



学理科到学而思
www.speiyou.com



学而思培优

反侵权盗版声明

学而思培优总部小学教研依法对本作品享有著作权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将依法追究刑事责任。

丛书编撰与顾问团队主要成员介绍



余其煌

中国科学院数学与系统学研究院研究员，博士生导师。华杯赛主试委员会委员。希望杯全国数学邀请赛命题委员会专家，国家数学奥林匹克专家。



李伟固

北京大学数学学院教授，全国数学奥赛国家级教练，中国数学奥林匹克暨全国中学生数学冬令营命题员，国际数学奥林匹克中国国家集训队命题组、教练组成员。



周春荔

首都师范大学数学教授。中国数学会会员，中国数学奥林匹克首批高级教练员。数学科学方法论研究交流中心副主任。华杯赛主试委员会委员。



陶晓永

著名的数学教育专家。北京教育学院数学系副教授，中国数学奥林匹克高级教练，华杯赛主试委员会委员，北京数学竞赛集训队教练组组长。



杨巍

北京大学本科，中科院博士，北京集训队主教练，迎春杯、学而思杯命题组成员，华杯冬令营特聘教练，走美示范课程教练，华杯、希望杯金牌教练。



张剑

学而思高端教师，学而思教研部竞赛组成员。CMO金牌获得者，毕业于清华大学计算机系。

关于我们

一、简介

学而思培优教研经过7年沉淀，数学界著名的余其煌教授、周春荔教授、陶晓永教授、李伟固教授参与讨论指导，在2010年推出全新的小学数学高端学习体系，且每年均会收集反馈改版升级，现在使用的是第五版，也是这五版中最好的一版。

二、特色

1、八大问题、十二级体系

学而思将小学知识分为计算问题、图形问题、组合问题、计数问题、整数问题、应用问题、行程问题、综合问题，一共八大问题。我们又在此基础上，开发出适合小学生认知过程的十二级体系，这是一套完整的学习课程体系。

	暑 期	秋 季	寒 假	春 季
小学一年级 ▶	1 级 (上)	1 级 (下)	2 级 (上)	2 级 (下)
小学二年级 ▶	3 级 (上)	3 级 (下)	4 级 (上)	4 级 (下)
小学三年级 ▶	5 级 (上)	5 级 (下)	6 级 (上)	6 级 (下)
小学四年级 ▶	7 级 (上)	7 级 (下)	8 级 (上)	8 级 (下)
小学五年级 ▶	9 级 (上)	9 级 (下)	10 级 (上)	10 级 (下)
小学六年级 ▶	11 级 (上)	11 级 (下)	12 级 (上)	12 级 (下)

本册书

2、500余知识标签、不断完善的同步题库、真题题库。

我们不断地对小学知识体系细分，每道同步练习题被标记了一个知识标签以及难度标签，并且被录入到我们的在线同步题库，学生可以非常方便的在同步题库中搜索到对应知识及难度的题。无论是在预习、学习、还是复习阶段，在线同步题库都将是一个最好的助手。

大量的历年杯赛真题、小升初真题都被录入到我们的真题题库，并且被标记了一个或多个知识标签以及综合难度标签。帮助学生与真题接轨，是备考阶段最好的助手！

给学生、家长的建议



1、课前预习

学而思培优追求最高效的学习方法，我们并不要求所有学生花费大量时间对本讲内容预习，但我们非常希望学生对本讲的前铺知识进行预习，因为前铺知识是本讲知识的基础知识，课程设置默认了学生对这些前铺知识有了一定的掌握。前铺知识标签会在每一讲首页出现，扫对应二维码即可开始针对性预习，不会占用太多时间。

2、课堂学习

学而思培优拥有优质的教师团队，力争使得每一位学生得到既专业严谨，又简单易懂、轻松有趣的讲解。课堂学习是最重要的一环，一定要认真听讲，积极思考，认真记录笔记。

3、课后检测、复习

课后的过关检测是检验学习效果的必要环节，学生一定要认真完成。当遇到答错，或者无法完成的检测题，可以在同步题库中找到对应知识标签的题及其解析，进行针对性训练！每讲配备了复习巩固题，是对前三讲知识的复习，防止遗忘！

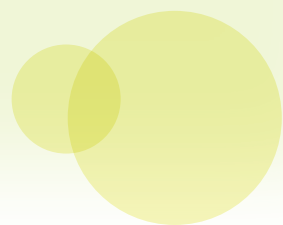
4、给家长讲题

学习数学有四个境界：听得懂、会做题、能讲题、会编题，为了达到一定的学习效果，我们希望学生能选一道例题回家后给家长讲解。家长可以在“青出于蓝”框中写评语，并签字，老师会认真查看。

5、善于使用题库

题海战术被人诟病的原因是学生在茫茫题海中，找不到自己真正需要的题。在线同步题库和在线真题题库具有方便简洁的检索功能，对知识标签的划分清晰合理。无论是在课前预习、课后检测、复习，还是备考阶段，请记得我们的题库功能！

我们的联系方式：peiyoujiaoyan@100tal.com



目录 CONTENTS



第1讲 整数与数列····· 8

第2讲 统筹与最优化····· 26

第3讲 整除特征进阶····· 46



第4讲 加乘原理进阶 64

第5讲 流水行船 82



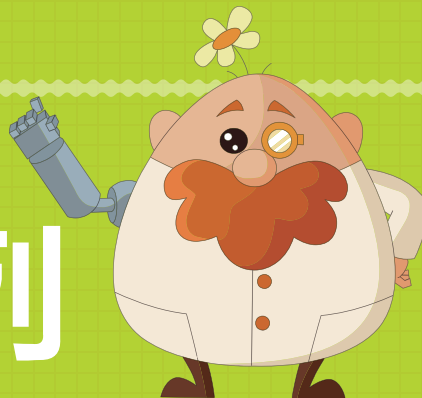


学理科到学而思



第一讲

整数与数列



本讲内容

等差数列及其衍生数列的综合知识
平方差公式以及自然数列的平方和公式

前铺

等差数列初步 三年级春季
等差数列进阶 四年级暑假

后续

分数裂项 六年级暑假
归纳与递推 六年级暑假



模块



练一练



知识体系图



本讲巩固



复习巩固



小故事



模块 1 ▶

等差数列



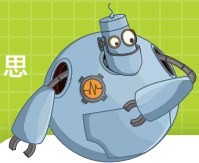
模块 2 ▶

平方差与平方和



模块 3 ▶

综合应用



课前测试 ▶

1. 已知数列 1, 4, 7, 10, …, 请问数列第 15 项是多少?

2. 求和: $1+3+5+\cdots+29=$ _____.

3. 已知数列 6, 11, 16, 21, …, 146, 问:

(1) 81 是这个数列的第几个数?

(2) 这个数列一共有几项?

(3) 将数列中所有的数加起来, 和是多少?

等差数列



等差数列：如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，而这个常数叫做等差数列的公差，公差常用字母 d 表示。

常用公式：

1. 通项公式：末项 = 首项 + (项数 - 1) × 公差
用字母表示： $a_n = a_1 + (n-1) \times d$;
2. 项数公式：项数 = (末项 - 首项) ÷ 公差 + 1
用字母表示： $n = (a_n - a_1) \div d + 1$;
3. 求和公式：和 = (首项 + 末项) × 项数 ÷ 2
用字母表示： $S_n = (a_1 + a_n) \times n \div 2$;
4. 公差公式：公差 = 项差 ÷ 项数差
用字母表示： $d = (a_n - a_m) \div (n - m)$;
5. 奇数项数列求和公式：和 = 中间项 × 项数
用字母表示： $S_n = a_{(n+1)/2} \times n$ (n 为奇数)。

已知一个等差数列第 10 项等于 80，第 13 项等于 101。这个等差数列前 29 项的和是多少？

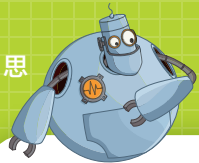
◀ 模块 1



◀ 知识剖析



◀ 例 1



例 2 ▶

(1) 15 个连续奇数的和是 1995，其中最大的奇数是多少？

(2) 14 个互不相同的自然数组成一个等差数列，所有项之和为 1988，那么其中最小一项的最大值是多少？

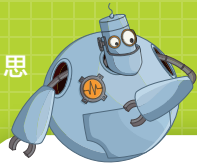
15 个互不相同的自然数组成一个等差数列，所有项之和为 2025，那么其中最大一项的最大值是多少？

◀ 练一练



有一列等差数列，它的前 7 项的和为 84，前 14 项的和为 266，它的前 21 项的和是多少？

◀ 例 3



模块 2 ▶

平方差与平方和

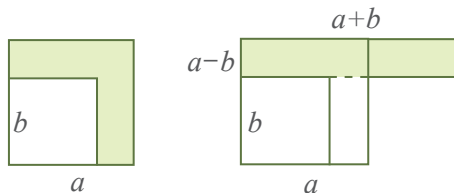


知识剖析 ▶

一、平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$

平方差公式的证明:

两个数的平方做差可以看成两个正方形的面积差,如图通过割补可知面积差恰好为一个长方形的面积,长宽如图,所以 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

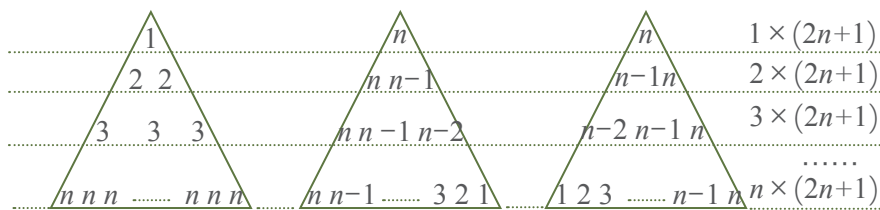


二、平方和公式: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1) \div 6$

平方和公式的证明:

将 $1^2 \sim n^2$ 放在一个正三角形中,如图第一个三角形,每行代表一个数的平方 (n 个 n 代表 n^2),这个正三角形中的所有数的和即我们要求的所有平方数的和;

将第一个三角形顺时针旋转两次,分别得到图中第二、三个三角形;



计算每行所有数的和,观察可知每行的和均为行数的 $(2n+1)$ 倍;

于是三个三角形内所有数的和为: $(1+2+\dots+n) \times (2n+1)$;

所以 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1+2+3+\dots+n) \times (2n+1) \div 3$

$$= n(n+1)(2n+1) \div 6.$$

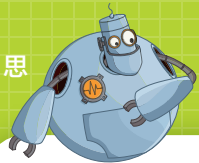
(1) $167^2 - 133^2$

(2) 2016×1984

(3) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 87^2 - 88^2 + 89^2$

(4) $40^2 - 38^2 + 36^2 - 34^2 + \cdots + 4^2 - 2^2$

◀ 例 4



练一练 ▶

(1) 两个相邻自然数的平方之差为 49, 求这两个自然数;

(2) 两个不相邻自然数的平方之差为 133, 求这两个自然数.

例 5 ▶

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

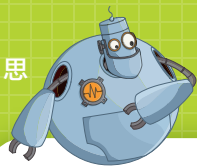
(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$

◀ 例 6

(1) $15^2+16^2+17^2+\cdots+21^2$

(2) $2^2+4^2+6^2+\cdots+24^2$

(3) $1^2+3^2+5^2+\cdots+25^2$



模块 3 ▶

综合应用



知识剖析 ▶

平方和公式的推广:

计算: $1 \times a_1 + 2 \times a_2 + 3 \times a_3 + \dots + (n-1) \times a_{n-1} + n \times a_n$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 为等差数列.

用平方和公式的证明方法可知,

$$\text{和} = (1+2+\dots+n) \times (2a_n+a_1) \div 3 = n(n+1) \times (2a_n+a_1) \div 6.$$

例 7 ▶

计算: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 48 \times 49 + 49 \times 50$.

例 8 ▶

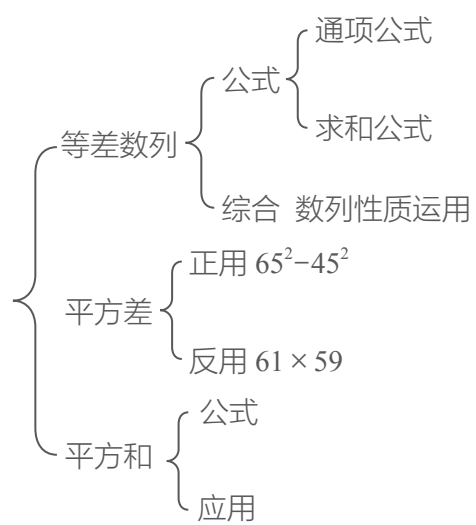
$1 \times 99 + 2 \times 98 + 3 \times 97 + \dots + 98 \times 2 + 99 \times 1$

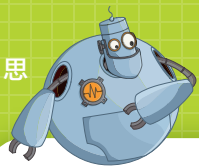
$$1 \times 99 + 2 \times 97 + 3 \times 95 + \cdots + 49 \times 3 + 50 \times 1$$

◀ 练一练



◀ 知识体系图





学习札记 ▶

青出于蓝 ▶

<p>学生讲解的例题：</p>	<p>家长评价、签字：</p>
-----------------	-----------------



1. 计算: $1+3+5+\cdots+59+60+59+\cdots+5+3+1$

2. 11 个连续自然数的和是 1870, 其中最大的自然数是_____.

3. 有一个 9 项的等差数列, 所有项之和为 2034, 如果它的每一项都是自然数, 那么其中最小的一项的最小值是_____.

4. 计算: $60^2-59^2+58^2-57^2+\cdots+2^2-1^2$



5. 计算: $100^2 - 98^2 + 96^2 - 94^2 + \cdots + 4^2 - 2^2$

6. 计算: $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 100^2$

7. 计算: $1 \times 6 + 2 \times 8 + 3 \times 10 + \cdots + 30 \times 64$

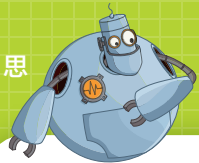


1. 计算: $15^3 \times 2^5 \div (6^3 \times 5^2) =$ _____.

2. 判断下列哪些数是质数.

107 147 156 205 239 273

3. 学而思选出 50 名优秀的学生参加作文、数学和英语比赛, 结果 5 人三项比赛都获奖了, 有 9 人三项比赛都没有获奖. 已知作文比赛获奖的有 15 人, 数学比赛获奖的有 20 人, 英语比赛获奖的有 12 人, 那么同时两项比赛获奖的一共有_____人.



品格教育

一乐观

乐观，是一种最为积极的性格因素。乐观就是无论在什么情况下，都保持良好的心态，相信坏事情总会过去、阳光总会再来的心境。

【乐观的三个层次】

- 一、自立自强，积极向上
- 二、宠辱不惊，淡泊自然
- 三、阳光心态，主宰自己的生活

【乐观的释义与故事】

- 一、自立自强，积极向上

<释义>

人的成长过程，就是一个不断提高自立能力的过程。从学会走路开始，我们就获得了一个身体的自立；当能自己吃饭、穿衣时，我们就有了自立生活的体验；直到将来走上工作岗位，能够自己养活自己了，我们就获得了基本自立的人生。自立的生活表现在方方面面，也从方方面面影响着我们的成长和发展。

故事一

脚下的功夫

今年 61 岁的任吉美出生在海阳市的一个渔民家里，她生下来就没有了双臂，家里人怕外人笑话，从小就不允许她随便出家门。

但命运的不公平没有让任吉美低头。她从小就有股不服输的劲，常常趁着大人不在家的时候练“脚功”。她学着用脚拿东西、吃饭、

洗脸梳头，甚至试着用脚穿针引线。从一开始笨拙地踢翻碗筷，到最后不仅能自己完全处理，而且有些事情竟然做到比正常人用手做还熟练。10岁那年，任吉美看到别的小孩子上学，也哭着想要读书，家里就送她上了学。在学校，她用嘴翻书，用脚趾夹着笔写字，每次考试都是全班第一。

后来，因为家庭困难，刚读完二年级，就失学了，但她很快就振作起来，除了干家务活外，有时间便读书、写字，渐渐就能看报和写信了，接着又学会了绘画和剪纸，不久居然学会了用脚剪裁衣服。任吉美的经历告诉我们，只要自立自强，在困难面前保持乐观的心态，就可以取得常人难以置信的成就。



学理科到学而思



第二讲

统筹与最优化



本讲内容

学习如何合理安排时间、地点问题
从解决问题的多种方案中寻找最优方案

前铺

合理安排 二年级秋季

后续

最值问题进阶 四年级春季
必胜策略 五年级暑假



模块



练一练



知识体系图



本讲巩固



复习巩固



小故事



模块 1 ▶

时间统筹



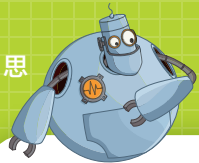
模块 2 ▶

地点统筹



模块 3 ▶

调运问题



课前测试 ▶

1. 洗开水壶要用 1 分钟，烧开水要用 15 分钟，洗茶壶要用 1 分钟，洗茶杯要用 1 分钟，拿茶叶要用 2 分钟。小明估算了一下，完成这些工作要花 20 分钟。为了早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少分钟就能沏茶了？

2. 如图， A 、 B 是两个居民人数一样多的小区，现在需要在这两个小区之间设立一个新的公交车站。为方便出行，要使大家走到车站的距离总和尽量短，你会选在哪里设立这个车站？



3. 如图， A 小区居民人数是 B 小区的两倍，现在需要在这两个小区之间设立一个新的公交车站。为方便出行，要使大家走到车站的距离总和尽量短，你会选在哪里设立这个车站？



时间统筹



合理安排时间:

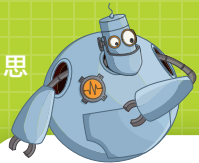
1. 排队问题: 先快后慢
2. 过河问题: 快者来回, 慢者结伴

理发室里只有一位理发师, 但是同时来了五位顾客, 根据他们所要理的发型, 分别需要 10、12、15、20 和 24 分钟, 怎样安排他们理发的顺序, 才能使这五人理发和等候所用时间的总和最少? 最少时间为多少? (一位顾客被理发的时间也算作此顾客的等待时间)

◀ 模块 1

◀ 知识剖析

◀ 例 1



例 2 ▶

电车公司维修站有 7 辆电车需要维修，如果用一名工人维修这 7 辆电车的修复时间分别为 12, 17, 8, 18, 23, 30, 14 分钟. 每辆电车每停开 1 分钟的损失是 11 元，现在由 3 名工作效率相同的维修工人各自单独工作，

(1) 怎样安排才能使得经济损失最少？

(2) 怎样安排才能使从开始维修到维修结束历时最短？



练一练 ▶

有八个人各拿着一只提桶同时到水龙头前打水，水龙头注满第一个人的桶需要 1 分钟，注满第二个人的桶需要 2 分钟，……如此下去，

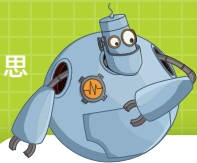
(1) 当只有一个水龙头时，如何安排这八个人打水，使他们总的等待时间最少？最少的时间是多少？

(2) 当有两个水龙头时, 如何安排这八个人打水, 使他们总的等待时间最少? 最少的时间是多少?

(3) 当有两个水龙头时, 在总等待时间最少的基础上, 如何安排才能使打水的过程历时最短?

有一家五口人要在夜晚过一座独木桥。他们家里的老爷爷行动非常不便, 过桥需要 12 分钟; 孩子们的父亲贪吃且不爱运动, 体重严重超标, 过河需要时间也较长, 8 分钟; 母亲则一直坚持劳作, 动作还算敏捷, 过桥要 6 分钟; 两个孩子中姐姐需要 3 分钟, 弟弟只要 1 分钟。当时正是初一, 夜晚又是阴天, 不要说月亮, 连一点星光都没有, 真所谓伸手不见五指。所幸的是他们有一盏油灯, 同时可以有两个人借助灯光过桥。但要命的是灯油将尽, 这盏灯只能再维持 30 分钟了! 他们焦急万分, 该怎样过桥呢?

◀ 例 3



模块 2 ▶

地点统筹



知识剖析 ▶

合理安排地点:

1. 各点等价: $\left\{ \begin{array}{l} \text{奇数个点: 集合点为中间的点 (注意不是线段中点)} \\ \text{偶数个点: 集合点为中间两点之间线段上的任意一点} \end{array} \right.$
2. 各点不同: 小往大靠, 支往干靠

例 4 ▶

(1) 如图, 在街道上有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五栋居民楼, 每栋居民楼的人数一样多. 现在设立一个公交站, 为使五栋楼的居民到车站的距离之和最短, 车站应位于何处?



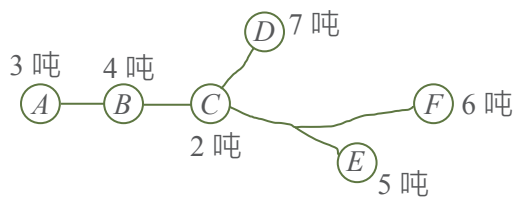
(2) 如图, 在街道上有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 六栋居民楼, 每栋居民楼的人数一样多. 现在设立一个公交站, 要想使居民到达车站的距离之和最短, 车站应该设在何处?



- (1) 在一条公路上，每隔 10 千米有一座仓库（如图），共有五座，图中数字表示各仓库库存货物的重量。现在要把所有的货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输 1 千米需要运费 0.9 元，那么集中到哪个仓库运费最少？运费最少为几元？



- (2) 某乡共有六块甘蔗地，每块地的产量如下图所示。现在准备建设一座糖厂，问糖厂建于何处总运费最省？

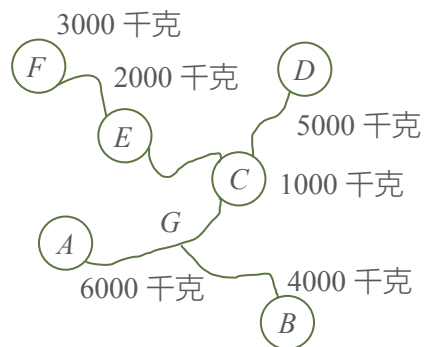


例 5



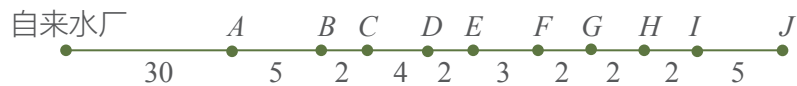
练一练 ▶

某乡有六块麦地，每块麦地的产量如下图。试问麦场设在何处最好？



例 6 ▶

新建的自来水厂要给沿公路的十个村庄供应自来水（如下图，距离单位为千米），要安装的水管有粗细两种选择，粗管足够供应所有村庄使用，细管只能供一个村用水，粗管每千米要 7000 元，细管每千米要 2000 元，如果粗细管适当搭配，互相连接，可以降低费用，怎样安排才能使这项工程费用最低？费用是多少元？



调运问题



◀ 模块 3



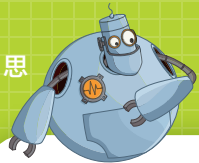
◀ 例 7

- (1) 北京、深圳分别有 10 台和 6 台完全相同的机器, 准备给武汉 11 台, 西安 5 台, 每台机器的运费如表所示, 如何调运能使总运费最省?

运费/元 发站 \ 到站	武汉	西安
北京	500	600
深圳	1000	800

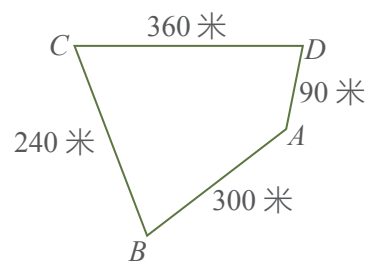
- (2) 北京、上海分别有 10 台和 6 台完全相同的机器, 准备给武汉 11 台, 西安 5 台, 每台机器的运费如表所示, 如何调运能使总运费最省?

运费/元 发站 \ 到站	武汉	西安
北京	500	600
上海	700	1000



例 8 ▶

某工地 A 有 20 辆卡车，要把 60 车渣土从 A 运到 B ，把 40 车砖从 C 运到 D （工地道路图如下所示）。问如何调运最省汽油？

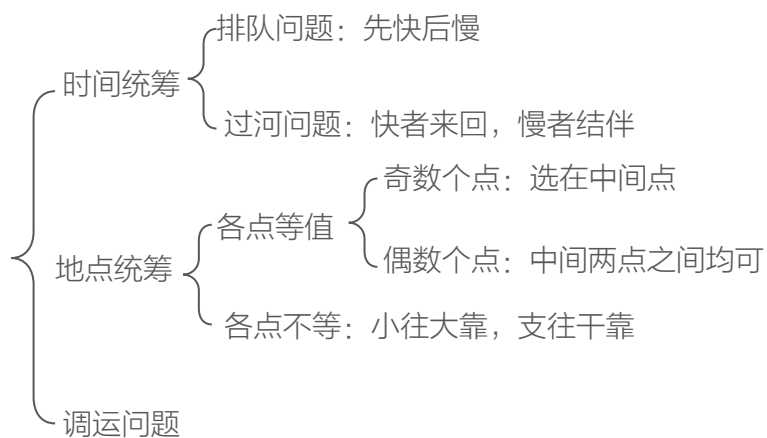


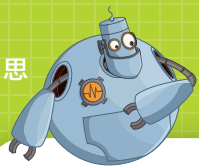
有 157 吨货物要从甲地运往乙地，大卡车的载重量是 5 吨，小卡车的载重量是 2 吨，大卡车与小卡车每车次的耗油量分别是 10 公升和 5 公升。问如何选派车辆才能使运输耗油量最少？共需用油多少公升？

◀ 练一练



◀ 知识体系图





学习札记 ▶



青出于蓝 ▶

学生讲解的例题：	家长评价、签字：

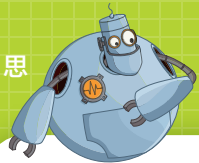


1. 车间里有五台车床同时出现故障，已知第一台到第五台修复时间依次为 18, 30, 17, 25, 20 分钟，每台车床停产一分钟造成经济损失 5 元。现有两名工作效率相同的修理工，问：

(1) 怎样安排才能使得经济损失最少？

(2) 怎样安排才能使从开始维修到维修结束历时最短？

2. 小明骑在牛背上赶牛过河。共有甲、乙、丙、丁 4 头牛。甲牛过河需要 1 分钟，乙牛过河需要 2 分钟，丙牛过河需要 5 分钟，丁牛过河需要 6 分钟。每次只能赶两头牛过河，那么小明要把这 4 头牛都赶到对岸，最少要用多少分钟？

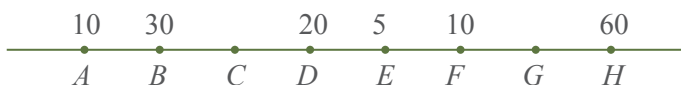


3. 有十个人各拿着一只提桶同时到水龙头前打水，水龙头注满第一个人的桶需要 2 分钟，注满第二个人的桶需要 4 分钟，……。如此下去，注满第十个人的桶需要 20 分钟。当只有两个水龙头时，如何巧妙安排这十个人打水，使他们总的等待时间最少？最少的时间是多少？

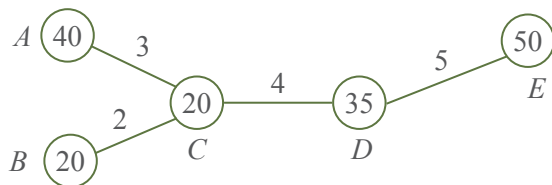
4. (1) 有 135 名少先队员分散在一条公路上执勤宣传交通法规，问完成任务后应该在公路的什么地点集合，可以使他们从各自的宣传岗位沿公路走到集合地点的路程总和最小？

(2) 有 150 名少先队员分散在一条公路上执勤宣传交通法规，问完成任务后应该在公路的什么地点集合，可以使他们从各自的宣传岗位沿公路走到集合地点的路程总和最小？

5. 在一条公路上，每隔 10 千米有一座仓库，共有 8 座，图中数字表示各仓库库存货物的重量（单位：吨），其中 C 、 G 为空仓库。现在要把所有的货物集中存入一个仓库里，如果每吨货物运输 1 千米需要 0.5 元，那么集中到哪个仓库中运费最少，最少需要多少元运费？



6. 如图是 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个村之间的道路示意图， \bigcirc 中数字是各村要上学的学生人数，道路上的数表示两村之间的距离（单位：千米）。现在要在五村之中选一个村建立一所小学。为使所有学生到学校的总距离最短，试确定最合理的方案。





7. 北京、洛阳分别有 9 台和 12 台完全相同的机器，准备给杭州 13 台、西安 8 台，每台机器的运费如表所示，如何调运能使总运费最省？

运费 / 元 发站 \ 到站	杭州	西安
	北京	800
洛阳	600	700

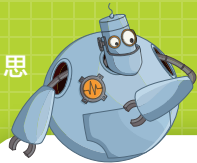


1. 下面这些数中哪些是质数？

91 157 361 727 1009 1323

2. 四年一班的男生中，喜欢打篮球的有 16 个，喜欢踢足球的有 21 个，喜欢打排球的有 7 个，既喜欢打篮球又喜欢踢足球的有 10 个，既喜欢打篮球又喜欢打排球的有 3 个，既喜欢踢足球又喜欢打排球的有 4 个，三种球都喜欢的有 3 个，三种球都不喜欢的有 5 个，请问四年一班有多少个男生？

3. 计算： $40^2+39^2+38^2+37^2+\cdots+22^2+21^2$



品格教育

一乐观

乐观，是一种最为积极的性格因素。乐观就是无论在什么情况下，都保持良好的心态，相信坏事情总会过去、阳光总会再来的心境。

【乐观的三个层次】

- 一、自立自强，积极向上
- 二、宠辱不惊，淡泊自然
- 三、阳光心态，主宰自己的生活

【乐观的释义与故事】

- 一、自立自强，积极向上

<释义>

人的成长过程，就是一个不断提高自立能力的过程。从学会走路开始，我们就获得了一个身体的自立；当能自己吃饭、穿衣时，我们就有了自立生活的体验；直到将来走上工作岗位，能够自己养活自己了，我们就获得了基本自立的人生。自立的生活表现在方方面面，也从方方面面影响着我们的成长和发展。

故事二

作家张海迪

众所周知的作家张海迪，5岁就患上了脊髓病，可怜的她从此胸部以下全部瘫痪，在如此大的打击下，她没有放弃、没有失望，以乐观的精神去面对现实生活，积极应对生活的挑战。

从那时起，她用超人的毅力开始了她独立的人生。因为残疾使

她无法像常人一样上学，于是她便在家中自学了中学的全部课程。除此之外她还自学了大学英语、日语、德语和世界语，并攻读了研究生的部分课程。从那以后，张海迪走上了文学创作之路，先后翻译了《海边诊所》等数十万字的英文小说。编著了《生命的追问》等书籍，她的众多作品先后在各国出版。



学理科到学而思



第三讲

整除特征进阶



本讲内容

7, 11, 13, 99 的整除特征; 试除法
整除特征的综合应用

前铺

奇数与偶数进阶 三年级秋季
整除特征初步 四年级暑假

后续

进位制初步 四年级春季



模块



练一练



知识体系图



本讲巩固



复习巩固



小故事



模块 1 ▶

特殊数的整除特征



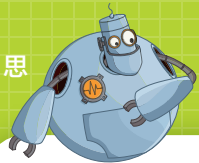
模块 2 ▶

试除法



模块 3 ▶

综合应用



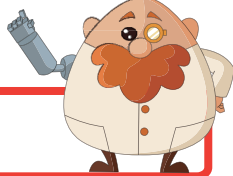
课前测试 ▶

1. 下列数中能被 2 整除的有? 能被 25 整除的有?
468, 503, 375, 645, 126, 525, 84, 250, 900.

2. 下列数中能被 3 整除的有? 能被 9 整除的有?
125, 144, 249, 357, 343, 504, 615, 837

3. 下列三个数都能被 8 整除, 填出空缺的数字.
 $\overline{35\square}$ $\overline{46\square}$ $\overline{7\square8}$ $\overline{2\square6}$

特殊数的整除特征



数段差分析:

能被 7、11、13 整除的数的特征:

一个数从末位开始，每三位一段断开，若奇数段之和与偶数段之和的差是 7、11、13 的倍数，则这个数能被 7、11、13 整除；如果差不是 7、11、13 的倍数，那么这个差被 7、11、13 除余几，这个数除以 7、11、13 就余几。

☆能被 11 整除的数的特征:

一个数从末位开始，奇数位数字之和与偶数位数字之和的差是 11 的倍数，则这个数能被 11 整除；如果差不是 11 的倍数，那么这个差除以 11 余几，这个数除以 11 就余几。

数段和分析:

能被 99 整除的数的特征:

一个数从末位开始，每两位一段断开，若所有数段之和是 99 的倍数，则这个数能被 99 整除；如果和不是 99 的倍数，那么这个和除以 99 余几，这个数除以 99 就余几。

下面五个自然数：128114、94146、64152、6139、491678 中，哪些能被 7 整除？哪些能被 11 整除？哪些能被 13 整除？这些数除以 11 的余数分别是多少？

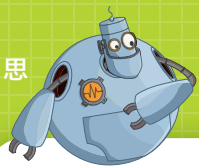
◀ 模块 1



◀ 知识剖析



◀ 例 1



练一练 ▶

下列数中，哪些能被 4 整除？哪些能被 8 整除？哪些能被 9 整除？
哪些能被 7 整除？哪些能被 11 整除？哪些能被 13 整除？这些数除
以 8、9、11 的余数分别是多少？

414 1057 2673 1320 596 2816 7462

例 2 ▶

(1) 20092009 能否被 11 整除？

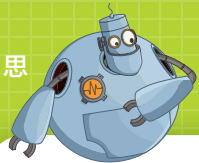
(2) $\underbrace{200920092009}_{3\text{个}2009}09$ 能否被 11 整除？

(3) $\underbrace{20092009\cdots200909}_{n\text{个}2009}$ 能被 11 整除, 那么, n 的最小值为多少?

(1) 已知九位数 $\overline{2007\square12\square2}$ 既是 9 的倍数, 又是 11 的倍数, 那么这个九位数是多少?

(2) 六位数 $\overline{\square\square5308}$ 能被 99 整除, 那么这个六位数是多少?

◀ 例 3



模块 2 ▶



知识剖析 ▶

试除法

试除法:

在整除问题中,若未知部分为末几位,则可先令未知部分均为 9(或 0),再除以除数,若余数不为 0,将多出的余数减去(或补齐)即可.例如:

四位数 $\overline{13\square\square}$ 能被 47 整除,求这个四位数.

方法一:令末两位均为 9, $1399 \div 47 = 29 \cdots 36$,则 $1399 - 36 = 1363$ 是 47 的倍数,又 $1363 - 47 = 1316$,所以 1316 也是 47 的倍数,故这个四位数可以是 1363 或 1316.

方法二:令末两位均为 0, $1300 \div 47 = 27 \cdots 31$, $47 - 31 = 16$,则 $1300 + 16 = 1316$ 是 47 的倍数,又 $1316 + 47 = 1363$,所以 1363 也是 47 的倍数,故这个四位数可以是 1363 或 1316.

例 4 ▶

(1) 如果 $\overline{2\square\square}$ 能被 79 整除,那么它的末两位数是多少?

(2) 如果六位数 $\overline{1992\square\square}$ 能被 105 整除,那么它的最后两位是多少?

(3) 六位自然数 $\overline{1082\square\square}$ 能被 23 整除, 末两位数有多少种情况?

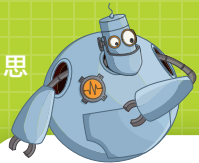
六位自然数 $\overline{1082\square\square}$ 能被 12 整除, 末两位数可能是_____.

某个七位数 $\overline{1993\square\square\square}$ 能够同时被 5, 7, 8, 9 整除, 那么它的最后三位数字依次是多少?

◀ 练一练



◀ 例 5



模块 3 ▶

综合应用



例 6 ▶

(1) 学校买了 72 台 A 种仪器，发票上的总价有两个数字已经辨认不清，只看到是 $\overline{\square 679 \square}$ 元，你知道每台 A 种仪器多少钱吗？（仪器价格为整数）

(2) 学校还买了 24 台 B 种仪器，发票上的总价同样有两个数字已经辨认不清，只看到是 $\overline{\square 8 \square 2}$ 元，但采购人员还记得模糊不清的两个数字相同。你知道每台 B 种仪器多少钱吗？（仪器价格为整数）

小新一共买了 28 支价格相同的钢笔给大家作为奖品，共付人民币 $9\square.2\square$ 元。已知 \square 处数字相同，请问每支钢笔多少元？

◀ 练一练



用数字 6, 7, 8 各两个，组成一个六位数，使它能被 168 整除。这个六位数是多少？

◀ 例 7

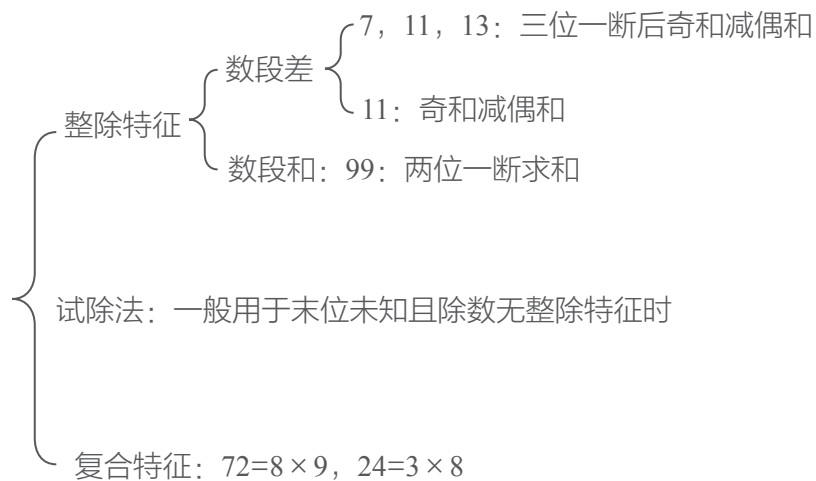


例 8 ▶

一个十位数, 如果各位上的数字都不相同, 那么就称它为“十全数”, 例如, 3785942160 就是一个十全数. 现已知一个十全数能被 $1, 2, 3, \dots, 18$ 整除, 并且它的前四位数是 4876, 那么这个十全数是多少?



知识体系图 ▶





◀ 学习札记

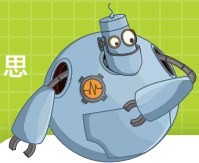


学生讲解的例题：

家长评价、签字：

◀ 青出于蓝





本讲巩固 ▶

1. 判断下列数中哪些能被 7 整除? 能被 8 整除? 能被 9 整除? 能被 11 整除? 能被 13 整除? 这些数除以 9 的余数分别是多少? 除以 11 的余数分别是多少?

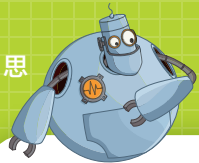
6741 5232 5868 585 7579 2992 2009

2. $\overline{943\square\square14}$ 能被 99 整除, 空格里的数字分别是多少?

3. $\overline{9ab9ab9ab9ab9ab}$ 是 77 的倍数, 则 \overline{ab} 为 _____.

4. $\overline{1111ab}$ 能被 31 整除, \overline{ab} 有几种不同可能, 分别是多少?

5. $\overline{14\square\square\square}$ 能被 9, 17 整除, 且是 5 的倍数, 末三位数是多少?



6. 一个五位数 $5\square42\square$ 能被 18 整除, 且前后空格数字相差 1, 那么这个五位数是多少?

7. 两个四位数 $\overline{A275}$ 和 $\overline{275B}$ 相乘, 乘积能被 72 整除, A, B 分别是多少?

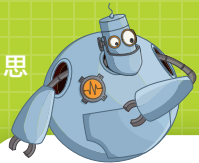


1. 全班同学当中,会游泳的有 15 人,会打篮球的有 19 人,会踢足球的有 23 人,三项都会的有 7 人,没有人会两项. 这个班一共有多少人?

2. 计算: $52 \times 51 - 51 \times 50 + 50 \times 49 - 49 \times 48 + \dots + 32 \times 31 - 31 \times 30$

3. 北京、南京分别有 28 台和 22 台完全相同的机器,准备给太原 19 台、郑州 31 台,每台机器的运费如表所示,如何调运能使总运费最省?

运费/元 发站 \ 到站	太原	郑州
北京	1300	900
南京	1100	1200



品格教育

一乐观

乐观，是一种最为积极的性格因素。乐观就是无论在什么情况下，都保持良好的心态，相信坏事情总会过去、阳光总会再来的心境。

【乐观的三个层次】

- 一、自立自强，积极向上
- 二、宠辱不惊，淡泊自然
- 三、阳光心态，主宰自己的生活

【乐观的释义与故事】

- 一、自立自强，积极向上

<释义>

人的成长过程，就是一个不断提高自立能力的过程。从学会走路开始，我们就获得了一个身体的自立；当能自己吃饭、穿衣时，我们就有了自立生活的体验；直到将来走上工作岗位，能够自己养活自己了，我们就获得了基本自立的人生。自立的生活表现在方方面面，也从方方面面影响着我们的成长和发展。

故事三

发明大王爱迪生

爱迪生于1847年2月11日诞生于美国中西部的俄亥俄州(Ohio)的米兰(Milan)小市镇。他家境贫寒，只读了三个月的小学，就因家境困难而失学了。但他并没有因此而气馁、丧失对生活的信心。他勤于自学，善于思考，对科学实验如痴如醉，他一生中取得1093

项发明专利权，其中著名的有留声机、电灯、电影摄影机、碱性蓄电池等，被誉为“发明大王”，为人类的文明和进步做出了巨大的贡献。

爱迪生同时也是一位伟大的企业家，1879年，爱迪生创办了“爱迪生电力照明公司”。1880年，白炽灯上市销售，1890年，爱迪生已经将其各种业务组建成为爱迪生通用电气公司。1891年，爱迪生的细灯丝、高真空白炽灯泡获得专利。1892年，汤姆·休斯顿公司与爱迪生电力照明公司合并成立了通用电气公司，开始了通用电气在电气领域长达一个世纪的统治地位。

爱迪生虽未受过良好的学校教育，但凭个人对生活的极大热情，对科学的积极探索精神，以不懈的努力和非凡才智，最终获得了令世人瞩目的成就。



学理科到学而思



第四讲

加乘原理进阶



本讲内容

加乘原理的综合应用，培养分类讨论的思想
染色问题

前铺

枚举法的妙用 二年级寒假
加乘原理初步 四年级暑假

后续

枚举法 五年级暑假
排列组合初步 五年级暑假



模块



练一练



知识体系图



本讲巩固



复习巩固



小故事



模块 1 ▶

加乘原理综合



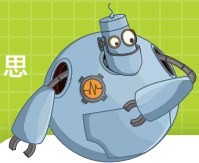
模块 2 ▶

数字问题



模块 3 ▶

染色问题



课前测试 ▶

东东的糖罐里有三种糖：10 颗不同的水果糖，20 颗不同的棒棒糖，30 颗不同的奶糖。

(1) 若东东只能吃其中的一块糖，有多少种选择？

(2) 若三种糖可以各吃一块，有多少种选择？

(3) 若只能吃两块不同种类的糖，有多少种选择？

(4) 若可以随意吃两块，有多少种选择？

加乘原理综合



◀ 模块 1

◀ 知识剖析

加法原理:

一般地, 如果完成一件事有 k 类方法, 第一类方法中有 m_1 种不同做法, 第二类方法中有 m_2 种不同做法, \dots , 第 k 类方法中有 m_k 种不同做法, 则完成这件事共有 $m_1+m_2+\dots+m_k$ 种不同方法.

加法原理解题三部曲

1. 完成一件事分 k 类情况
2. 类类独立 (每类都能单独完成该件事)
3. 类类相加

乘法原理:

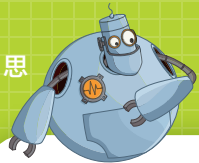
一般地, 如果完成一件事可以分成 n 个必要步骤, 第一步有 m_1 种, 第二步有 m_2 种, \dots , 第 n 步有 m_n 种, 那么完成这件事情一共有 $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法.

乘法原理解题三部曲

1. 完成一件事分 n 个必要步骤
2. 步步相关 (每步都不能单独完成该件事)
3. 步步相乘

某条铁路线上, 包括起点和终点在内原来共有 7 个车站, 现在新增了 3 个车站, 铁路上两站之间往返的车票不一样, 那么, 这样需要增加多少种不同的车票?

◀ 例 1



例 2 ▶

某件工作需要钳工 2 人和电工 2 人共同完成. 现有钳工 3 人、电工 3 人, 另有 1 人钳工、电工都会. 从 7 人中挑选 4 人完成这项工作, 共有多少种方法?



练一练 ▶

红、黄、蓝、白四种颜色不同的小旗, 各有 2, 2, 3, 3 面, 任意取出三面按顺序排成一行, 表示一种信号, 问: 共可以表示多少种不同的信号?

◀ 例 3

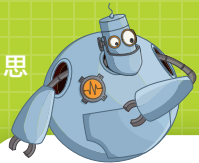
甲、乙、丙、丁四人各有一个作业本混放在一起，四人每人随便拿了一本。求满足下列条件的拿法各有多少种：

- (1) 甲拿到自己作业本；

- (2) 恰有一人拿到自己作业本；

- (3) 至少有一人没拿到自己作业本；

- (4) 谁也没拿到自己作业本。



模块 2 ▶

数字问题

例 4 ▶

(1) 用 0~9 这十个数字可组成多少个无重复数字的四位数?

(2) 用 0~9 这十个数字可组成多少个无重复数字的四位偶数?

(3) 由数字 0, 1, 2, 3 可以组成多少个无重复数字的自然数?

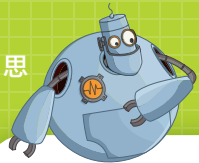
在 1000 至 1999 这些自然数中个位数大于百位数的有多少个？

◀ 例 5

如果一个三位数 \overline{ABC} 满足 $A > B, B < C$, 那么把这个三位数称为“凹数”, 求所有“凹数”的个数.

◀ 练一练



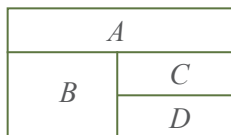


模块 3 ▶

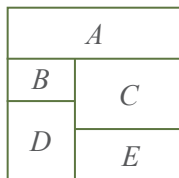
染色问题

例 6 ▶

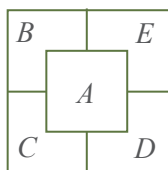
(1) 用 5 种不同的颜色给图中的 A 、 B 、 C 、 D 四个区域染色，每个区域只能染一种颜色，且相邻区域不能同色，有多少种不同的染色方法？



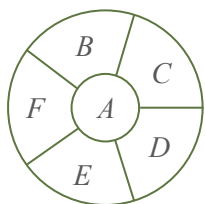
(2) 用 4 种不同的颜色给图中的 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个区域染色，每个区域只能染一种颜色，且相邻区域不能同色，有多少种不同的染色方法？



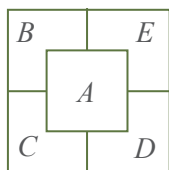
- (3) 用 3 种不同的颜色给图中的 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个区域染色，每个区域只能染一种颜色，且相邻区域不能同色，有多少种不同的染色方法？



城市中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图），现要栽种 4 种颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有多少种？



用 5 种不同的颜色给图中的 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个区域染色，每个区域只能染一种颜色，且相邻区域不能同色，有多少种不同的染色方法？



◀ 练一练



◀ 例 7

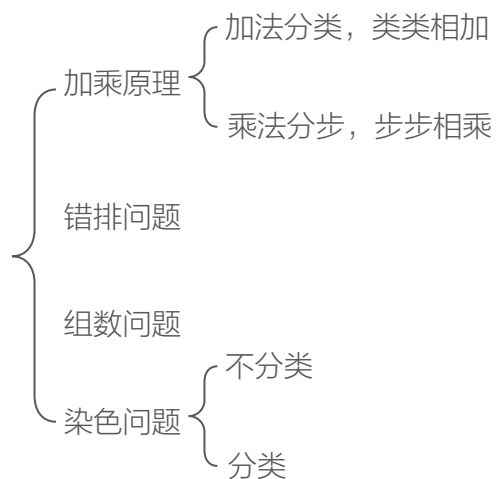


例 8 ▶

盛盛要为班级画黑板报，黑板报标题中有“*STATISTICAL*”（形容词，统计学的）这个单词。他希望画这个单词时，每个字母涂一种颜色，且相同字母涂相同颜色，相邻字母涂不同颜色。目前盛盛手里只有红、黄、蓝、绿这四种颜色的粉笔，那么，满足要求的涂法有多少种？



知识体系图 ▶





◀ 学习札记

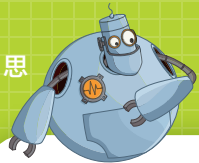


学生讲解的例题：

家长评价、签字：

◀ 青出于蓝





本讲巩固 ▶

1. 书架上有 8 本不同的故事书, 11 本不同的科技书, 12 本不同的漫画书.

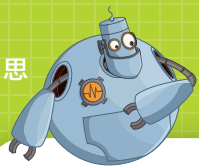
(1) 从所有图书中任取一本, 有多少种取法?

(2) 从三类图书中各取一本, 有多少种取法?

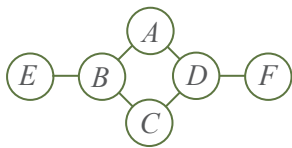
(3) 从所有图书中取两本不同种类的图书, 有多少种取法?



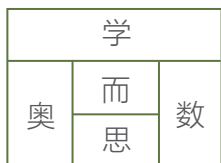
2. 红、黄、蓝、白四种颜色不同的小旗，各有 1, 2, 3, 4 面，任意取出三面按顺序排成一行，表示一种信号，问：共可以表示多少种不同的信号？
3. 用 0, 1, 3, 4, 7, 8 可以组成多少个没有重复数字的四位偶数？
4. 由数字 0、1、2（既可全用也可不全用）组成的非零自然数，按照从小到大排列，2020 排在第几个？
5. 在 1000 到 1999 这 1000 个自然数中，有多少个千位、百位、十位、个位数字中恰有两个相同的数？



6. 用6种不同的颜色给图中的“○”染色, 每个“○”只能染一种颜色, 且有线段相连的两个“○”不能同色, 有多少种不同的染色方法?



7. 用四种颜色对图中的五个字染色, 要求相邻的区域的字染不同的颜色, 但不是每种颜色都必须要用. 问: 共有多少种不同的染色方法?





1. 已知等差数列第 11 项、第 21 项分别为 60、110，那么这个数列前 31 项的和是多少？

2. 4 个人各拿一个水桶在自来水龙头前等候打水，他们打水所需的时间分别为 2 分钟、3 分钟、7 分钟和 9 分钟。如果只有一个水龙头，试问怎样适当安排他们的打水顺序，才能使每个人排队和打水时间的总和最小？并求出最小值。

3. $\underbrace{20162016\cdots 2016}_{n\text{个}2016}20$ 能被 11 整除，那么， n 的最小值为多少？



品格教育

一乐观

乐观，是一种最为积极的性格因素。乐观就是无论在什么情况下，都保持良好的心态，相信坏事情总会过去、阳光总会再来的心境。

【乐观的三个层次】

- 一、自立自强，积极向上
- 二、宠辱不惊，淡泊自然
- 三、阳光心态，主宰自己的生活

【乐观的释义与故事】

- 一、自立自强，积极向上

<释义>

人的成长过程，就是一个不断提高自立能力的过程。从学会走路开始，我们就获得了一个身体的自立；当能自己吃饭、穿衣时，我们就有了自立生活的体验；直到将来走上工作岗位，能够自己养活自己了，我们就获得了基本自立的人生。自立的生活表现在方方面面，也从方方面面影响着我们的成长和发展。

故事四

生活永远有两个选择

杰里是一个永远充满快乐的人，他不仅自己生性乐观，并且善于激励别人。他有一套独特的人生哲学，他坚信：任何时候人都有两种选择，那么你应该去选择积极的那一种。

一次，杰里遭人抢劫，腹部被三颗子弹击中，他住进了医院，很多人都为他担心，可是不久他便痊愈了。同事们关切地问他：“中弹的时候，你想些什么呢？”杰里拍了拍同事的肩膀，哈哈一笑：

“在那一瞬间，我想到我有两个选择，一个是选择生，一个是选择死，而我选择了生，所以我认定我去的那家医院，是全国最好的，那里的医疗技术更是一流的。”杰里喝了点水继续说，“可是，他们在手术时，好像是把我看成一个垂死的人。我向医生们做了个鬼脸，使劲地喊了起来：‘啊，我过敏呀！’当他们问我对什么过敏时，我说：‘我对子弹过敏！还对冷漠过敏！’医生们都大笑起来，我的手术顺利地做完了。”

一天，一个朋友问杰里：“我不明白，你怎么可能一直都保持积极乐观呢？你是怎样做的呢？”杰里笑着回答说：“每天早晨醒来，我就对自己说：杰里，今天你有两个选择——你可以选择一个好心情，也可以选择一个坏心情。而我选择了好心情，每当有坏事发生的时候，我可以选择受害者的角色，也可以选择主宰者的角色，而我选择了后者；每当有人向我抱怨时，我可以消极地听取抱怨，也可以给他们指出解除烦恼的方法，而我总是选择主动帮助别人，向他们提出好的建议。生活永远是由两个选择构成的，你要永远选择好的那一个。”

编后语：一个积极进取的人，必然会拥有一个绚丽而热烈的内心世界，这个世界每时每刻都会产生巨大无穷的精神力量。生活看起来沉重而复杂，但将它简化为“两种选择”之后，一切都变得轻松明了。



学理科到学而思



第五讲

流水行船



本讲内容

流水行船问题基本公式
应用公式解决流水行船问题

前铺

路程速度与时间 三年级春季
相遇问题 四年级暑假

后续

相遇与追及综合 四年级春季
电梯与发车 五年级秋季



模块



练一练



知识体系图



本讲巩固



复习巩固



小故事



模块 1 ▶

基本问题



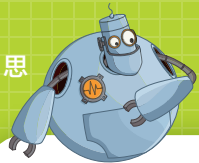
模块 2 ▶

相遇与追及



模块 3 ▶

综合问题



课前测试 ▶

1. 艾迪家到学校距离 800 米，每天早上艾迪步行上学，速度是 80 米 / 分。艾迪从家到学校需要多少时间？
2. 艾迪家和薇儿家相距 1200 米，两个人约好一起出门，在中间见面。艾迪每分钟走 80 米，薇儿每分钟走 70 米，两人从出门到见面需要多少时间？
3. 艾迪家和薇儿家相距 1200 米，两个人约好在中间见面。艾迪每分钟走 80 米，薇儿每分钟走 70 米，艾迪先出门 3 分钟，那么从薇儿出门到两人见面需要多少时间？
4. 艾迪每分钟走 80 米，薇儿每分钟走 70 米，某次他们约好放学一起去博士家，但是薇儿先走了 3 分钟后艾迪才收拾好书包开始追她，恰好在博士家门口追上，请问博士家到他们的学校距离多少米？

基本问题

流水行船问题基本公式（其中 $V_{\text{船}}$ 为船在静水中的速度， $V_{\text{水}}$ 为水流的速度）：

- (1) 顺水速度 = 船速 + 水速，即 $V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$ ；
- (2) 逆水速度 = 船速 - 水速，即 $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ ；
- (3) 船速 = (顺水速度 + 逆水速度) $\div 2$ ，即 $V_{\text{船}} = (V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}) \div 2$ ；
- (4) 水速 = (顺水速度 - 逆水速度) $\div 2$ ，即 $V_{\text{水}} = (V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}}) \div 2$ 。

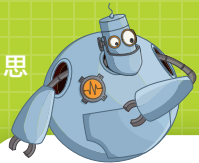
(1) 一只小船在静水中的速度是每小时 18 千米，它在水速每小时 3 千米的河中行驶，顺水速度是每小时_____千米；逆水速度是每小时_____千米。

(2) 一只小船在水中行驶，顺水速度是每小时 40 千米，逆水速度是每小时 30 千米，那么水速是每小时_____千米；小船的静水速度是每小时_____千米。

◀ 模块 1

◀ 知识剖析

◀ 例 1



(3) 两个码头相距 352 千米，一只小船顺流而下，行完全程需要 11 小时。逆流而上，行完全程需要 16 小时，那么水速是每小时_____千米。

例 2 ▶

船往返于相距 180 千米的两港之间，顺水而下需用 10 小时，逆水而上需用 15 小时。由于暴雨后水速增加，该船顺水而行只需 9 小时，那么逆水而行需要几小时？

一只小船在静水中的速度为每小时 25 千米，它在长 144 千米的河中逆水而行用了 8 小时，求返回原处需用几个小时？

◀ 练一练



一艘轮船顺流航行 120 千米，逆流航行 80 千米共用 16 小时；顺流航行 60 千米，逆流航行 120 千米也用 16 小时，求水流的速度。

◀ 例 3



模块 2 ▶



知识剖析 ▶

相遇与追及

甲乙两船的静水速度分别为 $V_{甲}$ 、 $V_{乙}$ ，水速为 $V_{水}$ ，

(1) 若甲乙两船相向而行做相遇运动，两船速度和与水速无关：

$$V_{和} = (V_{甲} + V_{水}) + (V_{乙} - V_{水}) = V_{甲} + V_{乙} \text{ 或}$$

$$V_{和} = (V_{甲} - V_{水}) + (V_{乙} + V_{水}) = V_{甲} + V_{乙}$$

(2) 若甲乙两船同向而行做追及运动，两船速度差与水速无关：

$$V_{差} = (V_{甲} + V_{水}) - (V_{乙} + V_{水}) = V_{甲} - V_{乙} \text{ 或}$$

$$V_{差} = (V_{甲} - V_{水}) - (V_{乙} - V_{水}) = V_{甲} - V_{乙}$$

总结：流水行船问题中，速度和、速度差均与水速无关。

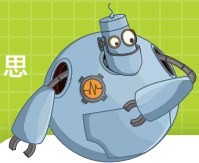
例 4 ▶

A 、 B 两码头间河流长为 220 千米，甲、乙两船分别从 A 、 B 码头同时起航。如果相向而行 5 小时相遇，如果同向而行 55 小时甲船追上乙船。求两船在静水中的速度。

- (1) 盛盛逆流而上畅游长江，不慎把水壶掉进江中，当他发现时，水壶与他已经相距 600 米，已知盛盛每分钟游 40 米，水流速度是每分钟 10 米，那么他是在水壶丢失多长时间后才发现的？发现后盛盛马上掉头去追水壶，他追上水壶又需要多少时间？

◀ 例 5

- (2) 东东逆流而上畅游黄河，在 A 处丢失一只水壶，他向前游了 20 分钟后才发现丢了水壶，立即返回追寻，在离 A 处 2 千米的地方追到，那么他返回追寻水壶用了多少分钟？



练一练 ▶

一个人乘木筏在河面顺流而下，行至一座桥下时此人想锻炼一下身体，便跳入水中顺水游泳，10分钟后掉头往回游，在离桥500米远的地方与木筏汇合，假设水流速度及此人在静水中游泳的速度一直不变，求水流速度。

例6 ▶

甲、乙两艘游艇，静水中甲艇每小时行3.3千米，乙艇每小时行2.1千米。现在甲、乙两游艇于同一时刻相向出发，甲艇从下游上行，乙艇从相距27千米的上游下行，两艇于途中相遇后，又经过4小时，甲艇到达乙艇的出发地。水流速度是每小时_____千米。

综合问题



甲、乙两船分别从 A 港顺水而下至 480 千米外的 B 港，静水中甲船每小时行 56 千米，乙船每小时行 40 千米，水速为每小时 8 千米，乙船出发后 1.5 小时，甲船才出发，到 B 港后返回与乙迎面相遇，此处距 A 港多少千米？

A 、 B 两景点相距 10 千米，一艘观光游船从 A 景点出发抵达 B 景点后立即返回，共用 3 小时。已知第一小时比第三小时多行 8 千米，那么水速为每小时_____千米。

◀ 模块 3

◀ 例 7

◀ 例 8



练一练 ▶

一只小船从甲地到乙地往返一次共需要 2 小时，回来时顺水，比去时每小时多行驶 8 千米，因此第 2 小时比第 1 小时多行驶 6 千米，求甲、乙两地的距离。



知识体系图 ▶

基本公式: $V_{顺} = V_{船} + V_{水}$, $V_{逆} = V_{船} - V_{水}$, $V_{船} = (V_{顺} + V_{逆}) \div 2$,
 $V_{水} = (V_{顺} - V_{逆}) \div 2$

单船往返: 寻找对应速度和时间

相遇追及: 流水行船问题中, 速度和、速度差均与车速无关

有动力

无动力



◀ 学习札记

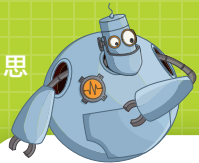


学生讲解的例题：

家长评价、签字：

◀ 青出于蓝



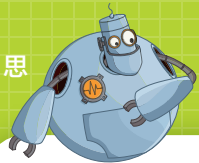


本讲巩固 ▶

1. 一条大河，河中间的水流速度是每小时 8 千米，沿岸边的水流速度是每小时 6 千米，一条船在河中间顺流而下，13 小时行 520 千米，这条船沿岸边返回原地，要多少小时？

2. 有甲乙两船航行于 360 千米的两港口之间，甲逆水行全程用 18 小时，乙逆水行全程用 12 小时，甲顺水行全程用 12 小时，乙顺水行全程要用多长时间？

3. 甲乙两港相距 120 千米，一轮船往返两港一次需 10 小时。逆流航行比顺流航行多用 2 小时。现有一机帆船，静水中的速度是每小时 11 千米。这机帆船往返两地要多少小时？
4. 两港相距 120 千米，甲船往返两港需 60 小时，逆流航行比顺流航行多用了 20 小时。乙船的静水速度是甲船的静水速度的 3 倍，那么乙船往返两港需要多少小时？
5. 一艘轮船顺流航行 64 千米，逆流航行 96 千米共用 12 小时；顺流航行 80 千米，逆流航行 48 千米共用 9 小时。求轮船的速度。



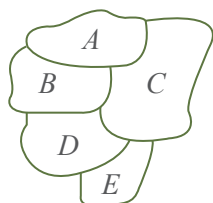
6. 静水中甲、乙两船的速度分别是每小时 22 千米和每小时 18 千米. 两船先后自山口港顺水开出, 乙比甲早出发 2 小时, 若水速是每小时 4 千米, 则甲开出后多少小时追上乙?

7. 某河有相距 45 千米的上、下两码头, 每天定时有甲、乙两艘船速相同的客轮分别从两码头同时出发相向而行. 一天甲船从上游码头出发时掉下一物, 此物浮于水面顺水漂下, 4 分钟后, 与甲船相距 1 千米. 预计乙船出发后几小时可以与此物相遇?

◀ 复习巩固



1. 理发室里有甲、乙两位理发师，同时来了六位顾客，根据他们所要理的发型，分别需要 8、15、13、10、22 和 25 分钟，怎样安排他们理发的顺序，才能使这六人理发和等候所用时间的总和最少？最少时间为多少？
2. 在□中填入两个相同的数字，使 $\overline{397\square\square}$ 能被 23 整除.
3. 如图，有一张地图上有五个国家，现在要用四种颜色对其进行染色，使相邻的国家所染的颜色不同，不相邻的国家的颜色可以相同。那么一共可以有多少种染色方法？





品格教育

一乐观

乐观，是一种最为积极的性格因素。乐观就是无论在什么情况下，都保持良好的心态，相信坏事情总会过去、阳光总会再来的心境。

【乐观的三个层次】

- 一、自立自强，积极向上
- 二、宠辱不惊，淡泊自然
- 三、阳光心态，主宰自己的生活

【乐观的释义与故事】

- 一、自立自强，积极向上

<释义>

人的成长过程，就是一个不断提高自立能力的过程。从学会走路开始，我们就获得了一个身体的自立；当能自己吃饭、穿衣时，我们就有了自立生活的体验；直到将来走上工作岗位，能够自己养活自己了，我们就获得了基本自立的人生。自立的生活表现在方方面面，也从方方面面影响着我们的成长和发展。

故事五

打好你的每一张牌

艾森豪威尔是美国第 34 任总统，他年轻时经常和家人一起玩纸牌游戏。

一天晚饭后，他像往常一样和家人打牌。这一次，他的运气特别不好，每次抓到的都是很差的牌。开始时他只是有些抱怨，后来，他实在是忍无可忍，便发起了少爷脾气。

坐在一旁的母亲看不下去了，正色道：“既然要打牌，你就必须用手中的牌打下去，不管牌是好是坏。好运气是不可能都让你碰上的！”

艾森豪威尔听不进去，依然忿忿不平。母亲于是又说：“人生就和这打牌一样，发牌的是上帝。不管你名下的牌是好是坏，你都必须拿着，你都必须面对。你能做的，就是让浮躁的心情平静下来，然后认真对待，把自己的牌打好，力争达到最好的效果。这样打牌，这样对待人生才有意义！”

艾森豪威尔此后一直牢记母亲的话，并激励自己去积极进取。就这样，他一步一个脚印地向前迈进，成为中校、盟军统帅，最后登上了美国总统之位。

印度前总统尼赫鲁曾经说过这样一句话：“生活就像是玩扑克，发到什么样的牌是注定的，但输赢却取决于你的打法，而你的打法却取决于自己的意志和智慧。”

注：虽然牌是上帝发的，但有一点值得欣慰：它们由我们来打。牌不会永远坏下去，但心态必须永远都好，否则，一手好牌也会被糟糕的心情打得一塌糊涂。