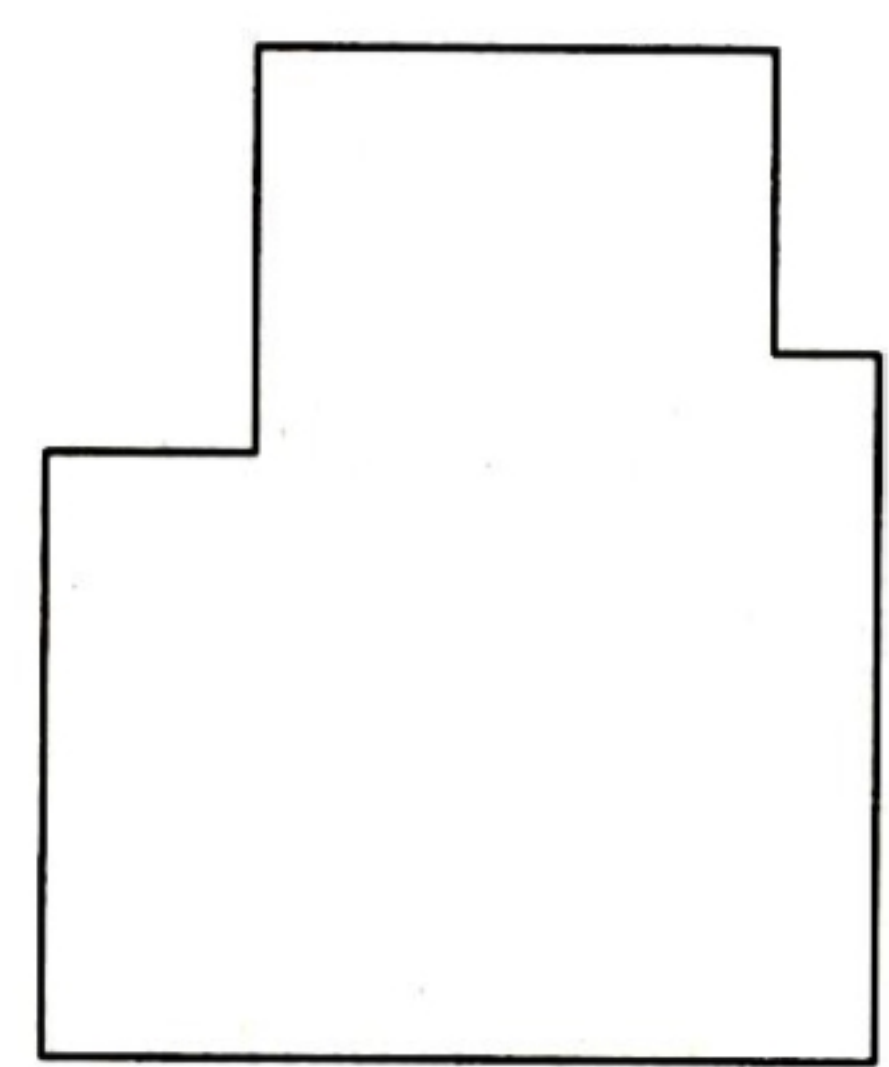


图 16-2

7. 如图 16-1，等腰直角三角形 ABC 中， $CA = CB = 4$ 厘米，在其中作一个矩形 CDEF，矩形 CDEF 的面积最大可能是多少？



8. 如图 16-2，从一个长方形的两个角上挖去两个小长方形后得到一个八边形，这个八边形的边长恰好为 1、2、3、4、5、6、7、8 这 8 个数，它的面积最大可能是多少？

9. 在 4×4 的方格表中将一些方格染成黑色，使得任意两个黑格都没有公共顶点，请问：最多可以将多少个方格染成黑色？

10. 古希腊有一位久负盛名的学者，名叫海伦。他精通数学、物理，聪慧过人。有一天，一位将军向他请教一个问题：如图 16-3，将军从甲地骑马出发，要到河边让马饮水，然后再回到乙地的马棚，为了使走的路线最短，应该让马在什么地方饮水？

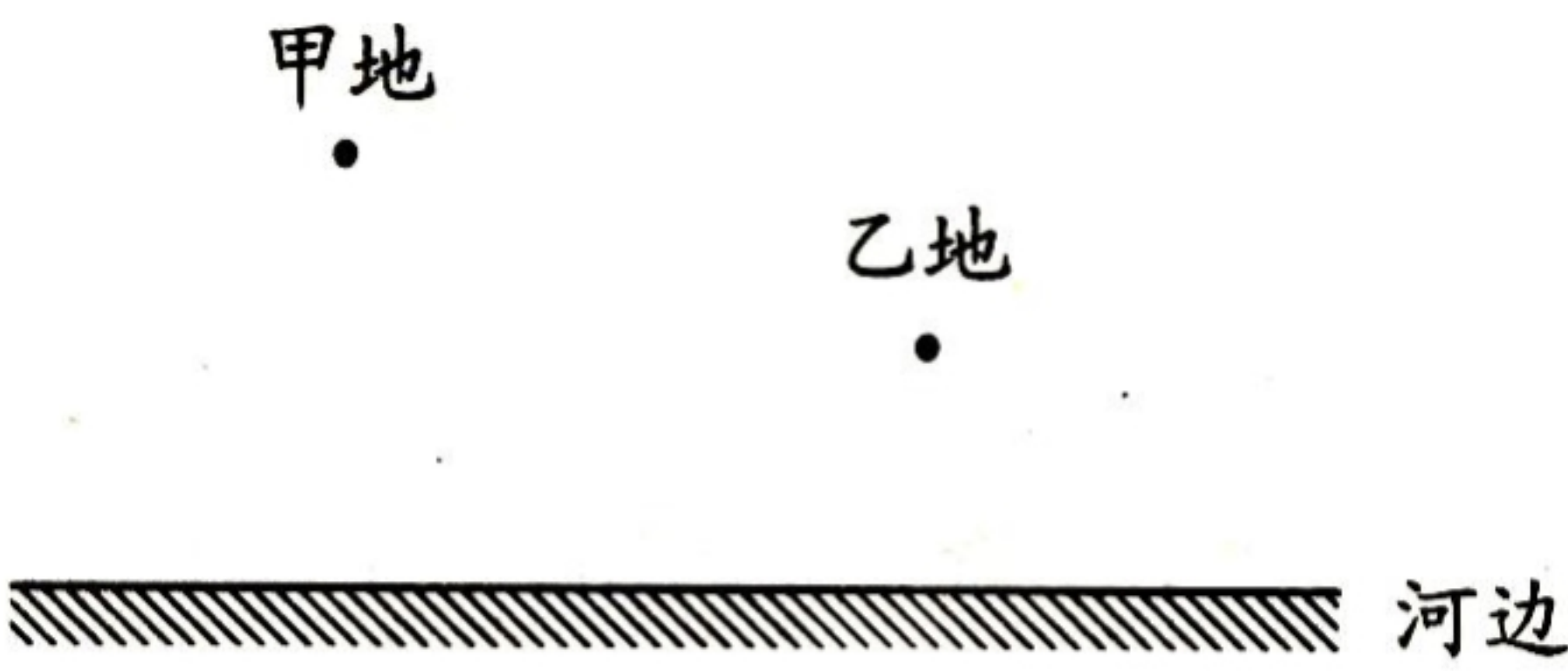


图 16-3

拓展篇

1. 如图 16-4 所示，用一根长 80 厘米的铁丝焊接成一个棱长都是整数厘米的长方体框架。这个长方体的体



积最大可能是多少？

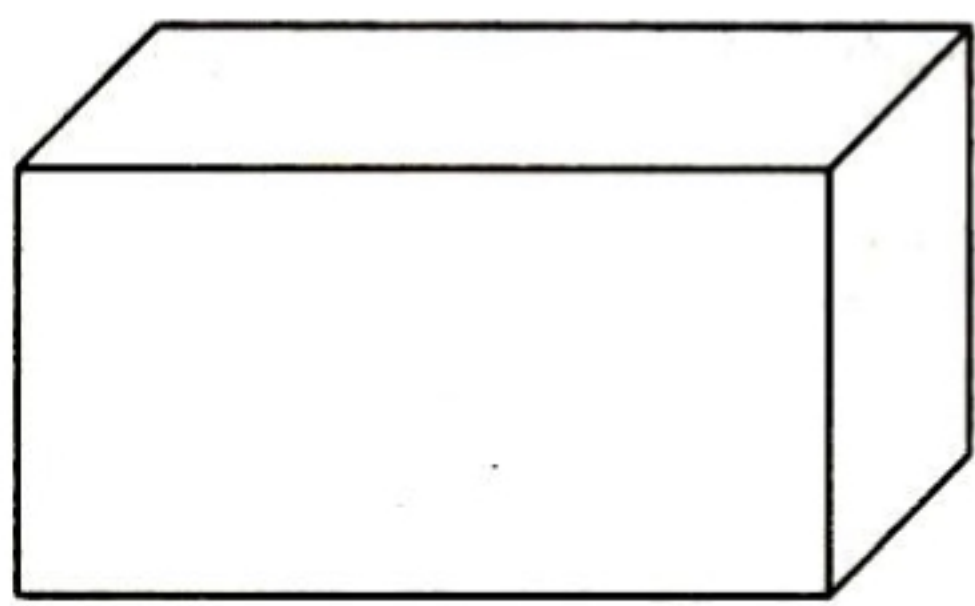


图 16-4

2. 把 14 表示成几个自然数（可以重复）的和，并使得这些数的乘积尽可能大，问：这个乘积最大可能是多少？

3. 从 1, 2, …中选出 8 个数填入下面算式中的方框中，使得结果尽可能大，并求出这个结果.
 $\square \div \square \times (\square + \square) - (\square \times \square + \square - \square).$

4. 有 13 个不同的自然数，它们的和是 100.其中偶数最多有多少个？最少有多少个？

5. 将 6、7、8、9、10 这 5 个数按任意次序写在一圆周上，将每相邻两数相乘，再把所得的 5 个乘积相加，请问：所得和数的最小值是多少？最大值是多少？



6. 有 5 袋糖块，其中任意 3 袋的总块数都超过 60.这 5 袋糖块总共最少有多少块？

7. 已知算式 $9984 - 8 - 8 - \dots - 8$ 的结果是一个各位数字互不相同的数，这个结果最大可能是多少？

8. 用 1、2、3、4、5、6、7、8、9 各一次组成 3 个三位数，使得它们都是 9 的倍数，并且要求乘积最大，请写出这个乘法算式.

9. 所有不能表示为两个合数之和的自然数中，最大的一个是多少？



10. 把1至99依次写成一排，形成一个多位数： $\overline{1234\cdots 9899}$ 从中划去99个数字，剩下的数字组成一个首位不是0的多位数，请问：剩下的数最大可能是多少？最小可能是多少？

11. 邮递员送信件的街道如图16-5所示，每一小段街道长1千米。如果邮递员从邮局出发，必须走遍所有的街道，那么邮递员最少需要走多少千米？

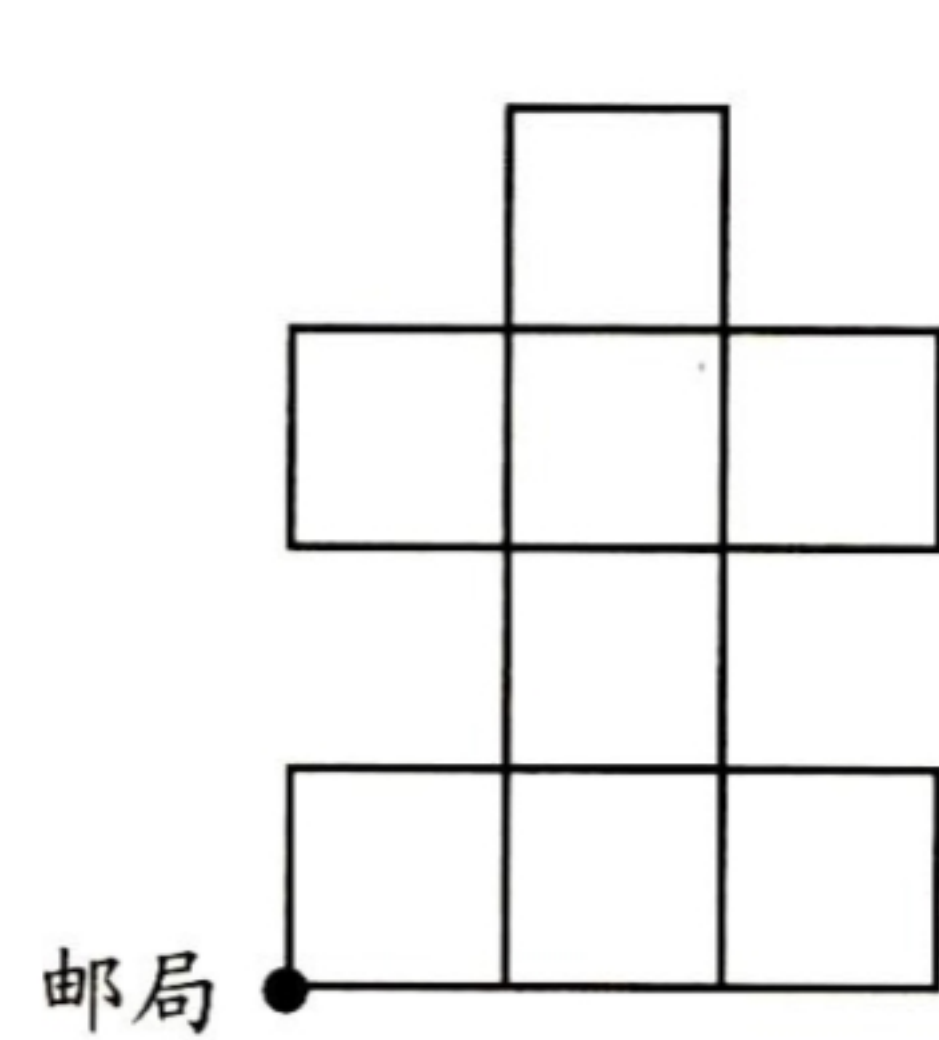


图 16-5

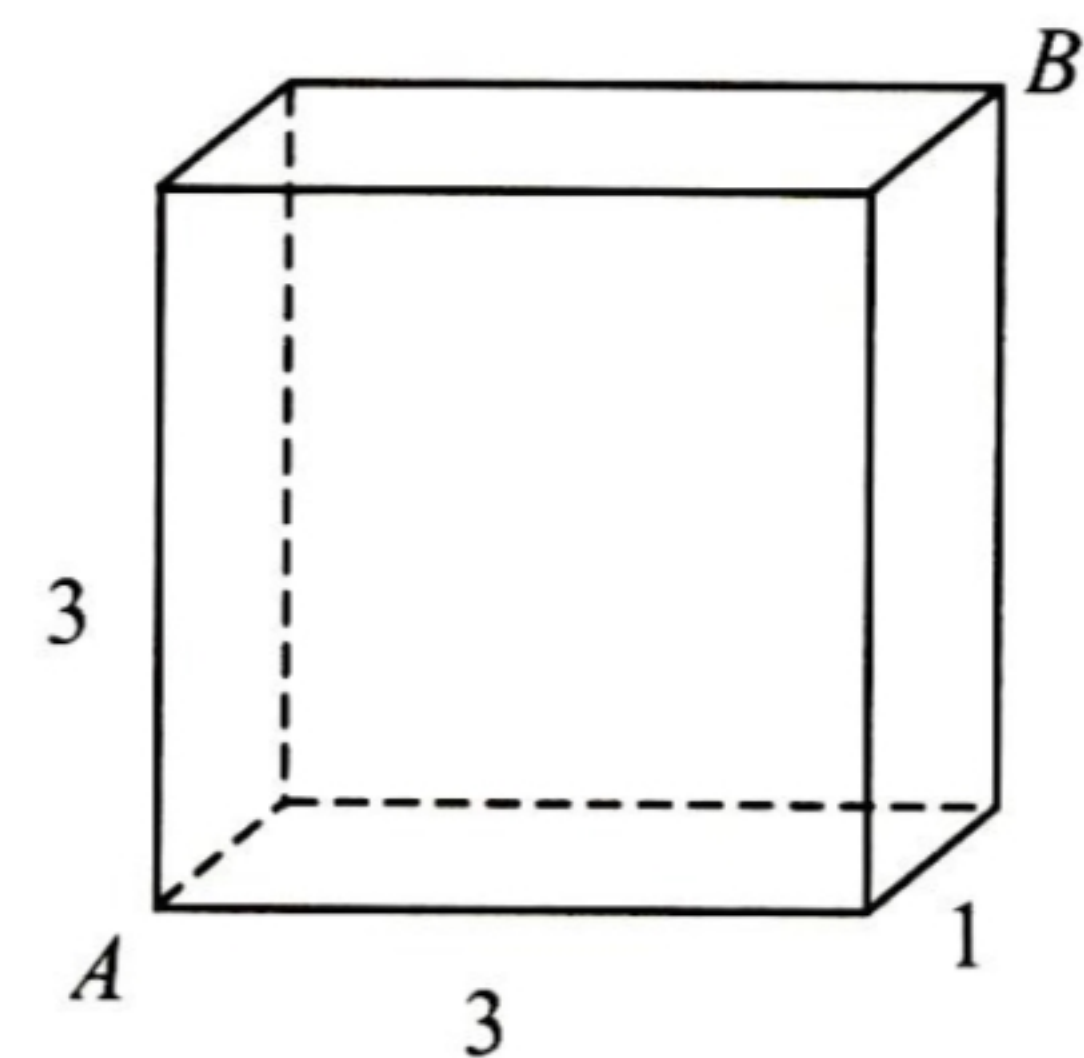


图 16-6

12. 如图16-6，有一个长方体形状的柜子，一只蚂蚁要从左下角的A点出发，沿柜子表面爬到右上角的B点去取食物，蚂蚁爬行路线的长度最短是多少？一共有几条最短路线？请在图中表示出来。

超越篇

1. 一台计算器大部分按键失灵，只有数字“7”和“0”以及加法键“+”尚能使用，因此可以输入77，707这



样只含数字 7 和 0 的数，并且能进行加法运算。为了显示出 222222，最少要按“7”键多少次？

2. 用 1、3、5、7、9 这 5 个数字组成一个三位数 $\overline{ABC}$ 和一个两位数 $\overline{DE}$ ，再用 0、2、4、6、8 这 5 个数字组成一个三位数 $\overline{FGH}$ 和一个两位数 $\overline{IJ}$ 。请问：算式 $\overline{ABC} \times \overline{DE} - \overline{FGH} \times \overline{IJ}$ 的计算结果最大是多少？

3. 将 1、2、3、4、5、6 分别填在正方体的 6 个面上，计算具有公共棱的两个面上的数的乘积，这样的乘积共有 12 个，这 12 个乘积的和最大是多少？

4. 用 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这 9 个数字各一次，组成一个被减数、减数、差都是三位数的正确的减法算式，那么这个算式中的差最大是多少？

5. 有的偶数可以写成两个奇合数之和，例如 $24 = 9 + 15$ ， $100 = 25 + 75$ 。所有不能表示为两个奇合数之和的偶数中，最大的一个是多少？



6. 如图 16-7，有一个圆锥形沙堆的底面直径 BC 为 2 厘米，母线 AC 的长度为 6 厘米。请问：
- (1)如果一只蚂蚁想从 B 点去 C 点，最短路线应该怎么走？请设计出一条最短路线(蚂蚁只能在圆锥表面走)；
 - (2)如果一只蚂蚁需要由 B 点出发到达线段 AC 上（可以到其上的任意一点），那么最短路线应该怎么走？

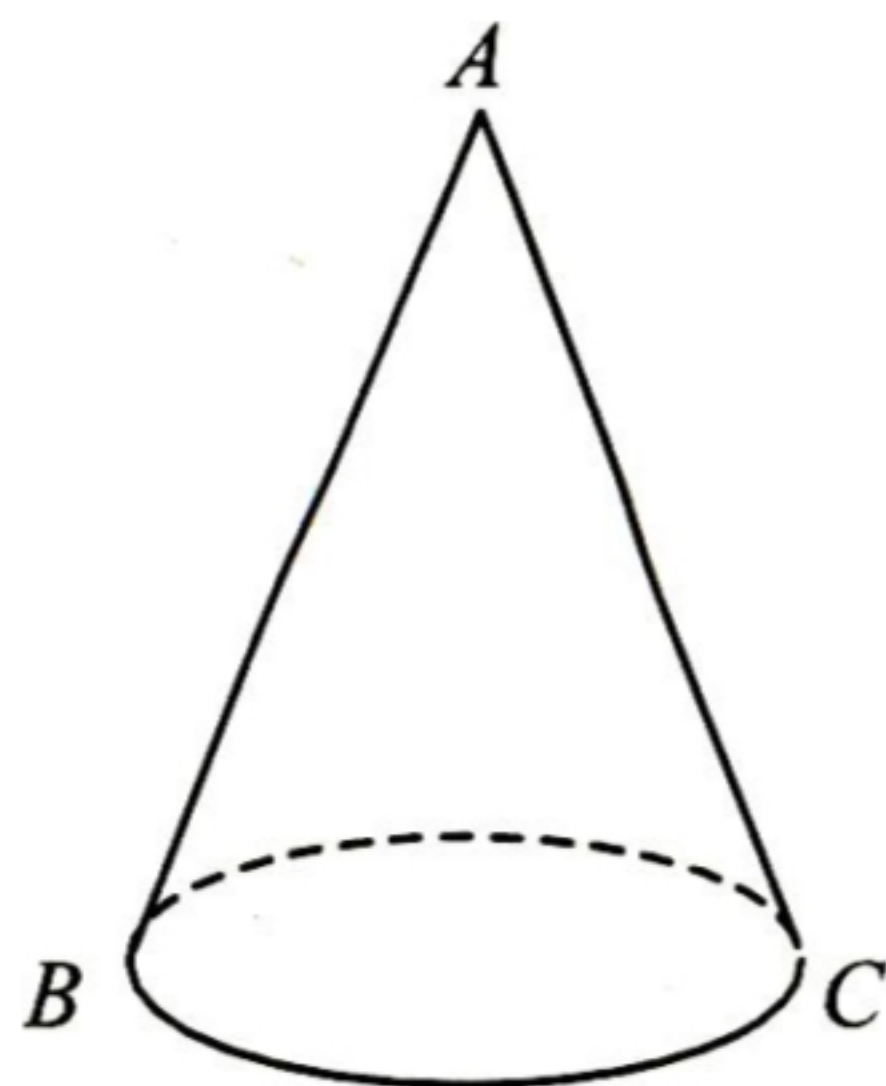


图 16-7

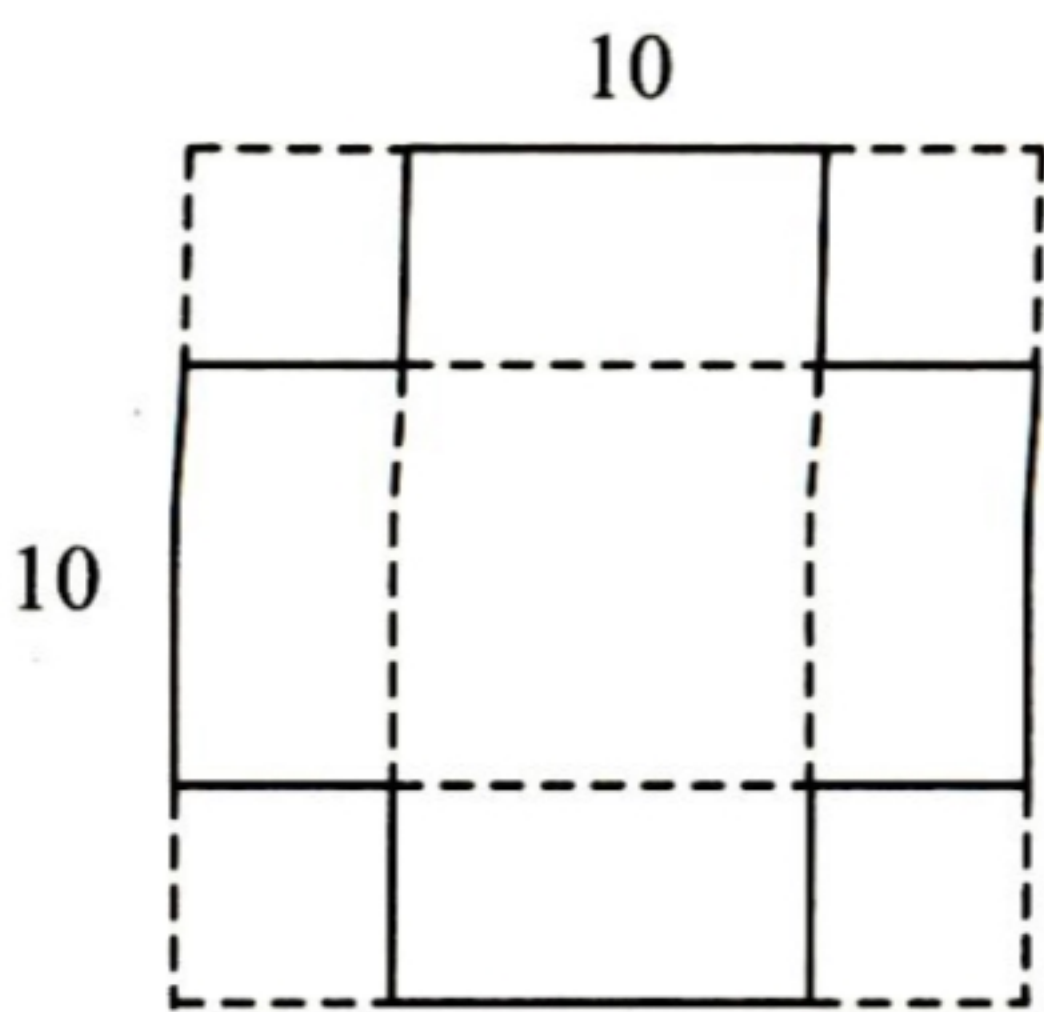


图 16-8

7. 如图 16-8，一个边长为 10 的正方形四个角剪去四个正方形，剩下部分可以拼成一个无盖长方体，那么所得的长方体容积最大是多少？

8. 一个 5×5 的方格表中，每个小方格内填有一个数，并且表中的每一行、每一列的数都构成等差数列。已知任取 n 个方格，只要知道了这些方格中的数，就可以把方格表补填完整，那么， n 的最小值是多少？



第 17 讲 应用题综合（二）

内容概述

各种具有较强综合性的复杂应用题。包含多种可能情况，需要进行分类讨论的问题；需要进行合理守排对策，以达到最佳效果的问题。

典型问题

提高篇

1. 有一批砖，每块砖的长和宽都是自然数，且长比宽长 12 厘米。如图 17-1，若把这批砖横着铺，则可铺 897 厘米长；如图 17-2，若竖横相间铺，则可铺 657 厘米长，请问：如图 17-3 这样铺，可铺多少厘米长？

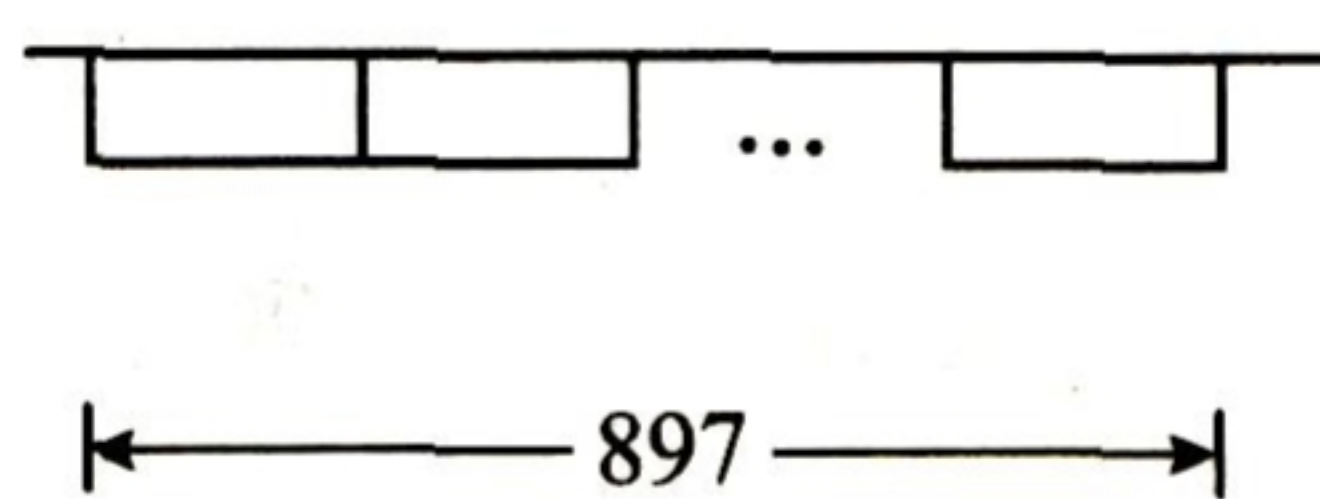


图 17-1

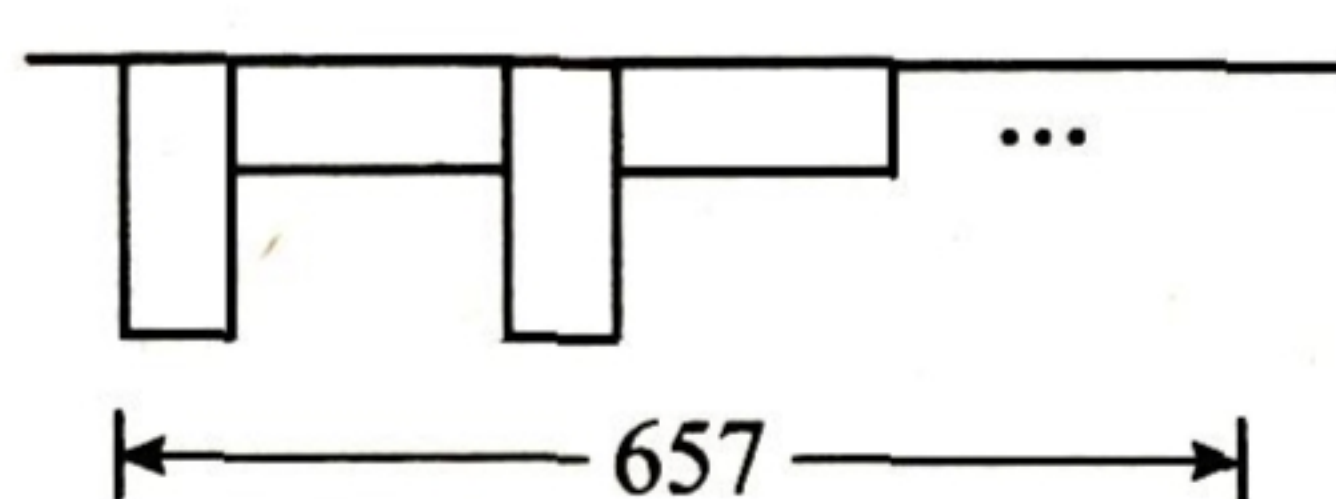


图 17-2

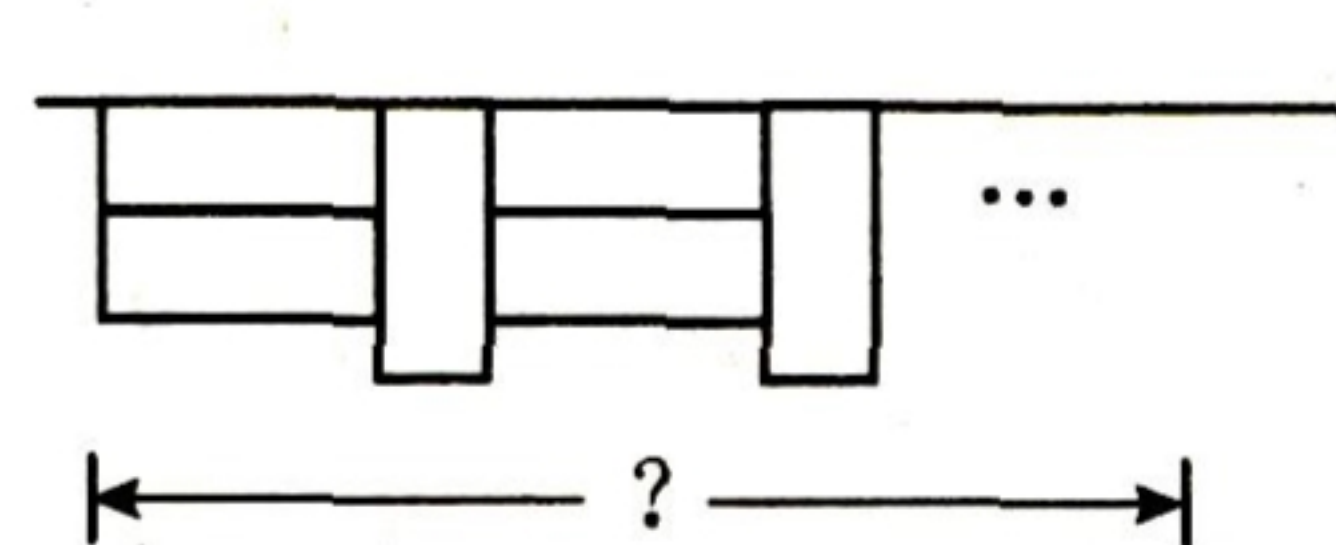


图 17-3

2. 一种商品的定价为整数元，100 元最多能买 3 件，甲、乙两人各带了若干张百元钞票，甲带的钱最多能买 7 件这种商品，乙带的钱最多能买 14 件，两人的钱凑在一起就能多买 1 件，求这件商品的定价。

3. 小明要写 152 页字，小强要写 150 页字。从暑假第一天起，小明一天写 3 页，天天写；小强第一天写 4 页，但是隔一天写一次，请问：第多少天写完字后，小强没写的页数是小明没写的页数的 2 倍？



4. 现有甲、乙、丙三种食盐水各 200 克，浓度依次为 42%、36%、30%，现在要配制浓度是 34% 的食盐水 420 克，至少要取甲种食盐水多少克？

5. 要生产某种产品 100 吨，需用 A 种原料 200 吨，或 B 种原料 200.5 吨，或 C 种原料 195.5 吨，或 D 种原料 192 吨，或 E 种原料 180 吨。现知用 A 种原料及另外一种（指 B、C、D、E 中的一种）原料共 19 吨生产此种产品 10 吨。试分析所用另外一种原料是哪一种，这两种原料各用了多少吨？

6. 某城出租车的计价方式为：起步价是 3 千米 8 元，之后每增加 2 千米（不足 2 千米按 2 千米计算）增加 3 元。现从甲地到乙地乘出租车共支出车费 44 元；如果从甲地到乙地先步行 900 米，然后再乘出租车只要 41 元，那么从甲、乙两地的中点乘出租车到乙地需支付多少钱？

7. 现有 21 块巧克力，A、B、C、D、E 五个人轮流把这些巧克力吃光了，但不知道他们吃的先后顺序。A 说：“我吃了剩下巧克力数量的三分之二。” B 说：“我吃了剩下巧克力数量的一半，” 说：“我吃了剩下巧克力数量的一半。” D 说：“我吃光了剩下的巧克力，” E 说：“我们每人吃的数量互不相同。” 已知每人吃的数量都是正整数，请问：E 吃了多少块巧克力？



8. 已知 A、B、C、D、E、F 六人分别看了 5、5、6、8、8、10 场演出. 每场演出票价不变, 成人票的票价是儿童票的 2 倍, 且均为整数元. 已知这六人买演出票共支出了 1026 元, 求成人票单价.

9. 甲、乙两厂生产同一规格的上衣和裤子, 甲厂每月用 16 天生产上衣, 14 天生产裤子, 共生产 448 套衣服 (每套上衣、裤子各一件); 乙厂每月用 12 天生产上衣, 18 天生产裤子, 共生产 720 套衣服. 现两厂合并后, 100 天最多可以生产多少套衣服?

10. 如图 17-4, 圆形湖泊周长 1200 米, 除了 A 点和 B 之外, 每隔 100 米就有一只蜜蜂, 一共十只蜜蜂. 它们按照顺时针的方向飞行, 各个蜜蜂的速度均标在了图上, 单位是“米 / 秒”, 小偷从 A 点出发沿湖顺时针逃到位于 B 点的家中, 只要被沿途的蜜蜂碰到, 小偷就会被蜇一下. 请问: 小偷最少会被几只蜜蜂蜇到?

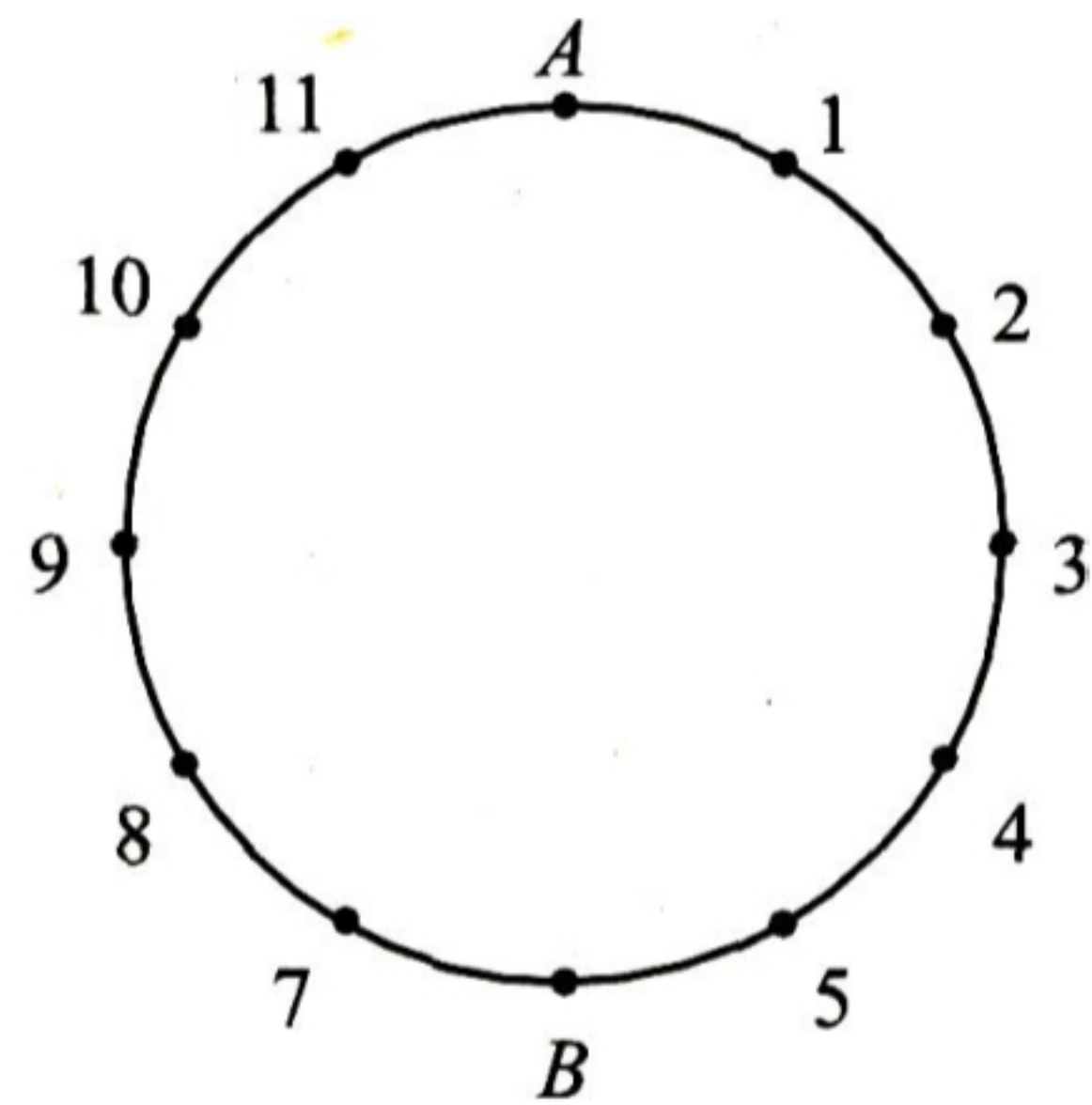


图 17-4

拓展篇

1. 有 8 个盒子, 各盒内分别装有奶糖 9、17、24、28、30、31、33、44 块. 甲先取走了一盒, 其余各盒被乙、丙、丁三人所取走. 已知乙、丙取到的糖的块数相同且为丁的 2 倍. 问: 甲取走的一盒中有多少块奶糖?



2. 商店进了一批同样规格的袜子甩卖，为了避免找零，按 40% 的利润先定价，实际上收取高于“定价×双数”的最小整数元。结果买 2 双袜子需要 5 元，3 双袜子需要 8 元，5 双袜子需要 12 元，已知每双袜子的成本和利润都是整数分，求每双袜子的成本。

3. 甲站有车 26 辆，乙站有 30 辆。从上午 8 点开始，每隔 5 分钟由甲站向乙站开出一辆车，每隔 7.5 分钟由乙站向甲站开出一辆车，都经过 1 小时到达对方车站，问：最早在什么时刻，乙站车辆数是甲站的 3 倍？总共持续多长时间？

4. 有 4 种颜色的卡片每种各 3 张，每张卡片上写有一个正整数，相同颜色的卡片上写有相同的数，不同颜色的卡片上写有不同的数。把这些卡片发给 6 个人，每人得到 2 张不同色的卡片，将上面的数相加，得到了 6 个和：88、121、129、143、154、187。但是，其中有一个人算错了。请从小到大依次写出四种颜色卡片上所写的数，请写出所有可能。

5. 生产某种产品 100 吨，需用 A 原料 250 吨，或 B 原料 300 吨，或 C 原料 225 吨，或 D 原料 240 吨，或 E 原料 200 吨。现知用了 A 原料和另外两种原料共 15 吨生产该产品 7 吨，每种原料都用了至少 1 吨，且某种原料占了原料总量的一半，那么另两种原料是什么？分别用了多少吨？



6. 北京九章书店对顾客实行一项优惠措施：每次买书 200 元至 499.99 元者（包含 200 元）优惠 5%。每次买书 500 元以上者（包含 500 元）优惠 10%。某顾客到书店买了三次书，如果第一次与第二次合并一起买，比分开买便宜 13.5 元；如果三次合并一起买比三次分开买便宜 39.4 元。已经知道第一次的书价是第三次书价的 $\frac{5}{8}$ 。问：这位顾客第二次买了多少钱的书？

7. 甲、乙两人同时从 A 地出发，以相同的速度向 B 地前进，甲每行 5 分钟休息 2 分钟，乙每行 210 米休息 3 分钟，甲出发后 50 分钟到达 B 地，乙到达 B 地比甲迟了 10 分钟。已知两人最后一次的休息地点相距 70 米，求两人的速度。

8. 货运公司要用若干辆最大载重 2.1 吨的汽车一次性搬运总重 18.6 吨的货物。为方便搬运，公司把这 18.6 吨货物包装成若干箱，每箱重量相同。由于包装规格所限，每箱的重量不能超过 320 千克，且包装好后，货物只能整箱搬运，不得拆箱。请问：要保证一定能一次搬运所有货物，至少需要多少辆汽车？此时每箱货物重量为多少千克？



9. 某车间有 30 名工人，计划要加工 A、B 两种零件，这些工人按技术水平分成甲、乙、丙三类人员，其中甲类人员有 6 人，乙类有 16 人，丙类有 8 人. 各类人员每人每天加工两种零件的个数如表 17-1 所示. 如果要求加工 A、B 两种零件各 3000 个，那么最少要用几天？

表 17-1

效率 零件	人员		
	甲	乙	丙
A	50 个	30 个	12 个
B	80 个	60 个	30 个

10. 有三个一样大的桶，一个装有浓度为 60% 的酒精 100 升，一个装有水 100 升，还有一个桶是空的. 现在要配置浓度为 36% 的酒精，只有 5 升和 3 升的空桶各一个可以作为量具，并且桶上无其他刻度. 如果倒溶液的时候最多只允许往每个量具里倒 4 次，那么最多能配置出浓度为 36% 的酒精多少升？

11. 一条环形道路，周长为 2 千米. 甲、乙、丙三人从同一地点同时出发，每人环行 2 周. 现有自行车两辆，乙和丙骑自行车出发，甲步行出发，中途乙和丙下车步行，把自行车留给其他人骑. 已知甲步行的速度都是每小时 5 千米，乙和丙步行的速度都是每小时 4 千米，三人骑车的速度都是每小时 20 千米. 请你设计一种走法，使三个人两辆车同时到达终点，环行 2 周最少要用多少分钟？

12. 幼儿园分大、中、小三个班，小班人数最少，大班比小班多 61 人，中班共 27 人．把 25 筐苹果分给他们，每筐苹果在 50 至 60 之间不等．已知苹果总数的个位数字是 7，若每人分得 19 个，则苹果不够；若大班比中班每人多 1 个，中班比小班每人多一个，则苹果刚好分完．那么按第二种分法，大班每人分得几个苹果？小班有多少人？

超越篇

1. 如图 17-5 所示，在直角三角形 ABC 中，AC 长 3 厘米，CB 长 4 厘米，AB 长 5 厘米．有一只小虫从 C 点出发，沿 CB 以 1 厘米 / 秒的速度向 B 爬行；同时，另一只小虫从 B 点出发，沿 BA 以 1 厘米 / 秒的速度向 A 爬行，请问经过多少秒后，两只小虫所在的位置 D、E 与 B 组成的三角形 DBE 是等腰三角形？（请写出所有答案）

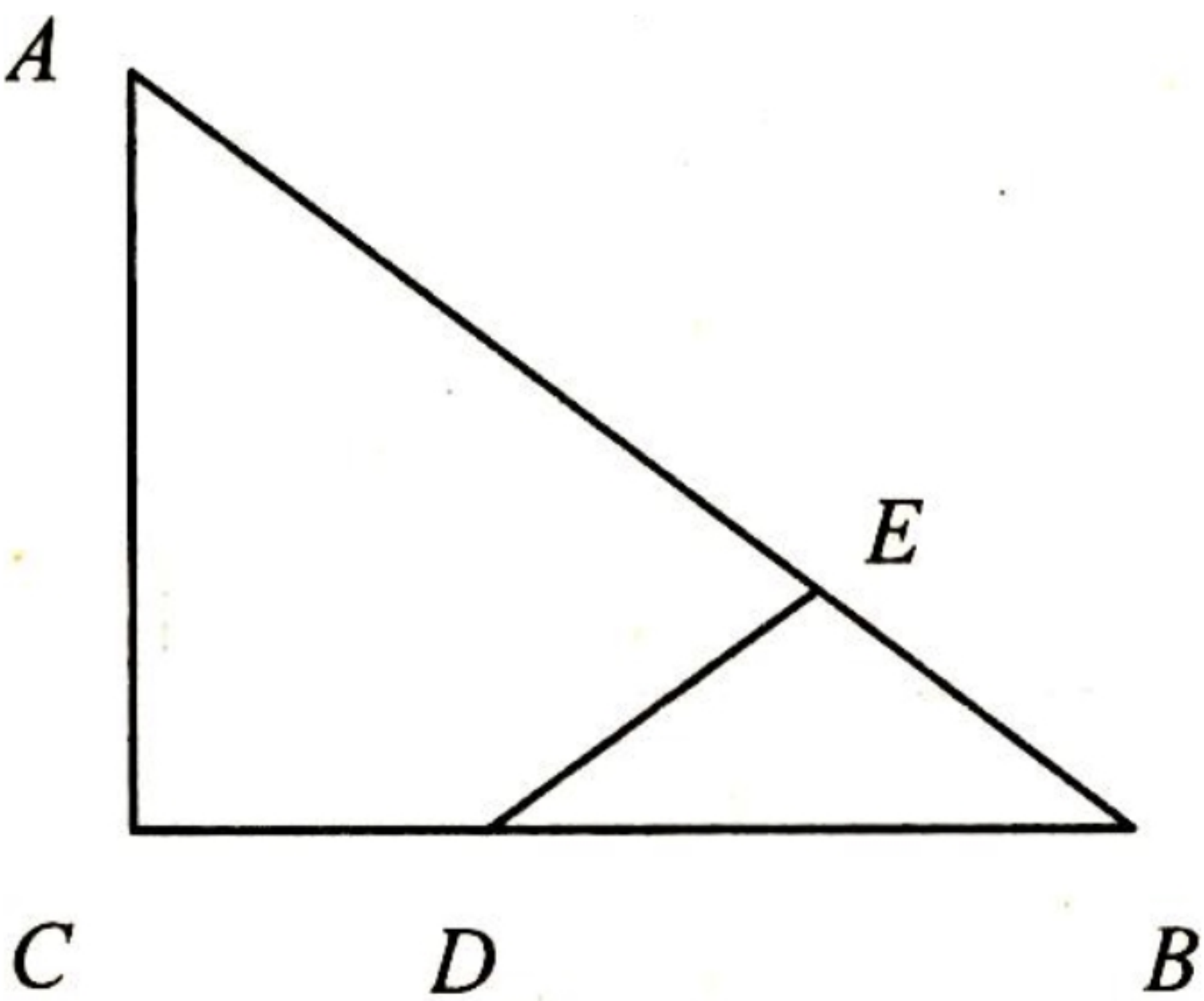


图 17-5

2. 七个人围坐在圆桌周围，在每个人面前都有一个牛奶杯．第一个人把自己的牛奶都平均分到其余的杯子中去，接着第二个人照样做一遍，然后第三个人到第七个人也同样做一遍．最后发现每个杯子中的牛奶都和最开始时一样多．如果所有杯子的牛奶共有 7 升，那么第一个人到第七个人的杯子里开始时分别有牛奶多少升？



3. 甲、乙两人切蛋糕，两人轮流切，每人切走了五块。已知：①甲切了 5 次蛋糕，每次切走的蛋糕恰是切蛋糕时蛋糕大小的 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{2}{6}$ 、 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{6}$ 和 $\frac{5}{6}$ 各 1 次，但不全对应切蛋糕顺序；②乙切了 5 次蛋糕，每次切走的蛋糕恰是切蛋糕时蛋糕大小的 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{5}{5}$ 各 1 次，也是不全对应切蛋糕顺序；③切的最大的两块都是原来蛋糕的 $\frac{1}{9}$ ，另外还有一块大小是原来蛋糕的 $\frac{1}{225}$ 。求切的第八块蛋糕与原来蛋糕的大小之比。

4. 师徒两人共同组装 50 台机器，每台机器组装必须经过 A、B 两道工序。对于每台机器，师傅操作 A 工序需要 15 分钟，操作 B 工序需要 5 分钟；徒弟操作 A 工序需要 45 分钟，操作 B 工序需要 20 分钟，每台机器每道工序只能由一人完成，不同工序可以由不同人分别完成，但必须 A 先 B 后。试问：如果两人合作至少要花多少分钟才能完成工作？

5. 甲、乙两人在如图 17-6 的跑道上练习跑步，两人从 A 点同时出发，甲在 A、E 之间做折返跑（转身时间不计），乙则沿着正方形跑道 ABCD 顺时针跑步，已知 $AB=BE=100$ 米，且两人跑步的速度都在每秒 3 米到每秒 8 米之间。如果两人出发 2 分钟后第一次相遇，之后隔了 15 秒后两人第二次相遇，那么两人第二次相遇处距离 A 多远？

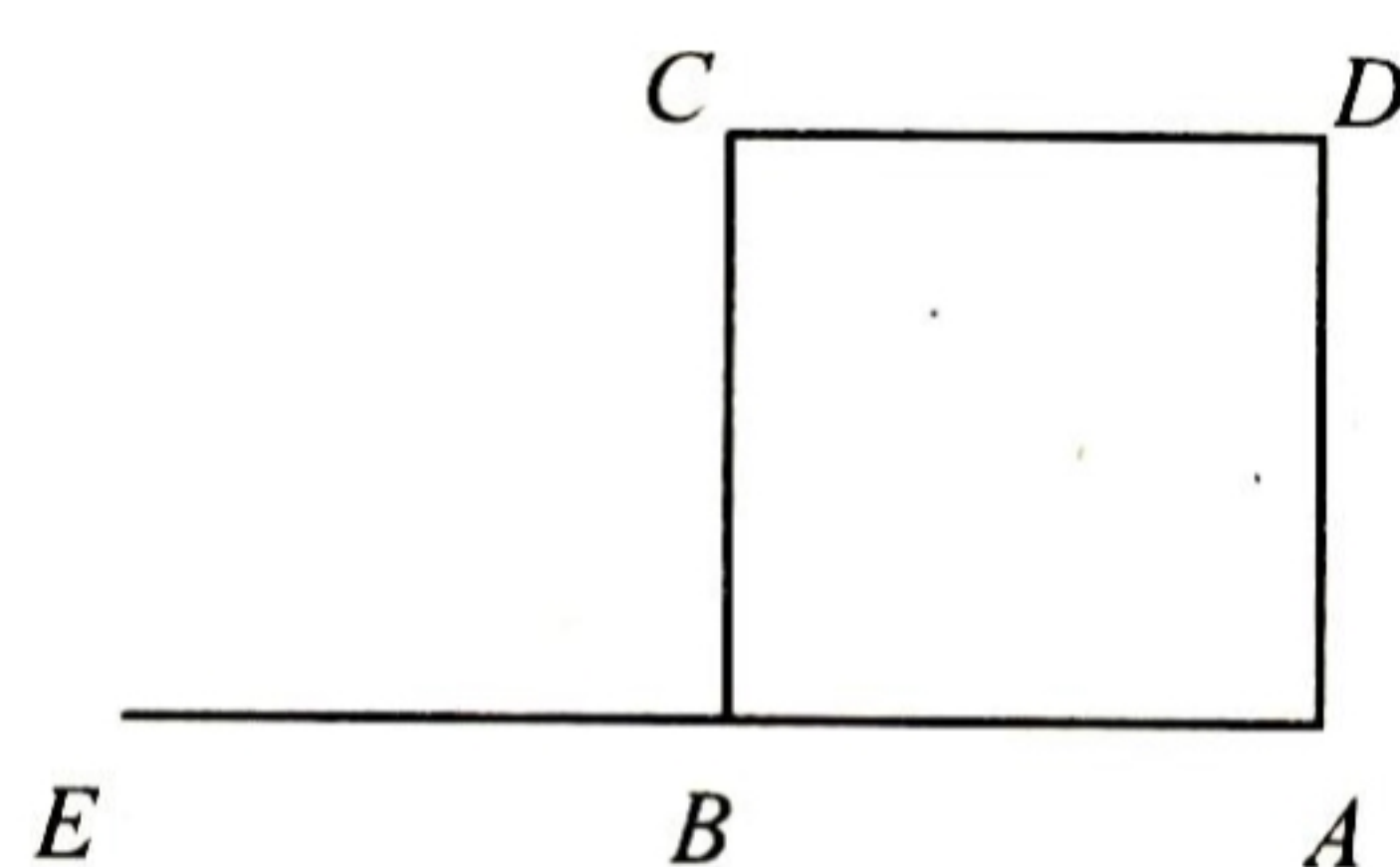


图 17-6



6. 某电器商场开展促销活动，每次消费超过 1500 元不足 3000 元者（含 1500 元）优惠 5%，超过 3000 元者（含 3000 元）优惠 10%。甲、乙、丙三个人各买了一件电器，如果甲、乙一起结算，比分开结算便宜 130 元；如果甲、丙一起结算，比分开结算便宜 260 元；如果三人一起结算，比三人分开结算便宜 405 元。请问：三人购买的电器价格分别是多少？

7. 某商场进行酬宾，规定现金消费每满 50 元返回 10 元礼券，多出不足 50 元部分不计（比如消费 99 元只能返回 1 张 10 元礼券），用礼券产生的消费不参与返券。妈妈看中了 3 件商品，分别是 100 多元、200 多元、300 多元，且都是 10 的倍数，更巧的是，有两件商品的价格之和正好是整百。为了充分利用返券，妈妈打算先买其中的两件，然后兑换成返券，这样买第三件商品的时候，就可以用上返券了，当然，如果返券不够买第三件，自己还得再掏一些钱，她合计了一下，这样安排的话，共有三种可能的消费结果：第一种恰好花 640 元，礼券也用完了；另外两种情况都要花 670 元，但最后又返回 40 元礼券。问：三种商品的价格分别是多少元？

8. 学校运来 125 个桃和若干个梨，分别平分给每位老师，最后剩下一些梨和桃不够分，这时又运来了 26 个水果（桃梨若干），和之前剩下的水果凑在一起，再平分给老师，每个老师多分得 3 个水果（每位老师的桃数相同，梨数相同）。最后又运来 40 个水果（桃梨若干），但是发现所剩的桃和梨竟不够每位老师同时多拿一个，那么第一次分后剩下了多少个梨？



第 18 讲 数论综合（二）

内容概述

综合运用各种知识解决的较复杂数论问题；与二次不定方程、分式不定方程有关的数论问题.

典型问题

提高篇

1. 有 4 个不同的正整数，它们中任意 2 个数的和都是 2 的倍数，任意 3 个数的和都是 3 的倍数. 要使这 4 个数的和尽可能小，这 4 个数应该分别是多少？
2. 已知算式 $(1+2+3+\cdots+n)+2007$ 的结果可表示为 $n(n>1)$ 个连续自然数的和. 请问：共有多少个满足要求的自然数 n ？
3. 有些自然数能够写成一个质数与一个合数之和的形式，并且在不计加数顺序的情况下，这样的表示方法至少有 4 种. 所有满足上述条件的自然数中最小的一个是多少？



4. 甲、乙两个自然数的乘积比甲数的平方小 2008.满足上述条件的自然数有几组?
5. 两个不同两位数的乘积为完全平方数, 它们的和最大可能是多少?
6. n 个自然数, 它们的和乘以它们的平均数后得到 2008.请问: n 最小是多少?
7. 一个正整数若能表示为两个正整数的平方差, 则称这个数为“智慧数”, 比如 $16=5^2-3^2$, 16 就是一个“智慧数”, 请问: 从 1 开始的自然数列中, 第 2008 个“智慧数”是多少?
8. 将 $100!-5$ 分别除以 2, 3, 4, $\dots$, 100, 可以得到 99 个余数 (余数有可能为 0). 这 99 个余数的和是多少?



9. 小悦、冬冬和阿奇三人经常去电影院，小悦每隔 2 天去一次，冬冬每隔 4 天去一次，阿齐每隔 6 天去一次。今天他们三人都去电影院，将来会有连续三天都有人去电影院。如果今天是第 1 天，那么最早出现的具有上述性质的连续三天是哪三天？

10. 有三个连续的自然数，它们的平方从小到大依次是 10、9、8 的倍数。这三个数中最小的一个是多少？

拓展篇

1. 有一个正整数，它加上 100 后是一个完全平方数，加上 168 后也是一个完全平方数。这个正整数是多少？

2. 已知甲、乙两个自然数的最大公约数是 6，两数之和为 1998.满足上述条件的数一共有多少组？



3. 冬冬往一个水池里扔石子. 第一次扔 1 颗石子, 第二次扔 2 颗石子, 第三次扔 3 颗石子, 第四次扔 4 颗石子……他准备扔到水池的石子总数是 106 的倍数. 请问: 冬冬最少需要扔多少次?

4. 数学老师把一个两位数的约数个数告诉了小悦, 聪明的小悦仔细思考了一下后算出了这个数. 同学们, 你们知道这个数可能是多少吗?

5. 在一个正整数的所有约数中, 个位数字为 0, 1, 2, ..., 9 的数都出现过, 这样的正整数最小是多少?

6. 求最小的正整数 n , 使得 $2006 + 7n$ 是完全平方数。



7. 请写出由不同的两位数组成的最长的等比数列.

8. 有一些自然数, 它们不能用三个不相等的合数之和来表示. 这样的自然数中的最大一个是多少?

9. 有些数既能表示成 5 个连续自然数的和, 又能表示成 6 个连续自然数的和, 还能表示成 7 个连续自然数的和. 例如: 105 就满足上述要求, $105=19+20+21+22+23$; $105=15+16+17+18+19+20$; $105=12+13+14+15+16+17+18$. 请问: 在 1 至 1000 中一共有多少个满足上述要求的数?

10. 一个特殊的圆形钟表只有一根指针, 指针每秒转动的角度为连续自然数数列. 现在设定指针第一秒转动的角度为 a 度 (a 为小于 360 的整数), 则其第二秒转动 $a+1$ 度, 第三秒转动 $a+2$ 度.....如果指针在第一圈内恰好能指回出发位置, 那么 a 一共有几种设定方法? 最小可以被设成多少?

11. 某住宅区有 12 家住户, 他们的门牌号分别是 1, 2, 3, ……., 12. 他们的电话号码依次是 12 个连续的六位自然数, 并且每家的电话号码都能被这家的门牌号码整除. 已知这些电话的首位数字都小于 6, 并且门牌号码是 9 的这家的电话号码能被 13 整除. 请问: 这一家的电话号码是多少?



12. 在等差数列 $1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, \dots$ 中, 如果前 n 个数乘积的末尾 0 的个数比前 $n+1$ 个数乘积的末尾 0 的个数少 3 个, 那么 n 最小是多少?

超越篇

1. 有一些正整数, 它可以表示成连续 20 个正整数的和, 而且当把它表示成连续正整数之和 (至少 2 个) 的形式时, 恰好有 20 种方法. 这样的正整数最小是多少? (写出质因数分解)

2. 有些自然数可以表示成两个合数相乘再加一个合数的形式, 例如: $33 = 4 \times 6 + 9$. 请问: 不能表示成这种形式的自然数最大是多少?

3. 在给定的圆周上有 100 个点. 任取一点标上 1 ; 按顺时针方向从标有 1 的点往后数 2 个点, 标上 2 ; 从标有 2 的点再往后数 3 个点, 标上 $3 \dots \dots$ 依此类推, 直至在圆周上标出 100 . 对于圆周上的这些点, 有的点可能标上多个数, 有的点可能没有被标数. 请问: 标有 100 的那个点上标出的数最小是多少?



4. 三个聪明的初中生聚在一起玩一个推理的游戏，小强与小花各选了一个自然数并分别将它告诉小安．小安告诉小强和小花，他将分别把这两个数的和与乘积写在不同的纸上．小安写好后，将其中一张纸藏起来，把另一张纸亮出来给小强和小花看（这张纸上写着 2008）．小安请小强和小花互猜对方所选的数，小强首先宣称他无法确定小花所选的数，小花听完小强的话后，也说她无法确定小强所选的数．请问：小花所选的数是什么？

5. 已知三个互不相等的正整数成等差数列，且三个数的乘积是完全平方数，那么这三个数的和最小是多少？

6. 是否存在一个完全平方数，它的每一位上的数字全都相同（至少是两位数）？如果存在，请写出一个；如果不存在，请说明理由，

7. 有一根均匀木棍，先用红色刻度线将它分成 m 等份，再用蓝色刻度线将它分成 n 等份， $m > n$ ．然后按所有刻度线将该木棍锯成小段，一共可以得到 170 根长短不一的小棍，其中最长的棍恰有 100 根．求 m 和 n ．

8. 是否存在这样的自然数：在这个数后面重写一遍这个数，新组成的数是一个完全平方数？如果存在，



请举例；如果不存在，请说明理由.

第 19 讲 数字谜综合（二）

内容概述

各类综合性较强的复杂数字谜问题.

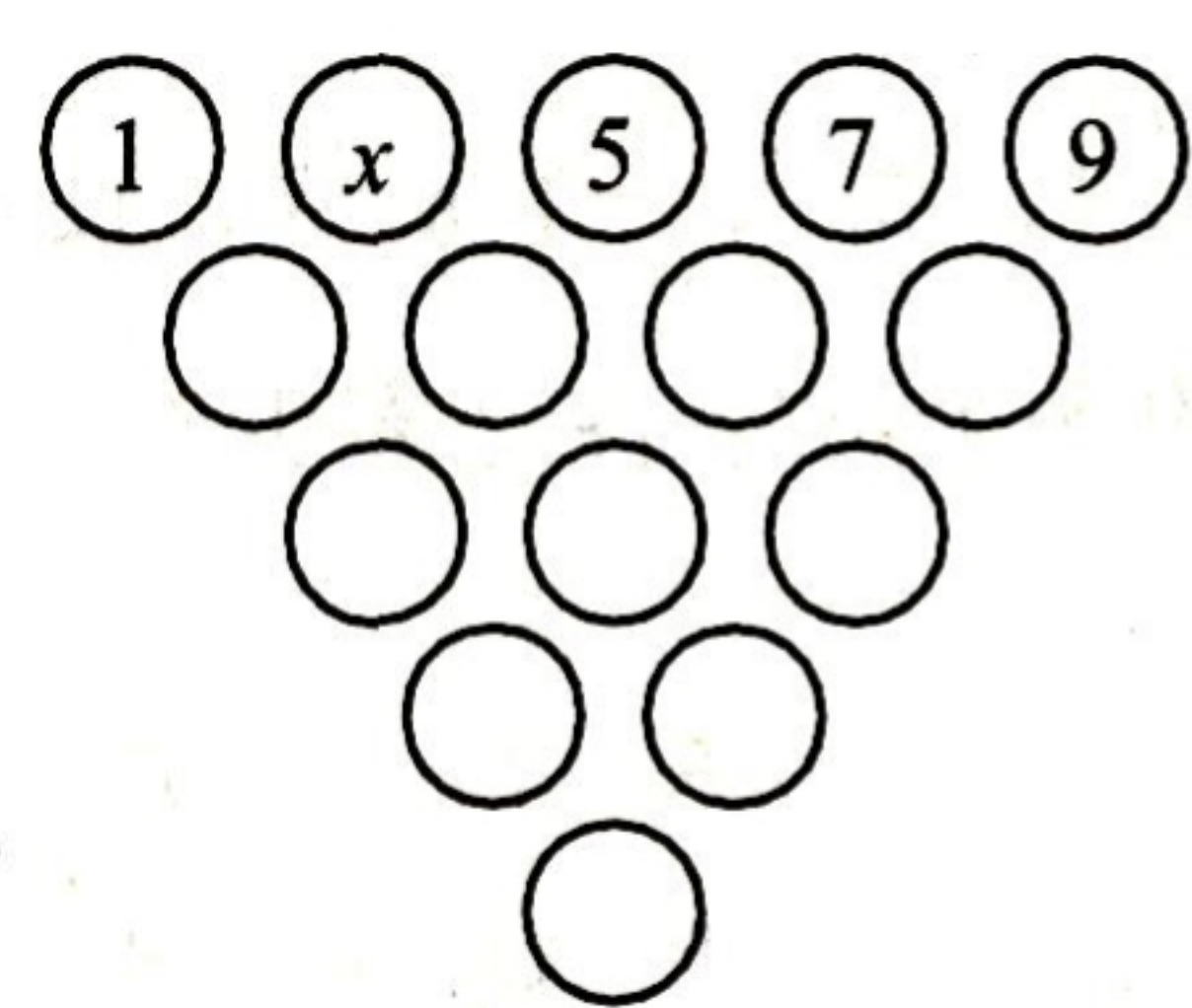
典型问题

提高篇

1. 将 $\frac{1}{4}$ 表示成两个自然数的倒数之和，请给出所有的答案，

2. 在算式 $\frac{1}{18} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ 中，a、b、c 分别代表三个不同的自然数，这三个数的和可能是多少？

3. 如图 19-1，将图中每一行左右相邻的两数相加，再除以 12，将所得的余数写在它们下一行相应的圆圈内．逐行依次进行上面的操作，最后得到最底端的一个数．请问：对于第一行中不同的自然数 z，最底端的数一共有多少种取值，分别是什么？



2	3	4	5	6



4. 将最小的 10 个合数填到图 19-2 的 10 个空格中，要求满足以下条件：
 ①填入的数能被它所在列的最上面给出的数整除；②第三行中每个数都比它上面那一格中的数大；
 请问：第三行中 5 个数的和最小等于多少？

5. 将 1 至 7 这 7 个自然数填入图 19-3 中的 8 个方格内，要求其中有一个数字用两次，其余数字各用一次，并使图中右下角的 4 个方格中的每格内所填的数均等于它上方和左方相邻方格内两个数的平均数，请给出一种填法，并求出共有多少种填法.

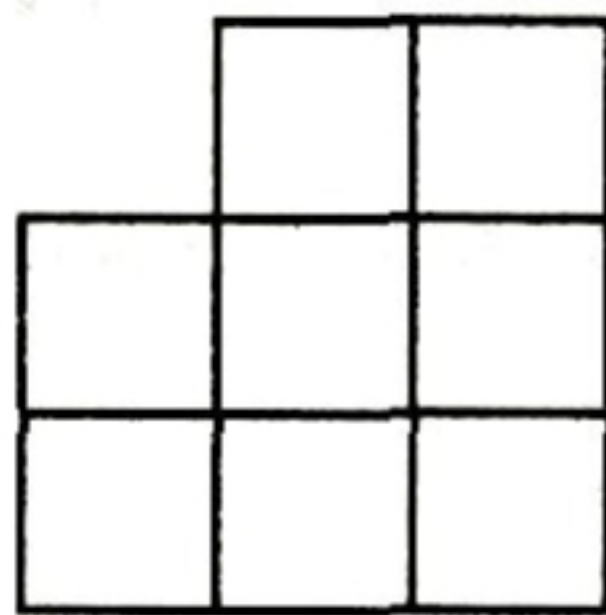


图 19-3

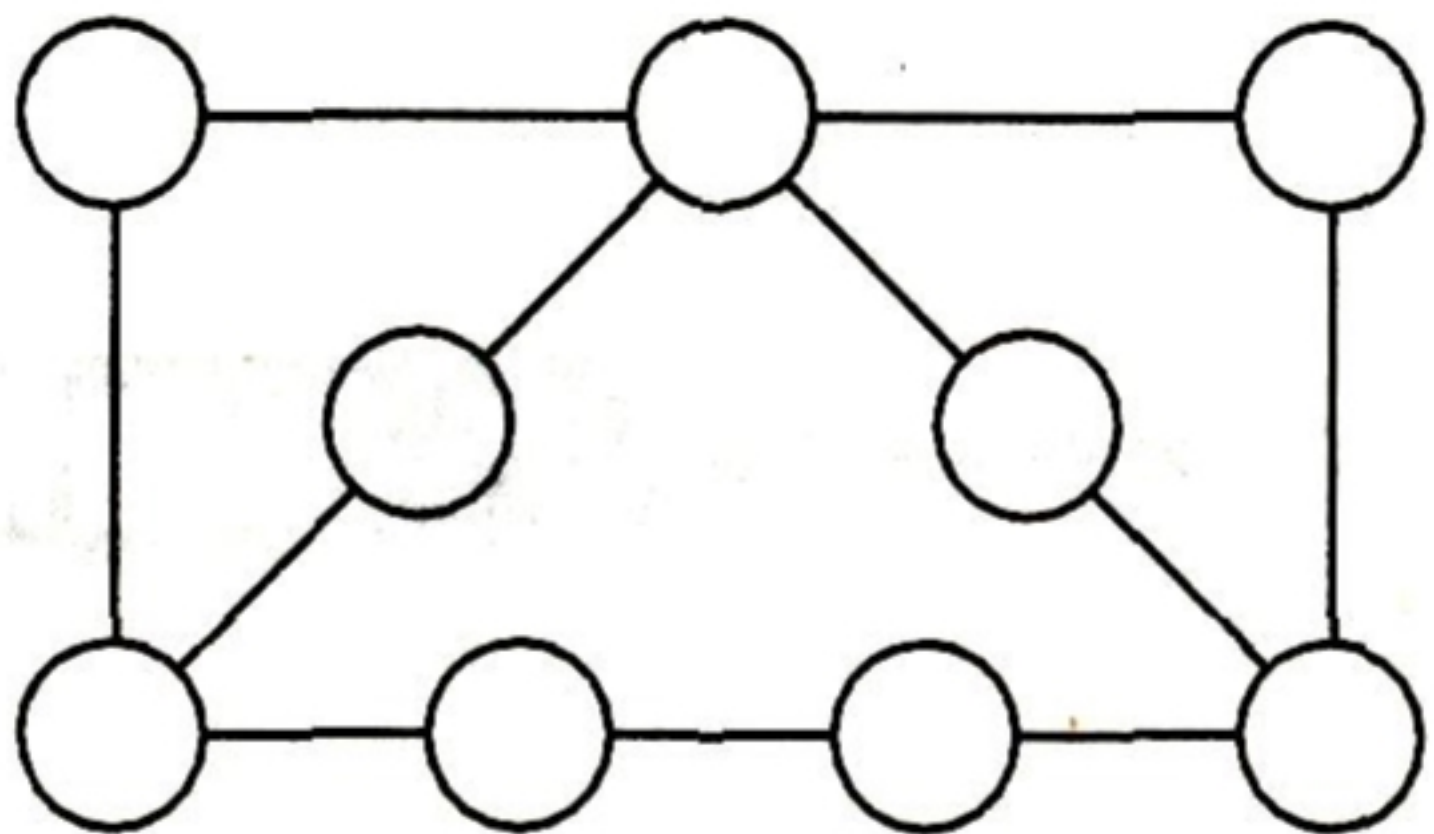


图 19-4

6. 请将数字 1 至 9 分别填入图 19-4 中的各个圆圈中，使得图中每条线段两个端点中所填的数的差（大减小）均为 3 或 4. 请给出一种填法，并求出共有多少种填法.

7. $6 \square 0.3 = \bigcirc$, $6 \square \frac{1}{0.3} = \bigcirc$, $6 \square 0.\dot{3} = \bigcirc$, $6 \square \frac{1}{0.\dot{3}} = \bigcirc$.

在上面 4 个算式的方框内，分别填上加、减、乘、除 4 个运算符号，使 4 个算式的得数之和尽可能大. 请



问：这个最大的和等于多少？

8. 请用 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这 10 个数字各一次，组成 5 个自然数，使得它们依次是某个自然数的 1、2、3、4、5 倍。

9. 在如图 19-5 所示表格第二行的每个空格内，填入一个整数，使它恰好表示它上面的那个数字在第二行中出现的次数，第二行中的 5 个数字各是多少？

0	1	2	3	4

图 19-5

$$\begin{array}{rcccc} & F & I & V & E \\ + & F & O & U & R \\ \hline N & I & N & E & \end{array}$$

图 19-6

10. 图 19-6 中相同字母表示相同数字，不同字母表示不同数字，且 $\overline{FIVE}$ 是 5 的倍数， $\overline{FOUR}$ 是 4 的倍数，求 $\overline{NINE}$ 的所有可能值。

拓展篇

1. 自然数 12 和 60 是一对很有趣的数，它们的积 $12 \times 60 = 720$ ，恰好是 $12 + 60 = 72$ 的 10 倍，满足上述条件的数对还有哪些，请再举出 3 对。



2. 将 $\frac{1}{6}$ 表示成两个自然数的倒数之和，给出所有的答案.

3. 求方程 $\frac{1}{a} + \frac{1}{35} = \frac{1}{b}$ 的所有正整数解.

4. 将 $\frac{1}{2}$ 写成三个自然数（可以相同）的倒数之和，共有多少种方法？

5. $\overline{ABCD}$ 表示一个四位数， $\overline{EFG}$ 表示一个三位数，A、B、C、D、E、F、G 分别代表 1 至 9 中不同的数字. 已知 $\overline{ABCD} + \overline{EFG} = 1993$. 请问：乘积 $\overline{ABCD} \times \overline{EFG}$ 的最大值与最小值相差多少？



6. 从 1 至 9 中选出 8 个数字填入算式“□□□□+□□□□= 13579”的方框中，每个数字恰好填一次，使等式成立，请问：

(1) 没有被选出的数字是多少？

(2) 两个四位数中较大的数最小是多少？最大是多少？

7. 在下面两个算式： $\overline{ABBC} = D \times \overline{DDE}$ ， $\overline{CBBA} = D \times \overline{EFG}$ 中，相同的字母代表相同的数字，不同的字母代表不同的数字，求 $B + D + F$ 的值.

8. 小明按照下列算式：

乙组的数□甲组的数○1=

对甲、乙两组数逐个进行计算，其中方框是乘号或除号，圆圈是加号或减号，他将计算结果填入图 19-7 的表中. 有人发现表中 14 个数中有两个数是错的，请你改正. 请问：改正后的两个数的和是多少？

结果 乙 \ 甲	0.625	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{14}$	3
$2\frac{17}{32}$	5.05	$4\frac{51}{64}$	$4\frac{5}{16}$	$1\frac{27}{32}$
2	3.4	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{3}$	1.5

图 19-7

9. 如图 19-8，请在这个 3×6 方格表的每个空格中填入一个整数，使得对于第一行中的每个数，它在第二行中出现的次数恰好等于该列第三行所填的数，而它在第三行中出现的次数又恰好等于该列第二行所填的数。（例如第二行第一列中的 3，表示第三行中有 3 个 0。）

0	1	2	3	4	5
3					

图 19-8

10. 在图 19-9 所示的 3×3 方格表中，“北、京、巨、人、学、校、欢、迎、你”这 9 个汉字分别表示 1 至 9 中的不同数字，并满足：①每一个“田”字形内 4 个数之和都相等；② $北^2=迎^2+你^2$ ；③学>校。请问：“北京巨人学校欢迎你”所代表的九位数是多少？

北	京	巨
人	学	校
欢	迎	你

图 19-9

11. 将 1 至 9 填入图 19-10 的圆圈内，使图中所有三角形（共 7 个）的 3 个顶点上数字之和都相等。

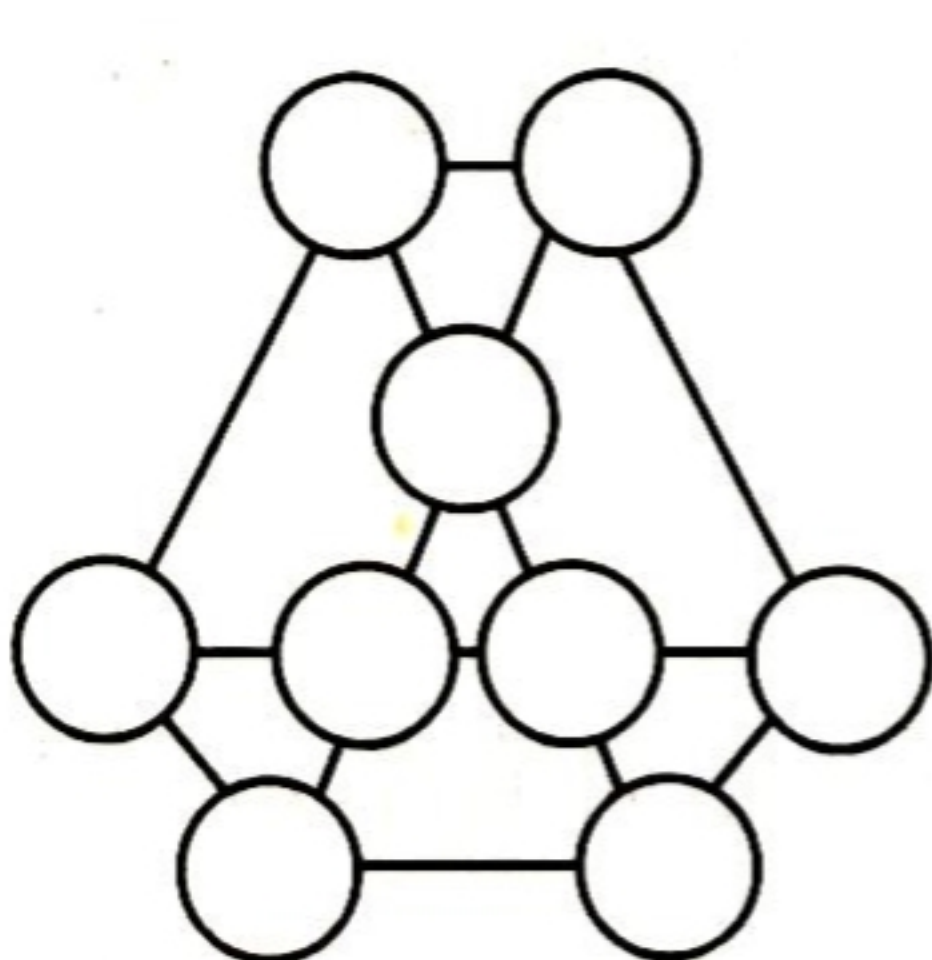


图 19-10

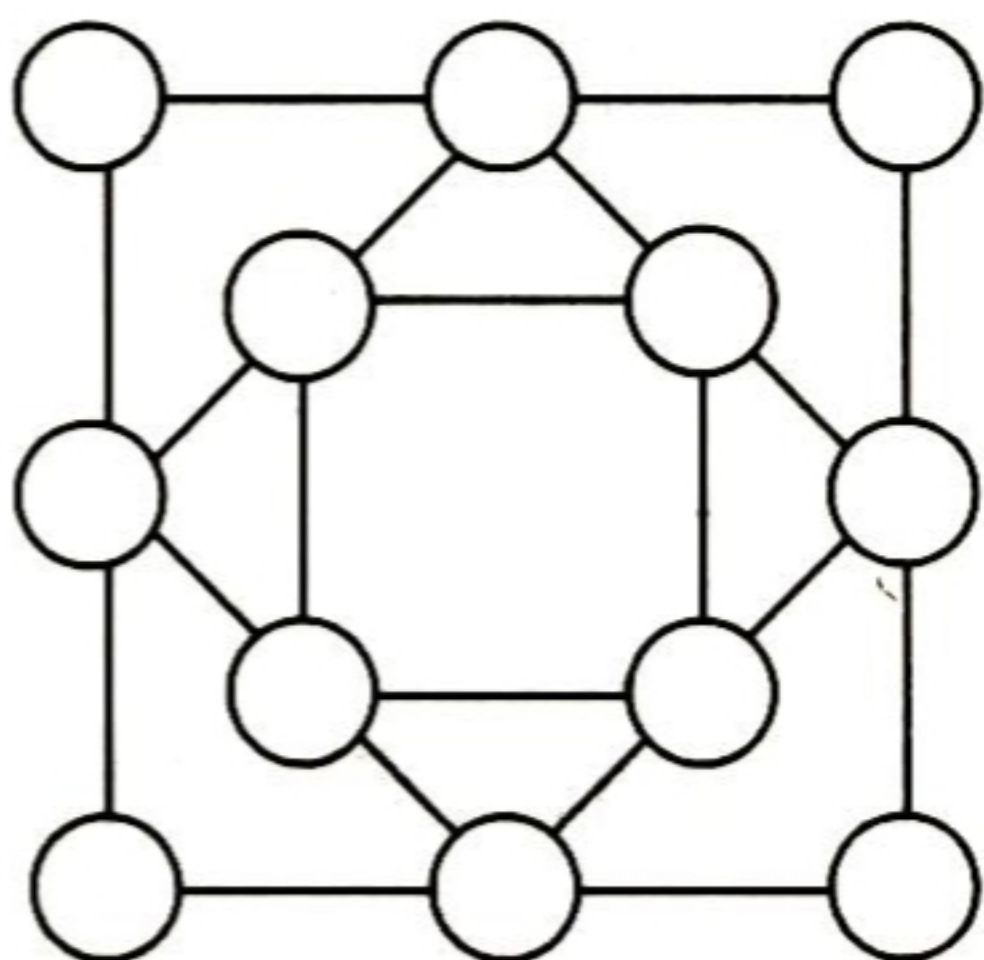


图 19-11



12. 图 19-11 中有大、中、小 3 个正方形，组成了 8 个三角形，现在先把 1、2、3、4 分别填在大正方形的 4 个顶点上，再把 1、2、3、4 分别填在中正方形的 4 个顶点上，最后把 1、2、3、4 分别填在小正方形的 4 个顶点上，请问：
- (1) 能否使 8 个三角形顶点上数字之和都相等？如果能，请给出填数方法；如果不能，请说明理由。
- (2) 能否使 8 个三角形顶点上数字之和各不相同？如果能，请给出填数方法；如果不能，请说明理由。

超越篇

1. 请在算式 “ $\frac{1}{\square\square 0} + \frac{1}{\square\square 0} = \frac{1}{105}$ ” 的每个方框中填入一个数字，使其成为等式，请写出所有的可能。

2. 在图 19-12 的算式中填入 0 至 9 各一次，使算式成立。算式结果的四位数最小可能是多少，最大可能是多少？

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline \square \square \square \square \end{array}$$

图 19-12

3. 在图 19-13 所示的除法竖式中，只知道一个数字“3”，且商是一个循环小数。问被除数是多少？

$$\begin{array}{r} \square \square \square \overline{) \square \square \square \square} \\ \underline{\square \square \square} \\ \square \square \square \\ \underline{\square \square \square} \\ \square \square \square \\ \underline{\square \square \square} \\ \square \square \square \\ \underline{\square \square \square} \\ \square \square \square \end{array}$$



4. 图 19-14 中有 11 条直线. 请将 1 至 11 这 11 个数分别填在 11 个圆圈里, 使每一条直线上所有数的和相等. 求这个相等的和以及标有 * 的圆圈中所填的数.

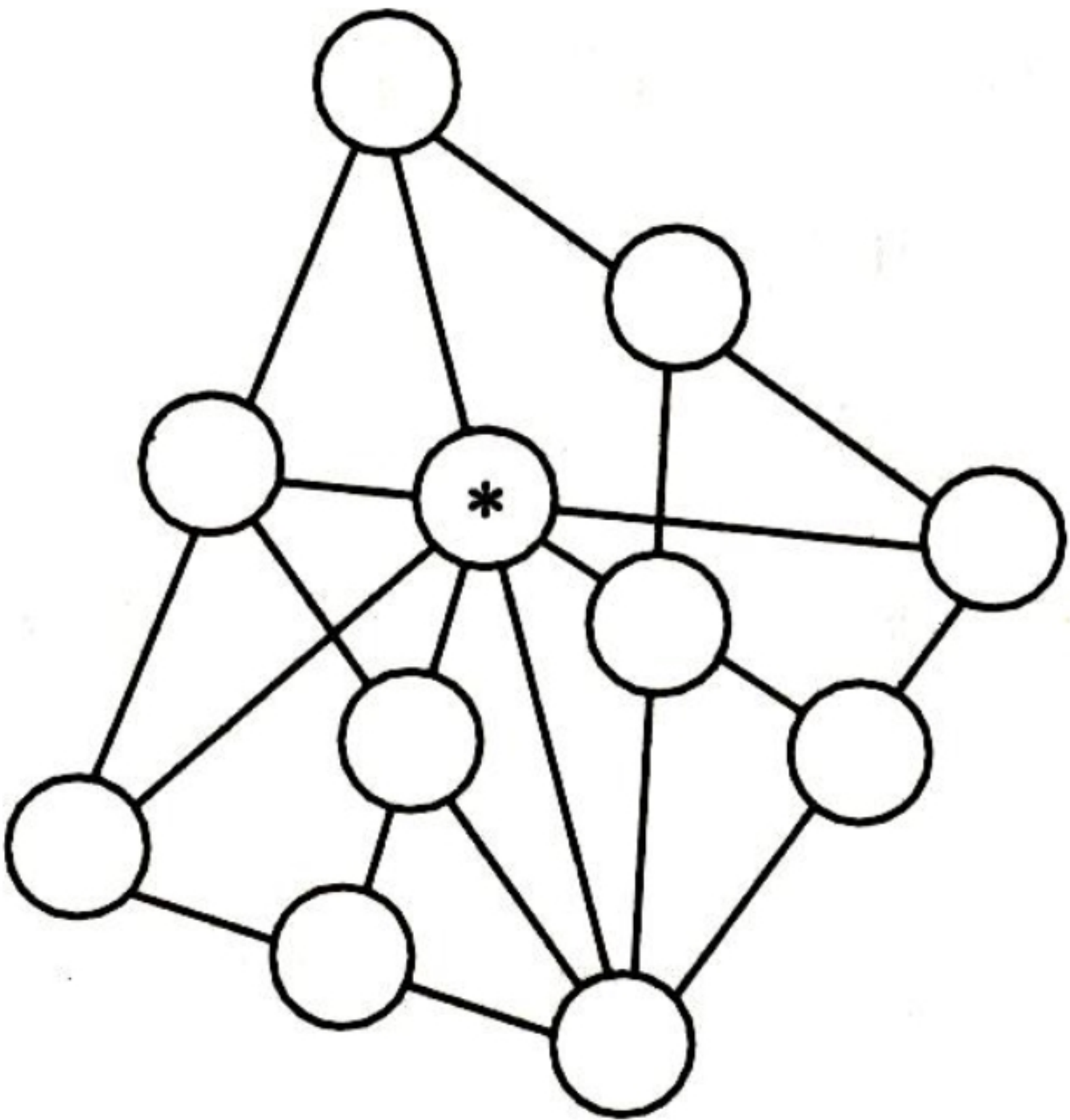


图 19-14

5. 将 1 至 12 这 12 个自然数填入图 19-15 的“灯笼”中, 使得四个椭圆和两条竖线上的各数之和均相等. 这个和数最大是多少? 请给出一种填法.

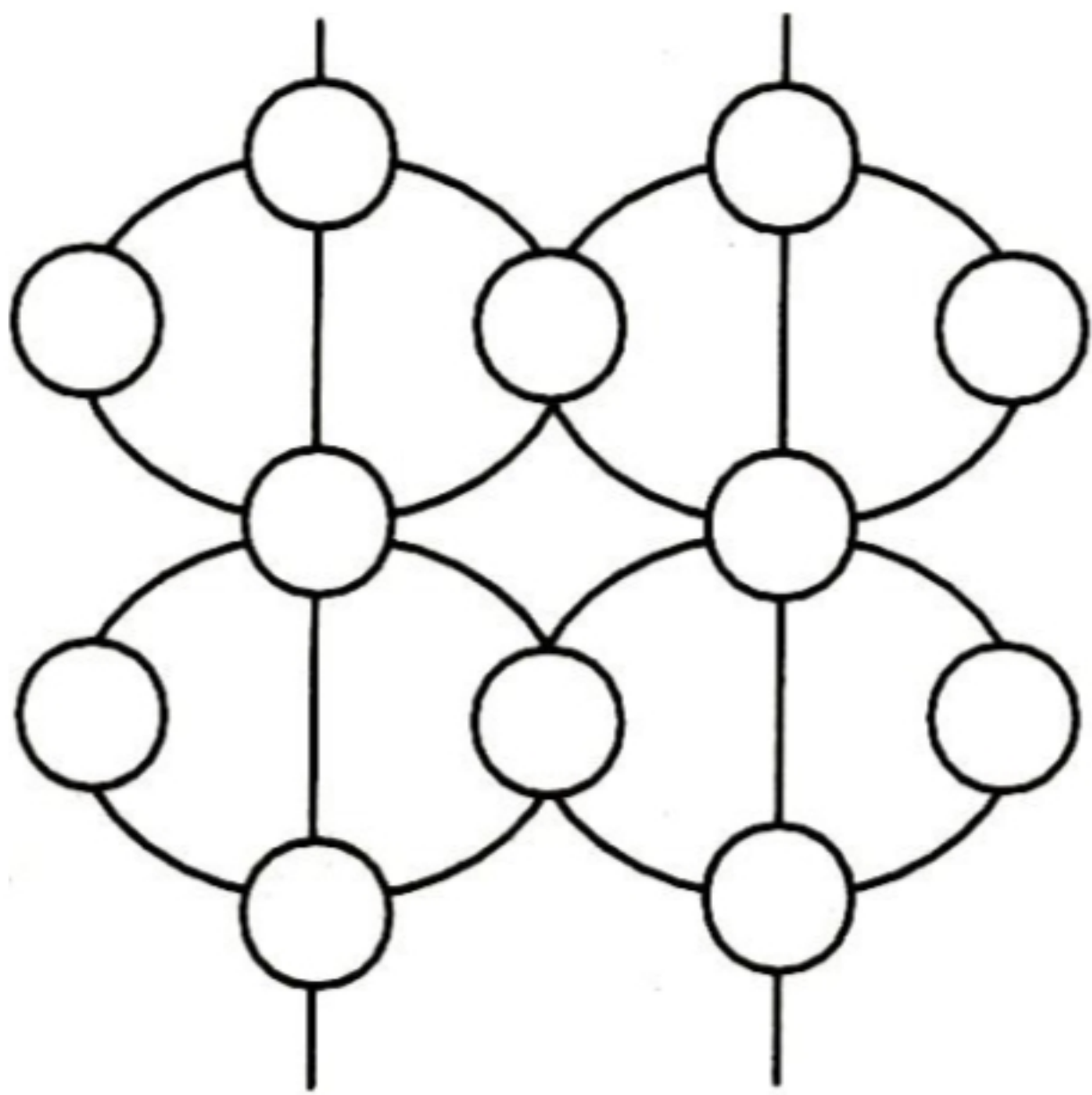


图 19-15

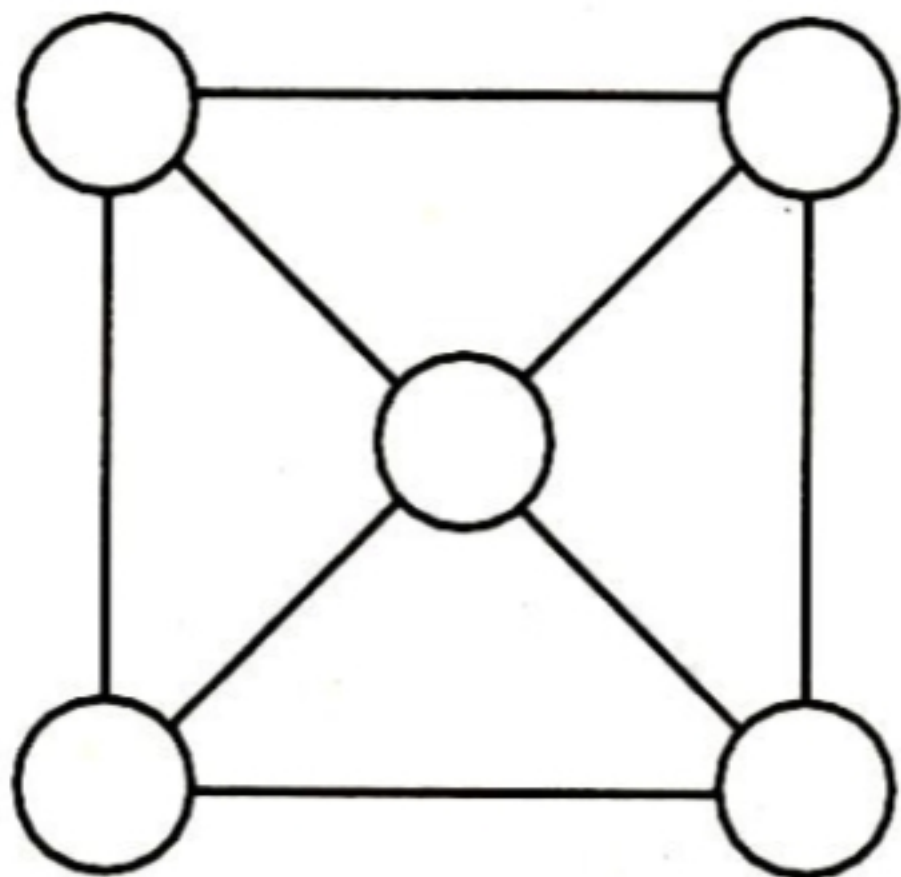


图 19-16

6. 在图 19-16 的五个圆圈内各填入一个正整数 (可以填相同的数), 使得图中八个三角形的顶点数字之和互不相同. 满足这个条件的自然数有很多组, 求使得所填五个数之和最小的一组.

7. 图 19-17 中共有 9 条直线，每条直线上有 3 个圆圈．现将 1 至 9 填入图中的圆圈内，能否找到满足下列要求之一的填法？如果能，请给出具体填法；如果不能，请说明理由．

(1)使得每条直线上 3 个圆圈内所填数之和都相等；

(2)使得其中有 8 条直线上 3 个圆圈内所填数之和相等．

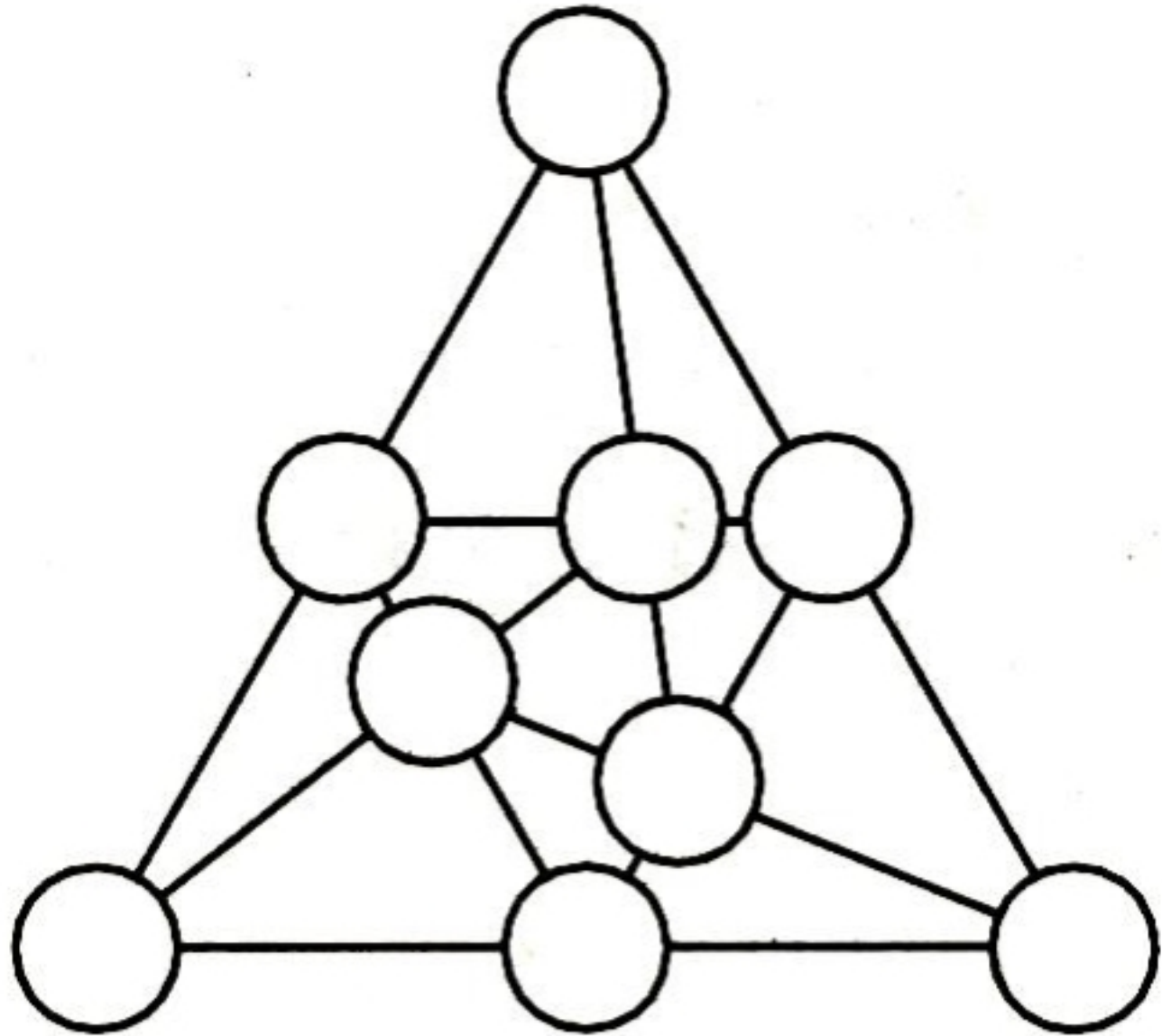


图 19-17

8. (1)请将 1 -15 填入图 19-18 中左边的 15 个圆圈中，使得除了第一行外每个圆圈内的数都等于与其肩膀上两个圆圈内的数之差（大数减小数），其中数字 11 已填好．

(2)能否将 1 -21 这 21 个自然数分别填入图 19-18 中右边的各个圆圈里，使得除了第一行以外，每个圆圈内的数都等于其肩膀上两个圆圈内的数之差（大数减小数）?如果能，请给出一种填法；如果不能，请说明理由．

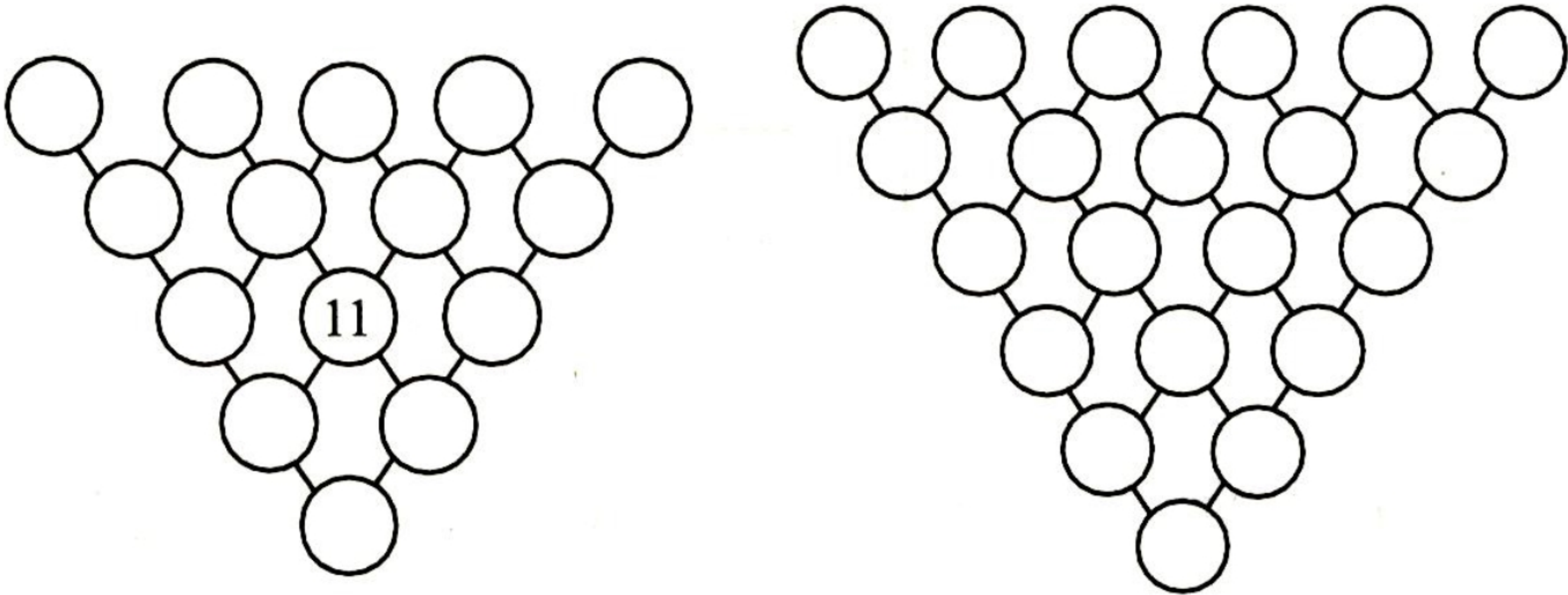


图 19-18

第 20 讲 计数综合（四）

内容概述

了解对应的思想，能够建立起一类对象与另一类对象之间的对应关系，并通过对后者的计数得到前者的答案；需要考虑对称性的各种复杂计数问题，解题时要注意旋转和翻转对结果的影响。

典型问题

提高篇

1. 在 8×8 的方格表中，取出一个如图 20-1 所示的由 3 个小方格组成的“L”形，共有多少种不同的取法？

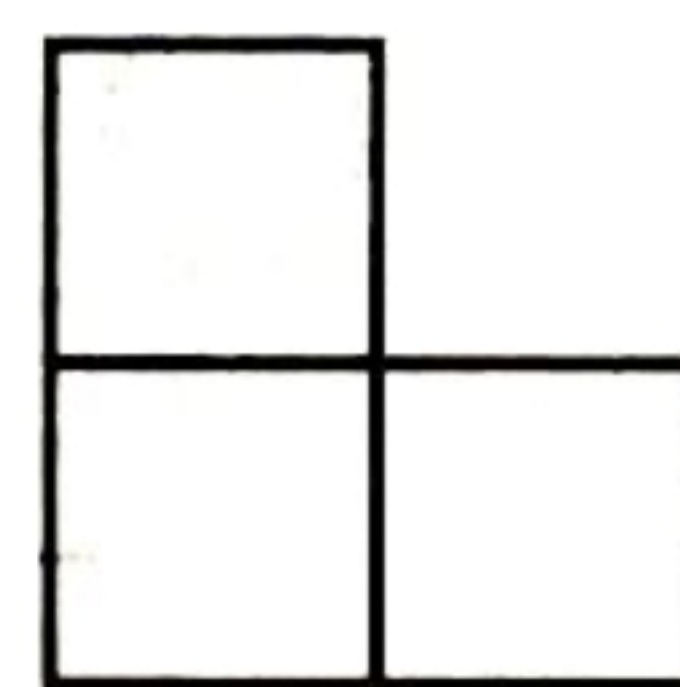


图 20-1

2. 冬冬妈妈每天让冬冬吃 1 个鸡蛋或者 1 个鸭蛋，那么冬冬吃完家里的 4 个鸡蛋和 4 个鸭蛋共有多少种吃法？

3. 常昊与古力两人进行围棋“棋圣”冠军争霸赛，比赛没有平局，谁先胜 4 局即获得比赛的胜利，请问：比赛过程一共有多少种不同的方式？



4. 10 只相同的橘子放到 3 个不同的盘子里，每个盘子至少放 1 只，一共有多少种不同的放法？
5. 一部电视连续剧共 8 集，电视台要在周一到周四这 4 天内按顺序播完，其中可以有若干天不播，共有多少种安排播出的方法？
6. 某班 40 名学生参加了一项关于“超市是否应该提供免费塑料袋”的调查，每人均在“应该提供”、“不应该提供”和“无所谓”三个选项中做出了选择。请问：三个选项的统计数字共有多少种不同的可能？
7. 海淀大街上一共有 18 盏路灯，区政府为了节约用电，打算熄灭其中的 7 盏。但为了行路安全，任意相邻的两盏灯不能同时被熄灭，请问：一共有多少种熄灯方案？
8. 数字和为 9，而且不含数字 0 的三位数共有多少个？四位数共有多少个？



9. 有一批规格相同的均匀圆棒，每根划分成相同的 5 节，每节用红、黄、蓝 3 种颜色中的一种来涂，相邻两节不能同色，那么可以染成多少种不同的圆棒？

10. 给一个正四面体的 4 个面染色，每个面只允许用一种颜色，且 4 个面的颜色互不相同。现有 5 种颜色可选，共有多少种不同的染色方式？（旋转后是一样的染色情况算是同一种方式）

拓展篇

1. 在 8×8 的方格棋盘中，一共可以数出多少个如图 20-2 所示的由 4 个单位小正方形组成的“L”型？

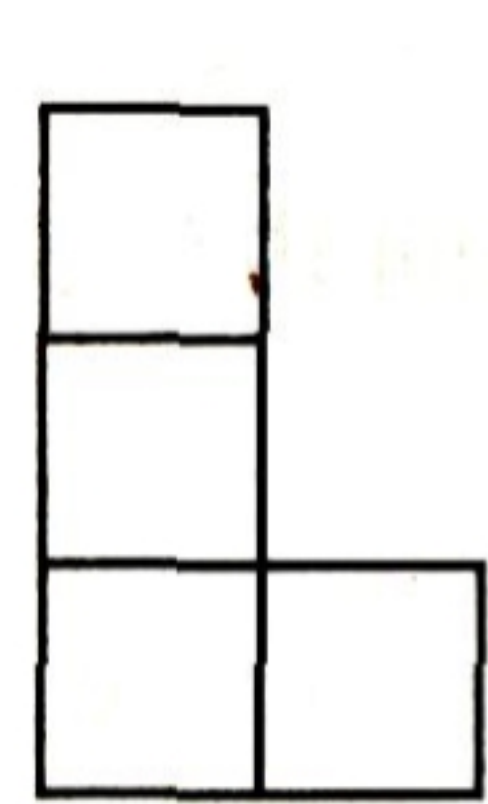


图 20-2

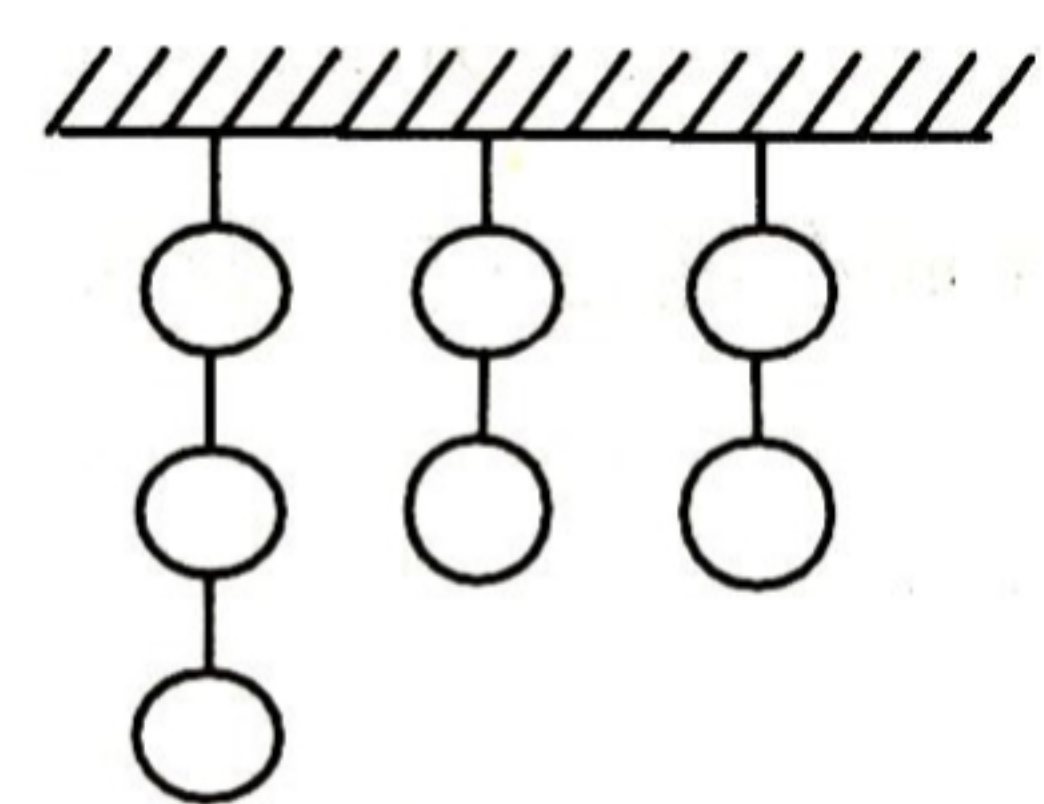


图 20-3

2. 一次射击比赛中，7 个泥制的靶子挂成 3 列（如图 20.3）。一位射手按下列规则去击碎靶子：先挑选一列，然后击碎这列中尚未被击碎的靶子中最下面的一个，若每次都遵循这一原则，则击碎全部 7 个靶子共有多少种不同的顺序？



2. (1)一只青蛙沿着一条直线跳跃 4 次后回到起点. 如果它每一次跳跃的长度都是 1 分米, 那么这只青蛙共有多少种可能的跳法?
- (2)如果这只青蛙在一个方格边长为 1 分米的方格纸上沿格线跳跃 4 次后回到起点, 每次跳跃的长度仍是 1 分米, 那么这只青蛙共有多少种可能的跳法?

4. 如图 20-4 所示, 有两条平行线, 如果每条直线上有 3 个点, 连出 3 条线段, 从图中最多可以数出 5 个三角形; 如图 20.5 所示, 如果每条直线上有 4 个点, 连出 4 条线段, 从图中最多可以数出 16 个三角形, 如果每条直线上有 10 个点, 连出 10 条线段, 从图中最多可以数出多少个三角形?

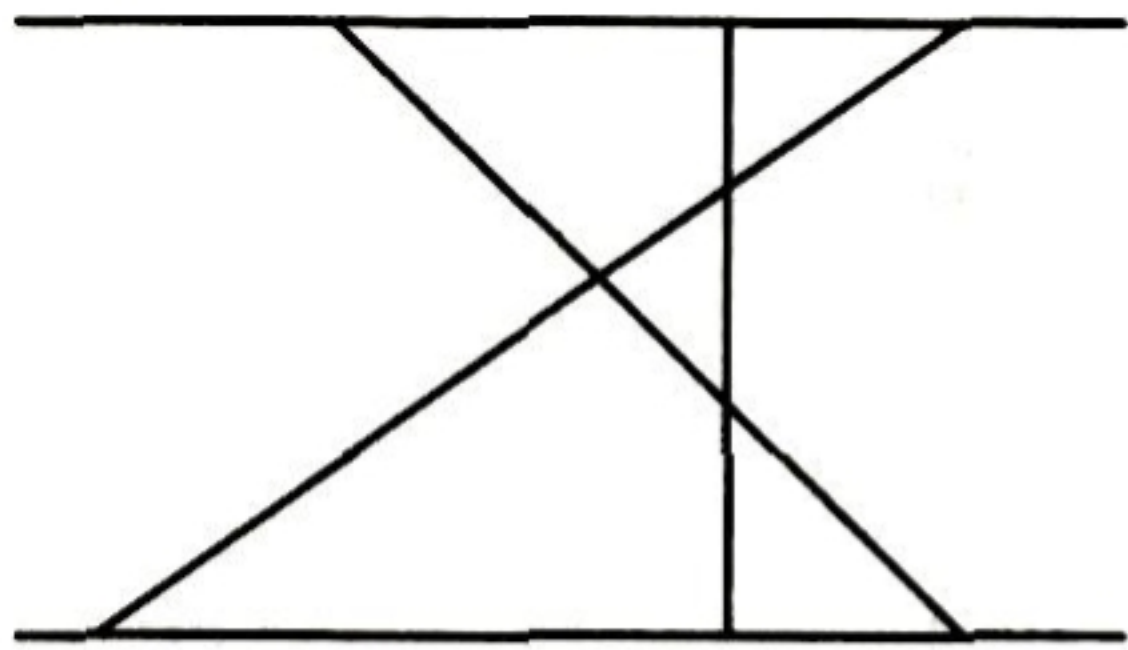


图 20-4

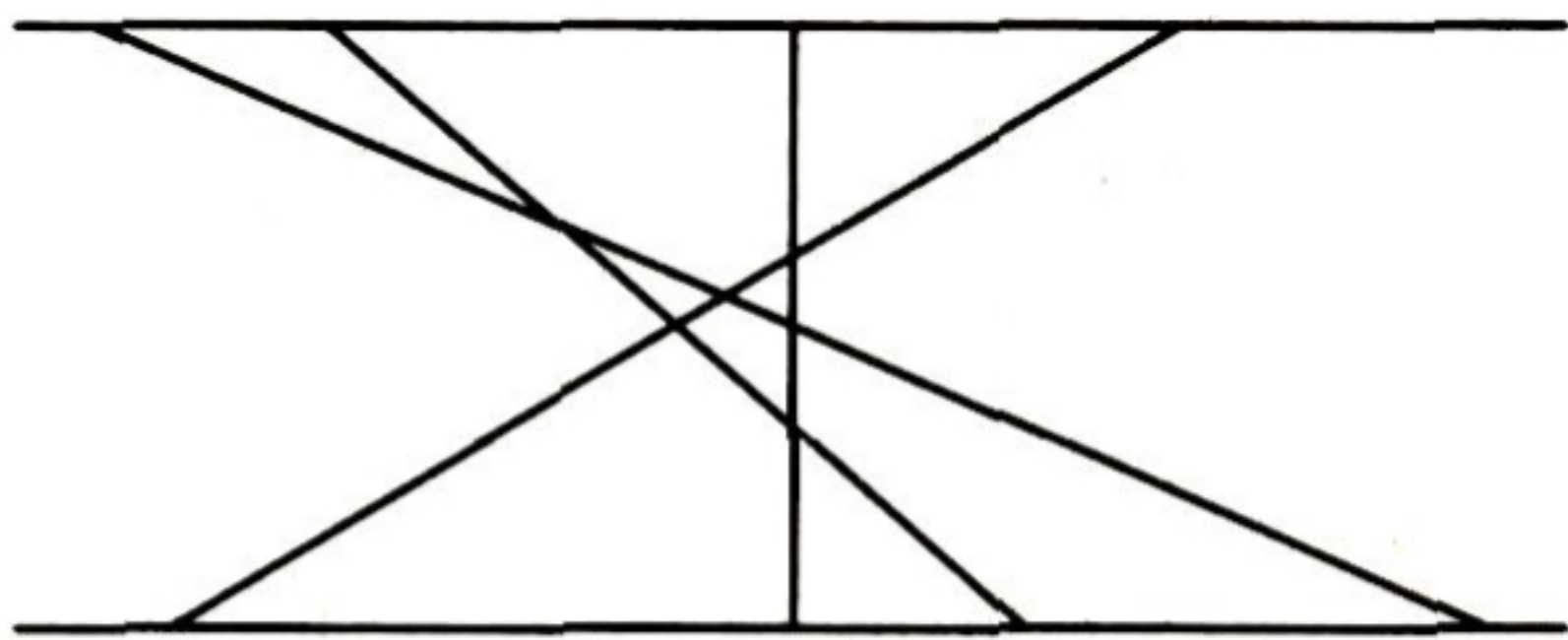


图 20-5

5. 把 20 个苹果分给 3 个小朋友, 每个小朋友至少分 1 个, 共有多少种分苹果的方法? 如果有小朋友没有分到苹果, 共有多少种分法?
6. 冬冬有 10 块大白兔奶糖, 他从今天起, 每天至少吃一块, 直到吃完. 请问一共有多少种不同的吃法?



7. 美国众议院 435 名议员对“拒绝缴纳联合国会费”的提案进行投票，每名议员都可以选择投赞同票、反对票和弃权票中的某一种，并且只要赞成票多于总票数的一半，提案就会被通过，否则不能通过。表决结果是拒绝缴纳。试问共有多少种可能的三种票数的统计情况？

8. 有 10 个小朋友排成一列，要从中选出 3 个互不相邻的小朋友，有多少种不同的选法？

9. 一次自助餐，共有 10 种菜，每个人都有 4 个盘子可以选菜，每个盘子只能放 1 种菜，但可以重复选菜，请问：共有多少种选菜方案？

10. 3 个男生和 7 个女生站成一排，要求每 2 个男生之间至少有 2 个女生，共有多少种排列方法？如果站成一圈呢？



11. 一个长方体的各边长都是整数，并且它的体积是 2310，那么这样的长方体有多少个？（如果两个长方体经过旋转可以重合，则认为它们是同一个长方体.）

12. 用 4 种颜色为一个正方体的 6 个面染色，要求每个面只能用 1 种颜色，且相邻面的颜色必须不相同，如果将正方体经过翻转后颜色相同，就认为是同一种染色方法，那么共有多少种不同的染色方法？

超越篇

1. 某工厂生产一批玩具，玩具为一条圆环上均匀安装着 13 个小球，其中 3 个是红球，10 个是白球. 如果 2 个圆环通过翻转后可以叠放在一起，使得红球对红球、白球对白球，这样的两个圆环就认为是相同的. 那么一共可以生产多少种不同的圆环？

2. 对于由 1 至 6 组成的无重复数字的六位数，如果它的首位数字不是 1，那么可以进行如下的 1 次操作：记首位数字为 n ，则将数字 n 与第七位上的数字对换，例如，245136 可以进行两次操作：245136→425136→125436. 请问：可以进行 5 次操作的六位数有多少个？



3. 大小形状相同的红、黄、蓝三种颜色的珠子依次有 2 枚、2 枚、3 枚，现在要将它们穿成一串，要求相同颜色的珠子不能相邻，共有多少种不同实质的穿法？如果要穿成一个圈呢？

4. 有 8 个队参加比赛，采用如图 20-6 所示的淘汰制方式．问：在比赛前抽签时，可以得到多少种实质不同的比赛安排表？

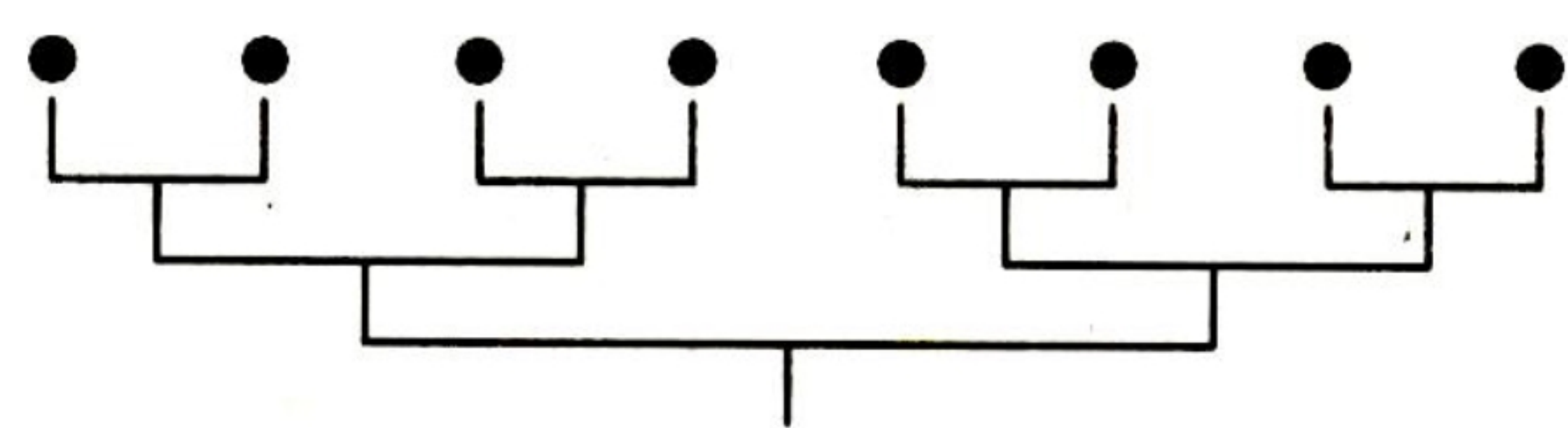


图 20-6

4. 平面上 8 个点构成一个凸八边形，将这 8 个点中任意 2 个点之间连接一条线段，已知任意 3 条线段都没有交于一点，请问：

- (1) 八边形内共连接了多少条线段？
- (2) 这些线段在八边形内共有多少个交点？
- (3) 所形成的图形中最多可以数出多少个三角形

6. 动物园的门票 5 元 1 张，每人限购 1 张．现在有 10 个小朋友排队购票，其中 5 个小朋友只有 5 元的钞票，另外 5 个小朋友只有 10 元的钞票，售票员没有准备零钱，请问：有多少种排队方法，使售票员总能找得开零钱？



7. 经理将要打印的信件交给秘书，每次给一封，且放在所有信件的最上面，秘书一有空就从最上面拿一封信来打。有一天共有 7 封信要打印，经理按 1 号信，2 号信，……，7 号信的顺序交给秘书，午饭时，秘书告诉同事，经理已经给了 5 封信，她已经把 5 号信打好了，但未透露上午工作的其他情况，问：

(1)如果上午秘书已经把五封信打完了，那么上午打印信的顺序有多少种可能？

(2)如果上午秘书还没有把信打完，那么下午打印信的顺序有多少种可能？

8. (1)将 8 个黑球和 20 个白球排成一圈，每 2 个黑球之间至少有 2 个白球的排列方法有多少种？

(2)8 名女生，20 名男生站成一圈，要求每 2 名女生之间至少有 2 名男生。有多少种不同的站法？（经过旋转后相同的算作同一种排法，答案用阶乘表示.）



第 21 讲 构造论证（二）

内容概述

各种需要构造具体实例或给出严格论证的组合问题．论证中的常用手段包括抽屉原则、整除性分析、染色分析和不等式估计等．

典型问题

提高篇

1. 如图 21-1 所示，在 6×6 的警戒方格内，每个哨所可以监视横、竖、斜方向的全部单位方格．现在已经建了两个哨所．请你挑选一个方格，再建立一个哨所，使得所有的方格都被监视到．

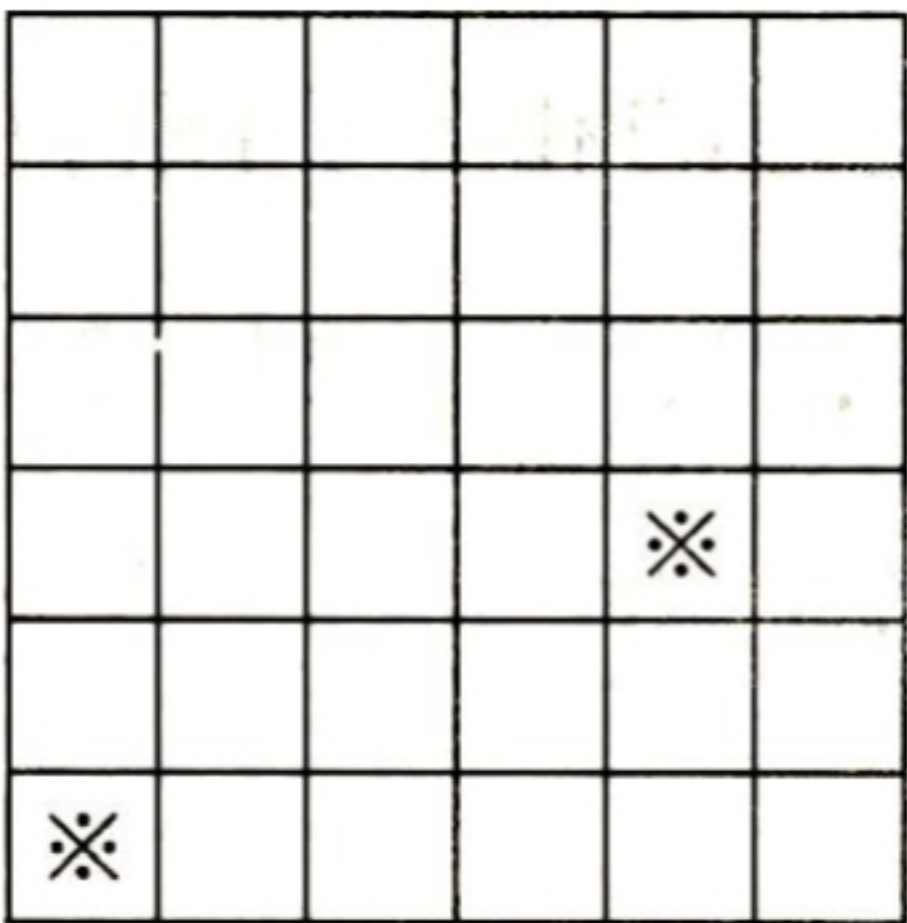


图 21-1

2. (1)把 1, 2, 3, ..., 8, 9 按合适的顺序填在图 21-2 第二行的空格中，使得每一列上、下两数之和都是平方数．
- (2)能否将 1, 2, 3, ..., 10, 11 按合适的顺序填在图 21-3 第二行的空格中，使得每一列上、下两数之和都是平方数？

1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 21-2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

图 21-3

3. 今有长度为 1, 2, 3, ..., 198, 199 的金属杆各一根．请问：能否用上全部的金属杆，不弯曲其中的任何一根，把它们焊接成：(1)一个正方体框架；(2)一个长方体框架？



4. 老师对六位同学的三门功课语文、数学、体育进行了一次测验，六位同学的体育得分是 1 分或者 2 分，数学得分是 1 分、2 分或者 3 分，语文得分是 1 分、2 分、3 分或者 4 分。如果一位同学的三门功课成绩都不低于另一个同学的三门功课成绩，就说这个同学比另一个同学优秀。测验完成后老师发现这六位同学谁也不比别人优秀，请问：这六位同学三科得分分别为多少？

5. 把图 21-4 中的圆圈任意涂上红色或蓝色。问：能否使得每一条直线上的红圈个数都是奇数？

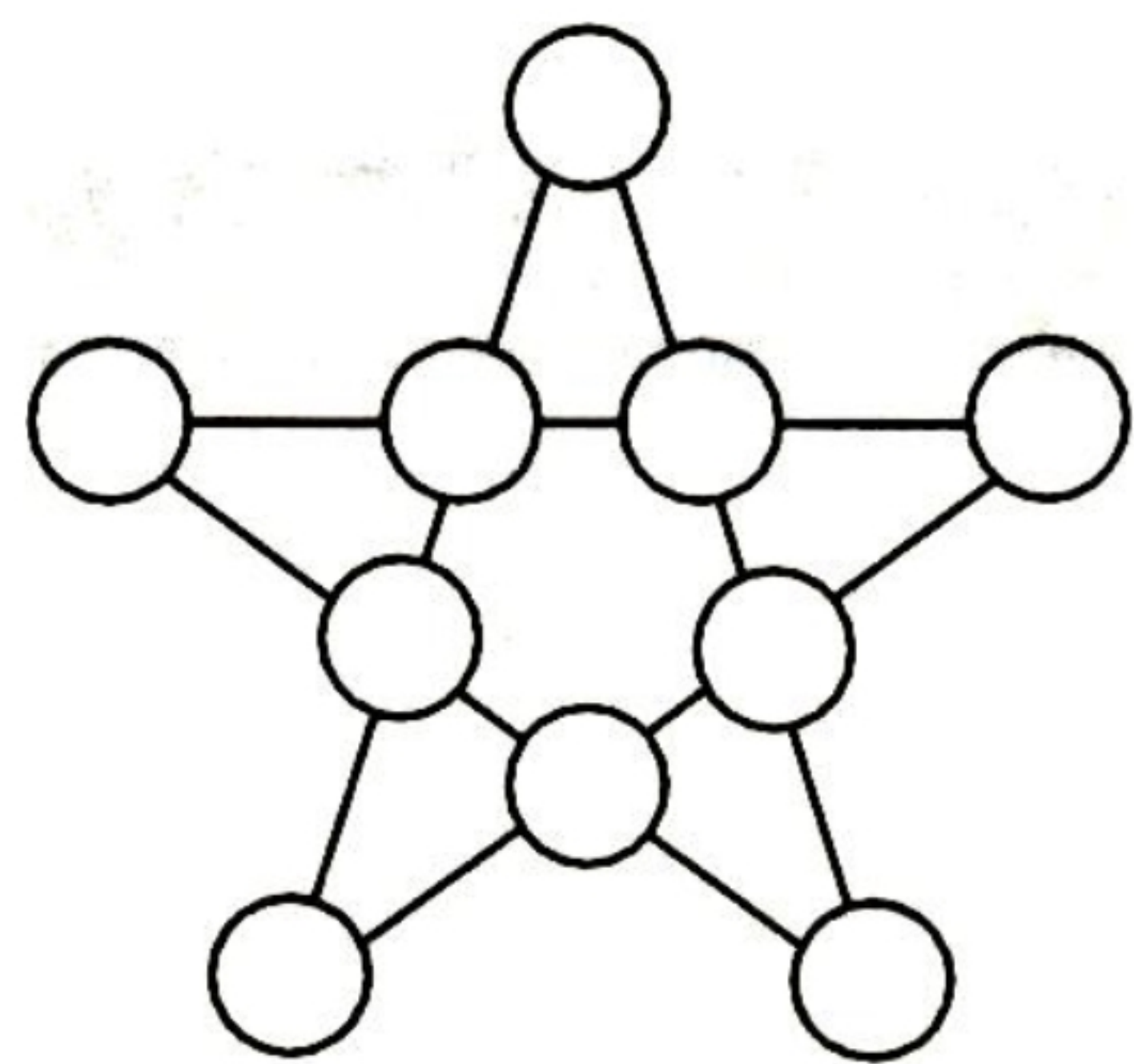


图 21-4

6. (1)能否在 4×4 的方格表的各个小方格内分别填入数 $1, 2, \dots, 15, 16$ ，使得从每行中都可以选择若干个数，这些数的和等于该行中其余各数之和？(2)能否在 5×5 方格表的各个小方格内分别填入数 $1, 2, \dots, 24, 25$ ，使得从每行中都可以选择若干个数，这些数的和等于该行中其余各数之和？



7. 图 21-5 是把一张 6×6 的方格纸去掉两个角所得的图形.
- (1)请把所有的格子涂上红、蓝两色之一,使得每个 1×2 小长方形(不论横竖)的 2 个方格中都恰有 1 个红格和 1 个蓝格;
- (2)能否用 1×2 的小长方形恰好拼满这张表格?

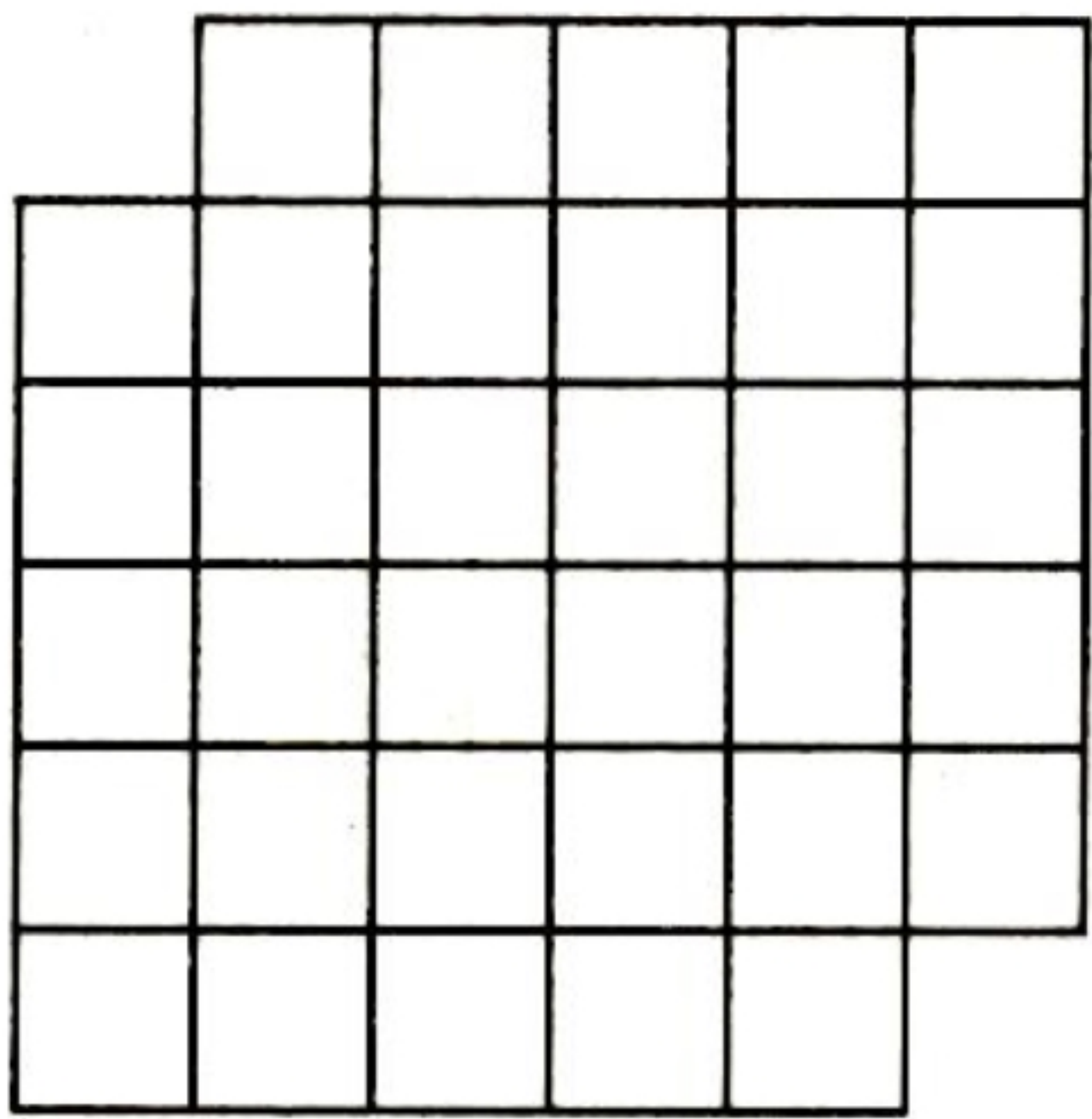


图 21-5

8. 全班 25 名同学分五排,每排五人坐在教室里,每个座位的前、后、左、右位子称为它的邻座.在儿童节每一位同学都买了一份礼物送给他的一个邻座,能否可以让大家适当地送出礼物,使得每一位同学都刚好收到一份礼物呢?

9. 将一个 4×4 的方格表分为如图 21-6 的 5 块区域,在其中填入 16 个互不相同的正整数,使得每一块区域中所填数的和都相等.这 16 个数的总和最小是多少?

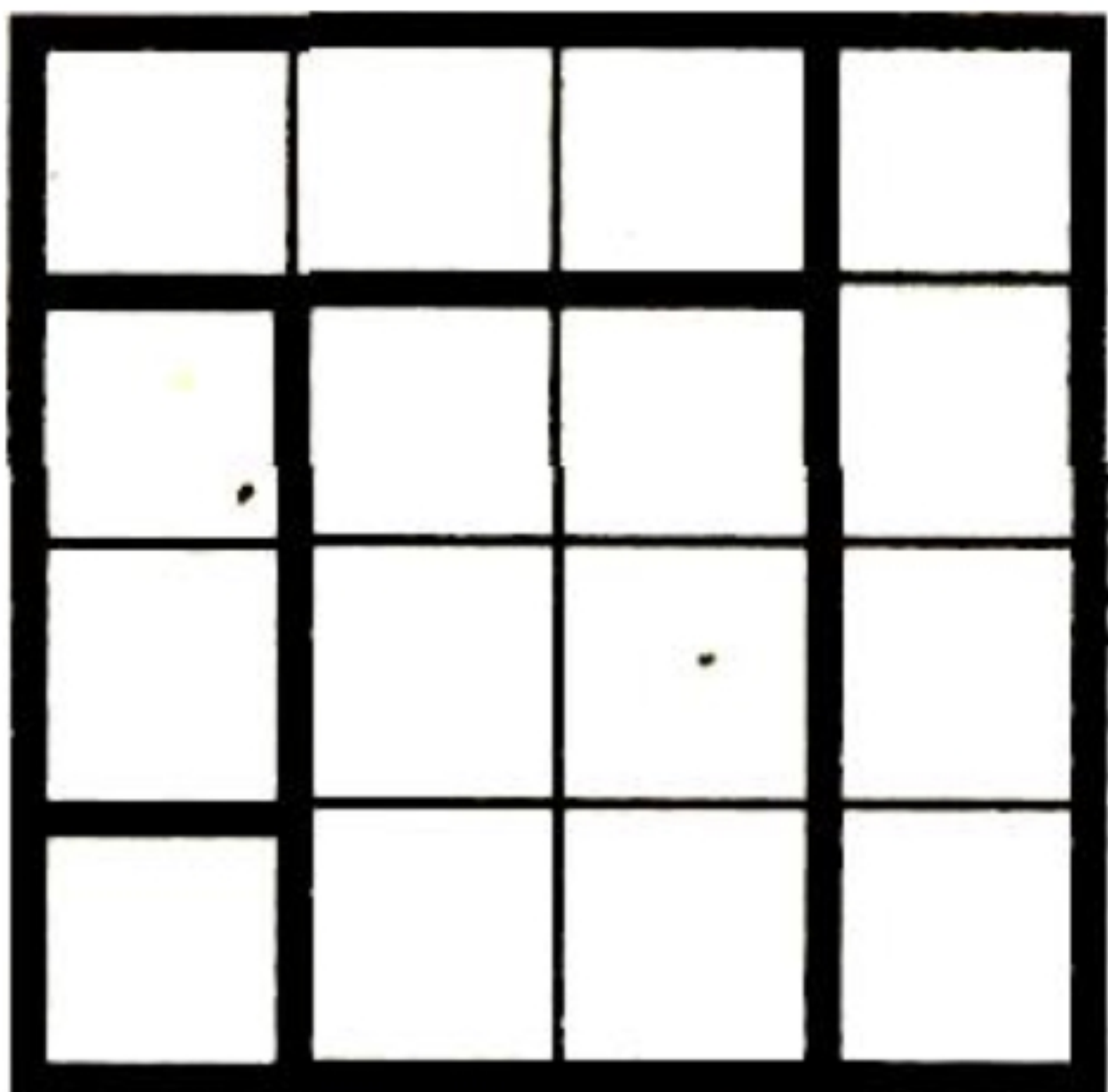


图 21-6



10. 能否将 1, 2, 3, ..., 9, 10 排成一行, 使得任意相邻三个数之和都不大于 167 能否使得任意相邻三个数之和都不大于 15 7

拓展篇

1. 有 7 个不为 0 的自然数, 它们的和正好等于它们的积. 请写出一组满足要求的数.

2. 如图 21-7, 平面上有 5 个点, 它们之间可以连 10 条线段, 请问: 至少要去掉多少条线段, 才能使得其中没有以这 5 个点为顶点的三角形?

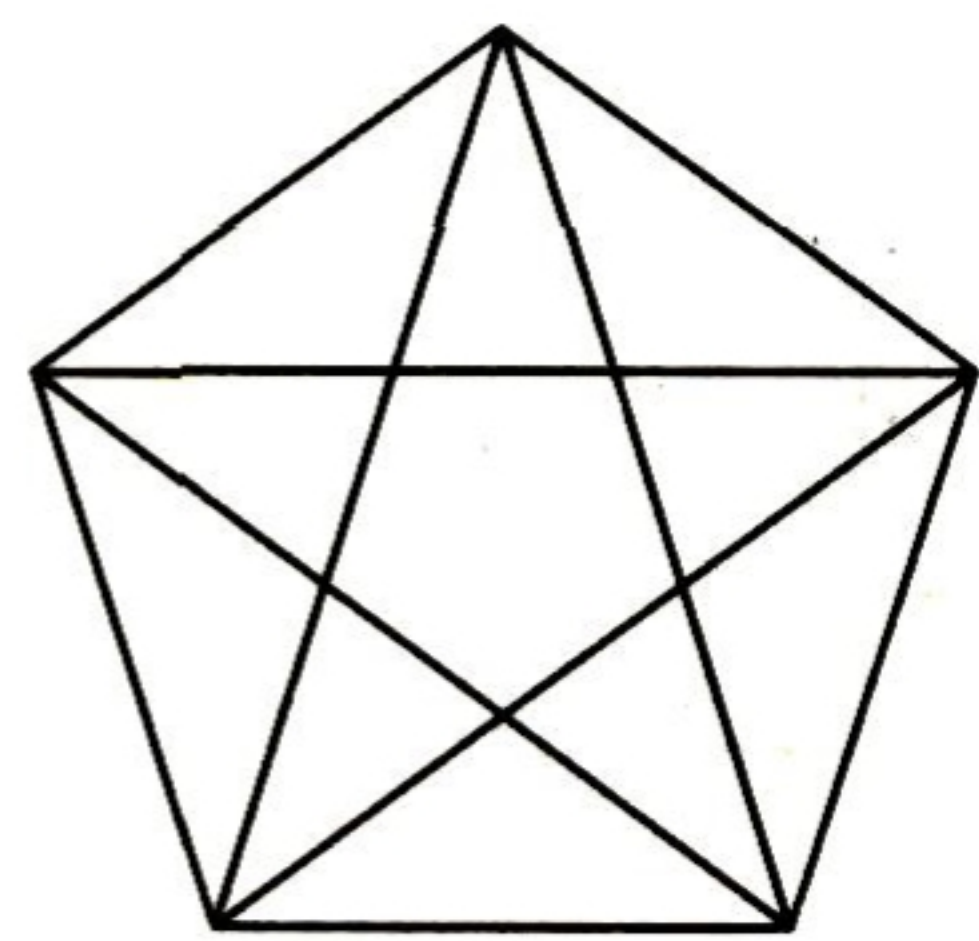


图 21-7

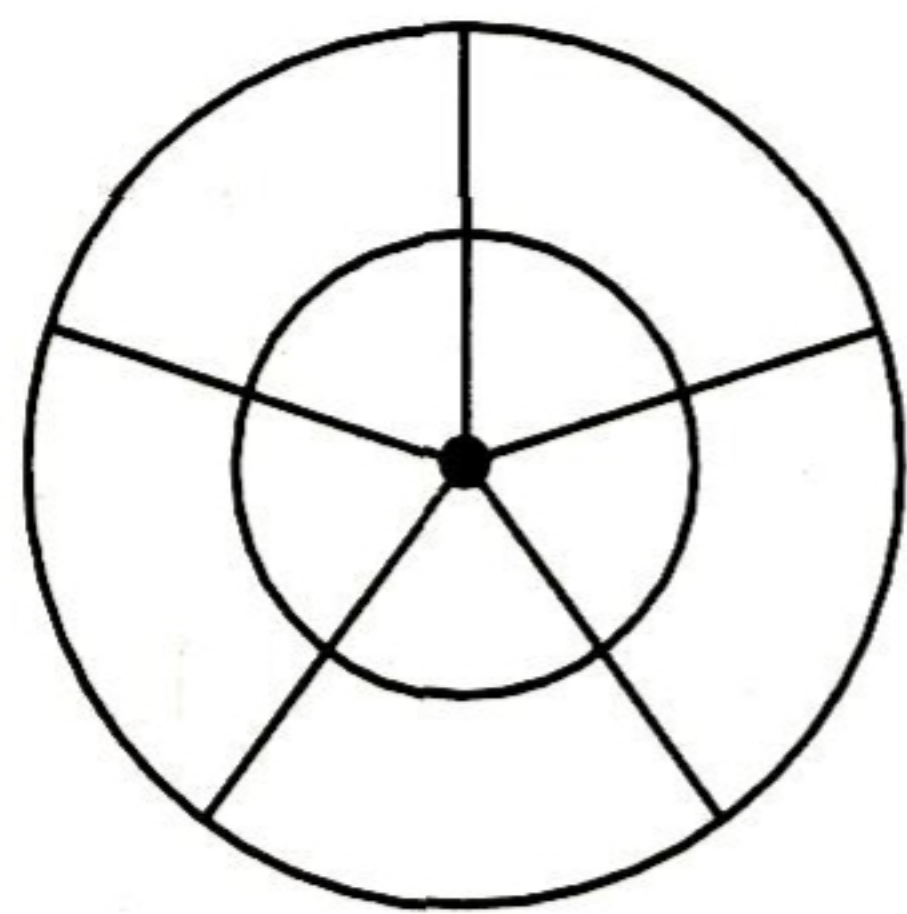
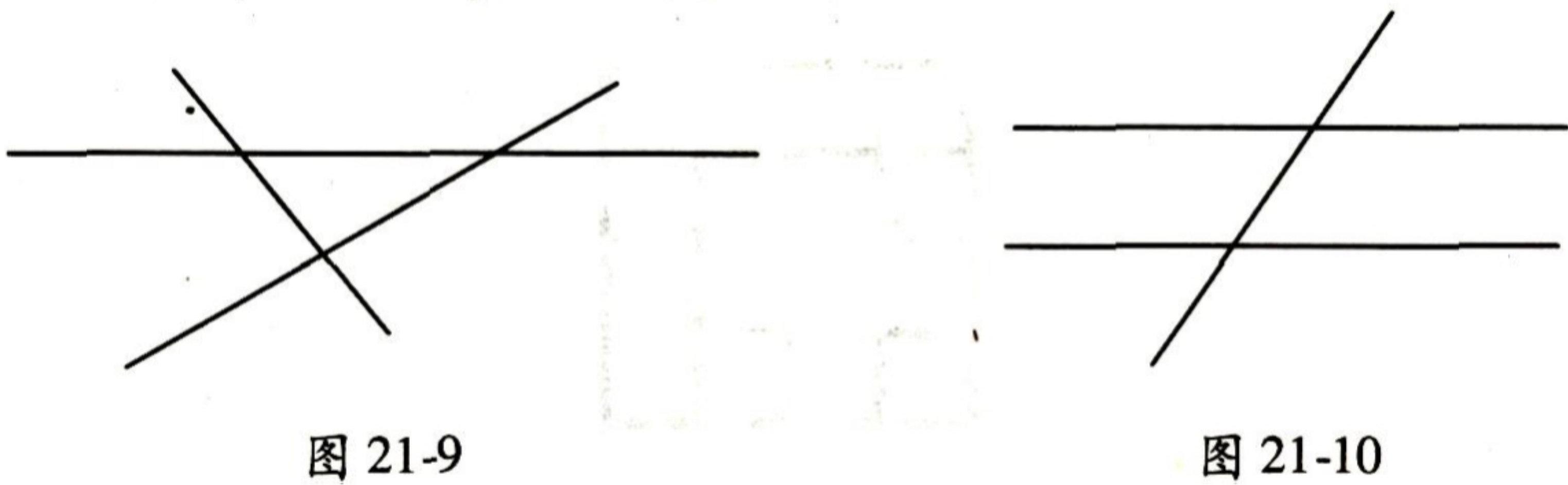


图 21-8

3. 如图 21-8, 一个幸运转盘分成内圆和外环两部分, 并且被五条半径平均分割开. 其中内圆是固定的, 外环可以转动, 但转动后必须使得分割线重新组成半径. 请把 0 至 9 这 10 个数字分别填入图中的 10 个区域, 使得不管外环怎么转动, 总有大圆的一个扇形的两部分所填数字的和为 9.



4. 平面上 6 条直线，它们的交点称为“结点”，每条直线上“结点”的个数称为这条直线的“标志数”，图 21-9 中的 3 条直线的“标志数”都等于 2，只有一种取值；图 21-10 中的 3 条直线的“标志数”却有两种取值．现在请你用直尺画出 6 条直线，使得它们中间任何 3 条直线都不共点，且相应的 6 个“标志数”至少取 3 个不同的数值．



5. (1)能否将 1 至 8 这 8 个数放在一条直线上，使得任意三个相邻数的和都不小于 13？
 (2)能否将 1 至 8 这 8 个数放在一个圆圈上，使得任意三个相邻数的和都不小于 13？

6. 一本故事书有 10 篇故事，这些故事占的篇幅从 1 页到 10 页各不相同，如果从书的第 1 页开始印第一个故事，每一个故事总是从新的一页开始印，那么故事从奇数页起头的最多有几篇？最少有几篇？

7. 在 4×4 的方格表中至少应该去掉多少个格子，才能使得剩下的图形中不存在如图 21-11 所示的“L 型”？

8. 黑板上写着 3 个数 8、18、28，老师现在请一些同学上黑板对这 3 个数进行操作。进行一次操作是指：把 3 个数进行如下变化，或者减 1，或者加 2。请问：能否经过若干次操作后得到 6、7、87 能否经过若干次操作后得到 8、8、87

9. 有 3 堆石子，每次可以从这三堆中同时拿走相同数目的石子（各次这个数目可以改变），也可以由一堆中取一半石子放入另外任一堆石子中。请问：

(1)如果开始时，3 堆石子的数目分别是 34、55、82，按上述操作，能否把 3 堆石子都拿光？

(2)如果开始时，3 堆石子的数目分别是 80、60、50，按上述操作，能否把 3 堆石子都拿光？

如果可以，请设计一种取石子的方案；如果不可以，请说明理由。

10. (1)能否将 1 至 15 排成一行，使得任意相邻两数之和都为平方数？

(2)能否将 1 至 15 排成一行，使得任意相邻两数之和都为质数？



11. (1)能否用 16 个如图 21-12 所示的“T 型”拼成一个 8×8 的棋盘？
 (2)能否用 8 个如图 21-12 所示的“T 型”和 8 个如图 21-13 所示的“L 型”拼成一个 8×8 的棋盘？
 (3)能否用 1 个如图 21-12 所示的“T 型”和 15 个如图 21-13 所示的“L 型”拼成一个 8×8 的棋盘？

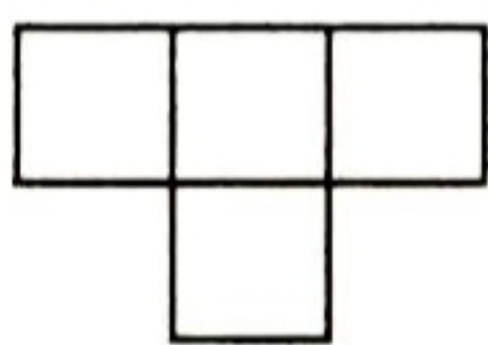


图21-12

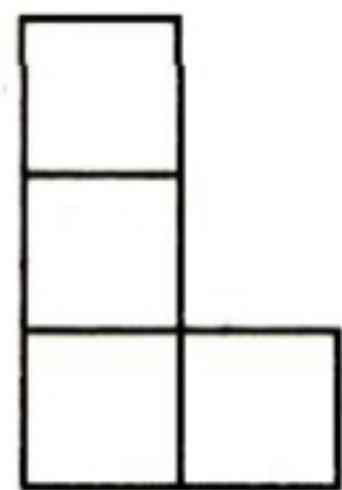
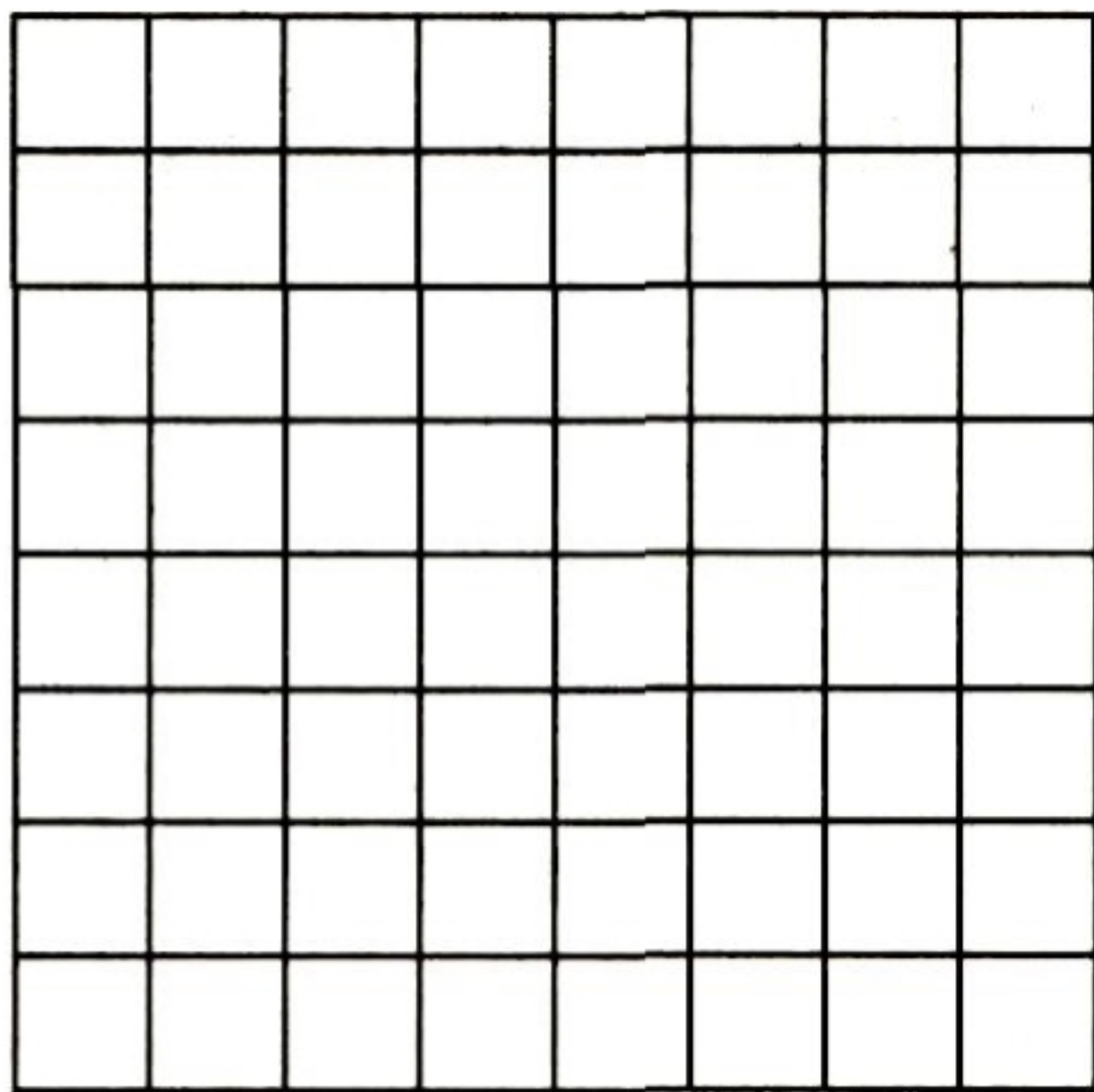


图21-13



12. (1)能否用 9 个如图 21-14 所示的 1×4 的长方形拼成一个 6×6 的棋盘？
 (2)能否用 9 个如图 21-15 所示的“L 型”拼成一个 6×6 的棋盘？

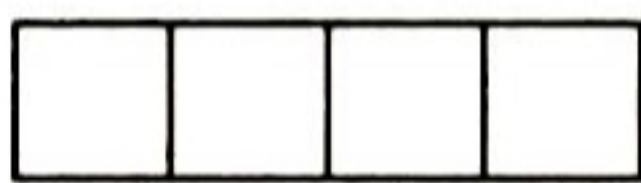


图21-14

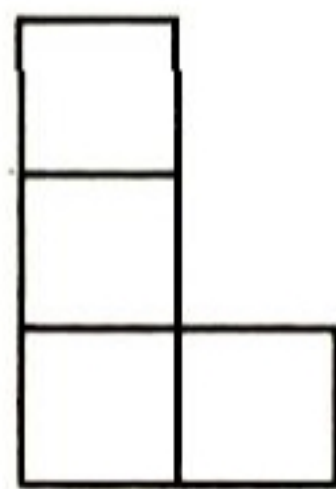
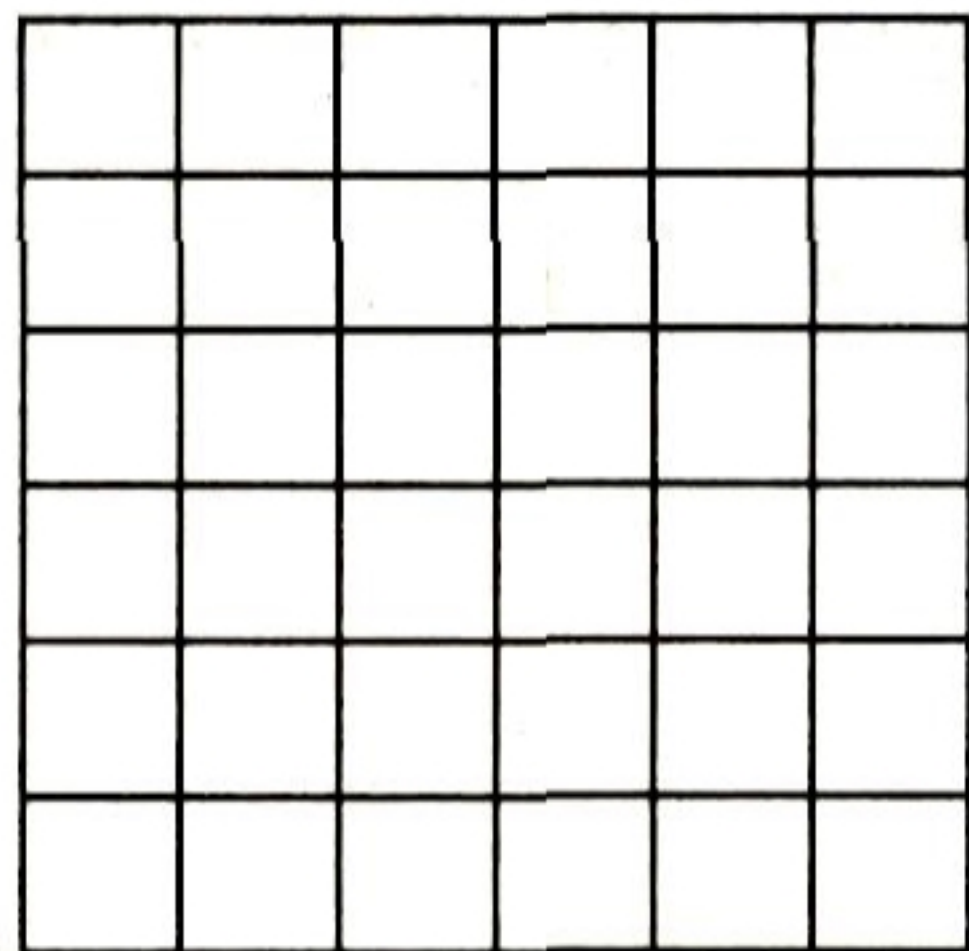


图21-15



超越篇

1. 能否可以用 77 个 $3\times 3\times 1$ 的长方体小木块装满一个 $7\times 9\times 11$ 的长方体匣子（匣内不留任何空隙）?若能，请给出具体装法；若不能，请说明理由.



2. 黑板上写着两个数 1 和 2，按下列规则增写新数，若黑板有两个数 a 和 b ，则增写 $a \times b + a + b$ 这个数，比如：可增写 5（因为 $1 \times 2 + 1 + 2 = 5$ ）；可增写 11（因为 $1 \times 5 + 1 + 5 = 11$ ）。一直写下去，请问：能否得到下面两个数？若能，请你写出得出的过程；若不能，请说明理由。（1）143；（2）144.

3. 将平面上每一点都染成红、黄两种颜色之一．证明：无论怎样染色，都一定存在长为 1 的线段，它的两个端点是同样颜色的．

4. 在 6×6 的方格表中至少需要放多少个棋子，才能保证每行、每列以及每一条与对角线平行的直线上都有棋子？（角上单独一个格子也可以组成一条与对角线平行的直线，图 21-16 中阴影部分的三个格子组成的直线也是与对角线平行的直线．）

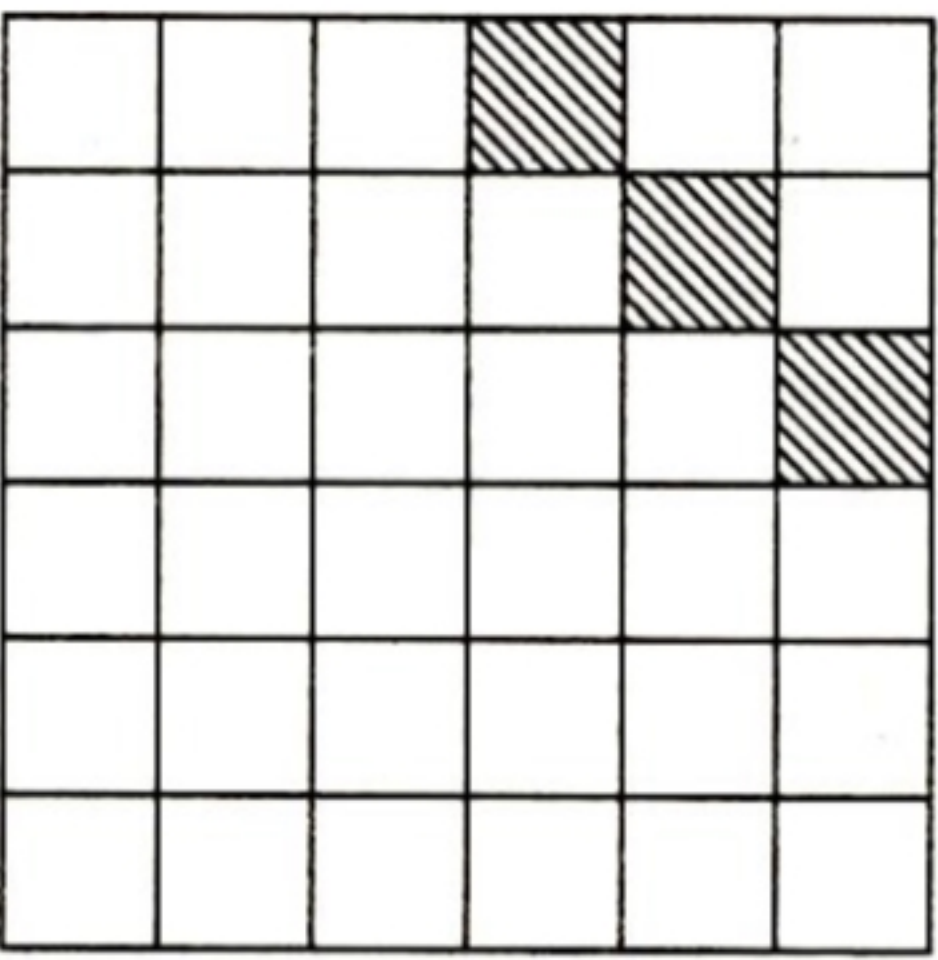
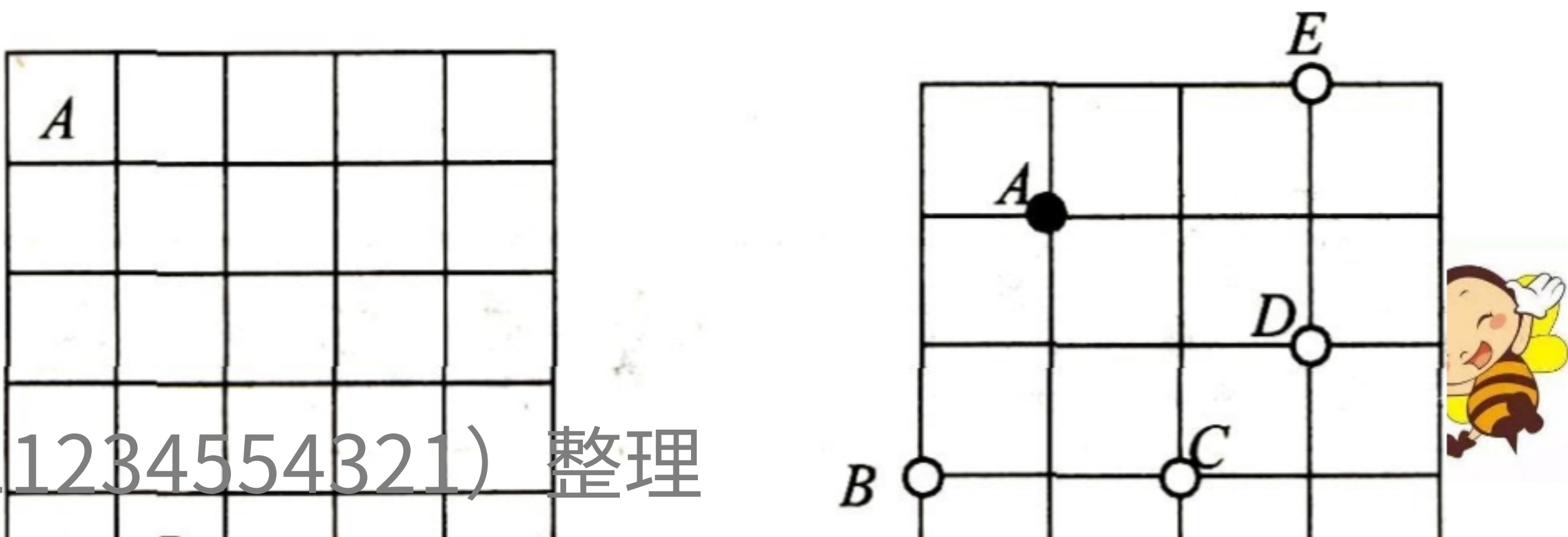


图 21-16

5. (1)能否从图 21-17 中的 A 格出发，每次走到相邻的小格子，最后走到 B 格，并且每个格子都刚好到一次？
(2)中国象棋的马是走“日”字型路线．如图 21-18，如果马在 A 点，那么它能跳到 B、C、D、E 四点之一．如果马开始在 A 点，它能否跳 3 步后回到 A 点；能否跳 9 步后回到 A 点？



6. 如图 21-19，用若干个 1×6 和 1×7 的小长方形既不重叠，也不留孔隙地拼成一个 11×12 的大长方形，最少要用小长方形共多少个？

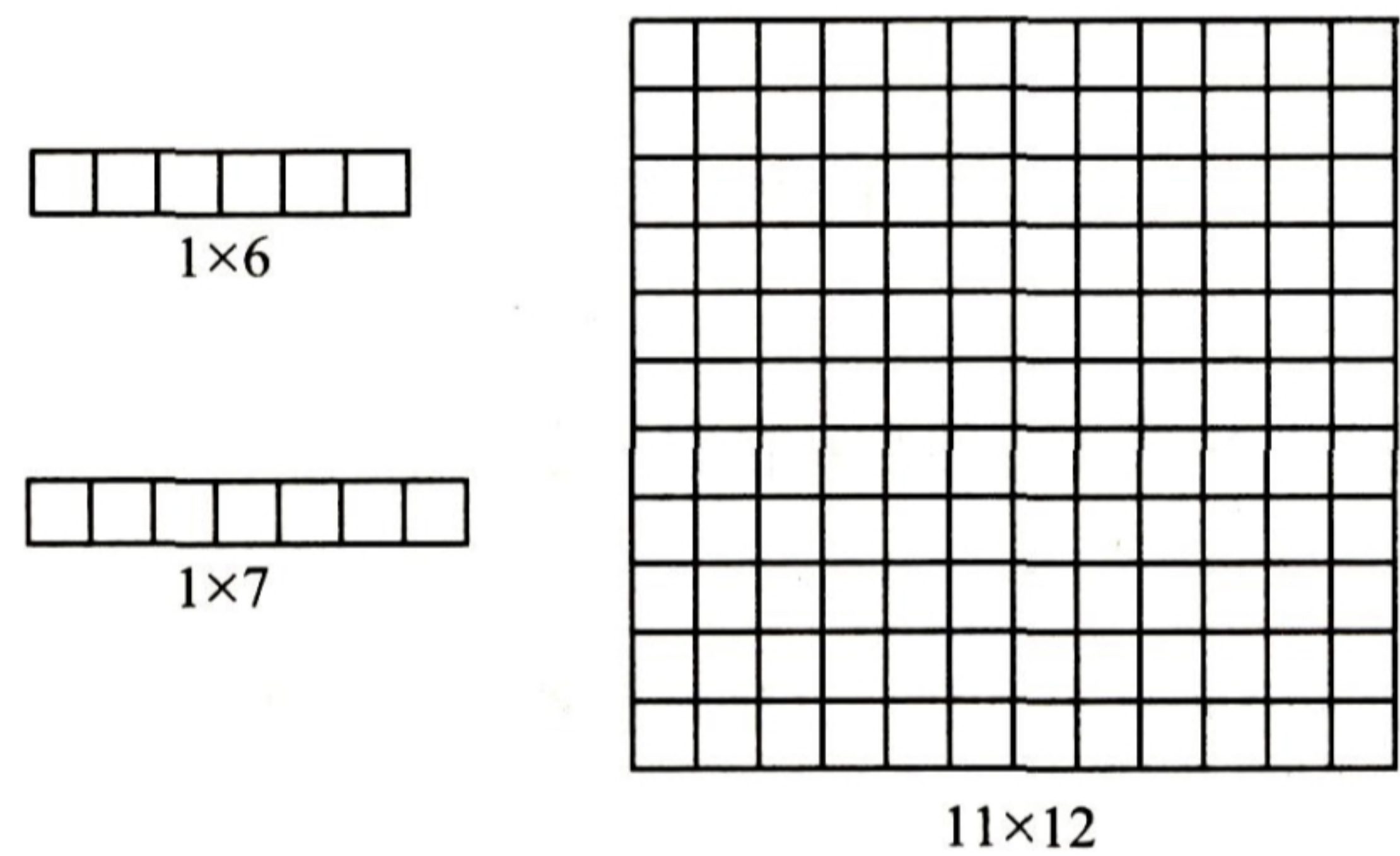


图 21-19

7. 六位音乐家在一个音乐节上相聚，在安排的每场音乐会上，有某些音乐家演奏，而另外几位音乐家就作为观众欣赏演出．要使每位音乐家都能够作为观众观看其他任何一位音乐家的表演，这样的音乐会至少要安排几场？为什么？

7. 把 11×11 的方格纸分成若干张 3×3 、 2×2 或 1×1 的小纸片，最少能分成多少张？



第 22 讲 数论综合（三）

内容概述

需要运用代数来处理的复杂数论问题；数论证明题。

典型问题

提高篇

1. (1)求所有满足下列条件的三位数：在它左边写上 40 后所得的五位数是完全平方数.
(2)求满足下列条件的最小自然数：在它左边写上 80 后所得的数是完全平方数.

2. 已知 $n!+3$ 是一个完全平方数，试确定自然数 n 的值. ($n!=1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$)

3. 一个完全平方数是四位数，且它的各位数字均小于 7. 如果把组成它的每个数字都加上 3，便得到另外一个完全平方数. 求原来的四位数.

4. 请写出所有各位数字互不相同的三位奇数，使得它能被它的每一个数位上的数字整除.



5. 在一个两位数的十位与个位数字之间插入一个数字 0，得到一个三位数（例如 21 变成了 201），结果这个三位数恰好能被原来的两位数整除。请问：所有满足条件的两位数之和是多少？

6. 用 2、3、4、5、6、7 六个数字组成两个三位数，要使这两个三位数与 540 的最大公约数尽可能的大，这两个三位数应该分别是多少？

7. 一个自然数，它与 99 的乘积的各位数字都是偶数，求满足要求的最小值。

8. 有 3 个自然数，其中每一个数都不能被另外两个数整除，而且其中任意两个数的乘积都能被第三个数整除。满足上述条件的 3 个自然数之和最小是多少？



9. 小明与小华玩游戏，规则如下：开始每人都是 1 分，每局获胜的小朋友都可以把自己的分数乘以 3，输的小朋友保持分数不变，最后小明获胜，他比小华多的分数是 99 的倍数，那么他们至少玩了多少局？

10. 对于一个自然数 N ，如果具有这样的性质就称为“破坏数”：把它添加到任何一个自然数的右端，形成的新数都不能被 $N+1$ 整除。那么在 1 至 2008 这 2008 个自然数中有多少个“破坏数”？

拓展篇

1. (1)求满足下列条件的最小自然数，使得它的平方的前两位是 20；
(2)求满足下列条件的最小自然数，使得它的平方的后两位是 04；
(3)求满足下列条件的最小自然数，使得它的平方的前两位是 20，后两位是 04.

2. 已知 $n!+4$ 等于两个相邻自然数的乘积，试确定自然数 n 的值. ($n!=1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$)

3. 找出三个小于 20 的自然数，它们的最大公约数是 1，但是两两均不互质。请写出所有可能的情况.

4. 三个两位奇数，它们的最大公约数是 1，但是两两均不互质，且三个数的最小公倍数共有 18 个约数。求



所有满足要求的情况.

5. $1 \times 4 \times 7 \times 10 \times \cdots \times 2008$ 的末尾有多少个连续的零?

6. 一个四位数除以它后两位数字组成的两位数, 余数恰好是它前两位数字组成的两位数. 如果它后两位数字组成的两位数是质数, 那么原来的四位数是多少?

7. 任意一些末两位数是 25 的数相乘, 它们的乘积末两位数仍是 25, 我们就称 25 是“变不掉的两位数尾巴”. 显然 000 是“变不掉的三位数尾巴”, 请写出所有的“变不掉的三位数尾巴”.

8. 在 3 和 5 之间插入 6、30、20 三个数, 可以得到 3、6、30、20、5 这样一串数, 其中每相邻两个数的和都可以整除它们的乘积. 请你在 4 与 3 之间插入三个非零自然数, 使得其中每相邻两个数的和都可以整除它们的乘积.

9. M 、 N 是互为反序的两个三位数, 且 $M > N$. 请问:

(1) 如果 M 和 N 的最大公约数是 7, 求 M ; (2) 如果 M 和 N 的最大公约数是 21, 求 M .



10. 用 1、2、3、4、5、6 这六个数字组成两个三位数 A 和 B，那么 A、B、540 这三个数的最大公约数最大可能是多少？

11. 请将 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 按合适的顺序写成一行，使得这一行数中的任何一个都是它前面所有数之和的约数。

12. 一根红色的长线，将它对折，再对折，……，经过 m 次对折后将所得到的线束从中间剪断，得到一些红色的短线；一根白色的长线，经过 n 次对折后将所得到的线束从中间剪断，得到一些白色的短线。已知红色短线比白色短线多， m 且它们的数量之和是 100 的倍数。请问：红色短线至少有多少条？

超越篇

1. 求出所有正整数 n ，使得 $25 + n$ 能整除 $25 \times n$ 。



2. 一个自然数至少有 4 个约数，并且该数等于其最小的 4 个约数的平方之和，请找出这样的自然数.

3. 一个四位数的各位数字互不相同，将其千位与个位数字调换后形成新的四位数，新四位数与原数的最大公约数是 63，则原四位数可能是多少？

4. 一个不超过 200 的自然数，如裂川四进制表示，那么它的数字和是 5；如果用六进制表示，那么它的数字和是 8；如果用八进制表示，那么它的数字和是 9. 如果用十进制表示，这个数是多少？

5. 把一个两位质数写在另一个不同的两位质数右边，得到一个四位数，这个四位数能被这两个质数之和的一半整除. 这样的两个质数乘积最大是多少？最小是多少？



6. 用 1、2、3、4、5 各一个可以组成 120 个五位数，你能否从这 120 个数里面找出 11 个数来，使得它们除以 11 的余数互不相同？如果五个数字是 1、3、4、6、8 呢？

7. 用 1、2、3、4、5、6 这 6 个数字各一次组成两个三位数 A 和 B. 请问：A、B、630 这三个数的最大公约数最大可能是多少？最小公倍数最小可能是多少？

8. 我们将具有如下性质的自然数 K 称为“巨人数”：如果一个整数 M 能被 K 整除，则把 M 的各位数字按相反顺序重写时所得的数也能被 K 整除，请求出所有的“巨人数”。



第 23 讲 概率初步

内容概述

理解概率的含义；利用各种计数方法计算概率问题。

典型问题

提高篇

1. 在多家商店中调查某商品的价格，所得的数据如下（单位：元）.

25 21 23 25 27 29 25 28 30 29
26 24 25 27 26 22 24 25 26 28

请填出表 23-1，并根据此表画出扇形统计图.

表 23-1

价格范围	商店数	所占百分数
20.5~22.5		
22.5~24.5		
24.5~26.5		
26.5~28.5		
28.5~30.5		
合计		

2. 在一只口袋里装着 2 个红球，3 个黄球和 4 个黑球. 从口袋中任取一个球，请问：
- (1)这个球是红球的概率有多少？
 - (2)这个球是黄球或者是黑球的概率有多少？
 - (3)这个球是绿球的概率有多少？不是绿球的概率又有多少？

3. 一只普通的骰子有 6 个面，分别写有 1、2、3、4、5、6. 掷出这枚骰子，它的任何一面朝上的概率都是 $\frac{1}{6}$. 假设你将某一个骰子连续投掷了 9 次，每次的结果都是 1 点朝上，那么第十次投掷后，朝上的面上的点数恰好是奇数的概率是多少？



5. 冬冬与阿奇做游戏：由冬冬抛出 3 枚硬币，如果抛出的结果中，有 2 枚或 2 枚以上的硬币正面朝上，冬冬就获胜；否则阿奇获胜。请问：这个游戏公平吗？

5. 有黑桃、红桃、方块、草花这 4 种花色的扑克牌各 2 张，从这 8 张牌中任意取出 2 张，请问：这 2 张扑克牌花色相同的概率是多少？

6. 小悦从 1、2、3、4、5 这 5 个自然数中任选一个数，冬冬从 2、3、4、5、6、7 这 6 个自然数中任选一个数。选出的两个数中，恰好有一个数是另一个数的倍数的概率是多少？

7. 一只口袋里装有 5 个黑球和 3 个白球，另一只口袋里装有 4 个黑球和 4 个白球，从两只口袋里各取出一个球。请问：取出的两个球颜色相同的概率是多少？



8. 阿奇一次掷出了 8 枚硬币，结果恰有 4 枚硬币正面朝上的概率是多少？有超过 4 枚的硬币正面朝上的概率是多少？

9. 在一次军事演习中，进攻方决定对目标进行两次炮击。第一炮命中的概率是 0.6，第二炮命中的概率是 0.8。请问：两炮都击中目标的概率是多少？恰好有__炮击中目标的概率是多少？两炮都未击中目标的概率是多少？

10. 张先生每天早晨上班时有 $\frac{1}{3}$ 的概率碰上堵车，在不堵车的时候，张先生按时到达单位的概率为 0.9，迟到的概率为 0.1；而堵车的时候，张先生上班迟到的概率高达 0.8，按时到达的概率只有 0.2。请问：张先生上班迟到的概率是多少？



拓展篇

1. 下面是育才小学六年级二班 48 名同学的身高测量记录（单位：厘米）

143.8 149.8 142.0 146.9 145.4 145.4 138.8 153.1
154.6 140.0 146.8 142.6 147.4 141.6 133.4 144.7
143.6 137.6 149.1 144.9 148.1 145.9 146.8 140.9
147.3 149.0 150.8 137.2 133.0 145.0 149.6 142.2
144.2 140.9 140.6 149.6 141.1 143.2 149.4 138.2
148.0 149.6 146.8 141.4 148.9 153.1 136.1 146.4

请根据上面数据，填出表 23—2，并根据此表画出扇形统计图.

表 23-2

身高	人数	所占百分数
132~135		
135~138		
138~141		
141~144		
144~147		
147~150		
150~153		
153~156		

2. 口袋里装着 100 张卡片，分别写着 1, 2, 3, …, 100.从中任意抽出一张，请问：

- (1)抽出的卡片上的数正好是 37 的概率是多少？
- (2)抽出的卡片上的数是偶数的概率是多少？
- (3)抽出的卡片上的数是质数的概率是多少？
- (4)抽出的卡片上的数正好是 101 的概率是多少？
- (5)抽出的卡片上的数小于 200 的概率是多少？

3. 在标准英文字典中，由 2 个不同字母组成的单词一共有 55 个，如果从 26 个字母中任取 2 个不同的排



列起来，那么恰好能排成一个单词的概率是多少？

4. 妈妈去家乐福购物，正好碰上了橘子、香蕉、葡萄和榴莲大降价，于是她决定从这 4 种水果中任选一种买回家，爸爸下班时路过集贸市场，发现有苹果、橘子、香蕉、葡萄和梨出售，他也决定任选一种买回家。请问：他们买了不同的水果的概率是多少？

5. 小悦掷出了 2 枚骰子，掷出的 2 个数字之和恰好等于 10 的概率有多少？

6. 盒子里装着 20 支圆珠笔，其中有 5 支红色的，7 支蓝色的和 8 支黑色的，从中随意抽出 4 支，每种颜色的笔都被抽出的概率是多少？

7. 如图 23-1，格线表示了允许小球滑落的通道。每一个小球在交点处有一半的可能向左滑落，有一半的可能向右滑落，从 A 点放一个小球让其落下。请问：小球最终落到 B 点的概率是多少？

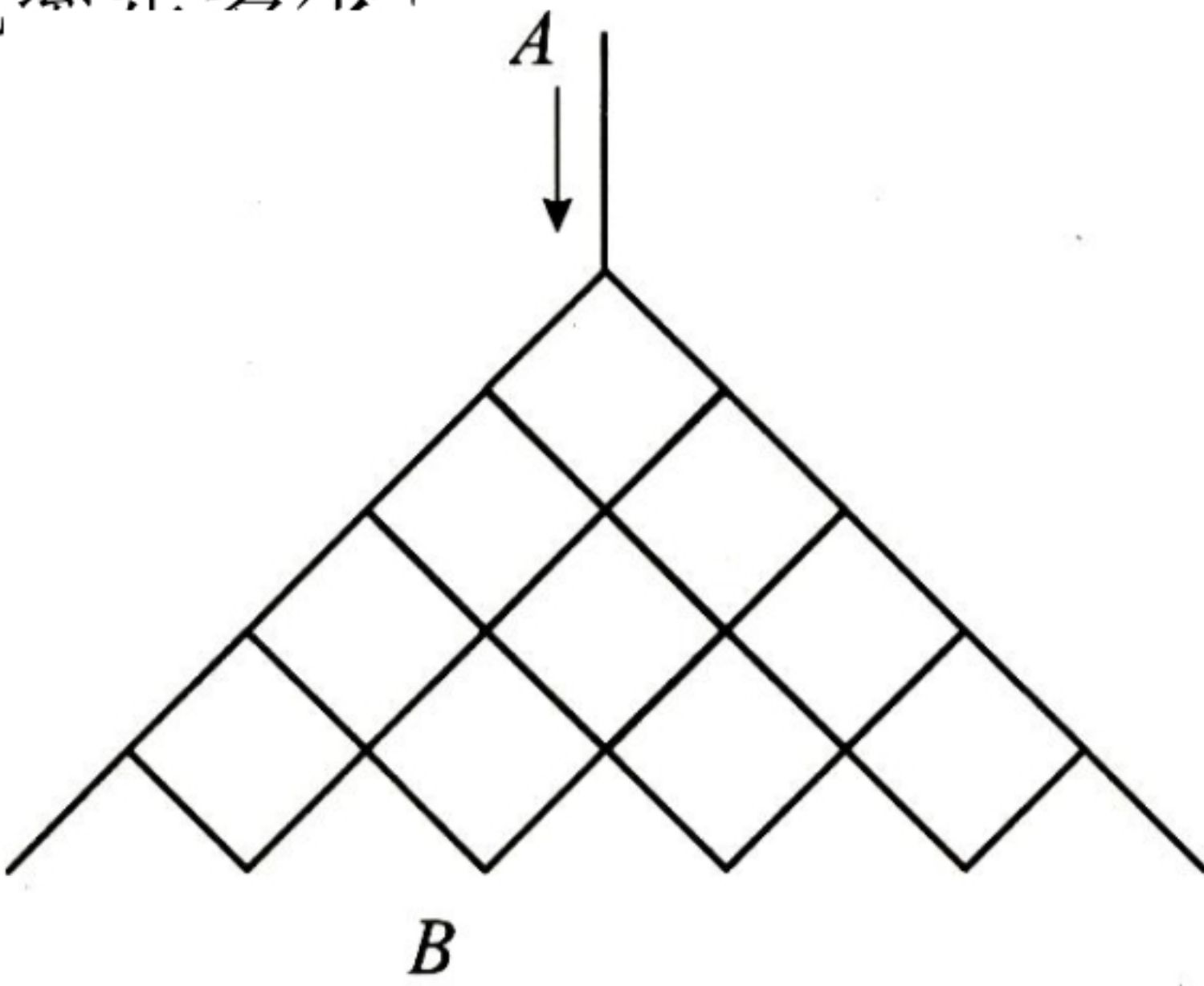


图 23-1

8. 6 名小朋友在操场上做游戏。他们被老师分成 3 组，每组 2 个人。请问：赵倩和孙莉恰好分到了同一组的概率是多少？



9. 某工厂生产了 200 件商品，合格率为 99%，那么从中抽取 1 件恰好是次品的概率为 1%。请问：从中抽查 5 件，发现次品的概率比 5%大还是比 5%小？

10. 用一枚材料不均匀的正方体骰子，掷出 1 的概率为 0.1，掷出 2 的概率为 0.2，掷出 3 的概率为 0.2，掷出 4 的概率为 0.1，掷出 5 的概率为 0.3，掷出 6 的概率为 0.1。请问：

(1)如果连续 9 次掷出 1，第 10 次掷出的点数是 3 的倍数的概率是多少？

(2)连续掷两次骰子，第一次掷出 3，第二次掷出 4 的概率是多少？

(3)如果又拿来一枚这样的骰子，并同时掷出这两枚骰子。这两枚掷出的点数不同的概率是多少？

11. (1)口袋里装有 3 张卡片，一张一面红一面黄，一张一面黄一面蓝，一张一面蓝一面红。张莉从口袋中随意摸出其中一张，发现朝向自己的一面恰好是红色。请问：此时这张卡片的另一面是蓝色的概率是多少？

(2)口袋里装有 4 张卡片，两张两面全黑，一张两面全白，一张一面黑一面白。张莉从口袋中摸出其中一张，发现朝向自己的一面恰好是黑色。请问：此时这张卡片的另一面还是黑色的概率是多少？

12.甲、乙两人在靶场射击。甲击中目标的概率是 0.6，乙击中目标的概率是 0.7。两人朝着同一个目标各射击一次，结果目标被击中了。请问：恰好是甲击中目标而乙没有击中的概率是多少？



超越篇

1. 小悦与阿奇比赛下军旗，两人水平相当，两人约定赛 7 局，先赢 4 局者胜。现在已经比了 3 局，小悦胜了 2 局，阿奇胜了 1 局。请问：小悦获得最后胜利的概率有多少？

2. 六年级三班有 40 名学生。这 40 名同学中有 2 人（含多人）的生日相同的概率，和这 40 人生日都不相同的概率比较，哪个大？

3. 甲、乙、丙、丁四人玩扑克，发牌以后每人拿到 13 张牌（整副牌共 52 张）。结果甲、乙两人共拿了 11 张黑桃。请问：丙、丁两人恰好每人拿到 1 张黑桃的概率是多少？有一人拿到 2 张黑桃，另一人没有拿到黑桃的概率又是多少？

4. 用血清甲胎蛋白法诊断肝癌：如果患者患有肝癌，那么诊断出肝癌的概率为 0.95；如果患者没有患肝癌，那么诊断出不是肝癌的概率为 0.9。假设人群中肝癌患病率为 0.0004。现在李强在体检中被诊断为患有肝癌，请问：他实际患有肝癌的概率是多少？（结果保留 3 位小数）



5. 如图 23-2，这是一张街道图，每一小段路的长度都是 500 米．小悦从 A 点出发，任选一条最短路线走向 B 点，冬冬从 B 点出发，任选一条最短路线走向 A 点，小悦每分钟走 18 米，冬冬每分钟走 24 米．他们两人在途中相遇的概率是多少？

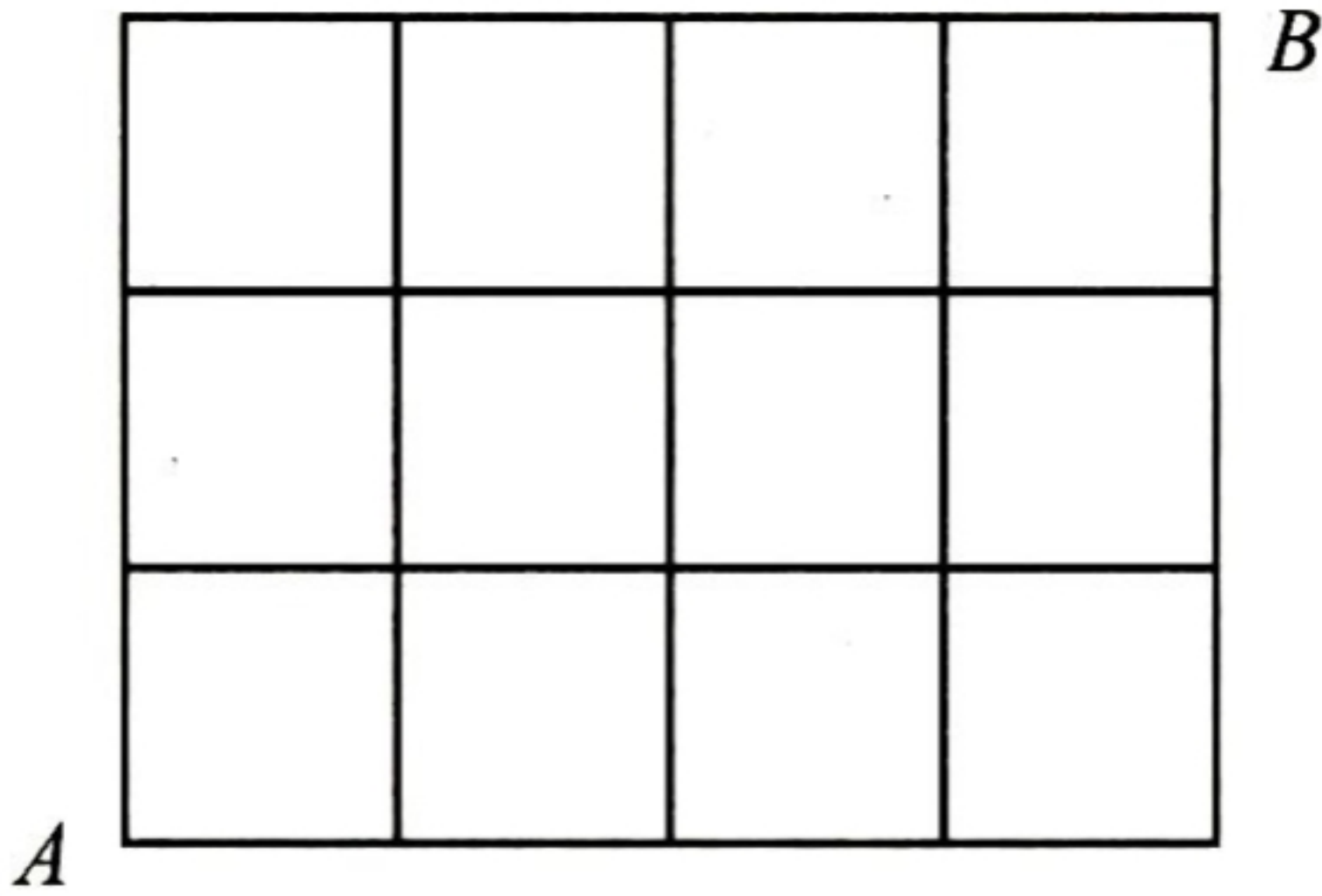


图 23-2

6. 某男子练射击，在有戴眼镜的情况命中率为 20%，没戴眼镜则命中率为 0%．其在连续射击 5 次后都未命中目标，求其戴了眼镜的概率．

7. 如图 23—3，格线表示了允许小球滑落的通道．每一个小球在交点处有 $\frac{2}{3}$ 的可能向左滑落，只有 $\frac{1}{3}$ 的可能向右滑落，如果从 A 点放一个小球让其落下，那么小球最终落到 B 点的概率有多大？

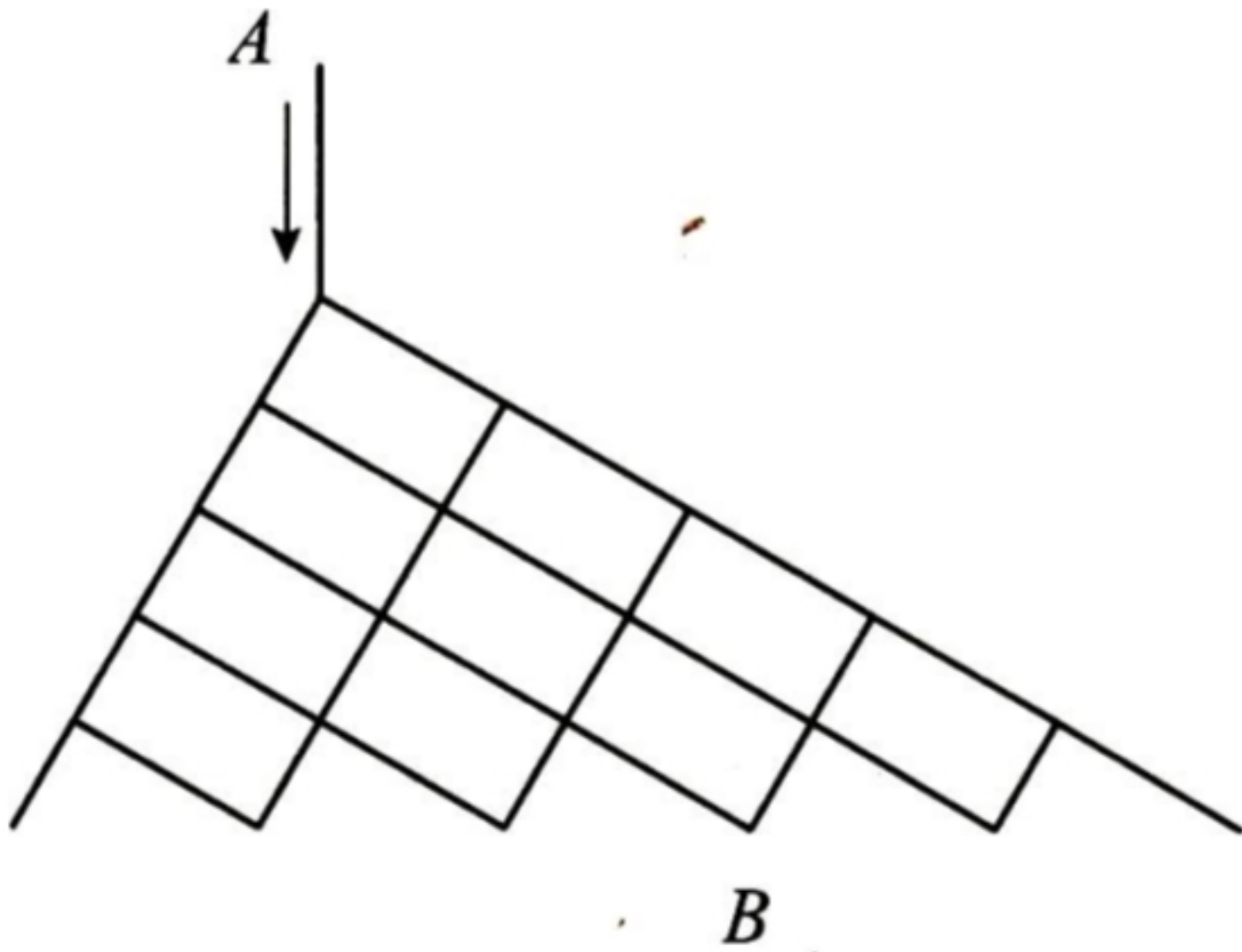


图 23-3

8. 飞机上有 100 个座位，按顺序从 1 到 100 编号，有 100 个乘客，他们分别拿到了从 1 号到 100 号的座位，这些乘客会按号码顺序登机并应当对号入座，如果他们发现对应号座位被别人坐了，就会在剩下空的座位随便挑一个坐．现在假设 1 号乘客疯了（其他人没疯），他会在 100 个座位中随便选一个座位坐下．请问：第 100 人正确坐到自己座位的概率是多少？



参考答案

第 1 讲 分数数列计算

提高篇

1. $\frac{9}{10}$.

2. $\frac{98}{99}$.

3. $\frac{49}{200}$.

4. $\frac{2}{5}$.

5. $\frac{33}{100}$.

6. $\frac{3}{10}$.

7. $1\frac{1}{10}$.

8. $\frac{4949}{9900}$.

9. $14\frac{1}{16}$.

10. $\frac{5}{9}$.

拓展篇

1. $\frac{2007}{2008}$.

2. $\frac{99}{202}$.

3. $\frac{12}{13}$.

4. (1) $81\frac{9}{10}$ (2) $1\frac{389}{861}$.

5. $1\frac{54}{55}$.

6. $39\frac{1}{21}$.

7. $33\frac{33}{50}$.

8. $\frac{10}{11}$.

9. $\frac{306}{1225}$.

10. $1\frac{2}{15}$.

11. $\frac{50}{99}$.

12. $1\frac{2007}{2009}$.

超越篇

1. $38\frac{19}{20}$.

2. $10\frac{20}{21}$.

3. 60.

4. $1\frac{113}{760}$.

5. $1 - \frac{1}{100!}$.

6. $A > B$.

7. $\frac{103!}{3^{100}} - 6$.

8. 242500.

第 2 讲 比例解应用题

提高篇

- 1.2 元. $2.1\frac{3}{4}$ 千米.
- 3.甲 540 个, 乙 360 个, 丙 270 个.
- 4.15:41.
5. (1) 1:2; (2) 甲班 36 人, 乙班 48 人, 丙班 24 人.
- 6.240 克. 7.2 小时 20 分.
- 8.7:30. 9. (1) 14 台; (2) 56 小时.
- 10.2160 个.

拓展篇

- 1.老师 42 人, 女生 189 人, 男生 441 人.
- 2.巧克力糖 420 块, 水果糖 600 块.
3. (1) 6:3:2; (2) 1870 元.
- 4.12 元. 5.66 分钟.
- 6.5:9. 7.31.25%.
- 8.38 天. 9.225:625:441.
- 10.100 米. 11.216 千米.

12. $11\frac{1}{4}$ 小时.

超越篇

1. $6\frac{1}{4}$ 公里. 2.与孙悟空交换 24 个, 与机器猫交换 64 个.
- 3.44%. 4.13:38.
- 5.2602 米. 6.6 小时.
- 7.男生 1272 人, 女生 1152 人.
8. (1) 15 圈; (2) D 转了 $47\frac{13}{21}$ 圈, F 转了 $131\frac{1}{4}$ 圈.

第 3 讲 方程解应用题

提高篇

1. (1) $x = \frac{11}{7}$; (2) $x = \frac{10}{29}$; (3) $x = 28$.
- 2.10 张. 3.24 名.
- 4.45 人. 5.24 名.
- 6.420 千米. 7. (1) $x = 1, y = 9$; (2) $x = 15, y = 12$.
- 8.苹果 4 元, 梨 3.4 元 9.12 个; 30 个.
- 10.1:2

拓展篇

1. (1) $x = 0.5$; (2) $x = \frac{6}{5}$; (3) $x = \frac{5}{14}$; (4) $x = 0.5$.
2. $\frac{33}{89}$. 3.200 克.
- 4.1993. 5.56 名.
6. (1) $x = 2, y = 3$; (2) $x = 7, y = 4$; (3) $x = 9, y = 5$.
- 7.大盒数 9, 中盒数 6, 小盒数 12.
- 8.甲 6 千米, 乙 3.6 千米.



- 9.白球 20 克，黑球 15 克.
10.大号 80 元，中号 60 元，小号 50 元.
11.250 厘米. 12.18.

超越篇

- 1.38. 2.673 个.
3.175 名；943 条. 4.20 米.
5.10 次. 6.56.
 $7.\frac{2}{5}$. $8.64\frac{7}{11}$ 千米.

第 4 讲 浓度问题与经济问题

提高篇

- 1.32%；20%；16%. 2. (1) 120 克；(2) 300 克.
3.25 克. 4.8 千克.
5.200 克. 6. (1) 28%；(2) 25%；(3) 七五折.
7.赔了. 8.方案 (2)；80.5 元.
9.300 元. 10.10940 元；10816 元.

拓展篇

- 1.80%；64%. 2.32%.
3. (1) 40%；(2) 48 克.
4.225 克. 5.66 千克.
6.25%. 7.甲 56%，乙 66%.
8. (1) 2500 元；(2) 4%.
9.200 元. 10. (1) 180 元；(2) 54 元，56 元.
11.132 元. 12.500 千克.

超越篇

- 1.10%. 2.28%.
3.甲 20%，乙 32%. 4.45%.
5.六折. 6.15 元.
7.3:2:6；甲 10%，乙 4%，丙 1%.
8.3000 元.

第 5 讲 立体几何

提高篇

- 1.11:12；2 立方厘米.
2.90 立方厘米；63 立方厘米.
3.46 平方厘米.
4. (1) 216；(2) 16%.
 $5.29\frac{1}{4}$ 平方厘米.
6. (1) 6；(2) 8，16.
7.1:24.
8. (1) 32.97 平方分米；(2) 44.97 平方分米.
9.1.94 厘米.
10.0.5 厘米.

拓展篇

- 1.216 立方厘米. 2.148 平方厘米.

3.72 平方米. 4.600; 568.
5.27 立方厘米. 6.120 平方厘米; 126 平方厘米.
7.208 平方厘米; 192 立方厘米.
8.489.84 立方厘米. 9.288 立方厘米.
10.4.5 倍. 11.8:9.
12. (1) 10 分米; (2) 11.2 分米; (3) 12 分米.

超越篇

1.80. 2.10 个; 42 平方厘米.
3. (1) 12π 立方厘米, 24π 平方厘米; (2) 1344π 立方厘米, 1500π 立方厘米.
4.24 立方厘米, 72 立方厘米.
5.1695.6 立方厘米. 6.1536 平方厘米.
7.2430 毫升. 8.324.

第 6 讲 逻辑推理二

提高篇

1.钱的对王是王, 李的对手是赵, 张的对手是孙.
2.2 盘. 3.第二名.
4. (1) 45 场; (2) 不能; (3) 能.
5. (1) 最多 45 分, 最少 30 分; (2) 39 分.
6.3 分、5 分、7 分.
7.10 分、9 分、7 分、3 分、0 分.
8.3:2. 9.0 分.

10.1 种; 5 家.

拓展篇

1.3 盘.
实线为相生, 虚线为相克.

3.B 队.

4.23 场. 5. (1) 6 场; (2) 12 分;
6.6 分, 5 分, 4 分, 3 分, 2 分; 5 场.
7.4 分.

8.甲: 5, 5, 4, 5, 5, 24; 乙: 4, 2, 1, 4, 4,
13; 丁: 2, 4, 2, 2, 2, 12; 戊: 3, 1, 5, 1, 1, 11.
9.0:3.

10.3 场; 比分分别是 0:1 输给 A, 3:4 输给 B, 5:3 赢了 C.

11.7. 12.海淀区, 12 岁.

超越篇

1.6 环. 2.4.5 分.

3.只有 D.

4.17 分, 16 分, 13 分, 12 分, 11 分, 9 分.

5.A: 2, 1, 0, 1, 6, 2, 3; B: 2, 1, 1, 0, 3, 6, 2; C: 2, 0, 1, 1, 0, 1, 1.

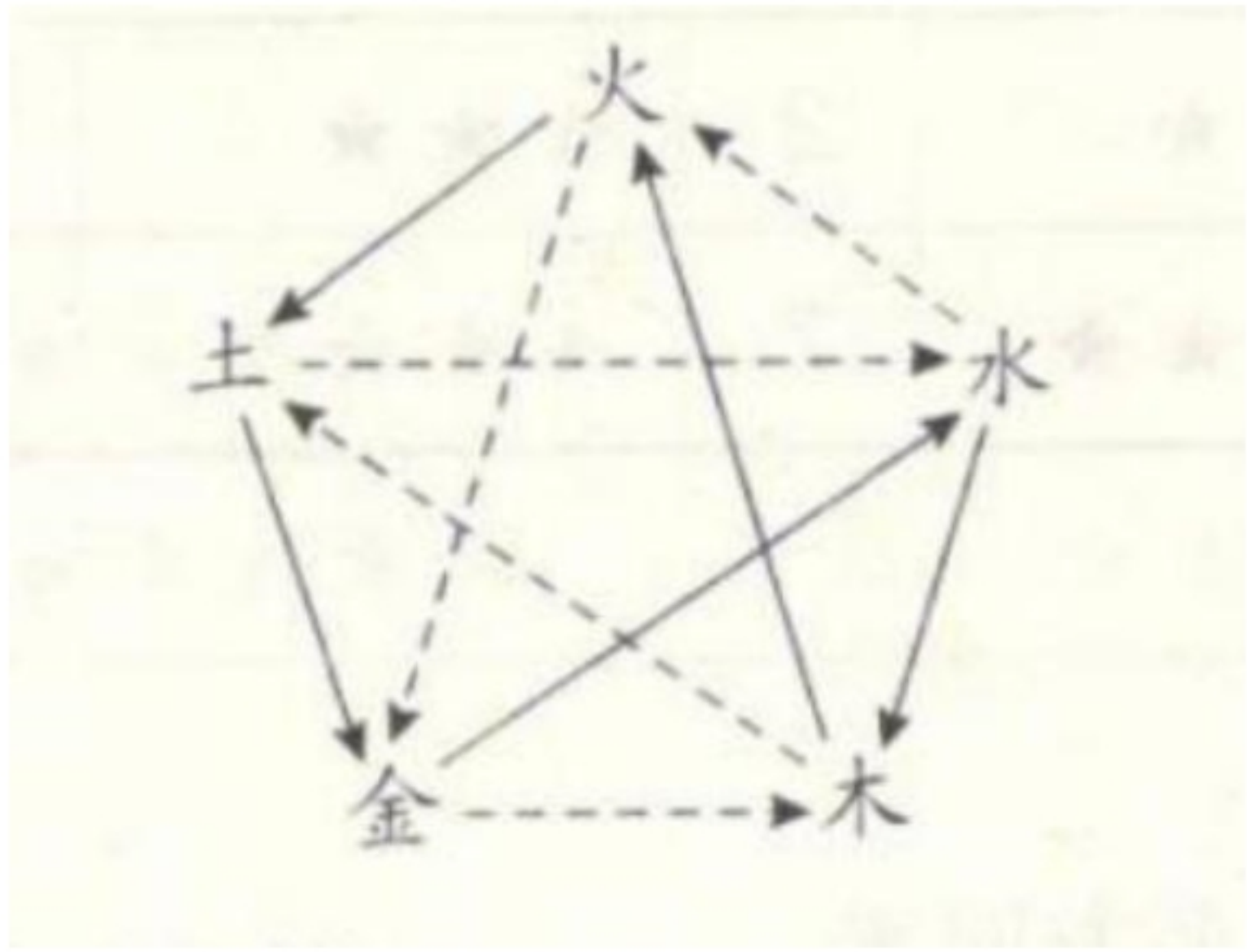
6.蓝帽子. 7.13 或 14 分.

8.438.

几何综合一

提高篇

1.35 平方厘米. 2.360o.



(3) 3 分.

15; 丙: 1, 3, 3, 3, 3,



3.280 平方厘米. 4. $\frac{25}{441}$ 平方米.

5.51.2.

6. $AH:HI:IB=3:4:2, BD:DE:EC=4:2:3$.

7. $\frac{1}{3}$ 平方厘米. 8.3 倍.

9.48 平方厘米. 10. $\frac{5}{12}$.

拓展篇

1.B 长; 长 16 厘米. 2.1680.

3. $8\frac{1}{3}$ 平方厘米. 4. $14\frac{2}{7}$.

5.45. 6. $\frac{1}{4}; \frac{3}{20}$.

7.12 厘米. 8. $2\frac{2}{3}$.

9.6 米. 10. $3\frac{1}{8}$.

11. $\frac{3}{7}$. 12.24.

超越篇

1.25 平方厘米. 2.72.

3. $\frac{1}{30}$. 4. $\frac{1}{7}$.

5.64 平方厘米. 6.30.

7.25:34. 8.52.

第 8 讲 数论综合 (一)

提高篇

1.14. 2. (1) 86256; (2) 85250.

3.18 个. 4.656.

5.36 个; 6 个. 6.196, 256.

7.74. 8.5.

9.62. 10.437854219.

拓展篇

1.865. 2.220.

3.70.

4. (1) 出错的是 8 号和 9 号同学; (2) 60060.

5.1964 盏. 6.40.5 米.

7.1350. 8.776、873、1067.

9. (1) 12 种; (2) 31 种.

10.20 组. 11.77 和 78.

12.91 个.

超越篇

1.756. 2. (1) 426 个; (2) 850 次.

3.3000. 4.117.



5.8 组. 6.118、119、155.
7.1082.

8.108、117、135、180.

第 9 讲 计算综合（二）

提高篇

1.17. 2. $\frac{1}{4}$.

3. $2\frac{1}{2}$. 4. $\frac{6}{11}$.

5. (1) $1\frac{3}{7}$; (2) $1\frac{13}{30}$; (3) $\frac{1987}{3973}$.

6.9. 7. (1) $\frac{101}{5100}$; (2) $1\frac{32}{35}$; (3) $\frac{5}{11}$.

8. $84\frac{1}{4}$. 9. $6\frac{7}{40}$.

10. (1) 9999; (2) 343400.

拓展篇

1. $11\frac{1}{13}$. 2. $\frac{1}{2}$.

3. $1\frac{1}{4}$. 4. $\frac{25}{256}$.

5.1. 6.5.

7.3.16.

8. (1) $\frac{30}{157}$; (2) $1\frac{1}{4}$.

9. (1) 1; (2) $\frac{100}{101}$.

10.B 比 A 大 $\frac{1}{2000}$.

11.166650.

12. (1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_{100} = \frac{1}{10100}$, $a_{200} = \frac{1}{40200}$; (2) 25840850.

超越篇

1. $23\frac{1}{2}$. 2.4、13 或 22.

3. (1) 2; (2) 510. 4. $A < C < B$.

5. (1) 101; (2) 4.

6. (1) 满足; (2) 0,2008; (3) 2007.

7. $\frac{72}{13}$. 8.4016.

第 10 讲 行程问题（六）

提高篇

1.1.2 千米. 2.500 分钟.

3.13:40. 4.5400 米.

5.50 千米. 6.2.5 小时.

7.2400 米 8.185 千米.



9.200 千米.	10.4.8 千米.
拓展篇	
1.27 分.	2.675 千米.
3.900 米	4.3400 米.
5.3.6 千米.	6.21.6 千米.
7.60 分钟.	8.92 千米.
9.120 级.	10.24 分钟.
11.2250 千米.	12.37.5 分钟.
超越篇	
1.36 秒.	2.120 千米.
3.320 米.	4.113 $\frac{2}{3}$ 分钟.
5.102 级.	6.17.1 千米.
7.15 点 20 分.	8.4 月 11 日 0:00.

第 11 讲 不定方程

提高篇

- 1.大油桶 3 个，小油桶 4 个.
- 2.大盒 9 个，小盒 6 个或者大盒 2 个，小盒 18 个.
- 3.27 声. 4.718 个.
- 5.12 名. 6.老师 3 名，男生 3 名，女生 8 名.
- 7.20 分的邮票 3 张，40 分的邮票 3 张，50 分的邮票 13 张.
- 8.9 封. 9.不能.
- 10.4 个.

拓展篇

- 1.10 支或 14 支. 2.26 盒.
- 3.15 个步兵师，17 个航空兵师.
- 4.76 人. 5.8 厘米.
- 6.24 道或 21 道.
- 7.公鸡、母鸡、小鸡分别买 0 只、25 只、75 只；或者 4 只、18 只、78 只；或者 8 只、11 只、81 只；或者 12 只、4 只、84 只.
- 8.圆珠笔 3 盒，铅笔 2 盒，钢笔 13 盒.
- 9.7 个；10 个.
- 10.12 包. 11.26.1 元.
- 12.12 元.

超越篇

1. $x = 19, y = 15$.
- 2.苹果 10 筐，梨 8 筐，桃子 7 筐.
- 3.二人桌 24 张，三人桌 19 张，四人桌 12 张.
- 4.A 种商品 3 个，B 种商品 12 个.
- 5.81 元 6.3 种.
- 7.191 克. 8.26 次.

第 12 讲 进位制与取整符号

提高篇

- 1.15,82,576,2824.

2. (1011010) 2, (156) 7, (5A) 16.
 3. (1244) 5, (205) 7.
 4. (1) (1111100) 2, (2) (65454) 7, (3) (10082) 9.
 5.108. 6.83.

7.22. 8. $22\frac{149}{325}$.

9.120 10.5 个.

拓展篇

1. (1) 58, 1985; (2) (1100101) 2, (212202) 3, (79D) 16.
 2. (167) 9, (111100010) 2.
 3. (1) (1031) 7, (165255) 7; (2) (7BEF6) 16.
 4.九进制; 八进制.
 5.100. 6.248.
 7.1405.
 8. (1) 2,3; (2) 1, 2, 3.
 9. (1) 3π ; (2) $3\pi - 6$.

10.440. 11. (1) 0 或 $1\frac{2}{3}$; (2) $6\frac{1}{3}$.

12.63.

超越篇

- 1.24. 2.最大 383; 最小 324; 60 个.
 3.6 个. 4.63 个; 11648; 280.
 5.2118. 6.677.
 7. (1) 17 张; (2) 184 张; (3) 2 或 8188.
 8. (1) 1507; (2) 88.

第 13 讲 应用题综合 (一)

提高篇

- 1.45 元. 2.12 秒.
 3.大: 中: 小=15: 6: 4.
 4.11 点 40 分. 5.66 分钟.
 6.110 万元; 106 万元. 7.在第 5、6 两站之间.
 8.61 厘米.
 9.5 次; 0.6 分钟, 1.8 分钟, 3 分钟, 5.4 分钟, 6.6 分钟.
 10.947 页.

拓展篇

- 1.乙 39 元, 丙 44 元, 丁 57 元.
 2. (1) 247 元; (2) 9700 元.
 3.350 张. 4.113.04 米.
 5.40 个和 60 个. 6.2916 元.
 7.20 块. 8.10 秒; $3\frac{1}{3}$ 秒.
 9.128 米.
 10.37500 公里; 18750 公里.
 11.10:00. 12.1 个; 100.5 米/秒.

超越篇

- 1.略.

- 2.甲 3930 元，乙 5110 元，丙 6360 元.
- 3.A75 个，B45 个，C33 个.
- 4.番茄 $\frac{23}{3}$ 千克，花生 $\frac{22}{3}$ 千克.
- 5.12660 元.
- 6.（1）30000 千米；（2）2 次；（3）有两种换胎方式.第一种：12000 千米前与左后，10500 千米左后与右后；第二种：7500 千米左后与右后，10500 千米前与左后.
- 7.20 分钟. 8.96 平方米.

第 14 讲 计数综合（三）

提高篇

- 1.89 种. 2.274 种.
- 3.21 种. 4.11 个；211 个.
- 5.22 种. 6.54 个.
- 7.40 个. 8.360 个.
- 9.144 个. 10.72 个.

拓展篇

- 1.927 种. 2.28 种.
- 3.377 种. 4.37 个；58 个.
- 5.1641 种. 6.258 种.
- 7.42 种 8.3505 种.
- 9.45431 个. 10.256 个.
- 11.1224 个. 12.81 个.

超越篇

- 1.171 个；79 个.
- 2.（1）170 个；（2）86 个.
- 3.14 个. 4.15 种.
- 5.34 个. 6.2112 种.
- 7.273 种. 8.101 种.

第 15 讲 几何综合（二）

提高篇

- 1.一样大. 2.78.5 平方厘米.
- 3.18.75. 4.23.
- 5.4.8 厘米. 6.12 平方厘米.
- 7.50 平方厘米.
- 8.面积 13.5 平方厘米；周长 18 厘米.
- 9.（1）7.5；（2）40.

- 10.15 块.

拓展篇

- 1.73.12 平方厘米. 2.157 平方厘米.
- 3.42 厘米. 4.24.
- 5.20. 6.40.
- 7.8. 8.一样大.
- 9.228.07 平方厘米. 10.6 次.
- 11.96. 12.38 个.

超越篇

- 1.4 平方厘米.

2. $4\frac{1}{6}$.
- 3.936.

4.53 平方厘米.
- 5.14.

6.52 平方厘米.
- 7.8 次, B 袋.

8.27.2 平方厘米.

第 16 讲 最值问题（二）

提高篇

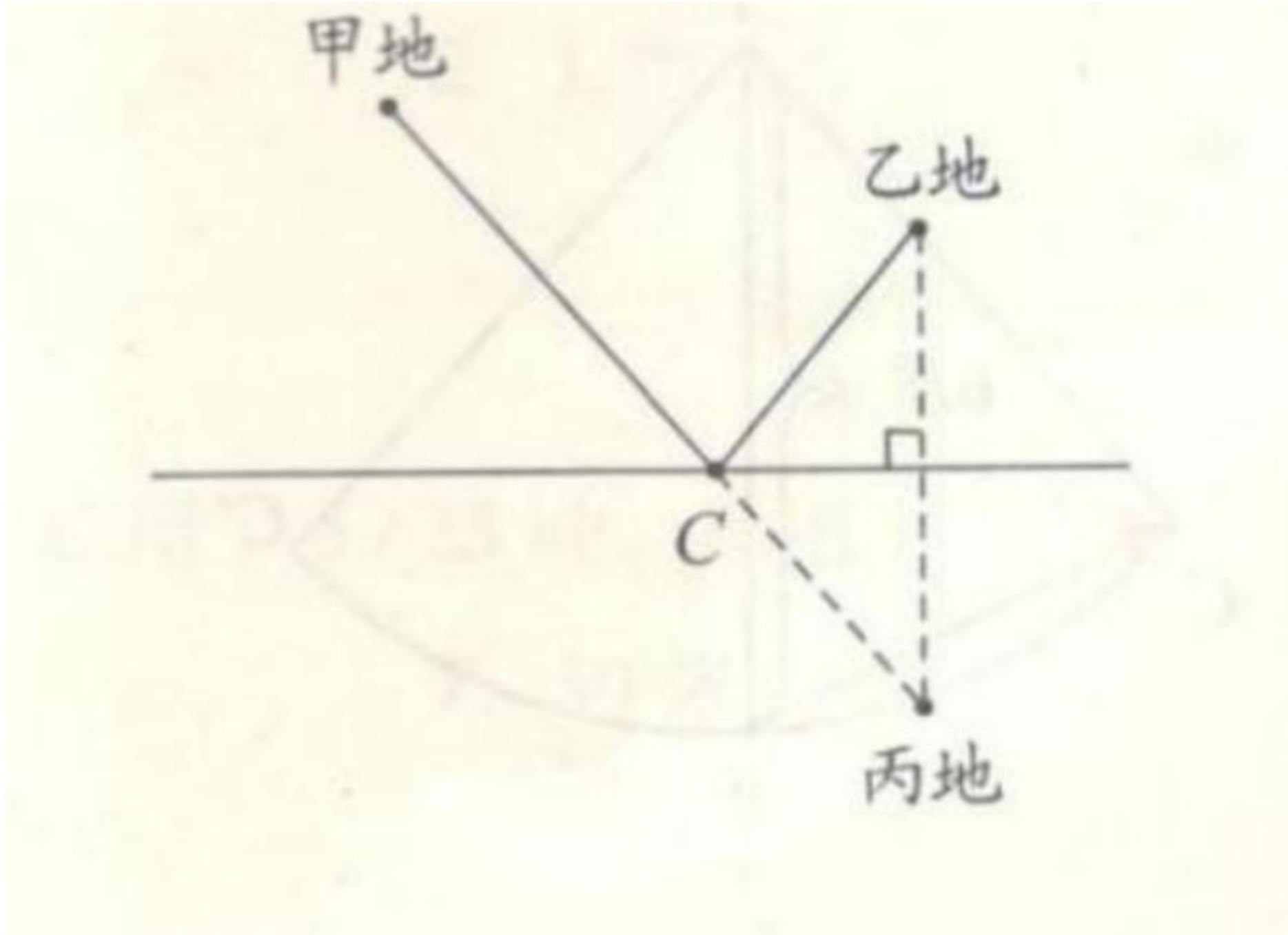
- 1.222.

2.15 组; 1 个人或 2 个人.
- 3.25 场.

4.16.
- 5.最大 100; 最小 $10\frac{9}{19}$.
6. (1) $\frac{1}{72}$; (2) $\frac{71}{72}$.
- 7.4 平方厘米.

8.70.
- 9.4 个.

10.在下图的 C 地饮水.



拓展篇

- 1.294 立方厘米.

2.162.
3. $9 \div 1 \times (8 + 7) - (2 \times 3 + 4 - 6)$, 计算结果为 131.
- 4.9 个; 5 个.

5.312; 323.
- 6.103 块.

7.9872.
8. $954 \times 873 \times 621$.

9.11.
- 10.最大 9999975859606162...979899;

最小 100000123450616263...979899.
- 11.26 千米.

12.5; 4 条; 表示略.

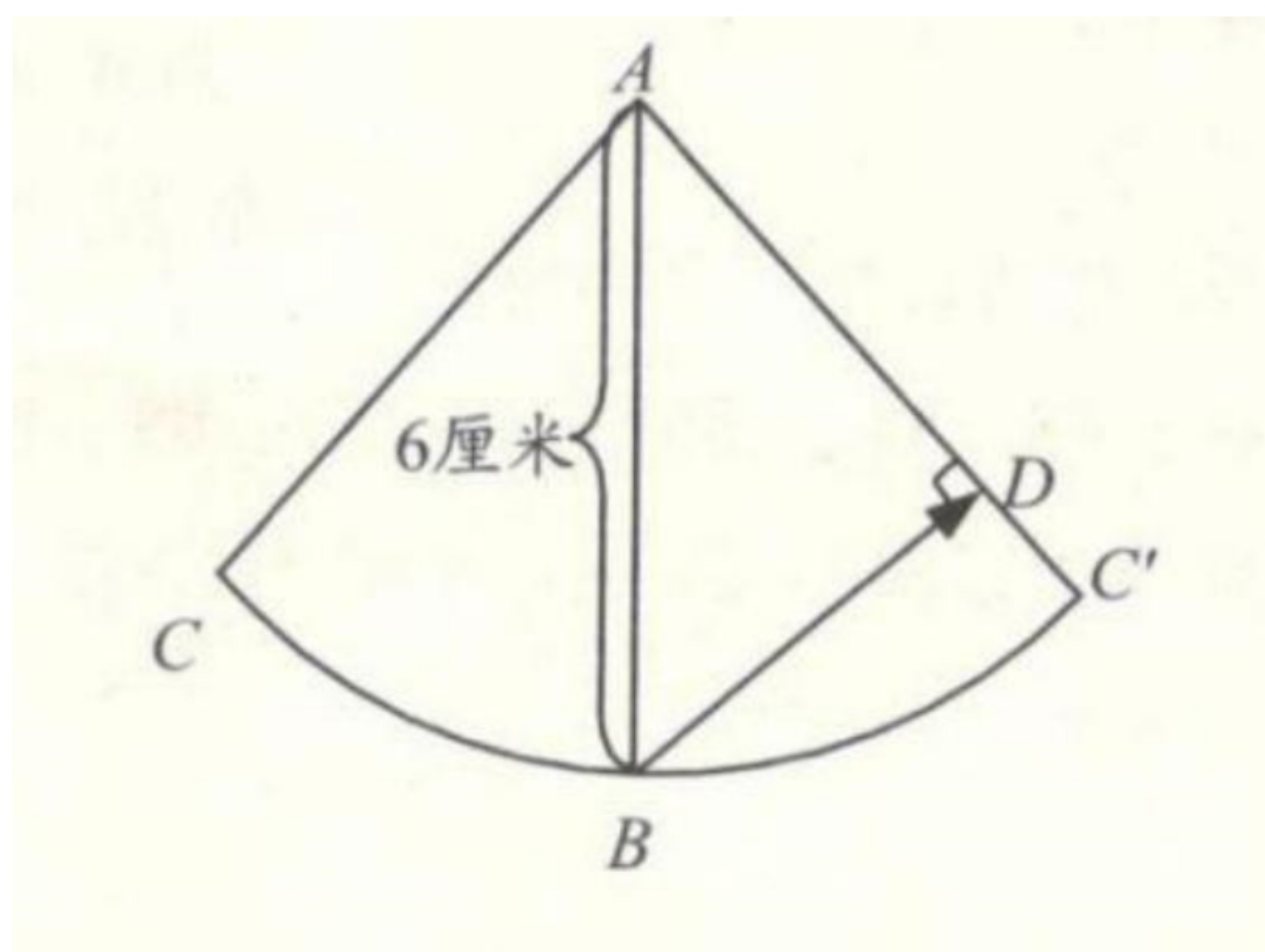
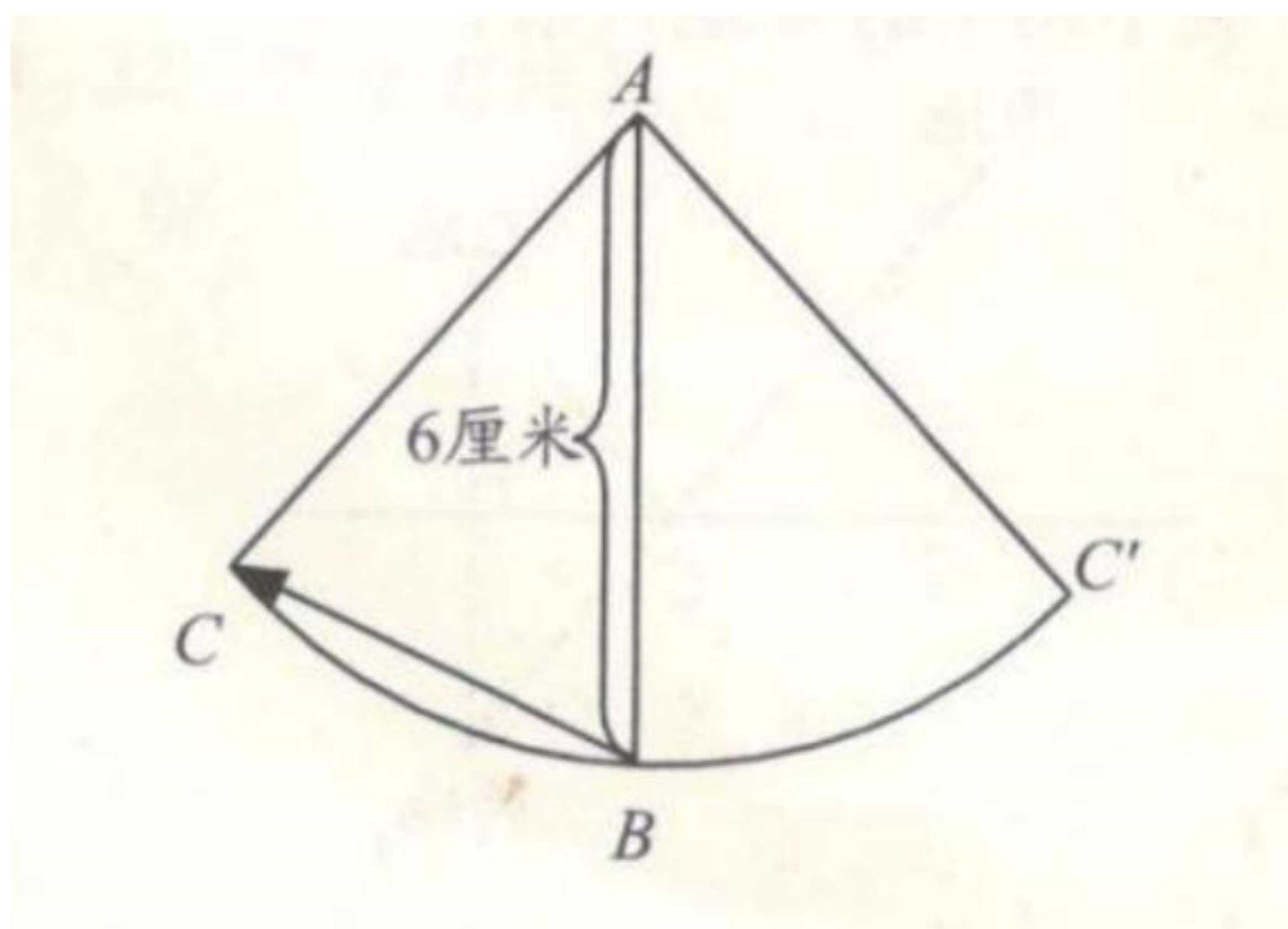
超越篇

- 1.21 次.

2.60483.
- 3.147.

4.784.
- 5.38.

（1）如下图所示： （2）如下图所示：



$$7.74\frac{2}{27}.$$

$$8.10.$$

第 17 讲 应用题综合（二）

提高篇

$$1.442 \text{ 厘米.}$$

$$2.27 \text{ 元.}$$

$$3.\text{第 } 39 \text{ 天.}$$

$$4.40 \text{ 克.}$$

$$5.\text{另一种原料为 E; A 用了 } 10 \text{ 吨, E 用了 } 9 \text{ 吨.}$$

$$6.23 \text{ 元.}$$

$$7.9 \text{ 块.}$$

$$8.36 \text{ 元.}$$

$$9.4320 \text{ 套.}$$

$$10.3 \text{ 只.}$$

拓展篇

$$1.31 \text{ 块.}$$

$$2.1.70 \text{ 元.}$$

$$3.125 \text{ 分钟之后; } 15 \text{ 分钟.}$$

$$4.40、48、81、106 \text{ 或 } 33、55、88、99.$$

$$5.\text{另两种原料是 C、E; A 用了 } 1.875 \text{ 吨, C 用了 } 5.625 \text{ 吨, E 用了 } 7.5 \text{ 吨.}$$

$$6.115 \text{ 元.}$$

$$7.50 \text{ 米/分钟.}$$

$$8.\text{至少 } 11 \text{ 辆; 每箱 } 304\frac{56}{61} \text{ 千克.}$$

$$9.5 \text{ 天.}$$

$$10.20 \text{ 升.}$$

$$11.19.2 \text{ 分钟.}$$

$$12.18 \text{ 个; } 25 \text{ 人.}$$

超越篇

$$1.2 \text{ 秒、} \frac{20}{13} \text{ 秒或 } \frac{32}{13} \text{ 秒.}$$

$$2.\text{分别有 } 2 \text{ 升、} \frac{5}{3} \text{ 升、} \frac{4}{3} \text{ 升、} 1 \text{ 升、} \frac{2}{3} \text{ 升、} \frac{1}{3} \text{ 升、} 0 \text{ 升.}$$

$$3.\text{第八块蛋糕: 原来的蛋糕}=1: 375.$$

$$4.755 \text{ 分钟.}$$

$$5.75 \text{ 米.}$$

$$6.\text{甲 } 1150 \text{ 元, 乙 } 1450 \text{ 元, 丙 } 2900 \text{ 元.}$$

$$7.160 \text{ 元, } 290 \text{ 元, } 310 \text{ 元.}$$

$$8.17 \text{ 个.}$$

第 18 讲 数论综合（二）

提高篇

$$1.1, 7, 13, 19.$$

$$2.5 \text{ 个.}$$

$$3.11.$$

$$4.4 \text{ 组.}$$

$$5.170.$$

$$6.502.$$

$$7.2680.$$

$$8.4565.$$



9.第 50 天、第 51 天和第 52 天.

10.50.

拓展篇

- 1.156.
- 2.108 组.
- 3.52 次.
- 4.64 或 36.
- 5.270.
- 6.29.
- 7.16,24,36,54,81,.
- 8.17.
- 9.5 个.
- 10.5 种; 15 度.
- 11.388089.
- 12.107.

超越篇

1. $2\times 3^6\times 5^2=36450$.
- 2.35.
- 3.75.
- 4.1004.
- 5.36.
- 6.不存在.说明: 略.
- 7.135; 40.
- 8.存在, 例如 82644628100.

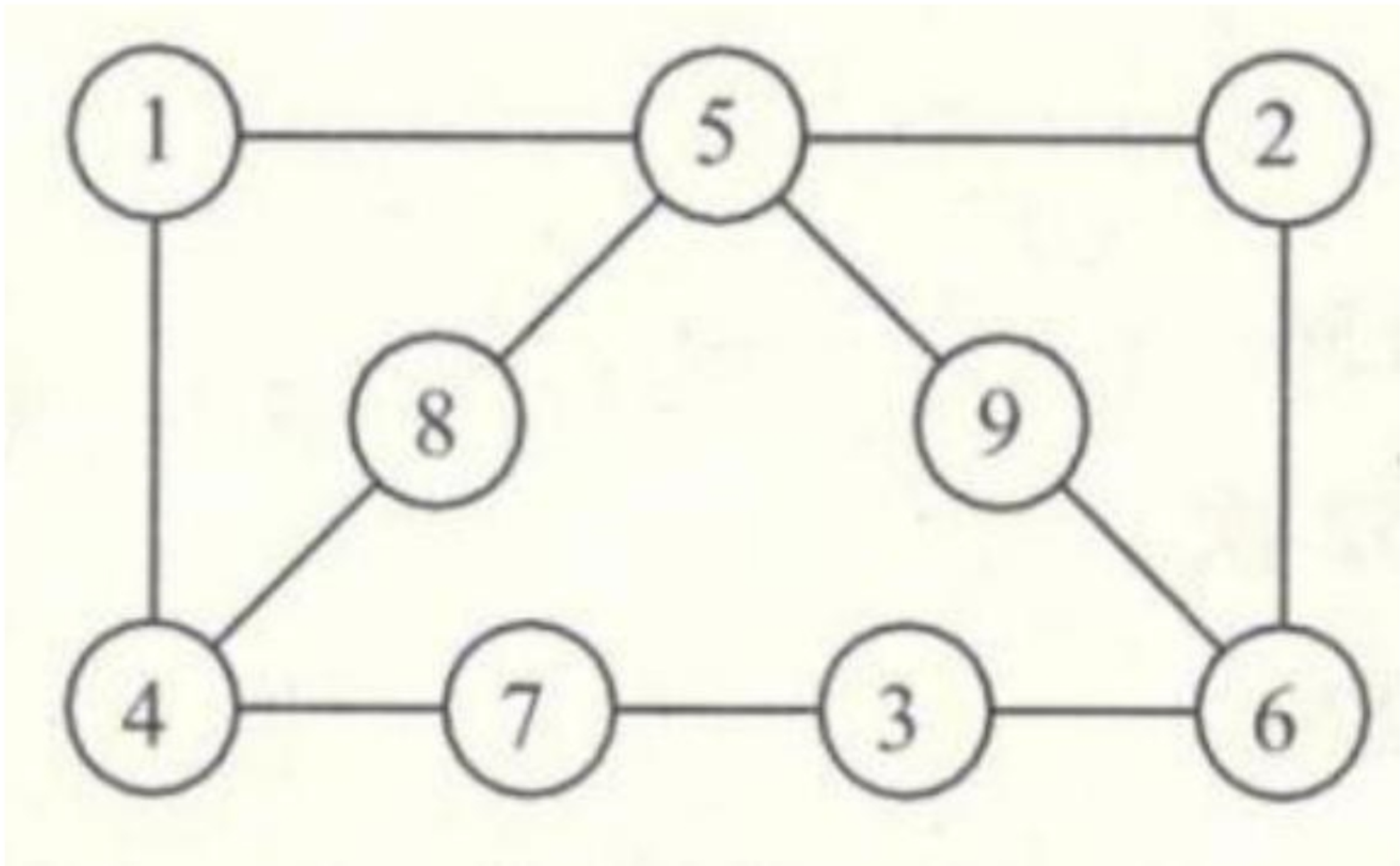
第 19 讲 数字谜综合（二）

提高篇

1. $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$.
- 2.14.
- 3.3 种; 分别是 8,0,4.
- 4.66.
5. 4 种

	7	6
1	4	5
2	3	4

6.
- 8 种.



- 7.54.6.
- 8.18,36,54,72,90.
- 9.从左至右分别是 2,1,2,0,0.
- 10.3235,3435,3835

拓展篇

1. (20,20); (15,30); (11,110); (14, 35) .

2. $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$.

3. $\begin{cases} a = 1190, \\ b = 34, \end{cases} \begin{cases} a = 210, \\ b = 30, \end{cases} \begin{cases} a = 140, \\ b = 28, \end{cases} \begin{cases} a = 14, \\ b = 10. \end{cases}$

4.10 种.

5.525000.

6. (1) 2; (2) 最小 7184, 最大 9865.

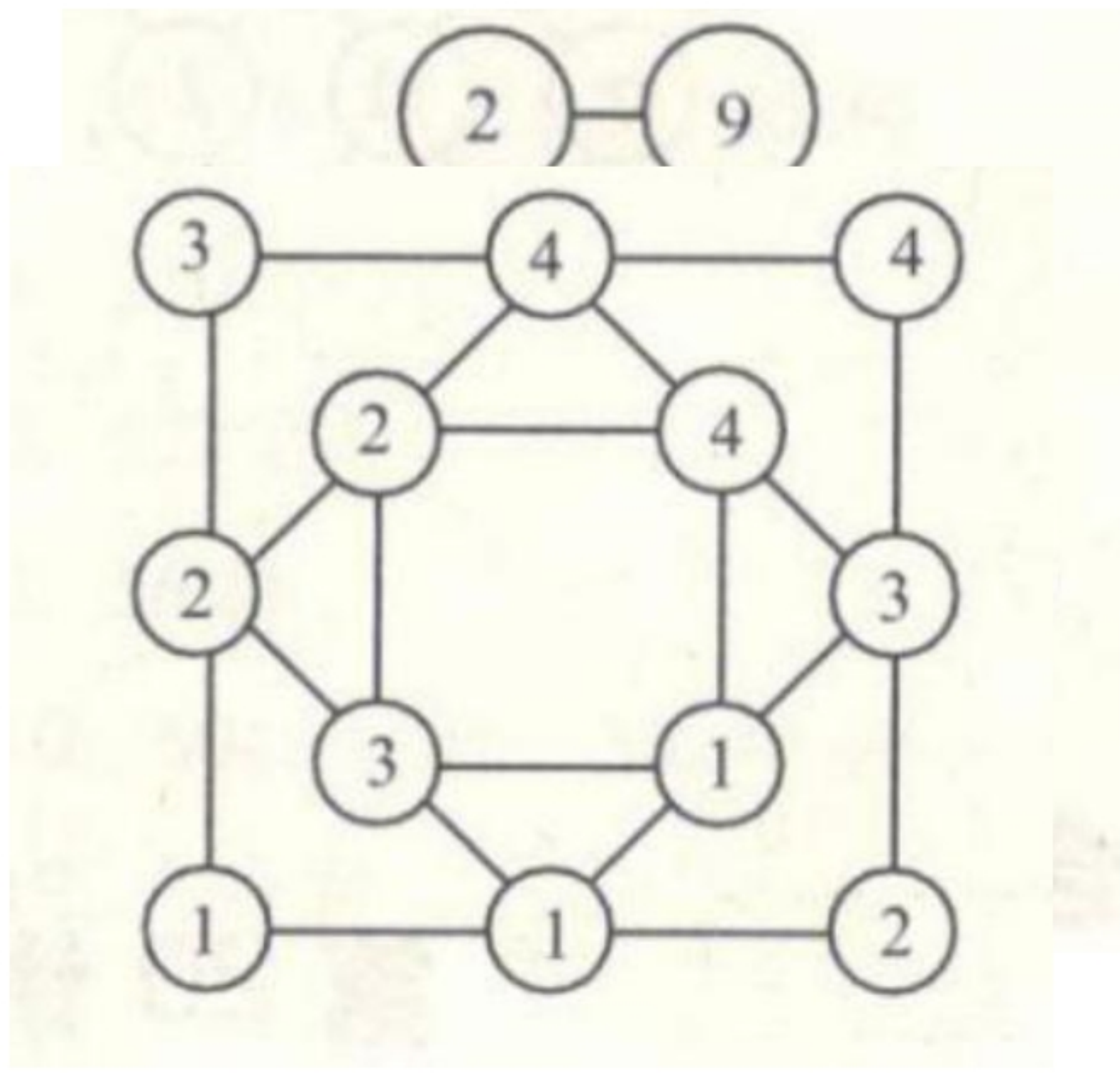
7.9.

8.2 改为 1.5; $4\frac{5}{16}$ 改为 $4\frac{15}{16}$; $6\frac{7}{16}$.

9.第二行的数从左至右依次为 3,1,1,1,0,0; 第三行的数从左至右依次为 2,3,0,1,0,0.

10.516897243.

11.其中一种填法如下图所示



12. (1)

为 60, 且相等, 不成立; (2) 能, 其中一种填法如下图所示.

超越篇

1. $\frac{1}{120} + \frac{1}{840} = \frac{1}{105}, \frac{1}{140} + \frac{1}{420} = \frac{1}{105}, \frac{1}{150} + \frac{1}{350} = \frac{1}{105}, \frac{1}{210} + \frac{1}{210} = \frac{1}{105}$.

2.最小 1026; 最大 1602.

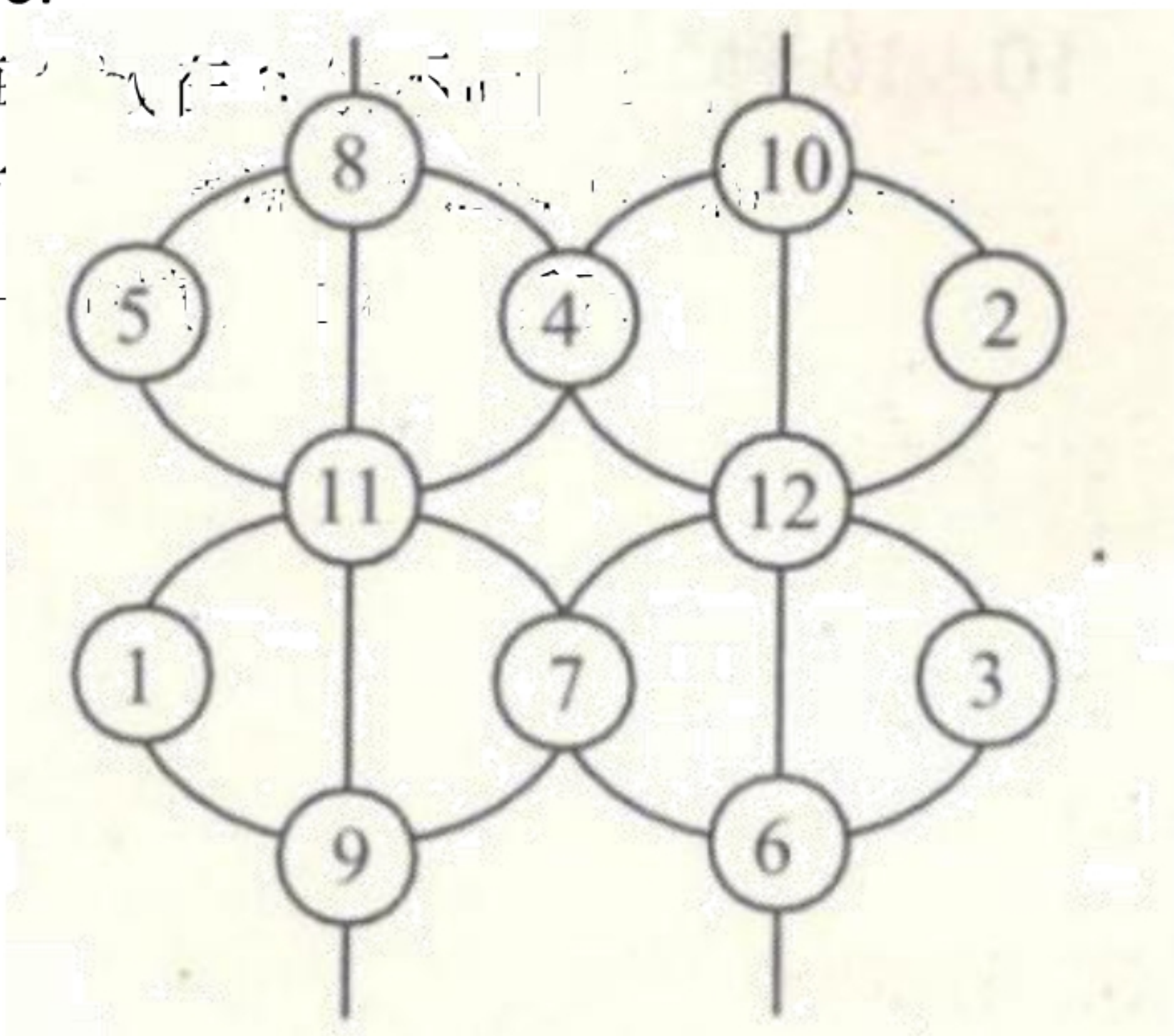
3.16.

4.18; 7.

5.28,

6,1, 2, 3, 4, 6.

7. (1) 不能, 每
线上 3 个数只有
(2) 能, 其中



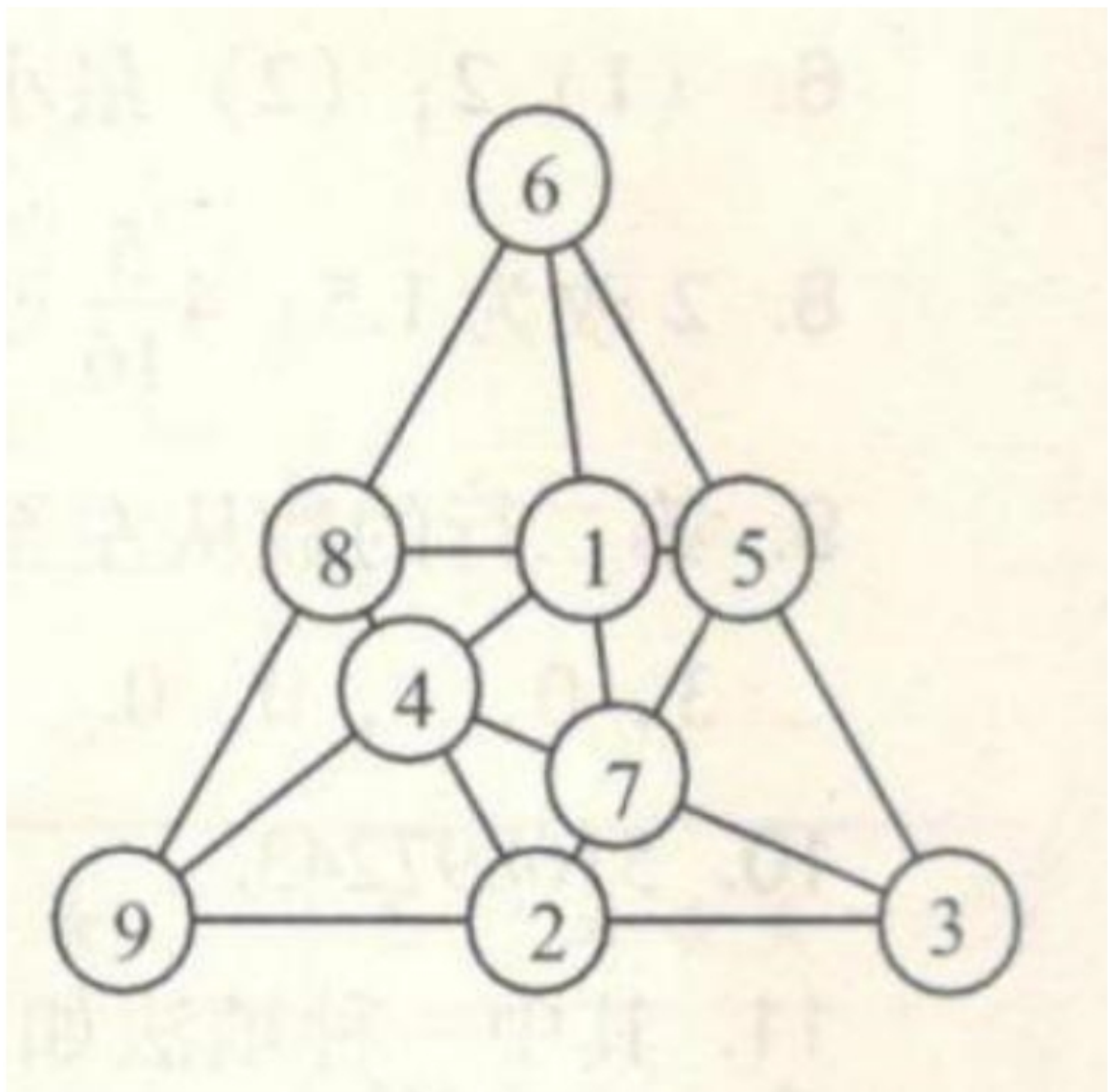
和为 135, 每条线上 3 个数的和为 15.自然数 9 所在的
没有第三种情况.



8. (1) 两种填法，一种如右图，另一种与右图左右对称：
 (2) 不行，理由略.

第 20 讲 计数综合（四）
 提高篇

1.196 种. 2.140 种.



3.70 种. 4.36 种
 5.165 种. 6.861 种.
 7.792 种. 8.28 个；56 个.
 9.30 种. 10.10 种.

拓展篇

1.336 个. 2.210 种.
 3. (1) 6 种；(2) 36 种.
 4.210 个. 5.171 种；231 种.
 6.512 种. 7.23871 种.
 8.56 种. 9.715 种.
 10.604800 种；30240 种.

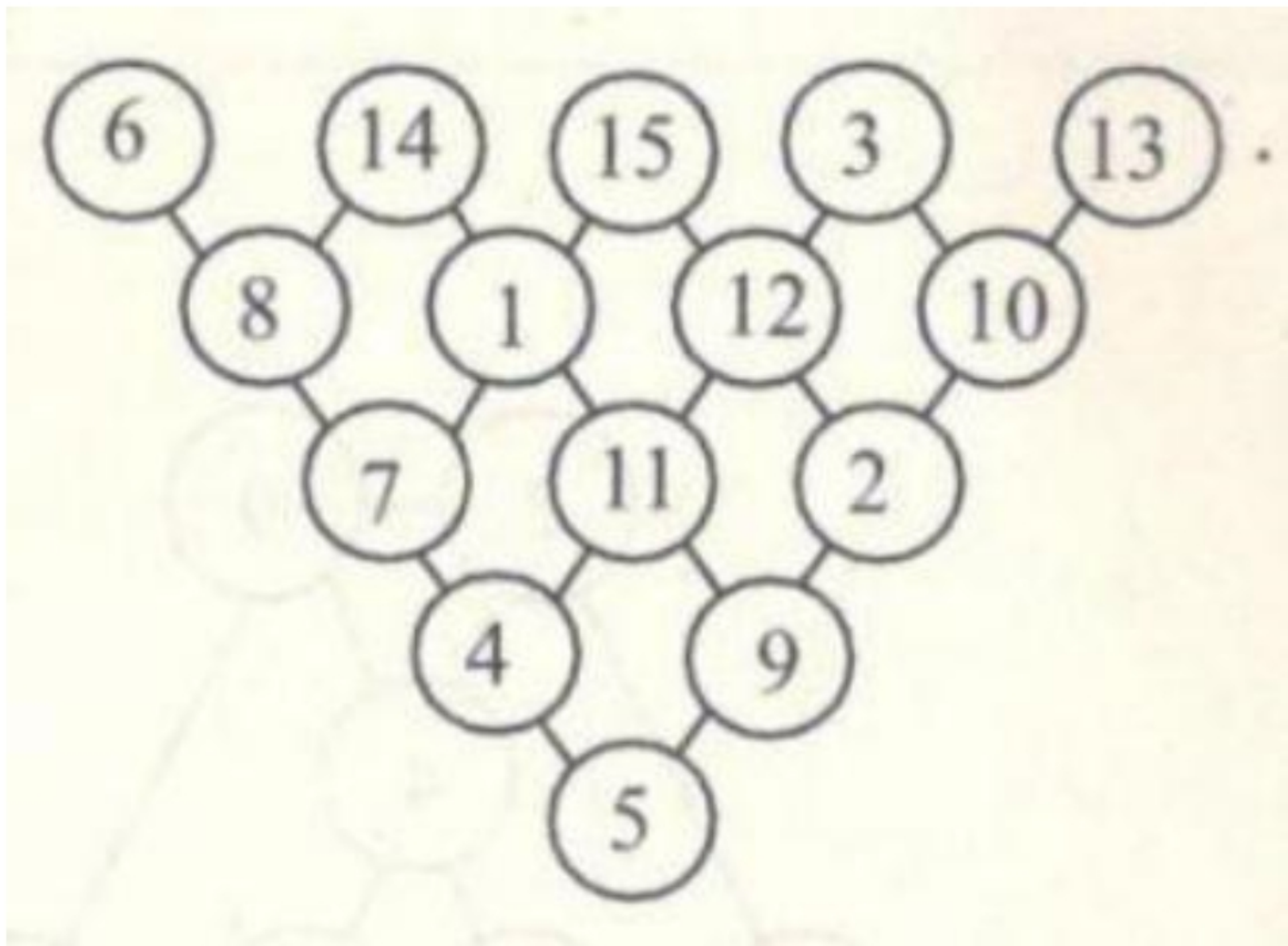
11.41 个.
 12.230 种

超越篇

1.14 种. 2.120 个.
 3.21 种；2 种. 4.315 种.
 5. (1) 20 条；(2) 70 个；(3) 644 个.
 6.604800 种. 7. (1) 42 种；(2) 152 种.
 8.41 种；(2) $\frac{20! \times 11!}{4!}$ 种.

第 21 讲 构造论证（二）
 提高篇

- 1.第二行第三列.
 2. (1) 从左至右填入的数依次是 8，2，6，5，4，3，9，1，7；(2) 不能.



3. (1) 不能; (2) 能, 长方体框架的长、宽、高分别为 4577、199、199.
4. 这 6 为同学在三门课上的得分分别是 (1 分, 1 分, 4 分), (1 分, 2 分, 3 分), (1 分, 3 分, 2 分), (2 分, 1 分, 3 分), (2 分, 2 分, 2 分), (2 分, 3 分, 1 分).
5. 不能.
6. (1) 能; (2) 不能.
7. (1) 其中空白的格子涂上蓝色, R 涂红色; (2) 不能.



8. 不能.
9. 最小是 155.
10. 能, 其中一种排法是 10, 5, 1, 9, 4, 3, 8, 2, 6, 7; 不能.
- 拓展篇
- 1.1, 1, 1, 1, 2, 7. 2.4 条.
- 其中一种填法如下图所示.

其中一种画法如下图所示, 图中的标志数有 3, 4, 5.

5. (1) 能, 其中一种放法是 1, 4, 8, 7, 3, 6, 5, 2; (2) 不能.
6. 最多 8 篇; 最少 3 篇.
7. 8 个.
8. 能; 不能.
9. (1) 能; (2) 不能.

10.

(2)

11.

12.

超越

1. 不

3 整

2. (1) 1,2,5,11,71,143; (2) 不能, 除 2 外全是奇数.

3. 边长为 1 的等边三角形三个顶点必有两点同色, 那两点所在边符合要求.

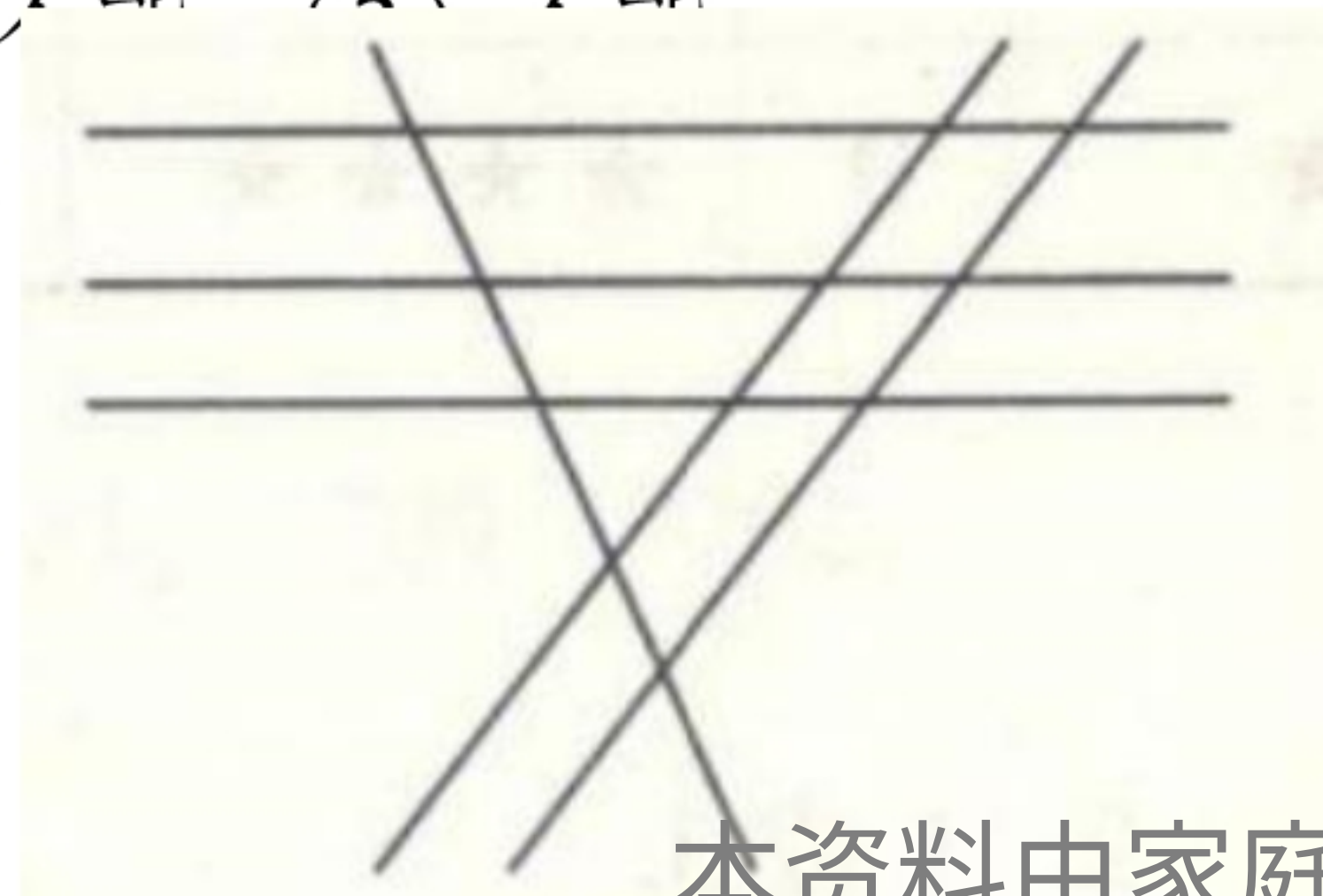
4. 12 个.

5. (1) 不能 (2) 不能

6. 20 个.

7. 4 场;

8. 21.



9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.
5, 4, 13, 6, 11, 8, 9, 10, 7, 12, 5, 14, 3, 2, 1.

何一面都可以被 3 整除, 而 $7 \times 9 \times 11$ 的长方体的匣子的 7×11 面不能被



第 22 讲 数论综合（三）

提高篇

1. (1) 401,804; (2) 656.
2.1 或 3. 3.1156.
4.135,315,175,735.
5.528. 6.324,756 或 432,756.
7.2312. 8.31
9.9 局. 10.6 个

拓展篇

1. (1) 45; (2) 48; (3) 448.
2.2.
3.6, 10, 15; 12, 10, 15; 18, 10, 15.
4.35,63,75; 55,75,99.
5.167 个.
6.1011.
7.000,001,376,625.
8.4,4,12,6,3 或 4,12,6,6,3 或 4,12,12,6,3.
9. (1) 952; (2) 861.
10.12.
11.其中一个答案是 6,1,7,2,8,3,9,4,10,5,11.
12.4097 条.

超越篇

- 1.100,600. 2.130.
3.1638,8631,2709,9702.
4.23. 5.1073; 689.
6.不能; 不能. 7.21; 6930.
8.1,3,9,11,33,99.

第 23 讲 概率初步

提高篇

- 1.略
2. (1) $\frac{2}{9}$; (2) $\frac{7}{9}$; (3) 0,1.
3. $\frac{1}{2}$. 4.公平.
5. $\frac{1}{7}$. 6. $\frac{7}{15}$.
7. $\frac{1}{2}$. 8. $\frac{35}{128}$, $\frac{93}{256}$.
9.0.48,0.44,0.08. 10. $\frac{1}{3}$.

拓展篇

- 1.略.
2. (1) 0.01; (2) 0.5; (3) 0.25; (4) 0; (5) 1.

$$3. \frac{11}{130}.$$

$$5. \frac{1}{12}.$$

$$7. \frac{5}{16}.$$

9.小.

10. (1) 0.3; (2) 0.02; (3) 0.8.

$$11. (1) \frac{1}{2}; (2) \frac{4}{5}.$$

$$12. \frac{9}{44}.$$

超越篇

$$1. \frac{11}{16}.$$

3.0.52, 0.48.

$$5. \frac{97}{245}.$$

$$7. \frac{40}{243}.$$

$$4. \frac{17}{20}.$$

$$6. \frac{28}{57}.$$

$$8. \frac{1}{5}.$$

2.有 2 人生日相同的概率大.

4.0.004.

$$6. \frac{1024}{4149}.$$

$$8. \frac{1}{2}..$$

