

第十届全国教育图书展优秀畅销图书
国家集训队教练执笔联合编写
在香港出版繁体字版和网络版
版版畅销，网络销量居榜首

畅销15年
超1200万册

总主编 单 樽 熊 斌

奥数教程 学习手册

· 配《奥数教程》第六版 ·

教辅资料站



电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

—— 扫码关注获取更多学习资料 ——

三年 级

单 樽 编著



上海市
著名商标

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

华东师范大学出版社

总主编 单 樽 熊 斌

奥数教程 学习手册

· 配《奥数教程》第六版 ·



三年級 单 樽 编 著

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



开展竞赛学好数学
增进友谊共同提高

青少年数学爱好者留念

王元 二〇〇〇年七月



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

前 言

据说在很多国家,特别是美国,孩子们害怕数学,把数学作为“不受欢迎的学科”。但在中国,情况很不相同,很多少年儿童喜爱数学,数学成绩也都很好。的确,数学是中国人擅长的学科,如果在美国的中小学,你见到几个中国学生,那么全班数学的前几名就非他们莫属。

在数(shǔ)数(shù)阶段,中国儿童就显出优势。

中国人能用一只手表示 1~10,而很多国家非用两只手不可。

中国人早就有位数的概念,而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制,60 进制的残余)。

中国文字都是单音节,易于背诵,例如乘法表,学生很快就能掌握,再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”。但外国人,一学乘法,头就大了。不信,请你用英语背一下乘法表,真是佶屈聱牙,难以成诵。

圆周率 $\pi=3.141\ 59\dots$ 。背到小数后五位,中国人花一两分钟就够了。可是俄国人为了背这几个数字,专门写了一首诗,第一句三个单词,第二句一个……要背 π 先背诗,这在我们看来简直是自找麻烦,可他们还作为记忆的妙法。

四则运算应用题及其算术解法,也是中国数学的一大特色。从很古的时候开始,中国人就编了很多应用题,或联系实际,或饶有兴趣,解法简洁优雅,机敏而又多种多样,有助于提高学生的学习兴趣,启迪学生智慧。例如:

“一百个和尚一百个馒头,大和尚一个人吃三个,小和尚三个人吃一个,问有几个大和尚,几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解。中国却有多种算术解法,如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚,100 个馒头表明小和尚是 300 个,多出 200 个和尚,是由于每个大和尚变小和尚,多变出 8 个,从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数。小和尚自然是 75 人,或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组,平均每人吃一个馒头,恰好与总体的平均数相等。所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少,即大和尚是 $100 \div (3+1) = 25$ 人。

微信公众号
教辅资料站

中国人善于计算,尤其善于心算.古代还有人会用手指计算(所谓“掐指一算”).同时,中国很早就有计算的器械,如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中,我国的优势显然,所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理,在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算,我国有不少论著),比希腊人稍逊一筹.但是,中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平,在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班,他们认为所教的几何内容太深,学生不可能接受,但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来,中国队已经获得了14次团体冠军,可谓是成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说:“今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一……去年也是第一名.”(陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”)

陈省身先生还预言:“中国将在21世纪成为数学大国.”

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:(1)进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

“天下大事,必作于细.”我们希望,而且相信,这套丛书的出版,在使我国成为数学大国的努力中,能起到一点作用.本丛书初版于2000年,现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问,并为青少年数学爱好者题词,我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师大出版社及倪明、孔令志先生,没有他们,这套丛书不会是现在这个样子.

微信公众号
教辅资料站

单 樽 熊 斌

2014年5月

习题详细解答

第 1 讲	找规律填图形	1
第 2 讲	加减法中的巧算(一)	4
第 3 讲	加减法中的巧算(二)	6
第 4 讲	找规律填数(一)	9
第 5 讲	等差数列	11
第 6 讲	找规律填数(二)	13
第 7 讲	平均数	18
第 8 讲	算式谜	22
第 9 讲	三阶幻方	28
第 10 讲	数阵图	33
第 11 讲	一笔画	41
第 12 讲	简单推理	46
第 13 讲	数线段	50
第 14 讲	数图形	53
第 15 讲	巧求周长	56
第 16 讲	图形的剪拼	58
第 17 讲	还原问题	61
第 18 讲	植树问题	64
第 19 讲	和差问题	68
第 20 讲	倍数问题	72

第 21 讲	年龄问题	78
第 22 讲	相遇问题	83
第 23 讲	追及问题	89
第 24 讲	应用题(一)	95
第 25 讲	应用题(二)	100

竞赛热点精讲

专题 1	巧算	107
专题 2	简单推理	109
专题 3	幻方、数阵图	114
专题 4	算式谜	120
专题 5	平均数	128
专题 6	和差问题	132
专题 7	倍数问题	136
专题 8	年龄问题	140
专题 9	行程问题(一)	143
专题 10	行程问题(二)	147



微信公众号

教辅资料站



第 1 讲

找规律填图形

随堂练习

1 图中只有“*”号,而且(1)、(2)、(4)中“*”号的个数依次为4、3、1.所以,(3)中的图形应该是2个“*”.

2 应填●,●.

3 (1)的左图与(4)的左图相同,(2)的左图与(5)的左图相同,所以(3)的左图与(6)的左图相同,应填. (1)的右图与(4)的右图、(2)的右图与(5)的右图形状相同,只是转了一下,并将黑变成白.所以(6)的右图与(3)的右图形状相同,只是转了一下,将黑变成白,应填.

4 由(1)知道猴与狗、猫相邻,而不是相对.由(2)知道猴、虎相邻,由(3)知道猴、兔相邻.因此,猴的对面一定是鸡.

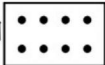
由于只有在(1)中能看到狗,所以不太容易直接找出它对面是什么动物.我们可以换一种办法:先看与猫相邻的动物是什么.如果与猫相邻的动物清楚了,自然狗的对面也就清楚了.

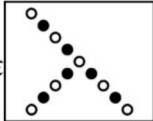
由(1)知道,猫与猴、狗相邻,也与鸡相邻(鸡在猴的对面).由(2)知道,猫与虎相邻.于是与猫相邻的猴、鸡、狗、虎,两两相对,狗的对面是虎.

或者先考虑虎.由(2)知,虎与猫、猴、鸡相邻.由(3)知,虎与兔也相邻.因此,虎的对面一定是狗.即狗的对面一定是虎.

5 每5个棋子,图形重复出现.因为 $99 = 5 \times 19 + 4$,所以第99个棋子与第4个棋子颜色相同,是黑色的.99个棋子中共有白棋子 $2 \times 19 + 2 = 40$ (个).


练习题


1 黑点的个数都是偶数,前三个图点数依次为 2、4、6,所示(4)中应当是 8 个点,排成两行,即 


2 (1) 仍是一个入字形,但长线的两端各增加 1 个白点,短线的一端也增加 1 个白点,即图形是 


(2) 答案是

□	△	○
△	○	□
○	□	△

3 (1) 从前两个图看出,右图是左图的右半部分逆时针方向旋转 90° 而得到的,所以应当填成 

(2) 第一个图,上一行右图是将左图涂黑,所以下一行右图应填 .

第二个图,上一行右图是将左图旋转 90° 而得到的,所以下一行右图应填 .

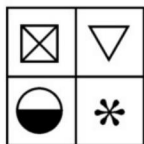
第三个图,上一行右图是将左图去掉两条对角线,所以下一行右图应填 .

4 如果红色只有一面,那么将第三个正方体也放成红色在上面.这时,四个侧面正好是 4 种颜色:绿、黑、蓝、黄.但站在正方体上面(即红面上)看,从第二个图看出,蓝色的右面是黑色;而从第三个图(先放成红色在上面)看出,蓝色的右面是黄色,矛盾.所以红色有两面.而且红色的对面也是红色(绿色的对面是蓝色,黑色的对面是黄色).

5 每 3 个一组重复出现. $27 = 9 \times 3$, 所以 27 个图形刚好有 9 组,第 27 个图形是小猴.

6 将(1)的每一个图形沿顺时针方向向前进一格,并且把圆

再顺时针转过 90° 就得到(2). 所以将(3)同样处理得到(4), 如下:



7 由于有 11、15, 所以这 6 个连续整数是 10, 11, 12, 13, 14, 15; 或 11, 12, 13, 14, 15, 16. 如果是前一种情况, 相对面上的两个数的和应当是 $10+15=25$, 这与 11 与 14 不相对矛盾. 因此, 只能是后一种情况. 这时 11 与 16 相对, 12 与 15 相对, 13 与 14 相对, 总和为 $(11+16) \times 3 = 81$.

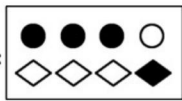
8 红不与蓝、白、黄、黑相对, 所以红、绿相对. 黄不与白、红、黑、绿相对, 所以黄、蓝相对. 剩下黑、白相对.

9 如果第一个小三角形涂红色, 那么每一行的尖向上的小三角形都涂红色, 尖向下的小三角形都涂黄色. 每行红色三角形比黄色三角形多 1 个. 9 行共多 9 个. 如果第一个小三角形涂黄色, 那么黄色三角形比红色三角形多 9 个. 所以红色三角形比黄色三角形多时, 红色三角形多 9 个.

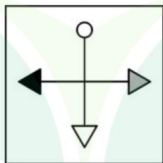
10 A 不与 B、C、D、E 相对, 所以 A 与 F 相对. B 不与 A、F、C、D 相对, 所以 B 与 E 相对.

11 上一行都是 4 个圆. 黑的逐渐增加, 白的逐渐减少, (4) 中应填 3 黑 1 白. 下一行都是 4 个方块(菱形). 黑的逐渐减少, 白的

逐渐增加, (4) 中应填 3 白 1 黑. 答案如下:



12 每个图顺时针方向旋转 90° , 得到后一个图, 所以(4)是



第 2 讲

加减法中的巧算(一)

随堂练习

1 (1) 原式 = $(7475 + 525) + (847 + 153)$
 $= 8000 + 1000 = 9000.$

(2) 原式 = $(323 + 9677) + (92 + 108)$
 $= 10\ 000 + 200 = 10\ 200.$

2 (1) 原式 = $(9997 + 3) + (1 + 99) + (998 + 2) + (1 + 9)$
 $= 10\ 000 + 100 + 1000 + 10 = 11\ 110.$

(2) 原式 = $(299\ 999 + 1) + (29\ 999 + 1) + (2999 + 1) + (299 + 1) + 25$
 $= 300\ 000 + 30\ 000 + 3000 + 300 + 25 = 333\ 325.$

3 (1) 原式 = $240 - (63 + 137) = 240 - 200 = 40.$

(2) 原式 = $325 - (90 + 10) - (80 + 20)$
 $= 325 - 100 - 100 = 125.$

4 (1) 原式 = $(196 - 96) - 75 = 100 - 75 = 25.$

(2) 原式 = $(753 - 743) + 60 = 10 + 60 = 70.$

5 (1) 原式 = $1273 - (282 + 118) - (19 + 81)$
 $= 1273 - 400 - 100 = 773.$

(2) 原式 = $(723 - 423) + (249 - 147) = 402.$

练习题

1 (1) $(75 + 25) + 26 = 126.$

(2) $(72 + 28) + 67 = 167.$

(3) $(116 + 84) + 625 = 825.$

(4) $(321 + 679) + 52 = 1052.$

2 (1) $(536 + 464) + (541 + 459) = 2000.$

$$(2) (125 + 875) + (428 + 572) = 2000.$$

$$(3) (12\ 345 + 87\ 655) + 234 = 100\ 234.$$

$$(4) (9495 + 505) + (9697 + 303) = 20\ 000.$$

$$\mathbf{3} (1) 464 + 100 - 1 - (545 - 345) = 464 + 100 - 200 - 1 \\ = 363.$$

$$(2) (947 - 447) - (572 - 372) = 500 - 200 = 300.$$

$$(3) (832 - 332) + (654 - 454) = 500 + 200 = 700.$$

$$(4) (1928 + 72) - (267 + 33) = 2000 - 300 = 1700.$$

$$(5) (1000 - 4) + (700 - 1) - 500 - 2 = 1200 - 7 = 1193.$$

$$(6) (7443 + 567) + (2485 + 245) = 8010 + 2730 = 10\ 740.$$

$$\mathbf{4} (1) 989 - (271 + 529) = 989 - 800 = 189.$$

$$(2) (2187 + 3113) - 1432 = 5300 - 1432 = 3868.$$

$$(3) (30\ 000 - 10\ 000) - 1596 = 20\ 000 - 1596 \\ = 20\ 004 - 1600 = 18\ 404.$$

$$(4) (753 - 100) + 1 = 654.$$

$$\mathbf{5} (1) (2000 + 2582) - 1 = 4581.$$

$$(2) 30\ 087 - 29\ 087 = 1000.$$

$$(3) (80\ 000 - 1) + (8000 - 1) + (800 - 1) + (80 - 1) = \\ 88\ 880 - 4 = 88\ 876.$$

$$(4) (3547 + 22 + 1) - (569 + 1) = 3570 - 570 = 3000.$$

$$(5) (75 + 25) + (10 + 90) = 100 + 100 = 200.$$

$$\mathbf{6} (1) 2\ 220\ 000 - (300 - 78) = (2\ 220\ 000 - 300) + 78 = \\ 2\ 219\ 700 + 78 = 2\ 219\ 778.$$

$$(2) (1273 - 200 - 100) + 2 + 2 = 977.$$

$$(3) (1797 - 797) + 215 = 1215.$$

$$(4) 1407 - (479 - 79) = 1407 - 400 = 1007.$$

$$(5) 6\ 371\ 896 - (514 - 14) = 6\ 371\ 896 - 500 = 6\ 371\ 396.$$

第 3 讲

加减法中的巧算(二)

随堂练习

- 1 原式 = $69 + 12 = 81$.
- 2 原式 = $(947 - 67) + 100 - 1 - (545 - 345)$
 $= 880 + 100 - 200 - 1 = 779$.
- 3 原式 = $95 + (2 - 1) - 78 + 25 - 6$
 $= 120 - 80 - 6 + 3 = 37$.
- 4 原式 = $300 \times 6 + (7 + 3 + 5 - 6 - 5 - 4)$
 $= 300 \times 6 = 1800$.
- 5 原式 = $250 + 9 + 4 + 2 - 7 - 5 = 253$.

练习题

- 1 原式 = $761 \times 5 - 5 - 3 + 3 + 9 = 761 \times 5 + 4 = 3809$.
- 2 (1) 原式 = $6\ 581\ 299 - (75\ 325 + 24\ 675)$
 $= 6\ 581\ 299 - 100\ 000 = 6\ 481\ 299$.
(2) 原式 = $225\ 200 - (173 + 827) = 225\ 200 - 1000$
 $= 224\ 200$.
- 3 以 80 为标准数.
原式 = $80 \times 6 - 6 - 5 - 3 + 2 + 5$
 $= 480 - 7 = 473$.
- 4 以 994 为标准数.
原式 = $994 \times 5 - 4 - 2 + 2 + 4$
 $= 994 \times 5 = 4970$.
- 5 以 1980 为标准数.
原式 = $1980 \times 5 - 5 + 18 + 5 + 14 = 9900 + 32 = 9932$.

6 (1) $11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 15 \times 5 = 75$.

原式 $= 3675 - 75 = 3600$.

(2) $90 + 92 + 95 + 96 = 100 \times 4 - 10 - 8 - 5 - 4$.

原式 $= 4900 - 100 \times 4 + 10 + 8 + 5 + 4$

$= 4500 + 10 + 8 + 5 + 4 = 4527$.

7 6个数的和是 $200 \times 6 - 2 + 1 - 5 + 2 - 3 + 1 = 200 \times 6 - 6 = 199 \times 6$, $199 \times 6 \div 6 = 199$, 平均数是 199.

8 $90 \times 3 - 94 - 80 = 90 \times 3 - (90 + 4) - (90 - 10) = 90 - 4 + 10 = 96$, 她数学得了 96 分.

9 $35 = 23 + 12$, $25 = 23 + 2$, $16 = 23 - 7$, 所以 $35 + 25 + 16 + 16 = 23 \times 4$, $\underbrace{23 + 23 + \dots + 23}_{24\text{个}} + 35 + 25 + 16 + 16 = 23 \times (24 + 4) = 23 \times 28$. 这 28 个数的平均数是 23.

10 未知的两个两位数的和是 $3 \times 80 - 82 = 160 - 2 = 158$. 其中一个最大可以为 99, 另一个为 $158 - 99 = 158 - 100 + 1 = 59$.

11 总共加工 $86 + 82 + 71 + 88 + 90 + 78 + 83 + 81 + 85 + 76 + 87 + 77 = 80 \times 12 + 6 + 2 - 9 + 8 + 10 - 2 + 3 + 1 + 5 - 4 + 7 - 3 = 80 \times 12 + 24 = 960 + 24 = 984$, 又 $(80 \times 12 + 24) \div 12 = 80 + 2 = 82$. 所以共加工 984 个零件, 平均每人每天加工 82 个零件.

12 可对下表考虑同样的问题

6	20	19
28	15	

由 $20 + 19 - 28 = 11$, 得第一列的空格填 11.

由 $6 + 19 - 15 = 10$, 得第二列的空格填 10.

由 $20 + 10 - 28 = 2$, $6 + 28 - 10 = 24$, 得到

6	20	19
28	15	2
11	10	24

所以,原正方形表格填写完整后为

106	120	119
128	115	102
111	110	124



微信公众号

教辅资料站

第 4 讲

找规律填数(一)

随堂练习

1 这是偶数的数列. 第 1 项是 2×1 , 以后各项是 2×2 , 2×3 , 2×4 , 2×5 , \dots . 括号内应填 12, 14.

2 从第 2 项起, 每一项与前面一项的差都等于 3. 所以括号中应填 14, 20.

3 算式的前一个数比项数大 3, 所以第 1999 个算式的前一个数是 $1999 + 3 = 2002$. 算式的后一个数是 2 加上 1998×6 , 即 $2 + 1998 \times 6 = 2 + 2000 \times 6 - 2 \times 6 = 12\ 000 - 10 = 11\ 990$. 因此, 第 1999 个算式是 $2002 + 11\ 990$.

4 第七层的数是 1, $1 + 5 = 6$, $5 + 10 = 15$, $10 + 10 = 20$, $10 + 5 = 15$, $5 + 1 = 6$, 1.

第八层的数是 1, $1 + 6 = 7$, $6 + 15 = 21$, $15 + 20 = 35$, $20 + 15 = 35$, $15 + 6 = 21$, $6 + 1 = 7$, 1.

5 这是平方数数列. 第 1 项等于 1×1 , 第 2 项等于 2×2 , 第 3 项等于 3×3 , 第 4 项等于 $4 \times 4 \dots \dots$ 因为 $6 \times 6 = 36$, 所以, 括号内应填入 36.

练习题

1 自第 2 项起, 每一项比前一项少 5. 应填 110, 100.

2 自第 2 项起, 每一项比前一项多 3. 应填 22, 28.

3 自第 2 项起, 每一项比前一项多 3. 应填 12, 15, 18.

4 这是平方数数列. $5 \times 5 = 25$, $6 \times 6 = 36$, $7 \times 7 = 49$. 应填 25, 36, 49.

5 自第 2 项起, 每一项等于前一项乘 3. 应填 243, 729.

习题详细解答

- 6** 自第 2 项起,每一项等于前一项乘 2. 应填 32,64.
- 7** 自第 3 项起,每一项等于前两项的和. 应填 16,26.
- 8** 自第 3 项起,每一项等于前两项的和. 应填 29,47.
- 9** 自第 4 项起,每一项等于前三项的和. 应填 17,31.
- 10** 自第 4 项起,每一项等于前三项的和. 应填 20,37.
- 11** 自第 2 项起,每一项比前一项少 5. 应填 55,50,40.
- 12** 自第 2 项起,每一项等于前一项除以 2. 应填 20,10,5.



微信公众号

教辅资料站

第 5 讲

等 差 数 列

随堂练习

1 $1 + 36 = 2 + 35 = 3 + 34 = \dots = 18 + 19 = 37$, 所以
 $1 + 2 + 3 + \dots + 35 + 36 = (1 + 36) \times 18 = 666$.

2 $200 = 2 \times 100$, 所以共有 100 个数相加. 这 100 个数可以
两两配对, 配成 50 对, 每对的和是 $202 (= 2 + 200 = 4 + 198 = \dots =$
 $100 + 102)$, 所以, 原式 $= 202 \times 50 = 10\ 100$.

3 (1) 原式 $= (4 + 16) \times 7 \div 2 = 20 \times 7 \div 2 = 70$.

(2) 原式 $= (2 + 8) \times 7 \div 2 = 10 \times 7 \div 2 = 35$.

4 0 到 100 内 3 的倍数为 $0, 3, 6, 9, 12, \dots, 96, 99$. 这是首项
为 0、末项为 99、公差为 3 的等差数列.

因为 $0 = 3 \times 0, 3 = 3 \times 1, 99 = 3 \times 33$, 所以这个等差数列
有 $1 + 33 = 34$ (项).

和 $= (0 + 99) \times 34 \div 2 = 99 \times 17 = 1683$.

5 天数 $= (55 - 25) \div 5 + 1 = 7$, 和(总页数) $= (25 + 55) \times$
 $7 \div 2 = 280$, 所以这本故事书共有 280 页.

练习题

1 原式 $= (18 + 23) \times 6 \div 2 = 123$.

2 原式 $= (100 + 114) \times 8 \div 2 = 856$.

3 原式 $= (73 + 93) \times 6 \div 2 = 498$.

4 原式 $= (995 + 999) \times 5 \div 2 = 4985$.

5 第一个括号内的项数为 $(1999 - 11) \div 2 + 1 = 995$, 所以
原式 $= (1999 - 1998) + (1997 - 1996) + \dots + (13 - 12) + 11 =$
 $1 \times 994 + 11 = 1005$.

习题详细解答

6 项数 = $(39 - 1) \div 2 + 1 = 20$, 原式 = $(1 + 39) \times 20 \div 2 = 400$.

7 项数 = $(214 - 2) \div (6 - 2) + 1 = 54$, 原式 = $(2 + 214) \times 54 \div 2 = 5832$.

8 项数 = $(301 - 4) \div (7 - 4) + 1 = 100$, 原式 = $(4 + 301) \times 100 \div 2 = 15\ 250$.

9 项数 = $(111 - 1) \div (11 - 1) + 1 = 12$, 原式 = $(1 + 111) \times 12 \div 2 = 672$.

10 $10 + 11 + 12 + \dots + 99 = (10 + 99) \times 90 \div 2 = 4905$.

11 第 100 项是 $1 + 3 \times (100 - 1)$, 前 100 项的和是

$$[1 + (1 + 3 \times 99)] \times 100 \div 2 = 29\ 900 \div 2 = 14\ 950.$$

12 排数是 $(94 - 25) \div 3 + 1 = 24$, 共有座位 $(25 + 94) \times 24 \div 2 = 1428$ (个).



微信公众号

教辅资料站

第 6 讲

找规律填数(二)

随堂练习

1 从第 2 项起,每一项减去前一项成数列

$$4, 6, 8, 10, 12, \dots,$$

这个数列的第 6 项是 14.

$$42 + 14 = 56.$$

所以,括号内应当填入 56.

2 奇数项数的项构成数列

$$15, 13, 11, \dots,$$

第 4 项是 9.

偶数项数的项构成数列

$$6, 7, 8, \dots,$$

第 4 项是 9.

所以括号内应填 9, 9.

3 这个数列在例 3 的解答中写成四列,每列的每个数比它上面的数多 8,所以 18 后面的数是

$$13 + 8 = 21,$$

$$16 + 8 = 24.$$

4 前 10 行共有数

$$1 + 2 + \dots + 10 = 55(\text{个}),$$

习题详细解答

微信公众号
教辅资料站

第 6 讲 找规律填数(二) / 13

前 14 行共有数

$$1 + 2 + \cdots + 14 = 105(\text{个}).$$

所以 100 是第 14 行倒数第 6 个数,也就是第 14 行第 9 个数.

5 $21 = 5 \times 4 + 1$, 所以第 21 个拐弯在东北,是东北的第 6 个拐弯.

$$1, 9, 25, 49, \cdots$$

的第 6 项是

$$11 \times 11 = 121.$$

而东北拐弯处的数列是

$$2, 10, 26, 50, \cdots,$$

所以第 21 个拐弯处的数是

$$121 + 1 = 122.$$

练习题

1 偶数项数的项都是 2. 奇数项数的项组成数列

$$7, 5, 3, 1.$$

所以应填 1, 2.

2 奇数项数的项组成数列

$$75, 74, 73, \cdots,$$

每项比前一项少 1,第 4 项是 72.

偶数项数的项都是 3.

所以应填 72, 3.

3 奇数项数的项组成数列

$$1, 5, 9, \cdots,$$

每一项比前一项多 4,所以第 4 项是 13.

偶数项数的项都是 4.

所以应填 13, 4.

4 奇数项数的项组成数列

3, 6, 12, …,

每一项是前一项的 2 倍, 第 4 项是 24.

偶数项数的项都是 2.

所以应填 24, 2.

5 奇数项数的项组成数列

76, 75, 74, …,

第 4 项是 73.

偶数项数的项组成数列

2, 3, 4, …,

第 4 项是 5.

所以应填 73, 5.

6 奇数项数的项组成数列

2, 4, 8, …,

每一项是前一项的 2 倍, 第 4 项是 16.

偶数项数的项都是 1.

所以应填 16, 1.

7 奇数项数的项组成数列

8, 10, 12, …,

每一项比前一项多 2, 第 4 项是 14.

偶数项数的项组成数列

1, 2, 3, …,

第 4 项是 4.

所以应填 14, 4.

8 从第 3 项起, 每一项等于前两项的和.

$$5 + 8 = 13, 8 + 13 = 21.$$

所以应填 13, 21.

9 从第 2 项起, 每一项减去前一项, 差组成数列

$$2, 4, 6, 8, \dots,$$

这个数列是偶数数列, 第 5 项是 10, 第 6 项是 12.

$$21 + 10 = 31, 31 + 12 = 43.$$

所以应填 31, 43.

10 奇数项数的项组成数列

$$2, 4, 8, \dots,$$

第 4 项是 16.

偶数项数的项组成数列

$$3, 5, 7, \dots,$$

第 4 项是 9.

所以应填 16, 9.

11 奇数项数的项组成数列

$$1, 7, 13, 19, \dots,$$

每一项比前一项多 6, 第 5 项是 25.

偶数项数的项组成数列

$$6, 12, 18, \dots,$$

每一项比前一项多 6, 第 4 项是 24.

所以应填 24, 25.

12 从第 3 项起, 每一项等于前一项乘以 3 减去再前面一项.

$$55 \times 3 - 21 = 144,$$

$$144 \times 3 - 55 = 377.$$

所以应填 144,377.

第 7 讲

平均数

随堂练习

1 原式 $= 60 \times 9 = 540$.

2 因为中间两项相加再乘以 $3 (= 6 \div 2)$ 等于 273, 所以中间两项的和是

$$273 \div 3 = 91.$$

又因为

$$91 = 45 + 46,$$

所以中间两项(第 3、4 项)是 45, 46. 第 1 项是

$$45 - 2 = 43.$$

3 11~35 的平均数是 23.

$$\begin{aligned} 14 + 14 + 17 + 35 &= 11 + 17 + 17 + 35 \\ &= 11 + (23 - 6) + (23 - 6) + (23 + 12) \\ &= 11 + 23 + 23 + 23, \end{aligned}$$

所以原来 28 个数的平均数是 23.

4 奇数项数的项组成数列

$$4, 5, 6, 7, \dots, 12, 13.$$

第 1 项是 4, 以后每项比前一项多 1, 共 10 项, 最后一项是 13.

偶数项数的项组成数列

$$2, 8, 14, 20, \dots, 50, 56.$$

第一项是 2, 以后每项比前一项多 6, 共 10 项, 最后一项是 56.
因为

$$(4 + 2) + (13 + 56) = 75,$$

$$(5 + 8) + (12 + 50) = 75,$$

.....

$$(8 + 26) + (9 + 32) = 75,$$

所以所求和 $= 75 \times 5 = 375$.

5 $1 + 99 = 2 + 98 = \dots = 50 + 50 = 2 + 98 = 3 + 97 = \dots =$
 $51 + 49 = \dots = 99 + 1 = 100,$

$$\text{和} = (1 + 99) \times 50 \div 2 = 125\ 000.$$

练习题

1 1 至 100 内被 4 除余 1 的数, 组成数列

$$1, 5, 9, \dots, 97.$$

第 1 项是 1, 以后每项比前一项多 4, 最后一项是 97, 项数为

$$(97 - 1) \div 4 + 1 = 25,$$

和

$$1 + 5 + \dots + 97 = (1 + 97) \times 25 \div 2 = 1225.$$

2 第 1 项是 15, 以后每项比前一项多 15, 最后一项是 $90 = 15 \times 6$. 共有 6 项, 和是

$$(15 + 15 \times 6) \times 6 \div 2 = 315.$$

3 如果 10 只盒子中球数都不相同, 并且每只盒子中至少放 1 只球, 那么 10 只盒子至少放

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

只球. 现在只有 44 只球, 所以不可能符合要求.

4 最后一排座位有

$$20 + 2 \times (25 - 1) = 68(\text{个}).$$

$$(20 + 68) \times 25 \div 2 = 1100,$$

所以共有 1100 个座位.

5 第一排座位有

$$75 - 2 \times (30 - 1) = 17(\text{个}).$$

$$(75 + 17) \times 30 \div 2 = 1380,$$

所以共有 1380 个座位.

6 一昼夜共敲

$$2 \times (1 + 2 + \cdots + 12) + 24 \times 1 = 180(\text{下}).$$

7 $100 + 101 + \cdots + 999 = (100 + 999) \times 900 \div 2 = 494550.$

8 $5 + 10 + \cdots + 100 = (5 + 100) \times 20 \div 2 = 1050.$

9 第 1 把钥匙至多试 49 次. 第 1 把配对后, 第 2 把至多试 48 次……因为

$$49 + 48 + \cdots + 1 = (1 + 49) \times 49 \div 2 = 1225,$$

所以至多试 1225 次就足够了.

10 这列数每经过 5 项就重复出现, 因为 $30 = 5 \times 6$, 所以第 30 项是 7. 又 $25 = 5 \times 5$, 所以和 $= (2 + 5 + 3 + 3 + 7) \times 5 = 100.$

11 25 个连续自然数 11~35 的平均数是 23(这 25 个数中的第 13 个数).

35、16、18 这三个数的平均值是

$$(35 + 16 + 18) \div 3 = 23,$$

所以 11~35, 16, 18, 35 这 28 个数的平均数是 23. 因此 12~35, 13, 16, 16, 35 这 28 个数的平均数也是 23.

12 上题的 28 个数正好合乎要求(平均数是 23, 其中不同的自然数 12~35 共 24 个, 是连续自然数, 而且 28 个数中, 16 出现 3 次, 13 与 35 各出现 2 次). 所以出现 2 次的自然数可以是 35.

出现两次的自然数能不能大于 35 呢? 如果能, 那么它至少是 36. 24 个连续自然数至少是 $13 \sim 36$. 28 个数至少是 $13 \sim 36$, 再添上两个 13, 一个 14, 一个 36. 因为 $11 \sim 35$ 的平均数是 23, 而 $36+2, 36+1, 14$ 这三个数的平均数显然大于 23 ($(36+2)+14 > 46$), 所以

$$13, 13, 13 \sim 35, 14, 36, 36$$

的平均数大于 23. 不合要求.

因此, 出现 2 次的自然数最大是 35.

第 8 讲

算 式 谜

随堂练习

1 $7021 - 57 = 6964.$

算式是

$$\begin{array}{r} 54 \\ + 6967 \\ \hline 7021 \end{array}$$

又解 被加数的个位数字 = $11 - 7 = 4$. 加数 = $7021 - 54 = 6967$. 从而得到上面的算式.

2 由千位得“助”=1.

$$1993 - 1111 = 882,$$

于是有

$$\begin{array}{r} \text{人} \\ \text{人为} \\ + \text{人为乐} \\ \hline 882 \end{array}$$

从而由百位得“人”=7(人不可能是8. 如果人是8, 那么总和应大于888).

$$882 - 777 = 105,$$

于是有

$$\begin{array}{r} \text{为} \\ + \text{为乐} \\ \hline 105 \end{array}$$

由十位得“为”=9,最后得“乐”=6.

所以“助”=1,“人”=7,“为”=9,“乐”=6.

3 减数的个位数字是 $6-1=5$. 被减数的十位数字是 $2+7=9$. 减数的百位数字是 $4-3=1$. 被减数的千位数字是 $4+4=8$. 所以算式是

$$\begin{array}{r} 8496 \\ -4175 \\ \hline 4321 \end{array}$$

4 例4解法中的后一种情况,即

$$\text{“届”} + \text{“赛”} = 6,$$

$$\text{“一”} + \text{“杯”} = 10,$$

$$\text{“十”} + \text{“华”} = 9.$$

7个数字的和可以为

$$6 + 10 + 9 + 1 = 26.$$

例如

$$\begin{array}{r} 1430 \\ + 576 \\ \hline 2006 \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{r} 1032 \\ + 974 \\ \hline 2006 \end{array}$$

7个数的和是

$$1 + 4 + 3 + 0 + 5 + 7 + 6 = 26,$$

或

$$1 + 0 + 3 + 2 + 9 + 7 + 4 = 26.$$

5 由已知算式得

$$\begin{array}{r} \text{谜} \\ + \text{数字谜} \\ \hline 300 \end{array}$$

“谜”不能为 0(否则“字”也为 0),所以“谜”是 5.

$$300 - 5 = 295,$$

即“数字谜”代表的 3 位数是 295.

练习题

1 (1) 由个位得“学”=0. 由和的万位得“爱”=1.

由千位,“大”+“大”=10 或者“大”+“大”+1=10. 但“大”+“大”是偶数,只能是“大”+“大”=10,“大”=5.

由十位,“上”=5-1=4.

由百位,“家”=4÷2=2.

“大”、“家”、“爱”、“上”、“学”分别是 5、2、1、4、0.

算式是

$$\begin{array}{r} 5240 \\ + 5210 \\ \hline 10450 \end{array}$$

(2) 由个位得“峰”=0. 由万位得“我”=1. 由十位知“攀”是偶数. 由千位知道“攀”大于 4,所以“攀”=6 或 8.

如果“攀”=6,那么由千位得“登”=2 或 3. 后者必须百位上发生进位,但

$$3 + 3 + 1 < 10,$$

百位相加不会进位,所以“登”=2. 从而百位数字“高”=4 或 5.

但 4+4 或 5+5 的个位不是 6. 与十位的和为“攀”矛盾. 所以这种情况不会发生.

如果“攀”=8,那么由千位得“登”=6 或 7. 前者必须百位上不发生进位,但

$$6 + 6 = 12,$$

即百位相加进位,所以“登”=7. 从而百位数字的和“高”=4 或 5. 其中“高”=4 符合要求. 所以算式是

$$\begin{array}{r} 8740 \\ + 8740 \\ \hline 17480 \end{array}$$

“我”、“攀”、“登”、“高”、“峰”分别是1、8、7、4、0.

2 (1) 算式可简化为

$$\begin{array}{r} BB \\ + AB \\ \hline C00 \end{array}$$

百位 $C = 1$, 个位 $B = 5$, 十位 $A = 4$. 原算式为

$$\begin{array}{r} 54 \\ 45 \\ + 45 \\ \hline 144 \end{array}$$

(2) 由千位得 $D = 1$, 由百位得 $A = 9$, 算式可化简为

$$\begin{array}{r} BC \\ + 1C \\ \hline 1FE \end{array}$$

B 不能为9(不能与 A 相同), 所以由十位得 $B = 8$, $F = 0$. 算式化简为

$$\begin{array}{r} C \\ + C \\ \hline 1E \end{array}$$

C 为6或7. 相应地, E 为2或4. 所以算式为

$$\begin{array}{r} 987 \\ + 717 \\ \hline 1704 \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{r} 986 \\ + 616 \\ \hline 1602 \end{array}$$

A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 分别是9、8、7、1、4、0 或者9、8、6、1、2、0.

3 (1) 和的万位为1, 千位为0, 加数的千位为9.

$$10128 - 9683 = 445.$$

算式为

$$\begin{array}{r} 485 \\ + 9643 \\ \hline 10128 \end{array}$$

(2) 和的千位为 1.

$$1234 - 875 = 359.$$

算式为

$$\begin{array}{r} 855 \\ + 379 \\ \hline 1234 \end{array}$$

4 (1) 百位两个方框中的数都是 9, 否则和小于 1900. 同样, 十位两个方框中的数都是 9. 个位两个方框中的数, 和为 11. 因此, 6 个方框中数字和为

$$9 + 9 + 9 + 9 + 11 = 47.$$

(2) 与(1)相同, 可以得出数字和为

$$9 + 9 + 9 + 9 + 13 = 49.$$

5 (1) 被减数的前两位是 10, 减数的十位是 9 (如果被减数大一些或减数小一些, 那么差的十位至少是 1).

$$14 - 9 = 5.$$

算式是

$$\begin{array}{r} 104 \\ - 95 \\ \hline 9 \end{array}$$

(2) 被减数的首位是 $2 + 1 = 3$.

$$3001 - 2097 = 904.$$

算式是

$$\begin{array}{r} 3001 \\ - 2007 \\ \hline 994 \end{array}$$

6 和的千位数字只能是 1. 和的前两位至多是 $12(=9+2+1)$. 由于数字不重复, 和的百位数字只能是 0, 被加数的百位数字只能是 7.

还有 4 个数字 9, 6, 5, 3. 不难验证 9 不能作为被加数或和的十位数字, 也不能作为和的个位数字. 所以 9 是加数的个位数字. 从而算式为

$$\begin{array}{r} 764 \\ + 289 \\ \hline 1053 \end{array}$$

7 $88+17=105$, 所以被减数的十位数字为 0. 因此 5 个数的连乘积是 0.

8 (1) 由加法算式可知和的千位数字为 1, 并且被加数、加数的百位数字都为 9, 加数的个位数字为 9, 和的个位数字为 0. 由减法算式, 减数的千位数字为 1, 百位数字为 8, 个位数字为 9. 差的十位数字为 2. 算式是

$$\begin{array}{r} 911 \\ + 999 \\ \hline 1910 \\ - 1889 \\ \hline 21 \end{array}$$

(2) 由减法算式知被减数的个位数字 $= 7+5-10=2$, 减数的十位数字 $= 12-1-3=8$, 减数的百位数字 $= 1$, 被减数的百位数字 $= 9$. 由加法算式, 加数的个位数字为 2, 百位数字为 2. 算式为

$$\begin{array}{r} 922 \\ - 185 \\ \hline 737 \\ + 282 \\ \hline 1019 \end{array}$$

第 9 讲

三阶幻方

随堂练习

1 将图 9-2 中每个数减去 1 便得到由 0~8 这九个数构成的三阶幻方, 如图所示

7	0	5
2	4	6
3	8	1

2 在图 9-2 中, 将 1, 2, ..., 9 分别换成 2, 4, 6, ..., 18, 得到下图

16	2	12
6	10	14
8	18	4

3 $2 + 6 + 10 + 11 + 15 + 19 + 20 + 24 + 28 = (2 + 28) + (6 + 24) + (10 + 20) + (11 + 19) + 15 = 15 \times 9$.

每一行、每一列、每条对角线的和是

$$15 \times 9 \div 3 = 45,$$

中央的那个数是

$$45 \div 3 = 15.$$

4 每一行、每一列、每条对角线的和都是

$$15 \times 3 = 45.$$

第一行第一个数是 $45 - 15 - 23 = 7$. 第一行第三个数是 $45 -$

$4 - 23 = 18$. 第一行第二个数是 $45 - 7 - 18 = 20$. 第二行第一个数是 $45 - 15 - 4 = 26$. 第三行第一个数是 $45 - 15 - 18 = 12$. 第三行第二个数是 $45 - 12 - 23 = 10$. 于是, 得出下图

7	20	18
26	15	4
12	10	23

5 每一行、每一列、每条对角线的乘积是

$$4 \times 10 \times 25 = 1000.$$

第一行第一个数是 $1000 \div 10 \div 2 = 50$. 第一行第三个数是 $1000 \div 25 \div 2 = 20$. 第一行第二个数是 $1000 \div 50 \div 20 = 1$. 第三行第一个数是 $1000 \div 10 \div 20 = 5$. 第三行第二个数是 $1000 \div 1 \div 10 = 100$. 于是, 得下图

50	1	20
4	10	25
5	100	2

6 第三行第一个数是 $2037 - 679 - 1126 = 232$. 第三行第三个数是 $2037 - 679 - 447 = 911$. 第二行第一个数是 $2037 - 447 - 232 = 1358$. 第二行第三个数是 $2037 - 1358 - 679 = 0$. 于是, 得下图

447	464	1126
1358	679	0
232	894	911

练习题

1 将图 9-2 中的 1, 2, ..., 9 分别改成 3, 6, ..., 27, 得

习题详细解答

第 9 讲 三阶幻方 / 29

24	3	18
9	15	21
12	27	6

2 将图 9-2 中的 1, 2, …, 9 分别改成 0, 2, 4, …, 16, 得

14	0	10
4	8	12
6	16	2

3 中央的数是 $30 \div 3 = 10$, 从而得出下图

13	5	12
9	10	11
8	15	7

4 中央的数为 10, 从而得出下图

11	5	14
13	10	7
6	15	9

5 中央的数为 $60 \div 3 = 20$. 这 9 个连续自然数是 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. (20 是中间的项. 9 个数的和是 $20 \times 9 = 60 \times 3$.)

将图 9-2 的 1, 2, …, 9 分别改为 16, 17, …, 24, 得

23	16	21
18	20	22
19	24	17

6 第一列与包含“?”的对角线的和等于第二、三两行的和,

所以 2 个“?”等于 $13 + 19$,

$$? = (13 + 19) \div 2 = 16.$$

7 $1 + 2 + 3 + \dots + 13 = (1 + 13) \times 13 \div 2 = 91.$

因为 12 个数的和是 4 列的总和,而每一列的和相等,所以 12 个数的和是 4 的倍数.同样,12 个数的和是三行的总和,而每一行的和相等,所以 12 个数的和是 3 的倍数.因此,12 个数的和是 12 的倍数.

$$91 \div 12 = 7 \dots 7$$

所以去掉的数是余数 7.这时每一列的和是

$$(91 - 7) \div 4 = 21.$$

每一行的和是

$$(91 - 7) \div 3 = 28.$$

8 先按顺序,从左到右,从上到下,填入 12 个数 1、2、3、4、5、6、8、9、10、11、12、13,得图(1)

1	2	3	4
5	6	8	9
10	11	12	13

(1)

1	10	13	4
5	6	8	9
2	11	12	3

(2)

13	4	1	10
5	6	8	9
3	11	12	2

(3)

4	13	10	1
5	6	8	9
12	2	3	11

(4)

这时第二行的和已经是 28. 将第一行的 2、3 分别换成第三行的 10、13,得图(2). 图(2)中,每一行的和都是 28. 再调整列,使每列的和为 21,即 13、5、3 在一列,12、8、1 在一列,11、6、4 在一列,10、9、2 在一列,得图(3). 图(3)是符合要求的填法. 本题答案并不唯一,图(4)也是一解.

9 左下角的☆不能为 1、7,因为第一列已有 1、7,它也不能为 3,因为它所在对角线已经有 3. 所以左下角的☆为 5,从而左下角☆

所在对角线上另一个数为 1, 即第三行第二个数是 1, 第四行第二个☆不是 5(因为第一个☆是 5), 也不是 1、3(因为第二列已有 1、3), 所以它只能是 7. 所求的和是 $5 + 7 = 12$. 不难将格子填满得下图:

1	3	5	7
7	5	3	1
3	1	7	5
5	7	1	3

10 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. 所填 8 个数为 1、2、3、4、5、6、7、8, 总和为 36(无论怎样填). 将 8 换成 9、10、11, 总和就变为 37、38、39.

11 将图 9-2 的 1, 2, ..., 9 分别换成 1, 10, 100, ..., 100 000 000 得下图. 它是一个解. 但解不唯一. 第 12 题的图也是本题的解.

10 000 000	1	100 000
100	10 000	1 000 000
1000	100 000 000	10

12 中央的数 10 的 3 次方, 也就是 $10 \times 10 \times 10 = 1000$, 应当是每一行、每一列、每条对角线上 3 个数的乘积. 由此不难得出符合要求的图:

50	1	20
4	10	25
5	100	2

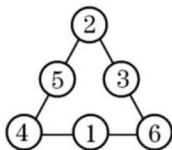
每一行、每一列、每一条对角线上 3 个数的乘积都等于 1000.

第10讲

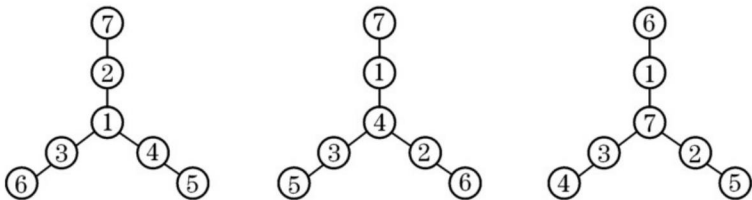
数阵图

随堂练习

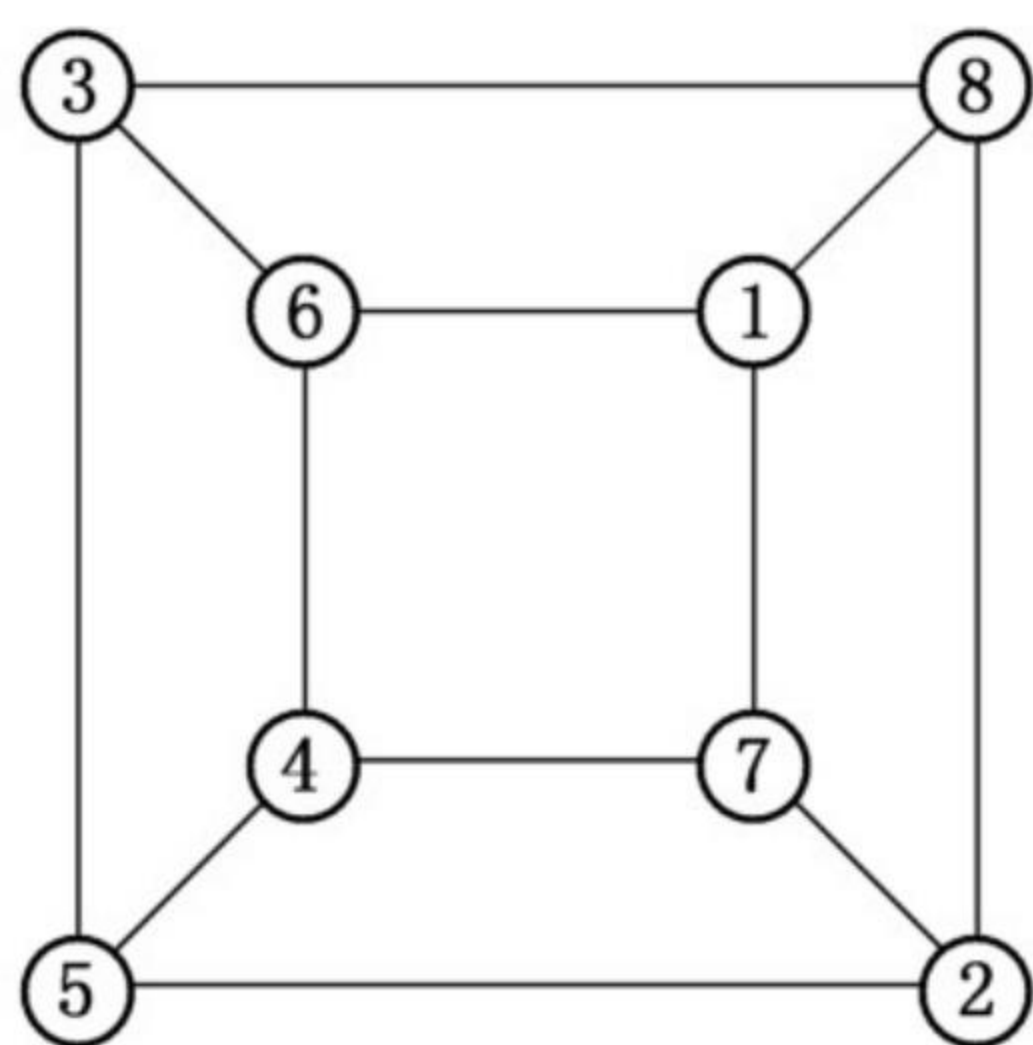
1 最左边一条边上已知两个数,由 $11 - (2 + 5) = 4$, 知 4 应该填在左下角的一个圆圈内. 进而, 由 $11 - (4 + 1) = 6$, 知下边一条边上还剩下的圆圈内应该填 6. 从而, 3 应填在最后一个圆圈中. 结果如图



2 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, 除以 3 余 1. 中央的数是 1、4、7 时, 去掉它, 剩下的 6 个数的和被 3 整除. 所以有 3 个解



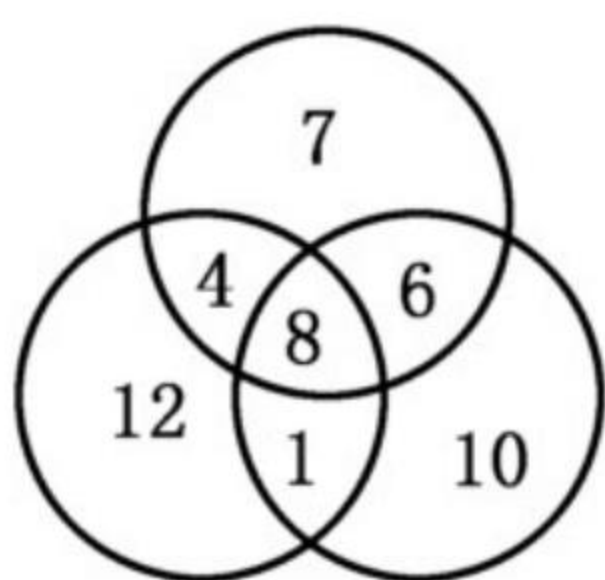
3 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. 每一条斜线上一对数的和是 $36 \div 4 = 9$. 因此 1~8 应分为 4 组, 即 1, 8; 2, 7; 3, 6; 4, 5. 分别填在 4 条斜线上. 再稍加调整, 使得外面正方形 4 个顶点的和为 18, 即得到如图的解.



4 因为 $6 - 1 = 5$, 而只有 $12 - 7 = 5$, 所以左边的圆中填 12, 上面的圆中填 7, 才能使这两个圆中的和相等.

又 $4 - 1 = 10 - 7 = 3$, 右面的圆中应填 10.

最后, 三个圆中的公共部分填 8. 得下图.



5 $1 + 2 + \dots + 16 = 136$. 八边形八个顶点的和是

$$136 \div 2 = 68,$$

线段上 4 个数的和是 $136 \div 4 = 34$.

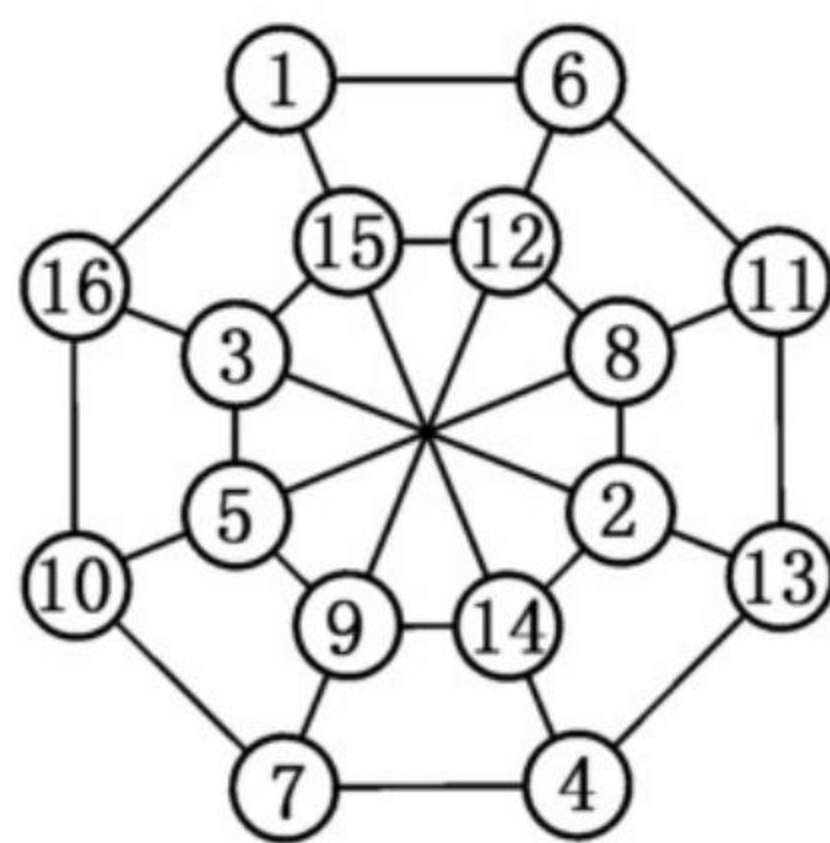
可以将 16 个数分为 4 组, 每组 4 个数的和为 34. 例如

$$1, 15, 14, 4; 16, 3, 2, 13;$$

$$10, 5, 8, 11; 7, 9, 12, 6.$$

将它们作为 4 条对角线上的数. 再稍加调整可得到如图所示的解(答案不唯一).

6 随堂练习 5 图中的 4 条对角线是四阶幻方的 4 行. 另有 4 组共线的点, 如 1、12、8、13 等是幻方的 4 列. 外面八边



形的4个相邻顶点上的数16、1、6、11是幻方的一条对角线.另4个相邻顶点上的数10、7、4、13是幻方的另一条对角线.

练习题

1 由 $a+b=a+c$, 得 $b=c$. 由 $b+a=b+d$, 得 $a=d$. 再由 $a+d=b+c$, 得 $a=b$, 所以 $a=b=c=d$. 这表明4个数不全相等的二阶幻方不存在. 要满足幻方的要求, 4个数必须是同一个数.

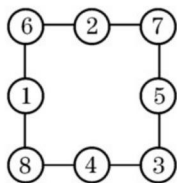
2 $1+2+\cdots+8=36$.

设每行的和是 s , 左边、右边、上边、下边的中间的数分别为 a 、 b 、 c 、 d , 则 $a+b$ 是 $36-2\times s$, $c+d$ 也是 $36-2\times s$, 所以 $a+b=c+d$, 而且 $a+b$ 是偶数.

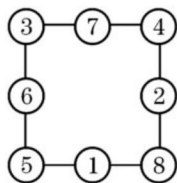
因为 $6=1+5=2+4$, 所以可取 $a=1, b=5, c=2, d=4$, $s=(36-6)\div 2=15$. 由

$$15=1+6+8=2+6+7=4+8+3=5+7+3.$$

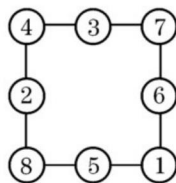
得图(1).



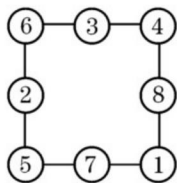
(1)



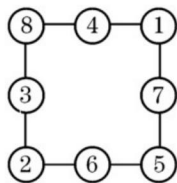
(2)



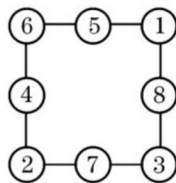
(3)



(4)



(5)



(6)

类似地, 可得出图(2)~(6).

3 $1 + 2 + \dots + 9 = 45.$

设三个顶点处的数为 a 、 b 、 c ，每边的和为 s ，则

$$3 \times s = 45 + (a + b + c),$$

所以 $a + b + c = 3 \times s - 45$ 是 3 的倍数.

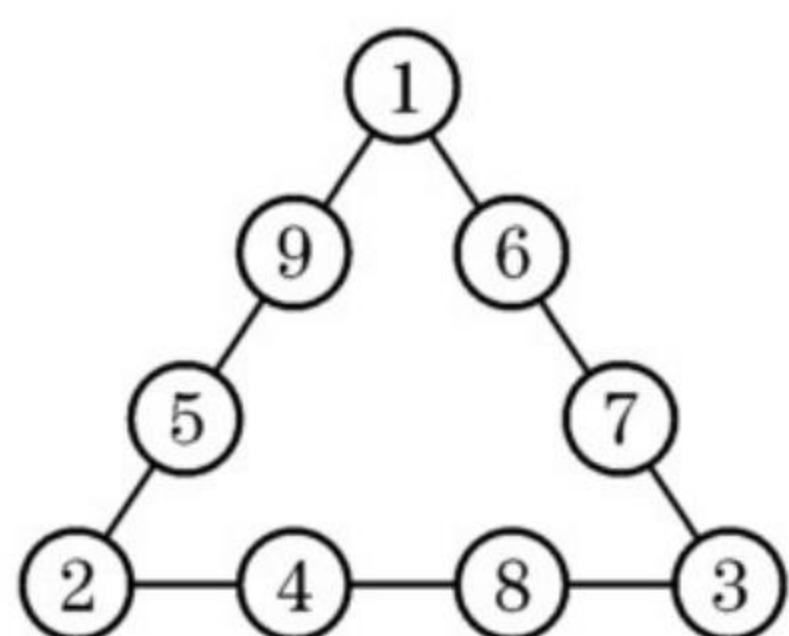
如取 $a = 1, b = 2, c = 3$ ，则

$$s = (45 + 1 + 2 + 3) \div 3 = 17.$$

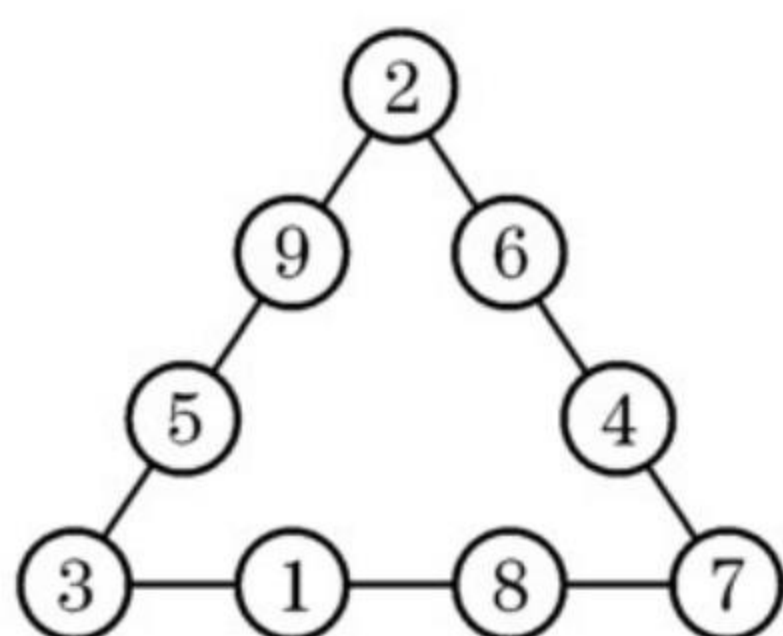
由

$$17 = 1 + 2 + 9 + 5 = 2 + 3 + 4 + 8 = 3 + 1 + 6 + 7$$

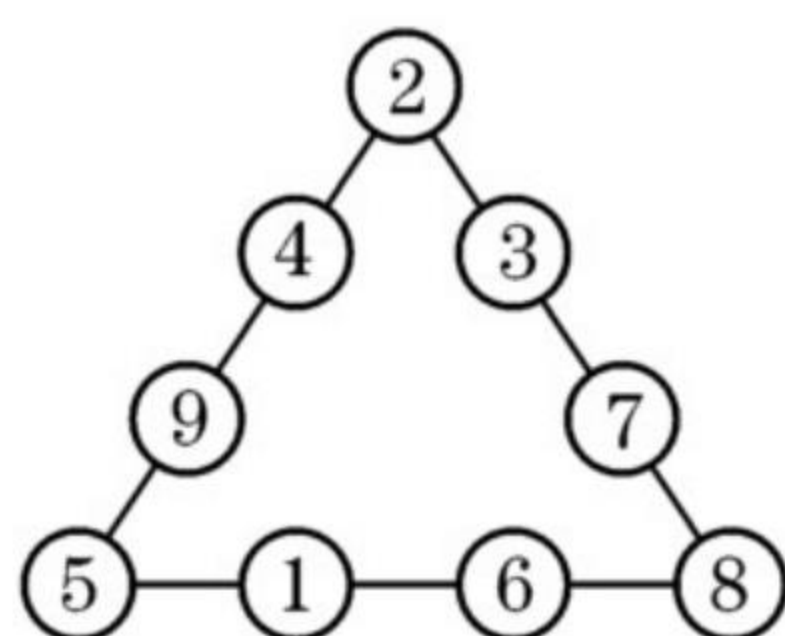
得图(1). 类似地可得图(2)~(8).



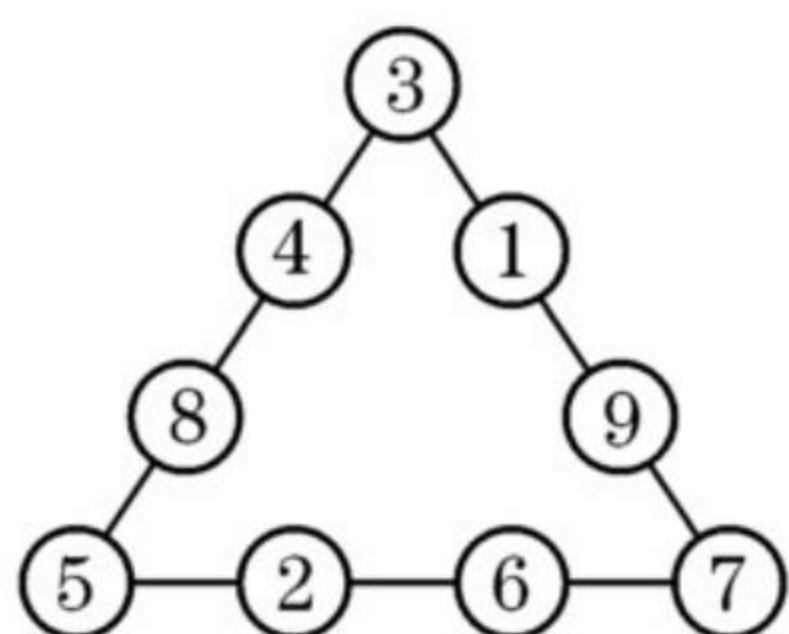
(1)



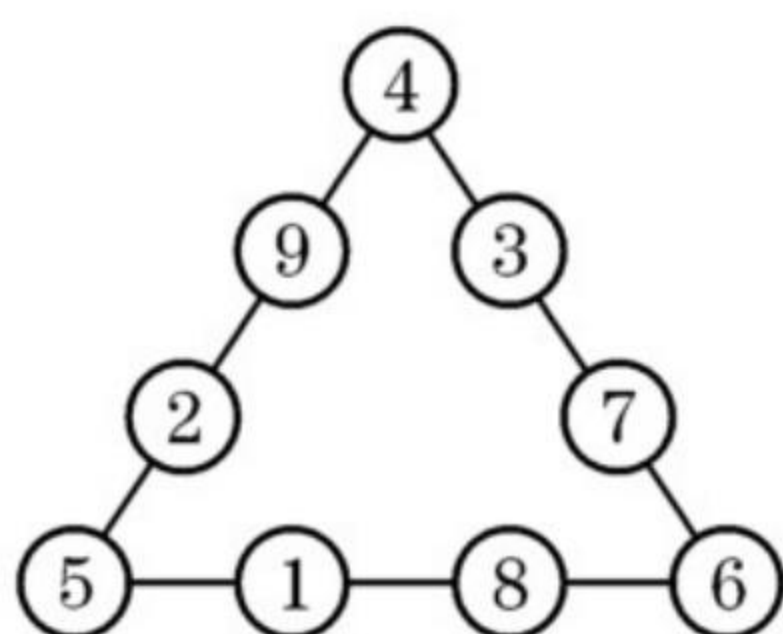
(2)



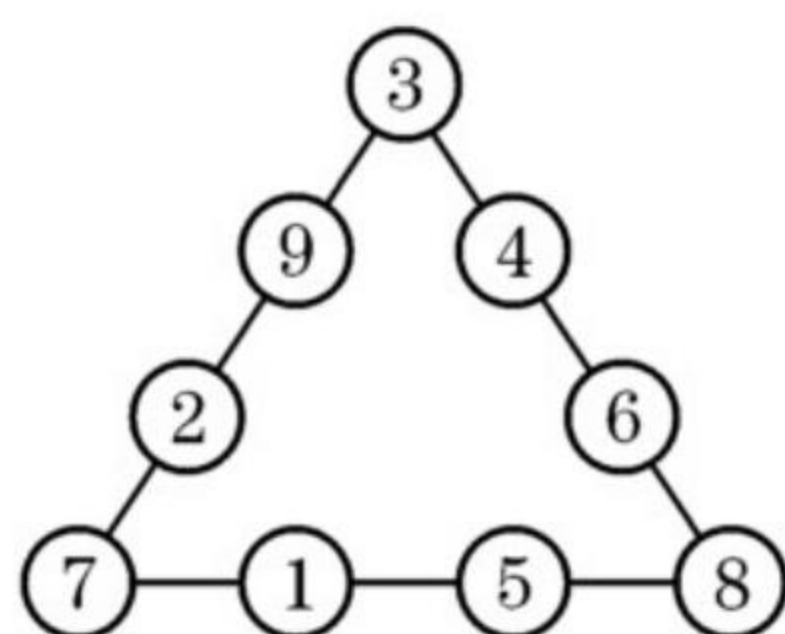
(3)



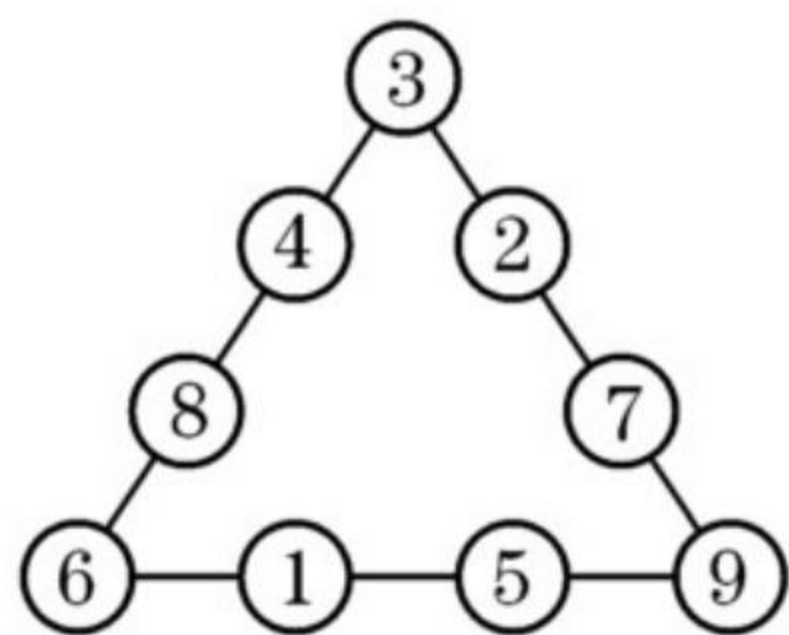
(4)



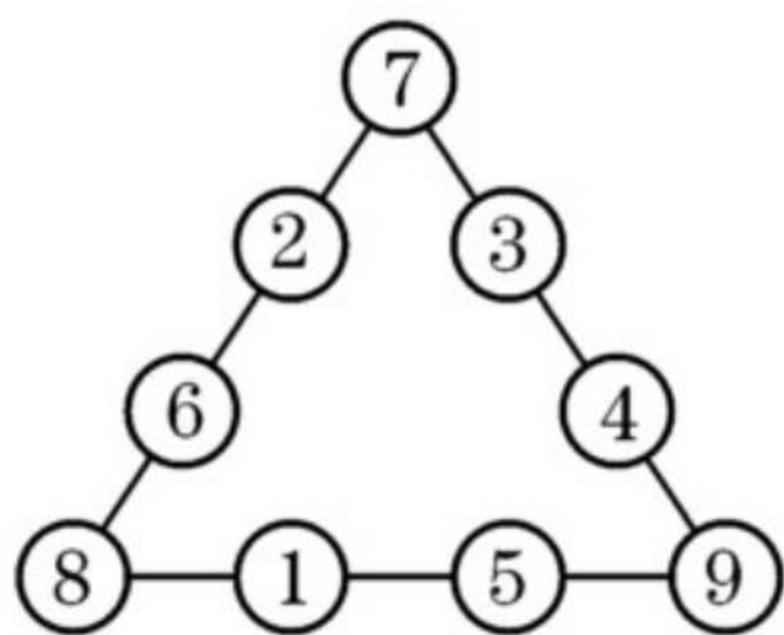
(5)



(6)

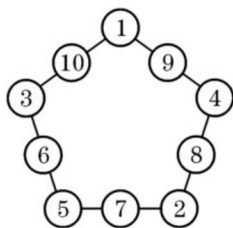


(7)



(8)

4 1、3 之间的数比 3、5 之间的数大 $5-1=4$, 所以 1、3 之间的数是 10, 3、5 之间的数是 6. 1、4 之间的数比 10 少 $4-3=1$, 因而是 9. 同理可得其他数, 于是可得右图.



5 $5+6+7+8+9+10+11+12 = (5+12) \times 4 = 68$.

在 1、2 之间的 2 个数的和比 1、3 之间的 2 个数的和多 1, 比 3、4 之间的 2 个数的和多 4, 比 4、2 之间的 2 个数的和多 3. 从而 1、2 之间的 2 个数的和是 19, 1、3 之间的 2 个数的和是 18, 2、4 之间的 2 个数的和是 16, 3、4 之间的 2 个数的和是 15. 由

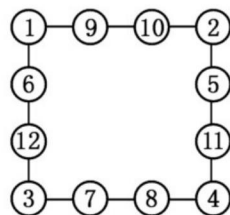
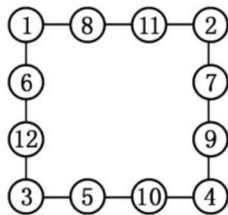
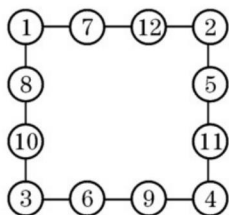
$$19 = 12 + 7 = 11 + 8 = 10 + 9,$$

$$18 = 10 + 8 = 12 + 6,$$

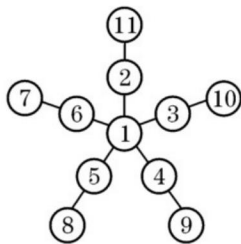
$$16 = 11 + 5 = 9 + 7,$$

$$15 = 9 + 6 = 10 + 5 = 8 + 7.$$

得下面的 3 个解:



6 $(2+3+\dots+11) \div 5 = 13 \times 10 \div 2 \div 5 = 13$, 每条线上的和是 13. 填法如下图



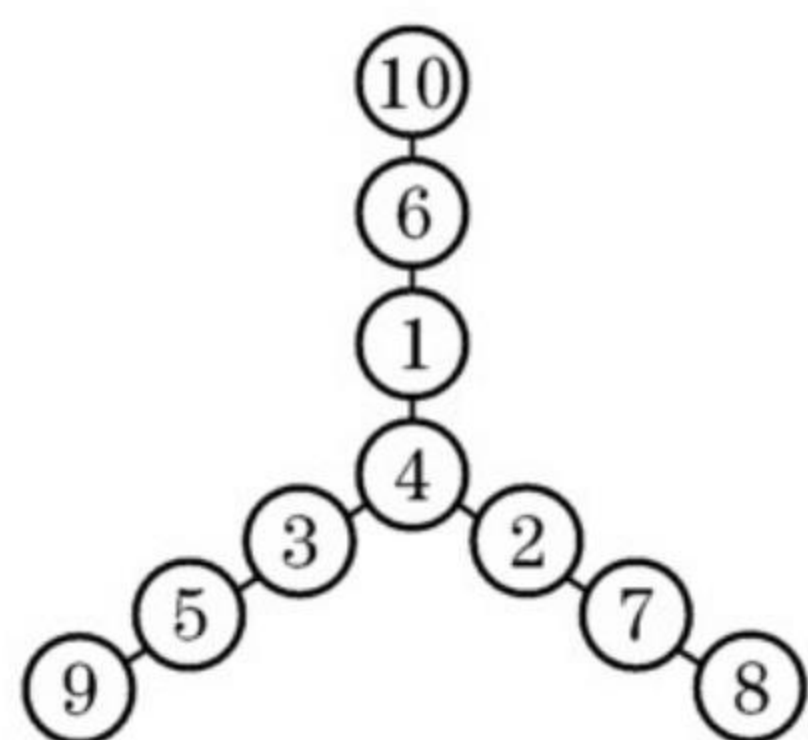
7 答案不唯一,中心可填 1、4、7、10. 例如中心填 4 时,每条线上其他 3 个数的和

$$(1 + 2 + \dots + 10 - 4) \div 3 = 51 \div 3 = 17.$$

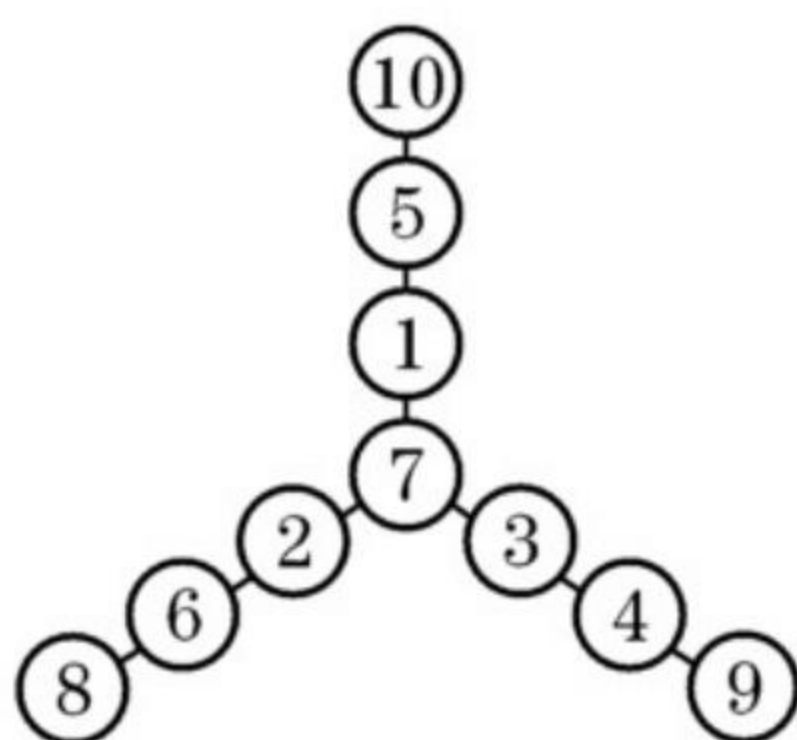
中心填 7 时,相应的和是

$$(1 + 2 + \dots + 10 - 7) \div 3 = 16.$$

图分别为图(1)、(2).

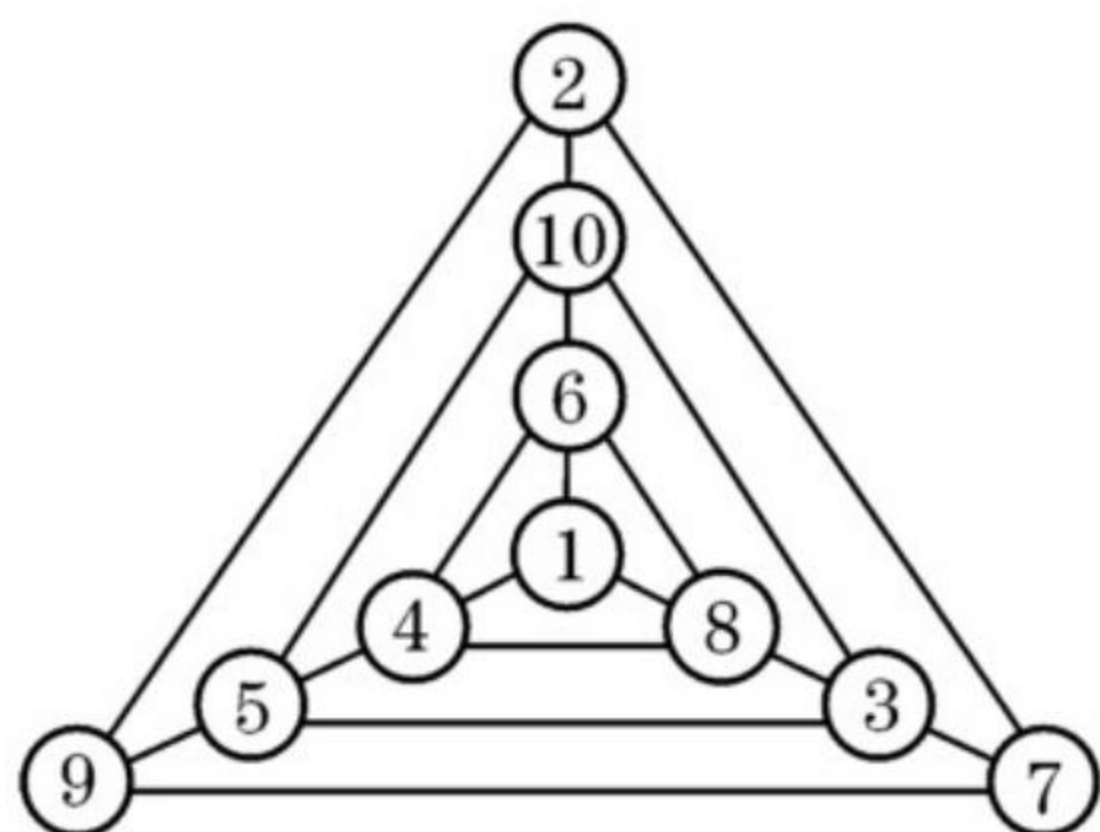


(1)

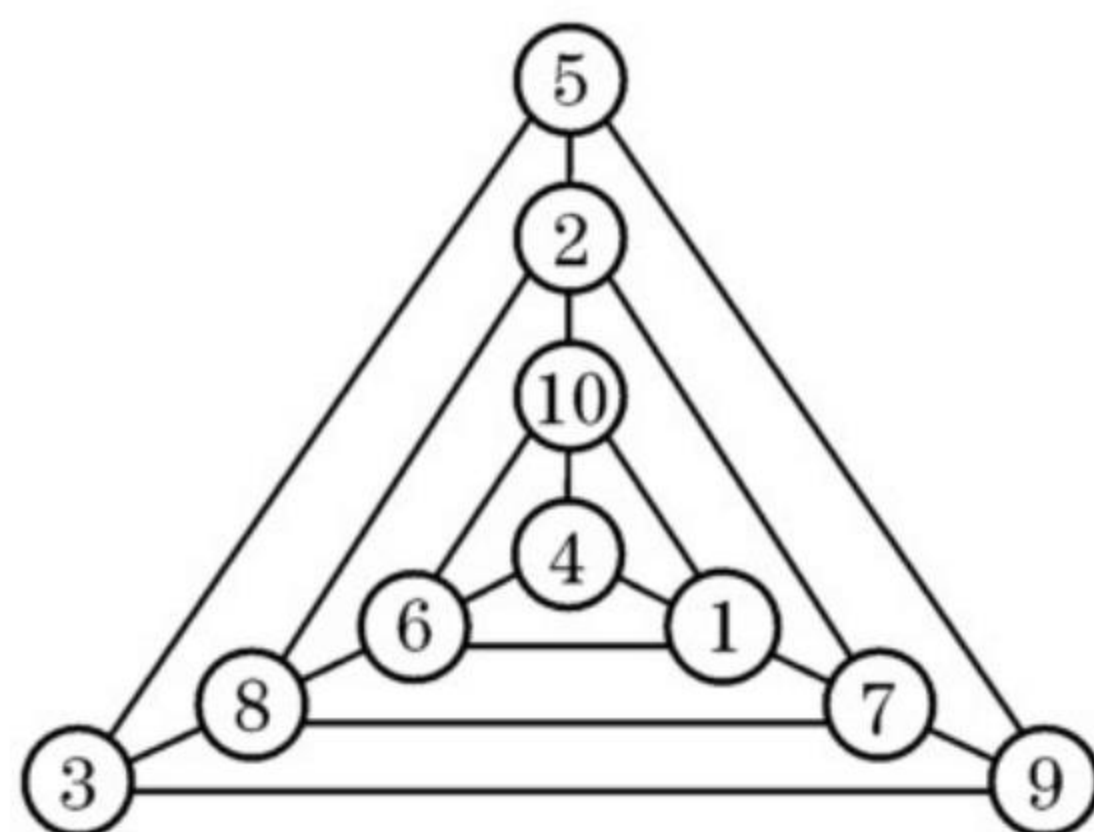


(2)

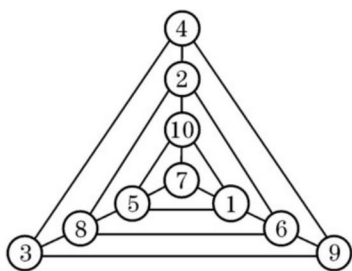
8 中心的数可能是 1、4、7、10. 当以 1 为中心的数时,三角形三个顶点上的数的和是 18, 每条线段上的四个数的和为 19. 当以 4、7、10 为中心的数时,三角形上三数之和分别是 17、16、15. 从而可以得到



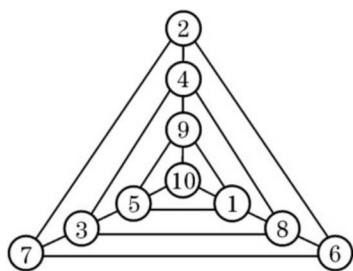
(1)



(2)

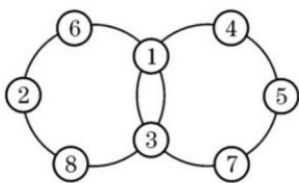


(3)

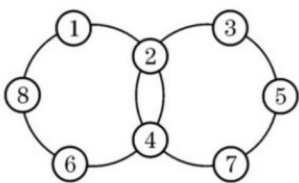


(4)

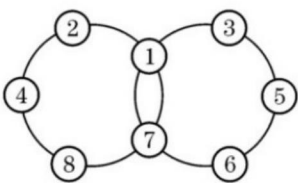
9 答案不唯一. 两圆公共部分的两个数的和是偶数, 可以先写出这两个数, 再写出其他部分的数. 例如



(1)



(2)

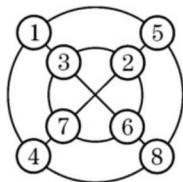


(3)

10 每个圆周上的 4 个数与每条线段上的 4 个数的和都是 18. 由

$$\begin{aligned} 18 &= 1 + 4 + 5 + 8 = 2 + 3 + 6 + 7 \\ &= 1 + 3 + 6 + 8 = 2 + 4 + 5 + 7 \end{aligned}$$

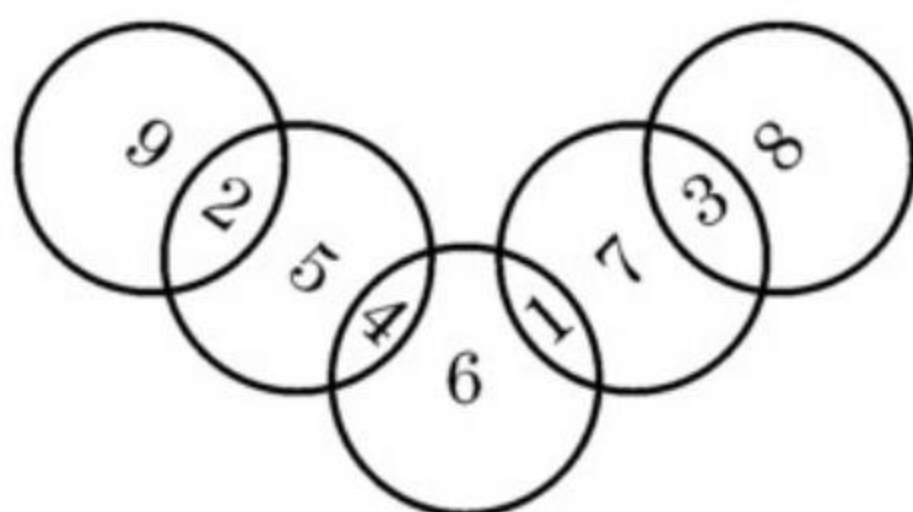
得下面的解



答案并不唯一.

11 9 只能与 2 相加得 11 (9 如果与两个数相加, 和大于 11). 所以可设从左到右应填 9, 2. 这时, 8 也只能与 3 相加得 11. 从右到左应填 8, 3. 由于 8 是右起第三、四两个区域中的数的和, 而 2、3

已经用过,8 只能是 $7+1$. 同理, $9 = 5+4$. 而且由于 $5+6$ 已经是 11, 所以中间的圆中已有 6, 不能再有 5、7. 只能再有 4、1, 这就得到下图



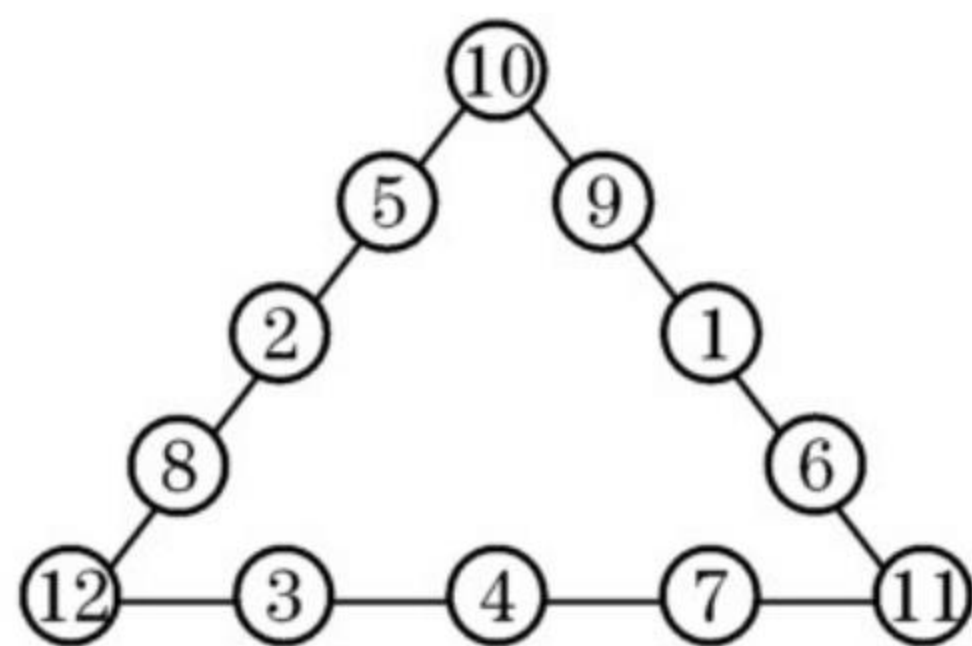
12 $1 + 2 + \dots + 12 = 78$.

设三角形顶点上 3 个数的和为 a , 每条边上的数的和为 s , 则

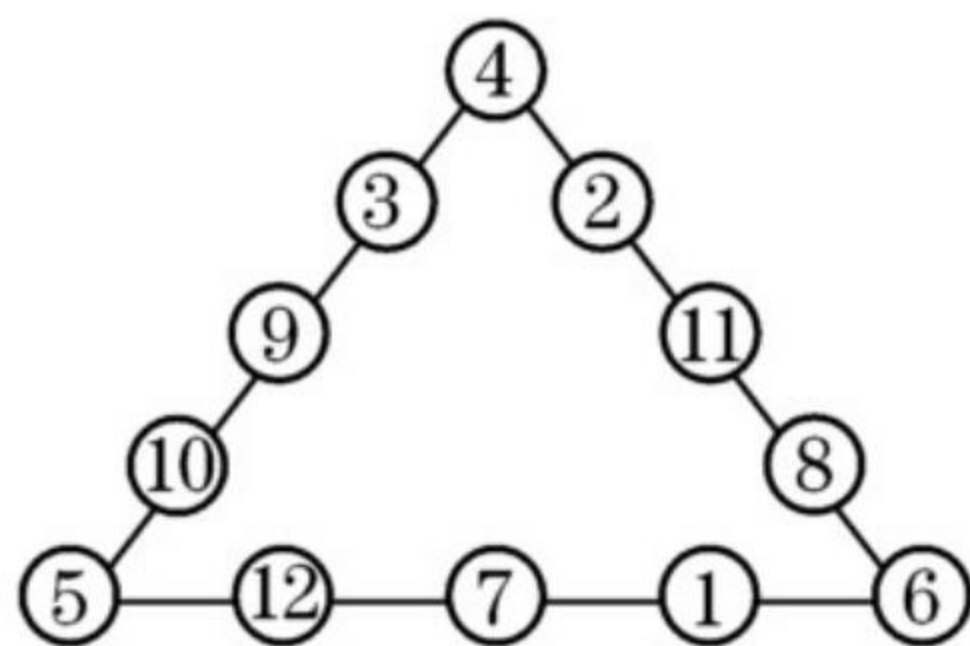
$$3 \times s = 78 + a,$$

所以 a 是 3 的倍数.

答案并不唯一. 例如在 $a = 33$ 与 15 时, 得到图(1)、(2).



(1)



(2)

第 11 讲

一 笔画

随堂练习

1 都能一笔画出.

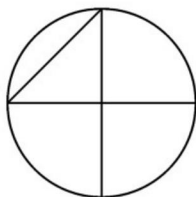
(1) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B$. (不唯一)

(2) $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A$. (不唯一)

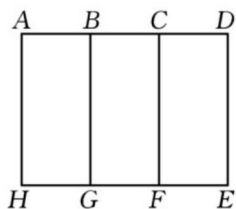
2 不能一笔画成. 因为 E 、 F 、 G 、 H 都是奇点, 奇点个数超过 2.

3 能一笔画成. 有 2 个奇点: 右上角的点引出 3 条线, 中央的点引出 5 条线.

4 将圆周上相邻的两个点用线相连, 如图



5



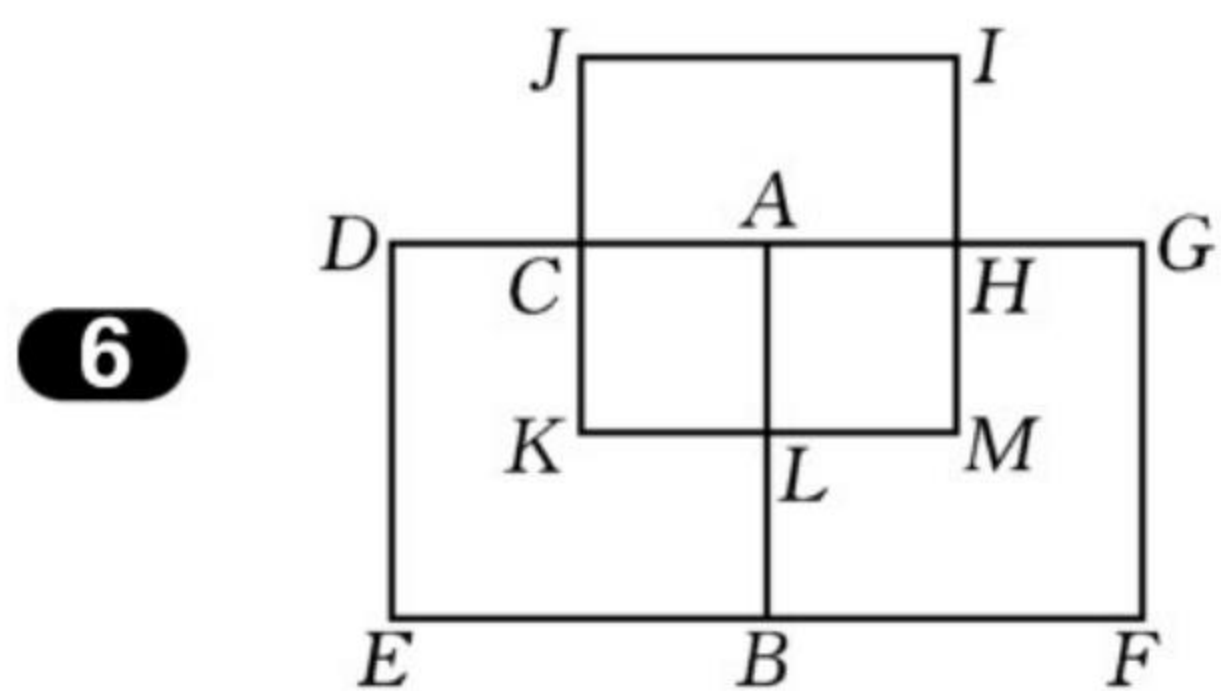
图中 B 、 C 、 F 、 G 都是奇点. 奇点数大于 2, 所以这个图不能一笔画成.

这个图不难用两笔画成:

① $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow B$;

② $G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$.

因此这个图至少要两笔画成。



图中 A、B 是两个奇点，其余点都是偶点，因此图可以一笔画成，但从 A 出发不能回到 A，而是以 B 为终点。要回到 A，必须在两个奇点 A、B 之间连一条线或重复走一遍 AB，所以至少要走

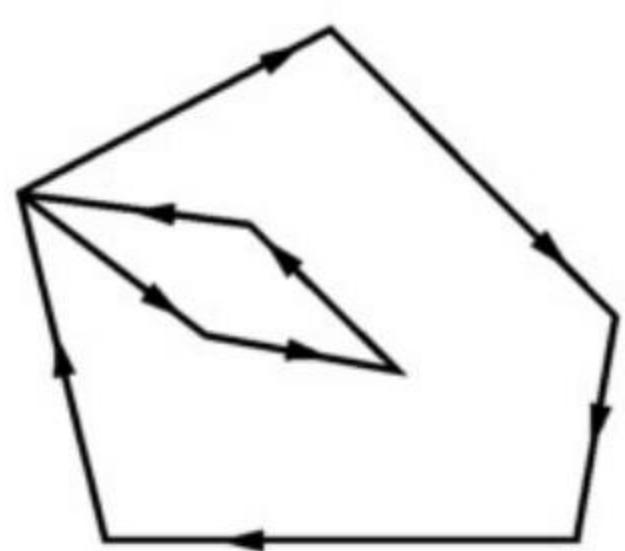
$$2 \times 4 \times 3 = 24(\text{千米}).$$

具体走法可以是：

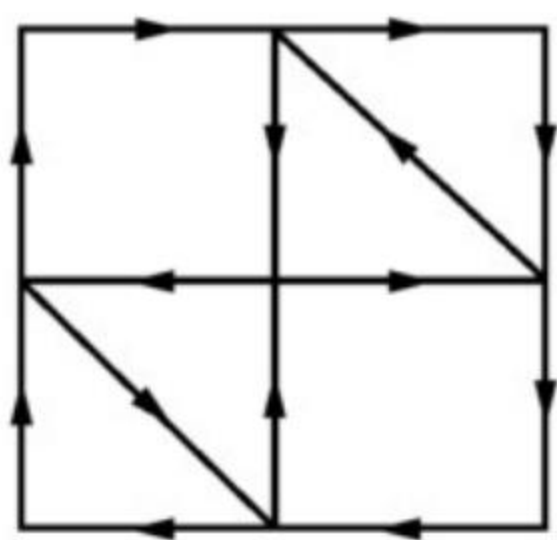
$$A \rightarrow C \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow L \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow L \rightarrow A$$

练习题

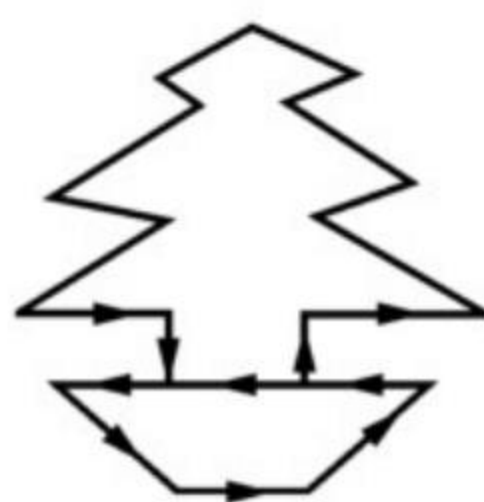
1 都能一笔画成。可沿图中箭头前进，一笔画成。



(1)



(2)



(3)

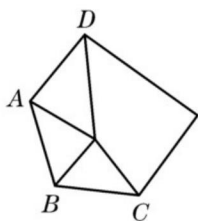


(4)

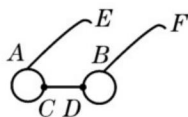
2 都不能一笔画成。

(1) 中 A、B、C、D 都是奇点，有 4 个奇点，需要两笔才能画成。

(2) 中 A、B、C、D、E、F 都是奇点，需要三笔才能画成。



(1)



(2)

3 都能一笔画成.

(1) 由 A 出发,走完一个(大)三角形回到 A,再沿圆周到 B,走完另一个(大)三角形回到 B,再沿圆周走到 A.

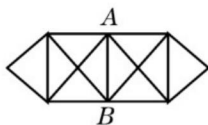
(2) 由 A 出发,走完左边回到 A.再走完右边回到 A.最后从 A 到 B.

(3) 由 A 出发,走完第一个圆周回到 A,再由 A 到 B、C、D,由 D 沿第 3 个圆周到 C、F、E,由 E 沿第 4 个圆周到 F、G、H,由 H 沿第 5 个圆周回到 H,再走完剩下的路线:由 H 到 E,E 到 D,D 到 A.

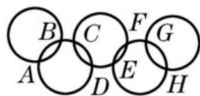
(4) 由 A 出发走完下面的凸字形回到 A.由 A 沿三角形到 C,由 C 走完圆周回到 C,再沿三角形走到 B.



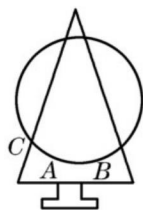
(1)



(2)



(3)



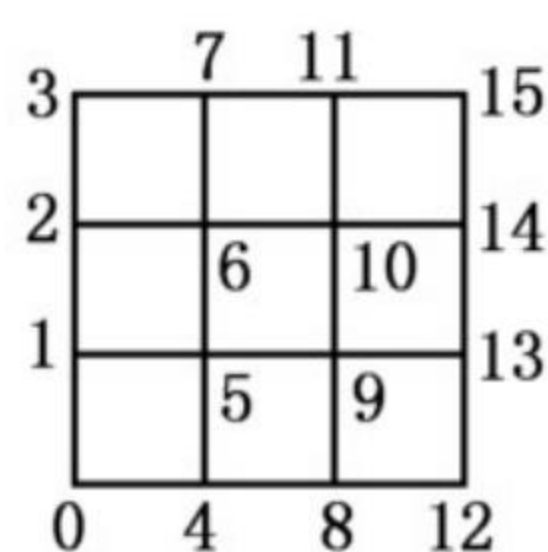
(4)

4 图中 D、J 是奇点,其余点都是偶点,出、入口应设在 D、J.

5 图中有两个奇点,应从奇点出发,才能不重复地游遍所有河道. A 是奇点, B 不是.所以在 A 处的黑鱼能不重复地游遍所有的河道,而白鱼不能.

6 以 C、D 为进、出口即可.

7 如图,将交点编上号码 0~15(邮局是 0). 其中 1、2、4、7、8、11、13、14 是奇点,因此必有街道重复. 可将相邻奇点间的街道重复. 如 1 到 2,7 到 11,4 到 8,13 到 14. 路线为




0→1→2→3→7→11→7→6→2→1→5→
6→10→11→15→14→13→12→8→4→
8→9→13→14→10→9→5→4→0

总长为

$$3 \times 8 + 4 = 28(\text{千米}).$$

8 因为速度相同,所以谁走的路程短,谁就先到达 C. 图中只有 A、C 两个奇点,所以这个图可以以 A、C 分别作为起点和终点一笔画成. 即甲可以从 A 出发,不重复地走遍所有街道,最后到达 C. 而从 B 出发的乙则不行. 所以甲先到达 C.

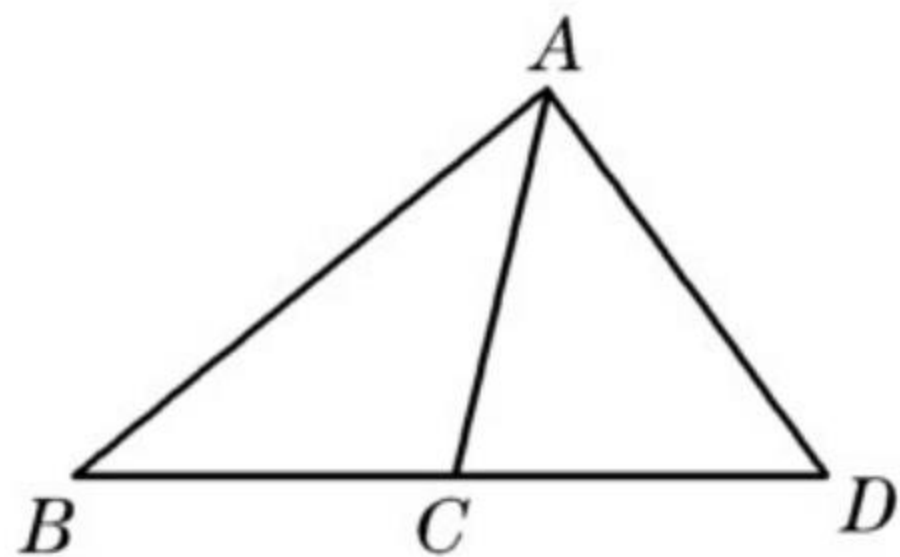
9 图形不唯一. 最简单的如 

10 (1) 可以一笔画成: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$.

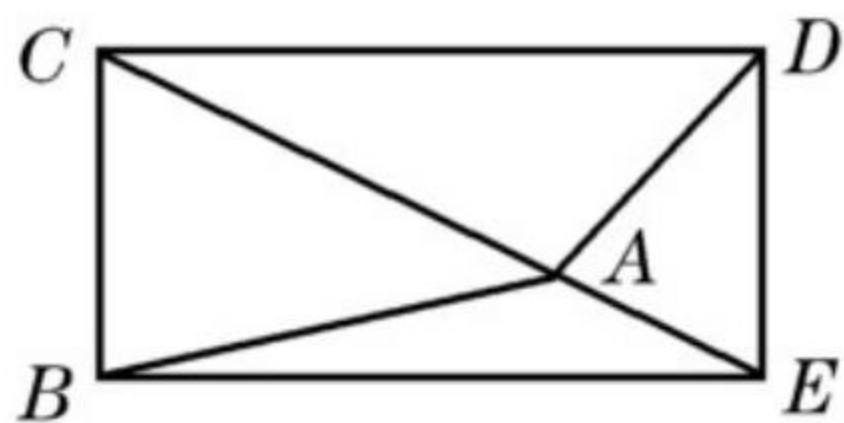
(2) B、C、D、E 是奇点. 有 4 个奇点,一笔画不成. 可以两笔画成: $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D$, $C \rightarrow A \rightarrow E$.

(3) A、B、C、D 是奇点. 有 4 个奇点,一笔画不成. 可以两笔画成: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow C$, $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow B$.

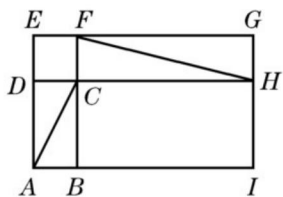
(4) 可以一笔画成: 由 A 出发,画完第一个圆回到 A,再沿第二个圆到 B,由 B 开始画完第三个圆回到 B,再由 B 沿第二个圆到 A.



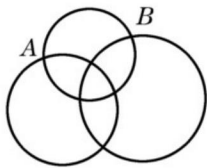
(1)



(2)



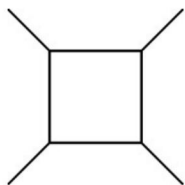
(3)



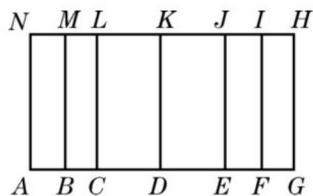
(4)

11 奇点的个数是 6 时,图不能两笔画成,可以三笔画成.如第 9 题所举的例子.

奇点的个数是 8 时,图不能三笔画成,可以四笔画成,如下图.



12 如图,标上字母. B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 I 、 J 、 K 、 L 、 M 是奇点. 所以有 5 条线段需要重复. 10 个奇点中,上、下各 5 个点,必有一对点,一个在上,一个在下. 因此,所连线段必有一段长为 4. 其他 4 段最短的长为 $4 \times 1 = 4$ (千米). 总长至少为



$$(4 \times 7 + 1 \times 8 + 2 \times 4) + (4 + 4 \times 1) = 52 \text{ (千米)}.$$

具体路线可以是

$A \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow$
 $D \rightarrow K \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow$
 $G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A.$

共走了 52 千米.

第12讲

简单推理

随堂练习

1 如果5天都是星期三,日期之和是

$$17 \times 5 = 85.$$

1个星期一,和减少2,1个星期四,和增加1.所以5天的日期的和是

$$85 - 2 + 1 = 84.$$

2 姓龚的不喜欢穿红的,也不喜欢花的,所以姓龚的穿白色的裙子.姓周的不喜欢红色的裙子,所以穿红色裙子的是姓王的.剩下穿花裙子的是姓周的.

3 因为第四个人说了实话,所以第三个人的证词是伪证,即“前面两个证词中至少有一个是真的”是句假话,所以第一、第二个证人都说了假话.从而可以判定甲和乙都是凶手.

4 如果小华不得金牌,那么老师的话中“小明得金牌,小强不得铜牌”都是错的.所以小强得铜牌,而小明只能得银牌,这与小华不得金牌矛盾.所以小华得金牌.老师的话中只有“小强不得铜牌”是对的,所以小强得银牌,小明得铜牌.

5 甲的话对了一半.如果前一半对,即丙第一,那么乙的话中,“我第一”是错的,而“丁第四”是对的.丙的话中,“丁第二”不对,所以“我第三”是对的.但丙第一与丙第三矛盾,所以甲的话中前一半是不对的.甲的话的后一半是对的,即甲第三.从而丙的话中,前一半对,即丁第二.乙的话中后一半不对,前一半对,乙第一.最后丙第四.四个人的成绩是乙第一,丁第二,甲第三,丙第四.

经检验,的确每个人的话只说对了一半.

6 A 比了 3 场,即 A 和 B、A 和 C、A 和 D 都举行过比赛. 又因为 B 赛过了 2 场,B 与 A 已赛过一场,如果 B 再与 D 进行一场,那么 D 进行过的比赛就已经超过了 1 场. 所以 B 只能再与 C 比赛一场. 从而,C 进行了 2 场比赛.

练习题

1 $4 \times 3 \times 3 = 36$, 所以一头象的重量等于 36 头小猪的重量.

2 丙不喜欢看篮球与足球,应将拳击入场券给丙. 甲不喜欢篮球,应将足球入场券给甲. 最后,应将篮球入场券给乙.

3 D 名次不是最高,但比 B、C 高,所以他是第二名,A 是第一名. C 的名次不比 B 高,所以 B 是第三名,C 是第四名.

4 4 块铁块和 10 块铜块共重 380 克,所以 2 块铁块和 5 块铜块共重

$$380 \div 2 = 190(\text{克}).$$

而 3 块铁块和 5 块铜块共重 210 克,所以 1 块铁块重

$$210 - 190 = 20(\text{克}).$$

1 块铜块重

$$(190 - 20 \times 2) \div 5 = 30(\text{克}).$$

5 如果是甲做的好事,那么乙、丙的话都是真的,与只有一句是真的矛盾. 如果是乙做的好事,那么甲、丙的话都是真的,也产生矛盾. 好事是丙做的,这时甲、丙的话都是错的,只有乙的话是真的. 与已知符合. 所以好事是丙做的.

6 只要拆开标签是“巧克力、奶糖各一块”的礼包即可.

如果拆开,两块都是奶糖,那么标“巧克力两块”的礼包里放的是巧克力、奶糖各一块,另一包放的是两块巧克力. 如果拆开,两块都是巧克力,那么标“奶糖两块”的礼包里放的是巧克力、奶糖各一块,另一包放的是两块奶糖.

7 由(1),B 不喜欢生物. 由(3),B 不生在北京. 由(4),B 不

生在武汉. 所以 B 生在上海. 由(2), B 不喜欢数学. 结合(1)得 B 喜欢物理. 由(1), A 不喜欢数学, 所以 A 喜欢生物. 由(3), A 出生在北京. 最后, C 喜爱数学, 生在武汉.

8 如果乙是 2 号, 那么 A 的话全错, 与已知不符. 所以乙不是 2 号. 因为 B 的话对一半, 而乙不是 2 号, 所以丙是 4 号.

9 由于甲最轻、丙最重, 所以丙、乙重量的和最大, 是 55 千克. 其次是丙、甲重量的和, 是 50 千克. 最轻是甲、乙重量的和, 是 45 千克.

甲、乙、丙共重

$$(55 + 50 + 45) \div 2 = 75(\text{千克}),$$

所以甲重

$$75 - 55 = 20(\text{千克}).$$

乙重

$$75 - 50 = 25(\text{千克}).$$

丙重

$$75 - 45 = 30(\text{千克}).$$

10 因为 1 号不是第 4 名, 3 号在 1 号前面, 当然也不是第 4 名. 又号码与名次都不相同, 所以第 4 名只能是 2 号. 又 1 号也不是第 3 名(因为得第 3 名的是“另一个”), 所以 1 号是第 2 名, 3 号是第 1 名. 最后, 4 号是第 3 名.

11 甲、乙、丙胜的场数相同. 如果他们都各胜 1 场, 那么由于甲胜了丁, 所以甲负于乙、丙. 这时乙、丙中的胜者胜了两场, 产生矛盾. 所以甲、乙、丙各胜 2 场(如果甲胜 3 场即全胜, 那么乙、丙就不可能胜 3 场). 不妨设甲胜乙, 那么乙必胜丙、丁, 丙必胜甲、丁. 所以丁胜了 0 场.

12 如果甲的话是前一半对, 那么 1 号是法国人. 由乙的话, 2 号是英国人. 再由丙的话, 3 号是美国人. 最后由丁的话, 4 号是日

本人. 经检验,1号是法国人,2号是英国人,3号是美国人,4号是日本人,符合题意. 如果甲的话是后半对,那么2号是美国人. 由乙的话,1号是日本人. 由丙的话,4号是英国人. 这样,丁的话完全不对,不合题意.

第13讲

数 线 段

随堂练习

1 以 A 为左端点的线段有 AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 AF 、 AG 、 AH , 共 7 条. 以 B 为左端点的线段有 BC 、 BD 、 BE 、 BF 、 BG 、 BH , 共 6 条. 同样, 以 C 、 D 、 E 、 F 、 G 为左端点的线段分别有 5、4、3、2、1 条. 所以, 共有线段

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28(\text{条}).$$

2 从左到右依次将各点标记为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{99}, A_{100}$. 以 A_1 为左端点的线段有 $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{100}$, 共有 99 条; 以 A_2 为左端点的线段有 $A_2A_3, A_2A_4, \dots, A_2A_{100}$, 共有 98 条……以 A_{99} 为左端点的线段有 $A_{99}A_{100}$, 1 条. 所以共有线段

$$99 + 98 + \dots + 2 + 1 = (99 + 1) \times 99 \div 2 = 4950(\text{条}).$$

3 应当准备车票

$$(1 + 2 + \dots + 19) \times 2 = 380(\text{种}).$$

4 每个三角形都以 S 为顶点. 因为三角形的个数与线段 AB 上的线段条数相同, 所以共有三角形

$$3 + 2 + 1 = 6(\text{个}).$$

5 由随堂练习 4, 共有

$$6 \times 3 = 18$$

个三角形.

6 与例 6 相同, 作一条辅助线. 这条线与从 S 引出的线, 包

括原来的两条,共有 12 个交点. 这 12 个点形成的线段有

$$1 + 2 + \cdots + 11 = 12 \times 11 \div 2 = 66(\text{条}),$$

因而形成 66 个角.

练习题

1 (1) $1 + 2 + \cdots + 8 = (1 + 8) \times 8 \div 2 = 36$,
共有 36 条线段.

(2) $1 + 2 + \cdots + 11 = (1 + 11) \times 11 \div 2 = 66$,
共有 66 条线段.

2 $1 + 2 + \cdots + 10 = (1 + 10) \times 10 \div 2 = 55$,
共有 55 条线段.

3 (1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$,
共有 15 个三角形.

(2) $(1 + 2 + 3 + 4) \times 2 = 20$,
共有 20 个三角形.

(3) $(1 + 2 + 3 + 4) \times 3 = 30$,
共有 30 个三角形.

4 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$,
共有 10 个小于 90° 的角.

5 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 2 = 30$,
要准备 30 种车票.

6 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$,
有 28 种不同的票价.

$$28 \times 2 = 56,$$

应准备 56 种车票(从 A 到 B 与从 B 到 A, 车票不同, 但票价相同).

7 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$
 $= 21 + 28 = 49$, 共有 49 条线段.

8 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 3 = 12$,

有 12 个小于 90° 的角.

$$\textbf{9} \quad (1+2+3+4+5+6)+(1+2)=24,$$

有 24 条线段.

$$\textbf{10} \quad 1+2+3+4=10,$$

有 10 个三角形.

$$\textbf{11} \quad 1+2+\cdots+198=199 \times 198 \div 2=19\,701,$$

有 19 701 条线段.

12 由第 10 题, 左边有 10 个三角形, 右边也有 10 个三角形. 去掉中间的线, 还有 4 个三角形.

$$10+10+4=24,$$

共有 24 个三角形.

第14讲

数 图 形

随堂练习

1 长为1的线段有5条,即 A_1A_2 、 A_2A_3 、 A_3A_4 、 A_4A_5 、 A_5A_6 . 长为2的线段有4条,即 A_1A_3 、 A_2A_4 、 A_3A_5 、 A_4A_6 . 长为3的线段有3条,即 A_1A_4 、 A_2A_5 、 A_3A_6 . 长为4的线段有2条,即 A_1A_5 、 A_2A_6 . 长为5的线段有1条,即 A_1A_6 .

2 (1) 大长方形的长上的每条线段,都能确定一个长方形. 而大长方形的长上有 $6(=3+2+1)$ 条线段,所以(1)中有长方形6个.

(2) 大长方形的长上的每一条线段与宽上的每一条线段可以构成一个长方形,所以共有长方形

$$(3+2+1) \times (2+1) = 18(\text{个}).$$

(3) 共有长方形

$$(3+2+1) \times (3+2+1) = 36(\text{个}).$$

3 $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 30$, 有30个正方形.

4 由例4, 左边有5个三角形, 右边也有5个三角形, $5 \times 2 = 10$, 共有10个三角形.

5 设面积最小的三角形的面积为1. 面积是1的三角形有8个, 面积为2的三角形有4个, 面积是4的三角形有4个. 所以共有三角形 $16(=8+4+4)$ 个.

6 如果把多出的4个小正方形去掉, 有

$$(1+2+3) \times (1+2+3) = 36$$

个长方形. 增加左面 1 个小正方形后, 增加 4 个(含有这个小正方形的)长方形. 再增加右面 1 个小正方形后, 又增加 5 个(含有这个小正方形的)长方形, 共增加 $9 (= 4 + 5)$ 个长方形. 增加上面与下面的 2 个正方形也是如此.

$$36 + 9 \times 2 = 54,$$

所以共有 54 个长方形.

练习题

1 $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14,$

所以有 14 个正方形.

$$(1 + 2 + 3) \times (1 + 2 + 3) = 36,$$

所以有 36 个长方形.

2 $6 + 2 = 8,$ 所以有 8 个正方形.

3 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$ 所以有 21 个长方形.

4 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times (1 + 2 + 3) = 126,$ 所以有 126 个长方形.

5 设最小的三角形面积为 1, 则面积为 1 的三角形有 9 个. 面积为 4 的三角形有 3 个, 面积为 9 的三角形有 1 个. 因为 $9 + 3 + 1 = 13,$ 所以共有 13 个三角形.

6 设最小的三角形面积为 1, 则面积为 1 的三角形有 8 个. 面积为 2(由 2 个小三角形组成)的三角形有 4 个. 面积为 4(由 4 个小三角形组成)的三角形有 4 个. $8 + 4 + 4 = 16,$ 所以有 16 个三角形.

7 先去掉最外层“多出”的 4 个小长方形, 这时有

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 225$$

个长方形. 再添上 4 个小长方形, 这时增加

$$2 \times (2 \times 6 + 1) = 26$$

个长方形.

$$225 + 26 = 251,$$

所以共有 251 个长方形.

8 $(1+2+3+4) \times (1+2+3+4+5) = 150$, 所以有 150 个长方形.

9 $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 6 \times 6 + 8 + 4 = 103$, 共有 103 个正方形.

10 设最小的三角形面积为 1, 则面积为 1 的三角形 24 个. 面积为 2 的三角形 22 个(尖向右的 5 个, 尖向左的 5 个, 尖向上的 6 个, 尖向下的 6 个). 面积为 4 的三角形有 18 个(最长边在对角线上的有 $(3+2) \times 2 = 10$ 个, 最长边不在对角线上的有 $4 \times 2 = 8$ 个). 面积为 8 的三角形有 8 个(尖向下、上、左、右的各 2 个). 面积为 9 的三角形有 6 个(最长边在对角线上). 面积为 16 的三角形有 4 个(最长边是对角线),

$$24 + 22 + 18 + 8 + 6 + 4 = 82,$$

所以共有 82 个三角形.

11 图形被分为 11 块, 其中 10 块是三角形. 不含中间 1 块(五边形)的三角形中, 由 1 块组成的有 10 个, 由 2 块组成的有 $5 \times 2 = 10$ 个, 由 3 块组成的有 5 个, $10 + 10 + 5 = 25$, 共 25 个. 含中间一块的三角形中, 由 3 块组成的有 5 个, 由 5 块组成的有 5 个, $5 + 5 = 10$, 共 10 个. 所以总共有 35 个三角形.

12 (1) $2 \times (1+2) = 6$, 共有 6 个三角形.

(2) 比(1)多 4 个三角形, $6 + 4 = 10$, 共有 10 个三角形.

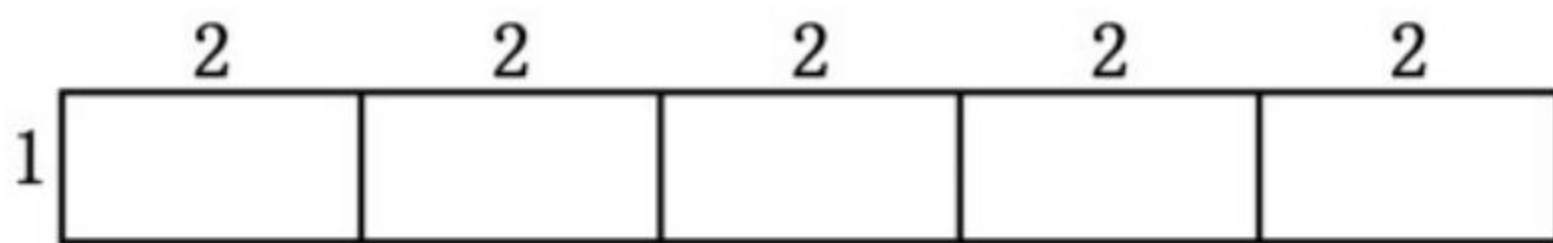
(3) 比(2)多 2 个三角形, $10 + 2 = 12$, 共有 12 个三角形.

第15讲

巧求周长

随堂练习

- 1 $3 \times 3 = 9$, 大正方形的边长是 9 厘米;
 $9 \times 4 = 36$, 周长是 36 厘米.
- 2 $20 \div 20 = 1$, 铁环的周长是 1 米.
- 3 如图, 大长方形的边长是 1 与 10 时, 周长最长,



$$(1 + 10) \times 2 = 22,$$

周长最长是 22 厘米.

- 4 $(30 + 20) \times 2 + 60 \times 2 = 220$, 周长是 220 厘米.
- 5 $(30 + 40) \times 2 = 140$, 周长是 140 厘米.
- 6 有可能. 例如图形 B 是边长为 4 的正方形, 面积是 16, 周长也是 16. 图形 A 是随堂练习 3 中的边长为 1、10 的长方形, 面积是 10, 比 16 小, 但周长是 22, 比 16 大.

练习题

- 1 正方形的边长是 12 分米.

$$12 \times 4 = 48,$$

周长是 48 分米.

$$12 \times 12 = 144,$$

面积是 144 平方分米.

2 $(1 \times 3) \times 4 = 12$, 周长是 12 厘米.

3 $2 \times 3 = 6$, 大正方形的边长是 6 分米.

$6 \times 4 = 24$, 周长是 24 分米.

$6 \times 6 = 36$, 面积是 36 平方分米.

4 $1 \times 10 = 10$, 10 分钟爬了 10 分米, 是枯藤的一半.

$10 \times 2 = 20$, 枯藤长 20 分米.

5 $2 \times 5 = 10$, 周长是 10 cm.

6 横的方向, 边长的和是

$$10 \times 2 = 20(\text{cm}).$$

纵的方向, 边长的和是

$$(12 + 3 + 2 + 5) \times 2 = 44(\text{cm}).$$

周长是

$$20 + 44 = 64(\text{cm}).$$

7 在一个方向上的边长的和是

$$(8 + 8 + 8 \div 2) \times 2 = 40(\text{cm}).$$

在另一个方向上的边长的和是

$$(4 + 4 + 4 \div 2) \times 2 = 20(\text{cm}).$$

周长是

$$40 + 20 = 60(\text{cm}).$$

8 周长是

$$(3 + 2 + 3 + 2 + 2) \times 2 = 24(\text{厘米}).$$

9 (1)的周长是 $4 \times 4 = 16$.

(2)的周长是 $4 \times 4 + 2 \times 2 = 20$.

(3)的周长是 $4 \times 4 + 2 \times 4 = 24$.

10 周长是 $(10 \times 4 + 20 \times 4) \times 2 = 240(\text{厘米})$.

11 周长是 $(10 \times 5 + 20 \times 5) \times 2 = 300(\text{厘米})$.

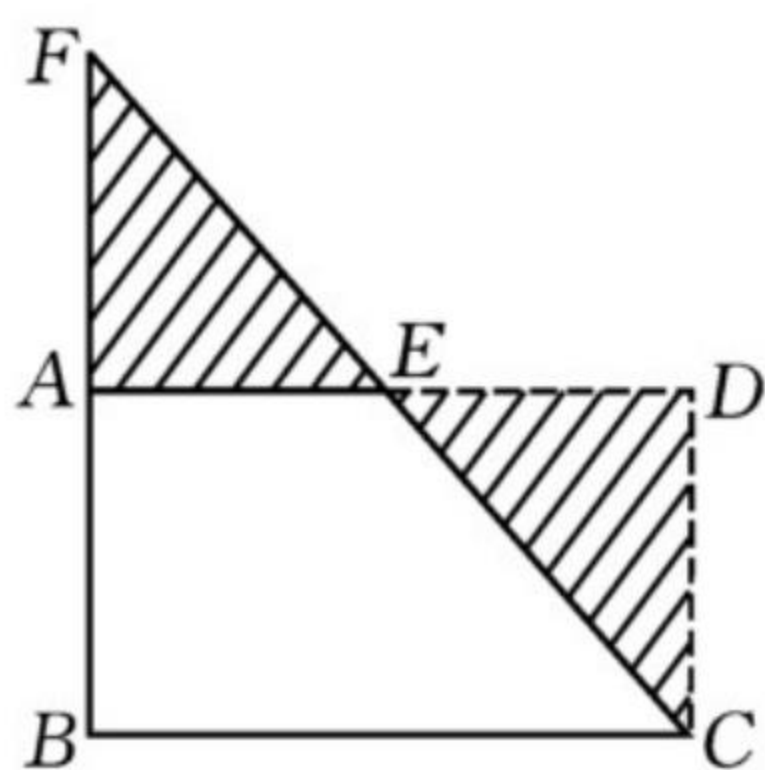
12 周长是 $(20 + 9 + 8 + 3) \times 2 = 80(\text{cm})$.

第16讲

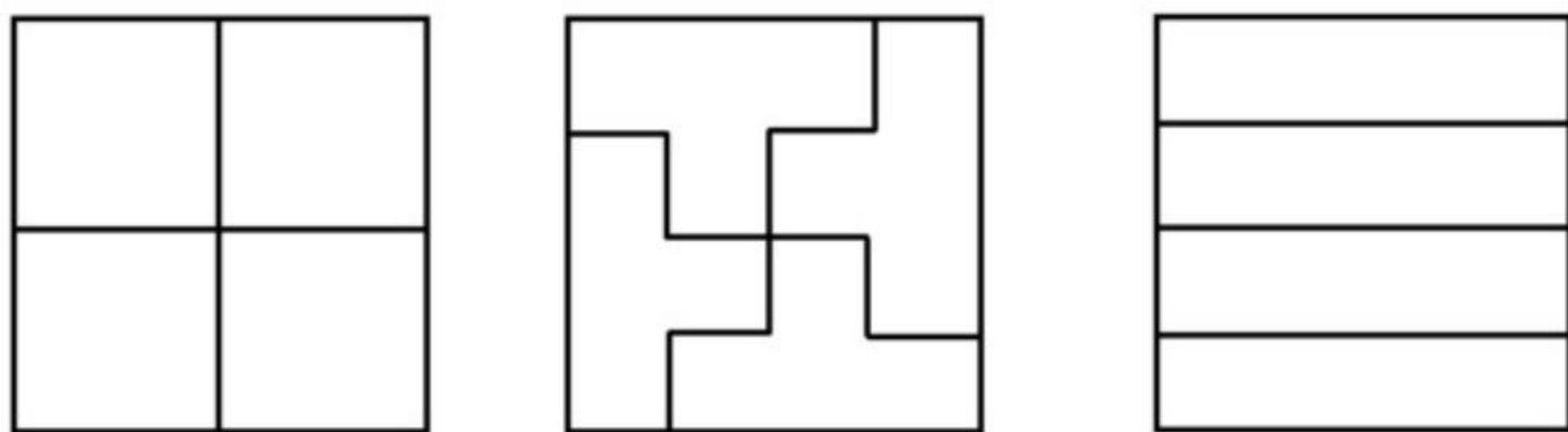
图形的剪拼

随堂练习

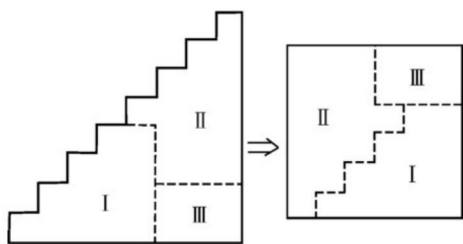
1 先将长方形对折一下,使 CD 与 AB 重合. 这时折痕与 AD 的交点 E 就是 AD 的中点. 沿 CE 剪开,所得的两部分可以拼成 $\triangle FBC$, 如图所示.



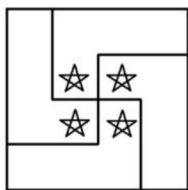
2 都能拼成, 如图所示.



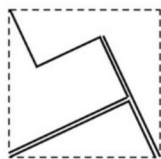
3 如果以一级楼梯为单位长, 那么例 3 中的长方形宽是 4, 长是 $4+5=9$, 面积是 $4 \times 9 = 36$. 所以拼成的正方形面积也是 36, 边长是 6. 于是, 在例 3 中的 I 应小一点, 使它最长的边是 5 (原来是 8), 而 II 应“高”一点, 使它最长的边是 6. 这就得到下面的剪拼法. 其中 III 是一个长为 3, 宽为 2 的长方形.



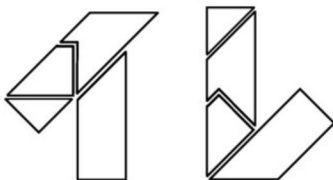
4 即随堂练习 2 的第 2 个图. 或如图:



5

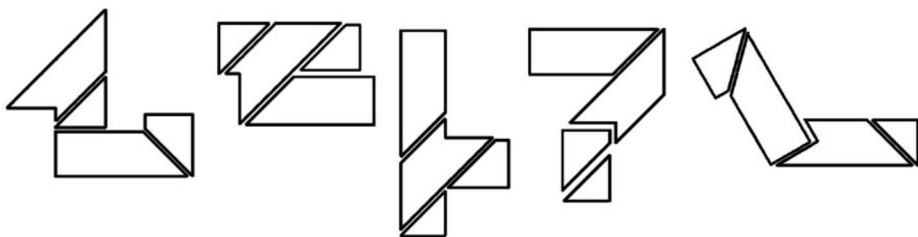


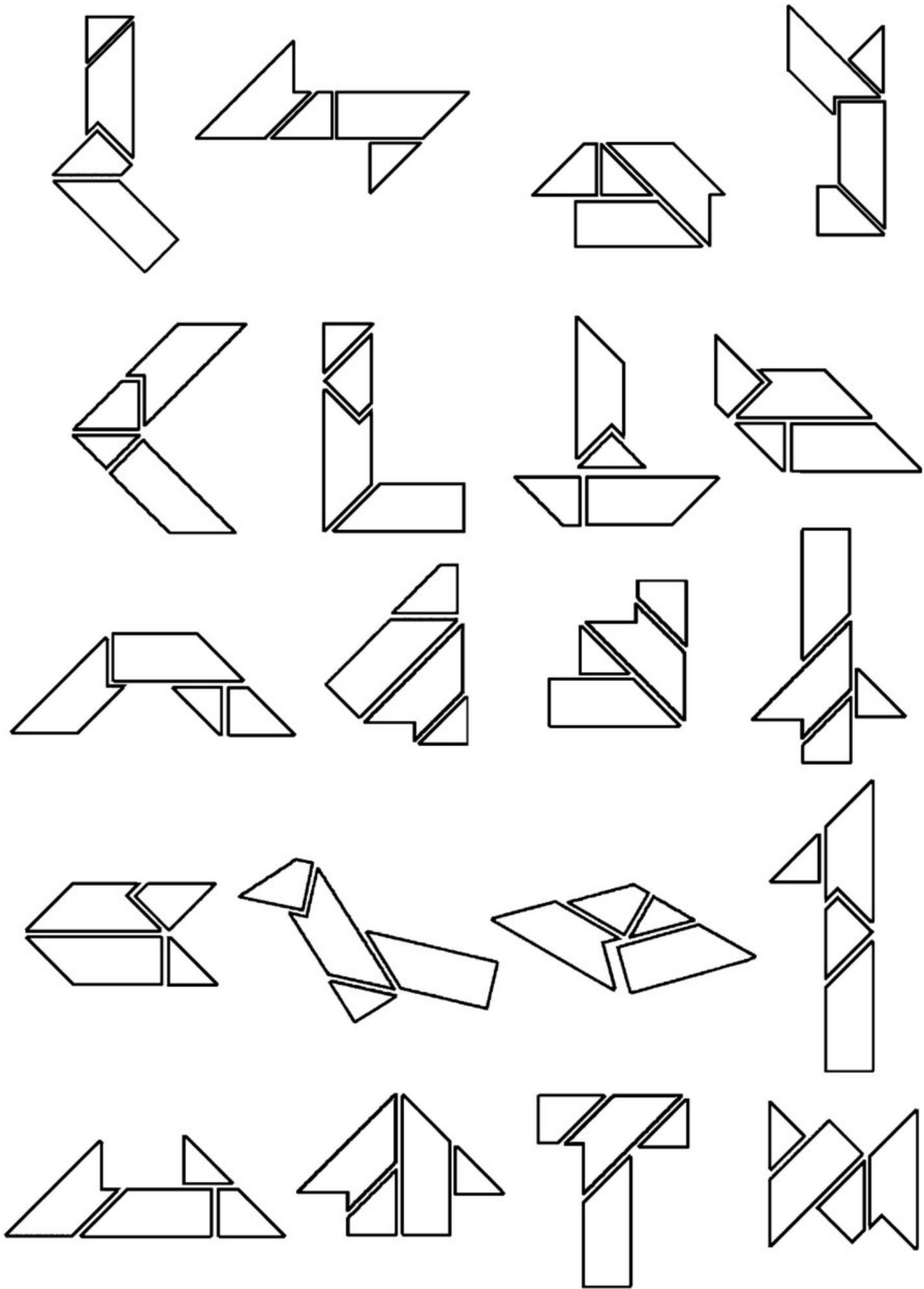
6 拼法如图



练习题

拼法如图





第17讲

还原问题

随堂练习

- 1 $[(50 + 36) \times 2 - 100] \div 3 = 24$, 原数是 24.
- 2 $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (米), 绳子原长 16 米.
- 3 $[(4 + 2) \times 2 + 3] \times 2 = 30$, 这堆苹果原来有 30 个.
- 4 卖出的鱼重

$$122 - 64 = 58(\text{千克}),$$

原来有鱼

$$58 \times 2 = 116(\text{千克}),$$

筐重

$$122 - 116 = 6(\text{千克}).$$

又解 筐重的 2 倍与鱼共

$$64 \times 2 = 128(\text{千克}),$$

所以筐重

$$128 - 122 = 6(\text{千克}),$$

原来有鱼

$$122 - 6 = 116(\text{千克}).$$

5 $\{[(1 + 3) \times 2 + 2] \times 2 + 1\} \times 2 = 42$, 最初带了 42 张 1 元纸币.

6 原来甲有图书

习题详细解答

第 17 讲 还原问题 / 61

$$48 + 24 + 10 - 7 - 10 = 65(\text{本}),$$

乙有图书

$$48 + 7 + 9 - 24 - 5 = 35(\text{本}),$$

丙有图书

$$48 + 10 + 5 - 10 - 9 = 44(\text{本}).$$

练习题

1 $[(32 - 8) \times 5 + 6] \div 7 = 18$, 所求的数是 18.

2 狗宝宝今年

$$(15 - 1) \div 2 = 7(\text{岁}).$$

3 所求的数是

$$(3 \times 3 + 3) \div 3 - 3 = 1.$$

4 共有学员

$$7 + 7 + 20 = 34(\text{名}).$$

5 这条路长

$$(170 \times 2 + 200) \times 2 = 1080(\text{米}).$$

6 某数是

$$[(100 \div 2 + 300) \times 4 - 80] \div 2 = 660.$$

7 爷爷年龄是

$$[(13 \times 3 - 4) \times 5 + 8] \div 3 = 61(\text{岁}).$$

8 某数是

$$[(15 - 5) \times 2 + 10] \div 3 - 2 = 8.$$

9 总共有土

$$280 \times 2 \times 2 \times 2 = 2240(\text{方}).$$

10 原来有水

$$[(60 + 180) \times 2 - 40] \times 2 = 880(\text{千克}).$$

11 □中应填的数是

$$[(10 + 2) \times 2] \div 3 - 3 = 5.$$

12 火星直径是

$$(3000 + 500) \times 2 = 7000(\text{千米}),$$

水星直径是

$$7000 - 2000 = 5000(\text{千米}),$$

土星直径是

$$5000 \times 24 = 120\,000(\text{千米}),$$

地球直径是

$$(120\,000 - 4800) \div 9 = 12\,800(\text{千米}).$$

第18讲

植树问题

随堂练习

1 路分成

$$100 \div 10 = 10(\text{段}),$$

共栽树

$$10 + 1 = 11(\text{棵}).$$

2 共种桃树

$$3 \times (12 - 1) = 33(\text{棵}).$$

3 每两个相邻站之间的距离是

$$400 \div 5 = 80(\text{米}).$$

4 公路共有

$$251 - 1 = 250(\text{段}),$$

总长

$$8 \times 250(\text{米}),$$

小军每分钟骑

$$8 \times 250 \div 5 = 400(\text{米}).$$

5 周长被垂柳分成

$$8040 \div 8 = 1005(\text{段}),$$

即种垂柳 1005 棵. 每段又被海棠分为

$$8 \div 2 = 4(\text{小段}),$$

即每段种海棠

$$4 - 1 = 3(\text{棵}).$$

共种海棠

$$1005 \times 3 = 3015(\text{棵}).$$

6 一楼到五楼可分为4段,小明每段用 $4 \div 4 = 1$ (分).小芳速度是小明的一半,所以每段用 $1 \times 2 = 2$ (分).一楼到四楼共有3段,小芳需用 $2 \times 3 = 6$ (分).

练习题

1 共有

$$200 \div 10 = 20(\text{小段}),$$

需要锯

$$20 - 1 = 19(\text{次}).$$

2 从第1节爬到第13节需

$$10 \times (13 - 1) = 120(\text{秒}),$$

即 $120 \div 60 = 2$ (分).

3 需放 $20 \div 1 \times 1 = 20$ (盆).

4 发电厂到闹市区有

$$30 \times (250 - 1) = 7470(\text{米}).$$

5 剪10次,剪成的短绳子有

$$10 + 1 = 11(\text{根}),$$

每根短绳子长

$$22 \div 11 = 2(\text{米}).$$

6 甲村到乙村的距离是 $8 \times (175 - 1)$ (米).

相邻两棵树应相距

$$8 \times (175 - 1) \div (117 - 1) = 12(\text{米}).$$

7 每两棵相邻的树相距

$$115 \div (22 + 1) = 5(\text{米}).$$

第 16 棵与第 1 棵相距

$$5 \times (16 - 1) = 75(\text{米}).$$

8 周长被红旗分成

$$30 \div 3 = 10(\text{段}),$$

即插 10 面红旗.

每段插 1 面蓝旗,共插 10 面蓝旗.

9 茶水站将 84 千米分为

$$43 - 1 = 42(\text{段}).$$

每段长

$$84 \div 42 = 2(\text{千米}),$$

即每两个相邻茶水站的距离是 2 千米.

10 如果棵距为 20 米,需要树

$$(60 \times 1000 \div 20 + 1) \times 2 = 6002(\text{棵}).$$

如果棵距为 15 米,需要树

$$(60 \times 1000 \div 15 + 1) \times 2 = 8002(\text{棵}).$$

11 从第 1 个茶水站到第 2 个茶水站用

$$50 \div 2 = 25(\text{分}),$$

即跑 5 千米用 25 分钟.

他共跑 60×3 分钟, 跑了

$$5 \times (60 \times 3 \div 25) = 36(\text{千米}),$$

即赛程是 36 千米.

12 车站将马路分成

$$30 \div 2 + 1 = 16(\text{段}).$$

不包括起点站、终点站, 共有车站(注意往返的车站不同)

$$(16 - 2) \times 2 = 28(\text{个}).$$

第19讲

和差问题

随堂练习

1 苹果

$$(20 + 6) \div 2 = 13(\text{个}),$$

桃子

$$20 - 13 = 7(\text{个}).$$

2 张丽

$$(26 + 4) \div 2 = 15(\text{岁}),$$

王芳

$$15 - 4 = 11(\text{岁}).$$

3 语文

$$95 - 2 \div 2 = 94(\text{分}),$$

数学

$$94 + 2 = 96(\text{分}).$$

4

$$6000 \div 2 + 600 = 3600(\text{包}),$$

$$6000 \div 2 - 600 = 2400(\text{包}),$$

原来东仓有棉花 3600 包,西仓有棉花 2400 包.

5

$$(10 + 6 - 4) \div 2 = 6$$

或

$$(10 + 6 + 4) \div 2 - 4 = 6,$$

得出个位数字为 6.

十位数字为

$$6 - 6 = 0,$$

百位数字为

$$10 - 6 = 4.$$

三位数为 406.

6 $(270 + 10 + 25 + 35) \div 4 = 85,$

$$85 - 10 = 75,$$

$$85 - 25 = 60,$$

$$85 - 35 = 50.$$

A、B、C、D 分别为 85、75、60、50.

练习题

1 $(9 + 5) \div 2 = 7, 9 - 7 = 2.$

两位数为 72.

2 王华的年龄是

$$(23 \times 2 - 30) \div 2 = 8(\text{岁}),$$

他爸爸

$$8 + 30 = 38(\text{岁}).$$

3 甲有

$$300 \div 2 + 60 = 210(\text{元}),$$

乙有

$$300 - 210 = 90(\text{元}).$$

4 第一筐原来有梨子

$$(76 + 10 \times 2 - 4) \div 2 = 46(\text{千克}).$$

第二筐原来有梨子

$$76 - 46 = 30(\text{千克}).$$

5 裤子

$$(415 - 75) \div 2 = 170(\text{元}).$$

外套

$$170 + 75 = 245(\text{元}).$$

6 小强

$$(42 + 10 - 6) \div 2 = 23(\text{岁}).$$

小花

$$42 - 23 = 19(\text{岁}).$$

7 在C港下客时,两船各有 $(623 + 34 - 57) \div 2 = 300(\text{人})$.
出发时,甲船有

$$300 - 34 = 266(\text{人}),$$

乙船有

$$300 + 57 = 357(\text{人}).$$

8 甲村种

$$(100 + 16 \times 2) \div 2 = 66(\text{公顷}),$$

乙村种

$$100 - 66 = 34(\text{公顷}).$$

9 (3)班有

$$(138 - 3 - 6 - 6) \div 3 = 41(\text{人}),$$

(2)班

$$41 + 6 = 47(\text{人}),$$

(1)班

$$47 + 3 = 50(\text{人}).$$

10 倒过后三桶油各重 $90 \div 3 = 30$ (千克).

原来甲桶重

$$30 + 12 - 5 = 37(\text{千克}),$$

乙桶重

$$30 + 13 - 12 = 31(\text{千克}),$$

丙桶重

$$30 - 13 + 5 = 22(\text{千克}).$$

11 步行往返共需

$$3 \times 2 - 1 = 5(\text{小时}).$$

12 两个数的差为 $200 \div 4 = 50$,

大数是

$$(200 + 50) \div 2 = 125,$$

小数是

$$200 - 125 = 75.$$

第20讲

倍数问题

随堂练习

1 弟弟种

$$26 \div (3 - 1) = 13(\text{棵}),$$

哥哥种

$$13 + 26 = 39(\text{棵}).$$

2 弟弟种

$$52 \div (3 + 1) = 13(\text{棵}),$$

哥哥种

$$13 \times 3 = 39(\text{棵}).$$

3 语文小组增加 14 人后,语文小组人数是数学小组的 3 倍,而且比数学小组多

$$26 + 14 = 40(\text{人}).$$

数学小组的人数为

$$(26 + 14) \div (3 - 1) = 20.$$

语文小组的人数为

$$20 + 26 = 46.$$

4 原来每月生产

$$360 \div (4 - 1) = 120(\text{台}).$$

现在每月生产

$$120 \times 4 = 480(\text{台}).$$

5 去年的 3 倍比去年养的小鸡多

$$4000 + 2000 = 6000(\text{只}),$$

所以去年养小鸡

$$6000 \div (3 - 1) = 3000(\text{只}),$$

今年养小鸡

$$3000 + 4000 = 7000(\text{只}).$$

6 甲袋倒入乙袋 6 千克后,甲袋比乙袋少

$$18 + 6 \times 2 = 30(\text{千克}).$$

这时乙袋是甲袋的 2 倍,所以甲袋有

$$30 \div (2 - 1) = 30(\text{千克}),$$

乙袋有

$$30 \times 2 = 60(\text{千克}).$$

原来甲袋有

$$30 + 6 = 36(\text{千克}),$$

乙袋有

$$60 - 6 = 54(\text{千克}).$$

练习题

1 第一缸取 15 条到第二缸后,第二缸有鱼

$$35 + 15 = 50(\text{条}).$$

这时第一缸有鱼

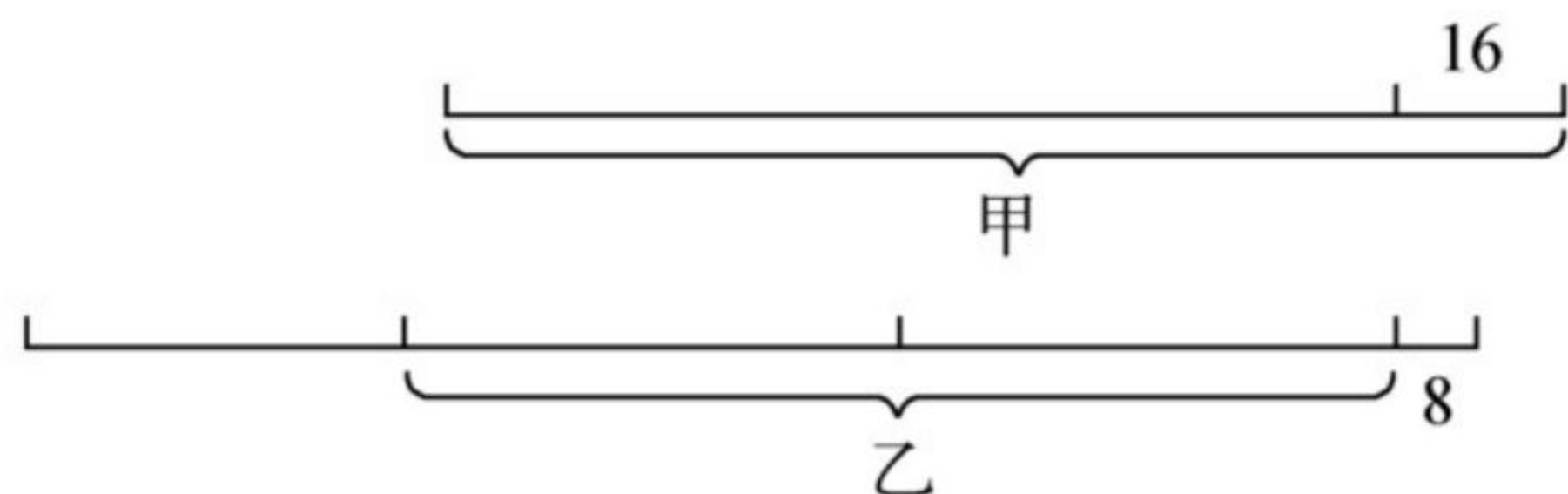
$$50 \div 2 = 25(\text{条}).$$

第一缸原有鱼

$$25 + 15 = 40(\text{条}).$$

2 如图,甲倒一半给乙后,乙增加了自己的一半又 $8 (= 16 \div 2)$ 千克. 这时乙桶有油 80 千克,所以原来乙的一半是

$$(80 - 8) \div (1 + 2) = 24(\text{千克}).$$



原来乙桶有油

$$24 \times 2 = 48(\text{千克}),$$

甲桶有油

$$48 + 16 = 64(\text{千克}).$$

3 剩下的苹果比梨子重

$$120 - 90 = 30(\text{千克}).$$

剩下梨子

$$30 \div (4 - 1) = 10(\text{千克}).$$

剩下苹果

$$30 + 10 = 40(\text{千克}).$$

卖出梨子

$$90 - 10 = 80(\text{千克}).$$

卖出苹果也是 80 千克.

4 大桶比小桶多水

$$85 - 5 = 80(\text{千克}).$$

小桶原有水

$$80 \div (3 - 1) = 40(\text{千克}).$$

大桶原有水

$$40 \times 3 = 120(\text{千克}).$$

5 如果甲给乙 100 个零件,那么甲的零件个数比乙少

$$100 \times 2 - 50 = 150(\text{个}),$$

这时乙的零件个数是甲的两倍,所以甲有

$$150 \div (2 - 1) = 150(\text{个}).$$

原来甲有零件

$$150 + 100 = 250(\text{个}),$$

乙有零件

$$250 - 50 = 200(\text{个}).$$

6 第一队比第三队多植树

$$20 - 5 = 15(\text{棵}).$$

第三队植树

$$15 \div (2 - 1) = 15(\text{棵}).$$

第二队植树

$$15 - 5 = 10(\text{棵}).$$

第一队植树

$$10 + 20 = 30(\text{棵}).$$

7 剩下的铁丝,第二根比第一根长

$$65 - 9 = 56(\text{厘米}),$$

第一根长

$$56 \div (3 - 1) = 28(\text{厘米}).$$

原来每根铁丝长

$$28 + 65 = 93(\text{厘米}).$$

8 如果每个人的年龄都扩大到原来的 2 倍,那么三人年龄的和是

$$94 \times 2 = 188.$$

如果甲再减少 5 岁,乙再减少 19 岁,那么三人年龄的和是

$$188 - 5 - 19 = 164(\text{岁}),$$

这时甲的年龄、乙的年龄都是原来丙的年龄.而这时丙的年龄是原来的两倍.所以这时甲、乙的年龄都是

$$164 \div (1 + 1 + 2) = 41(\text{岁}),$$

即原来丙的年龄是 41 岁.

甲原来的年龄是

$$(41 + 5) \div 2 = 23(\text{岁}).$$

乙原来的年龄是

$$(41 + 19) \div 2 = 30(\text{岁}).$$

9 小明比小华多

$$1 \times 2 = 2(\text{条}).$$

如果小华给小明 1 条鱼,那么小明比小华多

$$2 + 1 \times 2 = 4(\text{条}),$$

这时小华有鱼

$$4 \div (2 - 1) = 4(\text{条}).$$

原来小华有鱼

$$4 + 1 = 5(\text{条}).$$

原来小明有鱼

$$5 + 2 = 7(\text{条}).$$

10 $8 \div 4 \times 6 = 12$, 即 8 本算术本与 12 本语文本价钱相等. 所以 1 本语文本值

$$10 \times 100 \div (13 + 12) = 40(\text{分}),$$

1 本算术本值

$$40 \times 6 \div 4 = 60(\text{分}),$$

即 1 本语文本 4 角, 1 本算术本 6 角.

11 丙比甲多做

$$22 - 6 = 16(\text{道}).$$

所以甲做

$$16 \div (2 - 1) = 16(\text{道}),$$

丙做

$$16 \times 2 = 32(\text{道}),$$

乙做

$$16 - 6 = 10(\text{道}).$$

12 B 书架加上 36 本书时, 比 A 书架多

$$24 + 36 = 60(\text{本}).$$

所以 A 书架原有书

$$60 \div (3 - 1) = 30(\text{本}),$$

B 书架原有书

$$30 + 24 = 54(\text{本}).$$

第21讲

年龄问题

随堂练习

1 2年后儿子 $30 \div (6 - 1) = 6$ (岁).
儿子今年

$$6 - 2 = 4(\text{岁}),$$

爸爸今年

$$4 + 30 = 34(\text{岁}).$$

2 现在姐姐

$$(37 + 3) \div 2 = 20(\text{岁}),$$

妹妹

$$20 - 3 = 17(\text{岁}).$$

3 $5 + 3 + 2 = 10$, 即甲比乙大10岁.
乙现在

$$(10 + 4) \div (3 - 1) = 7(\text{岁}),$$

甲现在

$$7 + 10 = 17(\text{岁}).$$

4 年龄差为

$$(36 - 3) \div 3 = 11(\text{岁}).$$

小熊现在是

$$3 + 11 = 14(\text{岁}).$$

老熊现在是

$$14 + 11 = 25(\text{岁}).$$

5 老翁现在

$$(15 + 12 + 10 + 10 \times 3) \times 2 - 30 - 10 = 94(\text{岁}).$$

6 8年前芳芳是

$$[(8 + 8) \times (2 - 1) + 6] \div (24 - 2) = 1(\text{岁}),$$

现在芳芳

$$1 + 8 = 9(\text{岁}),$$

妈妈

$$1 \times 24 + 8 = 32(\text{岁}).$$

练习题

1 现在两人年龄的和是 $52 - 10 \times 2 = 32(\text{岁})$.

姐姐现在是

$$(32 + 6) \div 2 = 19(\text{岁}),$$

妹妹现在是

$$19 - 6 = 13(\text{岁}).$$

2 小芳现在是

$$24 \div (4 - 1) = 8(\text{岁}),$$

妈妈现在是

$$8 \times 4 = 32(\text{岁}).$$

3 10年后哥哥的年龄是

$$(23 + 12 - 9) \div 2 + 10 = 23(\text{岁}),$$

弟弟是

$$23 - (12 - 9) = 20(\text{岁}).$$

4 小张现在

$$(10 \times 2 + 2 - 2) \div (2 - 1) = 20(\text{岁}),$$

老王现在

$$20 \times 2 + 2 = 42(\text{岁}).$$

5 小华今年

$$(35 - 4 + 3 + 5 + 7) \div 2 = 23(\text{岁}),$$

小明今年

$$23 - 5 - 7 = 11(\text{岁}).$$

6 张健今年

$$[59 + 2 - 3 - (3 - 2) - 2] \div 5 = 11(\text{岁}),$$

王明

$$11 + 3 = 14(\text{岁}),$$

袁鸣

$$14 - 2 = 12(\text{岁}),$$

杨飞

$$11 + 2 = 13(\text{岁}),$$

李强

$$11 - 2 = 9(\text{岁}).$$

7 妹妹现在

$$(5 + 4 + 3) \div (4 - 1) = 4(\text{岁}),$$

姐姐现在

$$4 + 4 + 5 = 13(\text{岁}).$$

8 由第一句话,狮子年龄减去(狮、虎)年龄差的2倍后,正好是狮子年龄的一半.所以年龄差的2倍,也是狮子年龄的一半,即狮子年龄是年龄差的4倍.

老虎年龄是年龄差的 $3(=4-1)$ 倍.

由第二句话,狮子年龄的2倍加上年龄差是63岁,所以年龄差是

$$63 \div (2 \times 4 + 1) = 7.$$

狮子

$$7 \times 4 = 28(\text{岁}).$$

老虎

$$7 \times 3 = 21(\text{岁}).$$

9 乙打死蚊子

$$(49 - 9) \div (3 - 1) = 20(\text{只}),$$

甲打死蚊子

$$20 \times 3 = 60(\text{只}),$$

共打死蚊子

$$20 + 60 = 80(\text{只}).$$

10 乙栽

$$(25 + 6 \times 2) \div (2 - 1) + 6 = 43(\text{棵}),$$

甲栽

$$43 + 25 = 68(\text{棵}).$$

11 小吴年龄是小马 5 倍时, 小马 $(20 - 12) \div (5 - 1) = 2$ (岁),

$$12 - 2 = 10,$$

10 年前小吴年龄是小马的 5 倍.

12 小王、小张是

$$(90 + 2 - 5 + 1) \div 4 = 22 \text{(岁)},$$

小李

$$22 - 2 = 20 \text{(岁)},$$

小杨

$$22 + 5 - 1 = 26 \text{(岁)}.$$

第22讲

相遇问题

随堂练习

1 $80 \div (19 + 21) = 2$ (小时), 即 2 小时后相遇, 相遇地点 C 距 A 点

$$19 \times 2 = 38(\text{千米}).$$

2 乙每小时走

$$30 \div 6 - 3 = 2(\text{千米}).$$

3 自行车每小时比摩托车少走

$$120 \div 3 = 40(\text{千米}),$$

即自行车的速度是每小时

$$50 - 40 = 10(\text{千米}),$$

A、B 相距

$$(50 + 10) \times 3 = 180(\text{千米}).$$

又解 3 小时摩托车行

$$50 \times 3 = 150(\text{千米}),$$

自行车行

$$150 - 120 = 30(\text{千米}).$$

$$150 + 30 = 180(\text{千米}),$$

即 A、B 相距 180 千米.

习题详细解答

第 22 讲 相遇问题 / 83

4 第一次相遇时,两人所走距离的和等于 AB . 从出发到第二次相遇,两人所走距离的和是 $3 \times AB$. 因此每人所走距离也都是第一次走过距离的 3 倍,即小冬共走了 3×40 米. 他从 A 走到 B ,又返回走了 15 米.

A 、 B 的距离是

$$3 \times 40 - 15 = 105(\text{米}).$$

5 相遇时,甲比乙多走

$$3 \times 2 = 6(\text{千米}).$$

因此,从出发到相遇用了

$$6 \div (3 - 2) = 6(\text{小时}).$$

A 、 B 相距

$$(3 + 2) \times 6 = 30(\text{千米}).$$

6 狗跑了

$$600 \div (70 + 80) = 4(\text{分钟}).$$

跑了

$$400 \times 4 = 1600(\text{米}).$$

练习题

1 两人相遇,用

$$1200 \div (50 + 70) = 10(\text{分钟}).$$

AC 即甲行的距离是

$$50 \times 10 = 500(\text{米}).$$

2 两人从第一次相遇到第二次相遇,共行的路程是全程 AB 的 2 倍,所以甲所行的路程 $CB + BD$ 是

$$500 \times 2 = 1000(\text{米}).$$

从而 BD 是

$$500 + 1000 - 1200 = 300(\text{米}).$$

CD 是

$$1200 - 500 - 300 = 400(\text{米}).$$

3 设想同一天晚上 7:00, 一只老虎从山上跑到山下, 另一只老虎从山下跑到山上, 它们走同一条路. 因此, 两只老虎必在途中某处相遇. 这就表明题目中的老虎一定会在同样时刻经过同一个地点.

4 两人原来的速度和是

$$15\ 300 \div 51 = 300(\text{米} / \text{分}).$$

后来的速度和是

$$300 + 3 \times 2 = 306(\text{米} / \text{分}),$$

$$15\ 300 \div 306 = 50,$$

因此, 出发后 50 分钟两人相遇.

5 甲、乙两人每小时共行

$$40 \div 8 = 5(\text{千米}).$$

甲每小时比乙多行

$$3 \div 3 = 1(\text{千米}).$$

由和差问题公式知, 甲每小时行

$$(5 + 1) \div 2 = 3(\text{千米}),$$

乙每小时行

$$3 - 1 = 2(\text{千米}).$$

6 如果两人速度相同, 那么相遇的地点是中点 C . 每人每分钟都多走 3 米, 速度仍然相同, 相遇地点还是中点 C , 不会改变. 现在相遇地点改变了, 说明两人速度不同. 不妨设甲比乙快. 原来在

D 点相遇, 则甲比乙多行 $2 \times CD$ (如图). 设速度增加后在 E 点相遇, 则甲比乙多行 $2 \times CE$. 原来相遇用 51 分钟, 后来相遇用 50 分钟, 少了 1 分钟.



甲比乙多走的距离等于时间 \times 速度差. 现在速度差不变, 而时间减少了, 所以甲比乙多走的距离也减少了, 即 E 比 D 更靠近 C . 甲现在 50 分钟比原来 51 分钟少走 30 米. 因此原来 50 分钟比 51 分钟少走

$$30 + 3 \times 50 = 180(\text{米}),$$

即甲原来速度是 180 米/分.

同样, 乙原来速度是

$$3 \times 50 - 30 = 120(\text{米} / \text{分}).$$

7 从出发到相遇时, 甲比乙多行

$$36 \times 2 = 72(\text{千米}),$$

甲每小时比乙多行 12 千米, 所以甲共行

$$72 \div 12 = 6(\text{小时}).$$

其中 $(6 - 4 =) 2$ 小时行 36 千米. 甲车的速度是

$$36 \div 2 = 18(\text{千米} / \text{时}).$$

8 (1) 甲的速度是乙的一半, 所以乙行的路程是甲的 2 倍. 乙比甲多行

$$3 \times 2 = 6(\text{千米}),$$

即甲行的 $(2 - 1 =) 1$ 倍是 6 千米. 甲的速度是 6 千米/时.

乙的速度是

$$6 \times 2 = 12(\text{千米} / \text{时}).$$

AB 是

$$(6 + 12) \times 1 = 18(\text{千米}).$$

(2) 当乙到达 A 时,甲到达中点,离 B 还有

$$18 \div 2 = 9(\text{千米}).$$

9 货船 12 小时的行程客船 4 小时就走完了,所以客船速度是货船的

$$12 \div 4 = 3(\text{倍}).$$

货船还需

$$12 \times 3 = 36(\text{小时})$$

才能到达 A.

10 第一次相遇需

$$3500 \div (180 + 170) = 10(\text{分钟}).$$

从第一次相遇地点到第二次相遇地点,两人共行 2 个全程,所用时间也应是共行 1 个全程的 2 倍,即

$$10 \times 2 = 20(\text{分钟}).$$

由于休息 3 分钟,所以第一次相遇后,又经过

$$20 + 3 = 23(\text{分钟})$$

第二次相遇.

11 慢车 6 小时行

$$240 \times 6 = 1440(\text{千米}).$$

快车行 $6 - 1 = 5$ (小时),行

$$380 \times 5 = 1900(\text{千米}).$$

两车共行全程的 2 倍,所以 AB 长是

$$(1440 + 1900) \div 2 = 1670(\text{千米}).$$

12 相遇时,甲比乙多行

$$3 \times 2 = 6(\text{千米}).$$

甲每小时比乙多行

$$20 - 18 = 2(\text{千米}).$$

所以甲行的时间是

$$6 \div 2 = 3(\text{小时}).$$

这也是乙行的时间. AB 长

$$(20 + 18) \times 3 = 114(\text{千米}).$$

第23讲

追及问题

随堂练习

1 乙3小时走

$$4 \times 3 = 12(\text{千米}),$$

$$12 \div (6 - 4) = 6,$$

甲出发后6小时可以追上乙。

2 甲每天走

$$900 \div 15 = 60(\text{千米}).$$

乙每天走

$$900 \div 12 = 75(\text{千米}).$$

乙追上甲,用

$$60 \times 2 \div (75 - 60) = 8(\text{天}),$$

乙走了

$$75 \times 8 = 600(\text{千米}).$$

3 甲厂的原料比乙厂多

$$120 - 96 = 24(\text{吨}),$$

每天比乙厂多用

$$15 - 9 = 6(\text{吨}),$$

$$24 \div 6 = 4,$$

习题详细解答

第23讲 追及问题 / 89

即 4 天后两厂剩下的原料一样多.

4 米老鼠行

$$(56 + 112) = 168(\text{米}),$$

用

$$168 \div 3 = 56(\text{秒}).$$

唐老鸭每秒行

$$112 \div 56 = 2(\text{米}).$$

5 猎犬每小时比野兔多跑

$$22 - 18 = 4(\text{千米}).$$

要追上在它前面 2 千米的野兔只需半小时,即 30 分钟.

6 甲、乙两人速度的和是

$$40 \div 8 = 5(\text{千米 / 时}),$$

速度的差是

$$5 \div 5 = 1(\text{千米 / 时}).$$

甲每小时走

$$(5 + 1) \div 2 = 3(\text{千米}),$$

乙每小时走

$$3 - 1 = 2(\text{千米}).$$

练习题

1 骑自行车 30 分钟比步行 30 分钟多行

$$18 \times 30 = 540(\text{米}),$$

即在剩下的

$$60 - 30 = 30(\text{分钟})$$

步行了 540 米,所以家到学校的距离是

$$540 \times (60 \div 30) = 1080(\text{米}).$$

2 甲 3 小时追上

$$(4 - 3) \times 3 = 3(\text{千米}),$$

还差

$$9 - 3 = 6(\text{千米}).$$

再经过

$$6 \div (5 - 3) = 3(\text{小时}),$$

追上乙.

3 妹妹 5 分钟走 45×5 米.

姐姐追上妹妹需要

$$45 \times 5 \div (50 - 45) = 45(\text{分钟}).$$

即姐姐到学校要 45 分钟. 学校距家

$$50 \times 45 = 2250(\text{米}).$$

4 甲比乙多

$$180 - 156 = 24(\text{元}).$$

甲每天比乙多用

$$15 - 9 = 6(\text{元}),$$

$$24 \div 6 = 4,$$

4 天后,两人剩下的钱数相等.

5 甲船 3 小时行

$$16 \times 3 = 48(\text{千米}).$$

乙船 12 小时比甲船多行 48 千米,每小时多行

$$48 \div 12 = 4(\text{千米}).$$

乙船速度是每小时

$$16 + 4 = 20(\text{千米}).$$

6 小王速度是小李的

$$10 \div 5 = 2(\text{倍}).$$

因此,小李行 180 千米时,小王行

$$180 \times 2 = 360(\text{千米}).$$

两城相距

$$180 + 360 = 540(\text{千米}).$$

7 甲每小时比乙多行

$$10 \div 10 = 1(\text{千米}).$$

甲、乙速度的和是每小时

$$400 \div 16 = 25(\text{千米}).$$

甲每小时行

$$(25 + 1) \div 2 = 13(\text{千米}).$$

乙每小时行

$$13 - 1 = 12(\text{千米}).$$

8 甲每分钟比乙多走

$$40 \div 2 = 20(\text{米}).$$

甲、乙速度的和是每分钟

$$400 \div 2 = 200(\text{米}).$$

甲的速度是每分钟

$$(200 + 20) \div 2 = 110(\text{米}).$$

乙的速度是每分钟

$$110 - 20 = 90(\text{米}).$$

9 甲返回时间为 2 小时, 比乙多行 4 千米. 所以甲每小时比乙多行

$$4 \div 2 = 2(\text{千米}).$$

甲、乙速度的和为每小时

$$80 \div 2 = 40(\text{千米}).$$

所以甲的速度为每小时

$$(40 + 2) \div 2 = 21(\text{千米}).$$

乙的速度为每小时

$$21 - 2 = 19(\text{千米}).$$

10 慢车从出发到相遇共行

$$80 \times 12 = 960(\text{千米}),$$

快车共行

$$120 \times (12 - 1) = 1320(\text{千米}).$$

慢车、快车相遇时, 它们共行的距离是 A、B 的 2 倍, 所以 A、B 的距离是

$$(960 + 1320) \div 2 = 1140(\text{千米}).$$

11 甲每小时比乙多行

$$50 - 40 = 10(\text{千米}).$$

甲在乙前 20 千米表明甲已走

$$20 \div 10 = 2(\text{小时}).$$

甲共行

$$50 \times 2 = 100(\text{千米}).$$

丙 2 小时行

$$500 - 280 - 100 = 120(\text{千米}).$$

所以丙的速度是每小时

$$120 \div 2 = 60(\text{千米}).$$

12 甲的速度是每小时

$$1200 \div 10 = 120(\text{千米}),$$

乙的速度是每小时

$$1200 \div 15 = 80(\text{千米}).$$

乙 2 小时行

$$80 \times 2 = 160(\text{千米}),$$

甲追上乙需

$$160 \div (120 - 80) = 4(\text{小时}),$$

即甲要走

$$120 \times 4 = 480(\text{千米})$$

才能追上乙.

又解 甲走 10 小时的路,乙要走 15 小时.所以甲走 $2(=10 \div 5)$ 小时的路,乙要走 $3(=15 \div 5)$ 小时,比甲多 1 小时.

因此,甲走 $2 \times 2 = 4$ 小时的路,乙比甲多用 $1 \times 2 = 2$ 小时.即乙先走 2 小时,甲可用 4 小时追上乙.甲要走

$$1200 \div 10 \times 4 = 480(\text{千米}).$$

第24讲

应用题 (一)

随堂练习

1 小李、小赵共有彩球

$$34 + 40 - 36 = 38(\text{个}).$$

2 甲做 $12 - 8 = 4$ (天) 的活, 乙需做 8 天. 所以甲做 12 天的活, 乙需做

$$12 \div 4 \times 8 = 24(\text{天}).$$

3 $6 - 2 = 4$ (千克), $7 - 5 = 2$ (千克), 即买 4 千克香蕉的钱可买 2 千克梨. 从而买 1 千克梨的钱可买

$$4 \div 2 = 2(\text{千克})$$

香蕉.

$$6 + 5 \times 2 = 16(\text{千克}),$$

即全买香蕉, 可买 16 千克.

4 爸爸比儿子大

$$180 - 156 = 24(\text{岁}).$$

爸爸年龄的 $7(=3+4)$ 倍与儿子年龄的 $7(=4+3)$ 倍的和是

$$180 + 156 = 336(\text{岁}).$$

所以爸爸年龄与儿子年龄的和是

$$336 \div 7 = 48(\text{岁}).$$

爸爸是

$$(48 + 24) \div 2 = 36(\text{岁}).$$

5 英语考了

$$94 \times 3 - 95 \times 2 = 92(\text{分}).$$

6 两数的和就是 200, 差是

$$200 \div 4 = 50,$$

所以大数是

$$(200 + 50) \div 2 = 125,$$

小数是

$$125 - 50 = 75.$$

练习题

1 一半水果重

$$250 - 145 = 105(\text{千克}),$$

所以水果重

$$105 \times 2 = 210(\text{千克}),$$

筐重

$$250 - 210 = 40(\text{千克}).$$

2 甲厂抽出 50 人, 乙厂加入 40 人后, 乙厂比甲厂多

$$50 + 40 = 90(\text{人}).$$

这时乙厂人数是甲厂的 2 倍, 所以这时甲厂人数是

$$90 \div (2 - 1) = 90(\text{人}).$$

原来甲厂有

$$90 + 50 = 140(\text{人}),$$

乙厂也有 140 人.

3 丙比甲多捉

$$22 - 6 = 16(\text{条}).$$

丙捉的是甲捉的 2 倍, 所以甲捉

$$16 \div (2 - 1) = 16(\text{条}).$$

丙捉

$$16 \times 2 = 32(\text{条}),$$

乙捉

$$16 - 6 = 10(\text{条}),$$

共捉

$$16 + 32 + 10 = 58(\text{条}).$$

4 甲做 $18 - 12 = 6(\text{天})$, 相当于乙做 12 天, 所以乙独做需要

$$18 \div 6 \times 12 = 36(\text{天}).$$

5 原计划 6 天看

$$80 \times 6 = 480(\text{页}).$$

现在每天多看 $(100 - 80)$ 页, 多看 480 页需

$$480 \div (100 - 80) = 24(\text{天}).$$

这本书共有

$$100 \times 24 = 2400(\text{页}).$$

6 前 5 天共做题

$$21 \times 5 = 105(\text{道}),$$

还剩

$$265 - 105 = 160(\text{道}).$$

每天做 40 道需

$$160 \div 40 = 4(\text{天}).$$

共用

$$5 + 4 = 9(\text{天}).$$

7 男生比女生多

$$80 - 76 = 4(\text{人}),$$

男生、女生共

$$(80 + 76) \div (2 + 1) = 52(\text{人}).$$

男生有

$$(52 + 4) \div 2 = 28(\text{人}),$$

女生有

$$28 - 4 = 24(\text{人}).$$

8 小明比小李多

$$21 - 13 = 8(\text{元}).$$

小明剩下的钱比小李剩下的钱多 8 元,又是小李剩下的钱的 2 倍,所以小李剩

$$8 \div (2 - 1) = 8(\text{元}).$$

小李用去

$$13 - 8 = 5(\text{元}),$$

小明也用去 5 元.

9 第十次考了

$$78 \times 10 - 80 \times 9 = 60(\text{分}).$$

10 乙原来比丙多

$$5 \times 2 - 3 = 7(\text{枝}).$$

11 买4本书即买1本书又买4本本子,比买3本本子多花10元,所以买1本书和1本本子共需10元.

12 2个纸箱与1个木箱装的一样多,所以6个纸箱与 $(6 \div 2 \times 1 =)$ 3个木箱装的一样多.每个木箱装球鞋

$$300 \div (2 + 3) = 60(\text{双}).$$

每个纸箱装球鞋

$$60 \div 2 = 30(\text{双}).$$

第25讲

应用题(二)

随堂练习

1 第十次卖出前有

$$30 \times 2 = 60(\text{个}).$$

第九次卖出前有

$$(60 - 20) \times 2 = 80(\text{个}).$$

第八次卖出前有

$$(80 - 20) \times 2 = 120(\text{个}).$$

第七次卖出前有

$$(120 - 20) \times 2 = 200(\text{个}).$$

依此类推,可得下表

十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
60	80	120	200	360	680	1320	2600	5160	10 280

即原有玩具 10 280 个.

2 和是两位数,而且是 23 的倍数.而 23 的倍数只有 23、46、69、92 是两位数.三个连续数的和又是中间那个数的 3 倍.上面的数中只有 69 符合要求. $69 = 3 \times 23$, 中间那个数是 23,另两个数是 22、24.

3 乙取走球

$$46 \times 3 = 138(\text{个}).$$

因为

$$138 = 36 + 42 + 60,$$

所以乙取走的盒子分别装有 36、42、60 个球. 丙取走的盒子分别装有 33、40、53、58 个球.

4 小芳今年

$$10 \times 3 \div 5 = 6(\text{岁}).$$

5 如果用 5 小时追上乙车, 甲车行了

$$60 \times 5 = 300(\text{千米}).$$

如果用 3 小时追上乙车, 甲车行了

$$70 \times 3 = 210(\text{千米}).$$

前一种情况多行

$$300 - 210 = 90(\text{千米}),$$

这也就是乙车在

$$5 - 3 = 2(\text{小时})$$

所行的路程. 因此乙的速度是每小时

$$90 \div 2 = 45(\text{千米}).$$

6 12 支“小梦龙”与 9 支“可爱多”共用

$$24 \times 3 = 72(\text{元}),$$

12 支“小梦龙”与 20 支“可爱多”共用

$$29 \times 4 = 116(\text{元}).$$

$$20 - 9 = 11(\text{支}),$$

11 支“可爱多”用去

$$116 - 72 = 44(\text{元}).$$

每支“可爱多”

$$44 \div 11 = 4(\text{元}).$$

每支“小梦龙”

$$(24 - 3 \times 4) \div 4 = 3(\text{元}).$$

练习题

1 9本共 $3 \times 9 = 27(\text{角})$. 而

$$5 \times 5 = 25, 5 \times 6 = 30 = 27 + 3,$$

$$5 \times 7 = 35 = 27 + 8 = 27 + 2 \times 4,$$

所以至少应给7张5角,找出4张2角.

2 总人数是8的倍数加5,也是5的倍数加8,即总人数是8的倍数加13,也是5的倍数加13. 因此,总人数是40的倍数加13. 总人数不足100人,所以至多有同学

$$40 \times 2 + 13 = 93(\text{名}).$$

3 10年前全家年龄的和是51岁. 从那时到现在,年龄的和增加了

$$80 - 51 = 29(\text{岁}).$$

其中父母各增加10岁,女儿只增加

$$29 - 2 \times 10 = 9(\text{岁}).$$

说明10年前女儿尚未出生,女儿是9年前出生的,现在9岁.

4 12年后教练增加12岁,而两名队员各增加12岁. 所以现在教练比两名队员年龄的和大

$$2 \times 12 - 12 = 12(\text{岁}).$$

教练的年龄是

$$(100 + 12) \div 2 = 56(\text{岁}).$$

5 4 加上两人年龄差等于年轻者的年龄,再加上年龄差等于年长者的年龄.最后再加一个年龄差等于 61 岁.所以两人的年龄差是

$$(61 - 4) \div 3 = 19(\text{岁}),$$

年轻者现在是

$$19 + 4 = 23(\text{岁}).$$

6 哥哥年龄是弟弟年龄时,哥哥年龄是弟弟的 3 倍.所以年龄差是那时弟弟年龄的

$$3 - 1 = 2(\text{倍}).$$

弟弟现在年龄是那时年龄的 3 倍.哥哥现在的年龄是弟弟那时年龄的

$$3 + 2 = 5(\text{倍}).$$

弟弟的年龄是哥哥现在的年龄时,哥哥的年龄是弟弟在上述时间(哥哥年龄是弟弟年龄时)年龄的

$$5 + 2 = 7(\text{倍}).$$

所以弟弟现在的年龄是

$$48 \div (7 + 5) \times 3 = 12(\text{岁}).$$

7 2012 年,父母共

$$70 + (12 - 9) \times 2 = 76(\text{岁}).$$

姐、弟共

$$16 + (12 - 9) \times 2 = 22(\text{岁}).$$

弟弟年龄的 4 倍加姐姐年龄的 3 倍,即父母年龄和 76.所以 2012 年姐姐年龄是

$$22 \times 4 - 76 = 12(\text{岁}).$$

弟弟

$$22 - 12 = 10(\text{岁}).$$

父亲

$$10 \times 4 = 40(\text{岁}).$$

$$(40 - 12) \div (2 - 1) = 28(\text{岁}).$$

即姐姐 28 岁时,父亲年龄是姐姐的 2 倍.

$$28 - 12 + 2012 = 2028(\text{年}),$$

即 2028 年父亲年龄是姐姐的 2 倍.

8 两船共行驶了

$$418 + 36 \times 2 = 490(\text{千米}),$$

从出发到相遇用了

$$490 \div (34 + 36) = 7(\text{小时}).$$

9 相遇时乙比甲多行

$$12 \times 2 = 24(\text{千米}),$$

所以已经行了

$$24 \div 4 = 6(\text{时}).$$

甲的速度是

$$(60 - 12) \div 6 = 8(\text{千米 / 时}).$$

10 因为交流活动时间相同,可以认为两人到达后立即返回,仍在离小华学校 400 米处相遇.两人共行这段路程的 3 倍.所以小明共行

$$800 \times 3 = 2400(\text{米}),$$

两个学校相距

$$2400 - 400 = 2000(\text{米}).$$

11 两车速度每小时相差

$$108 - 90 = 18(\text{千米}),$$

1 秒相差

$$18 \times 1000 \div 60 \div 60 = 5(\text{米}).$$

5 秒相差

$$5 \times 5 = 25(\text{米}),$$

即鸣笛时两车相距 25 米.

12 (1) 由王老师跑步 1000 米, 散步 1600 米, 共用 25 分钟, 可得王老师跑步 $1000 \times 2 = 2000(\text{米})$, 散步 $1600 \times 2 = 3200(\text{米})$, 共用

$$25 \times 2 = 50(\text{分}).$$

另一方面, 王老师跑步 2000 米, 散步 800 米, 共用 20 分钟. 因此, 王老师散步

$$3200 - 800 = 2400(\text{米}),$$

用

$$50 - 20 = 30(\text{分}).$$

王老师散步的速度为

$$2400 \div 30 = 80(\text{米} / \text{分});$$

跑步的速度为

$$1000 \div (25 - 1600 \div 80) = 200(\text{米} / \text{分}).$$

(2) 王老师散步 800 米所用的时间为

$$800 \div 80 = 10(\text{分}).$$

专题

1

巧算

运算应注意技巧,才能算得快.

这里只讨论加减法的运算技巧.

例1 $7+8+8+7+9+11=?$

分析 根据数的特点,适当添上括号.

解 原式 $= (7+8) + (8+7) + (9+11)$
 $= 15 + 15 + 20 = 50.$

评注 这是利用“结合律”.

上述过程,不必也不应写出,应当全用心算完成.我们写出这些过程,是为了说明如何进行心算.

例2 $1+2+\cdots+99+100+99+\cdots+2+1=?$

分析 注意配对.

解 原式 $= (1+99) + (2+98) + \cdots + (99+1) + 100$
 $= 100 \times 100 = 10\ 000.$

评注 如果套用等差数列的求和公式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(1+100) \times 100}{2} + \frac{(1+99) \times 99}{2} \\ &= 5050 + 4950 \\ &= 10\ 000, \end{aligned}$$

虽然也能得出结果,却不及上面的解法简单、快捷.学数学最重要的是发挥创造性,即使有公式,也应当灵活运用.不要硬套公式.

例3 $2568+27+16-27+31-(568+31)=?$

分析 注意抵消,即被减数与减数相同时,结果为0.

解 原式 $= 2568+16+31-568-31 = 2000+16 = 2016.$

评注 当然应用心算直接得出答案.

例 4 $1+2+3+4+5+11+12+13+14+15+21+22+23+24+25+\cdots+91+92+93+94+95=?$

分析 可将个位与十位分开加.

解 原式 $= (1+2+3+4+5) \times 10 + (10+20+\cdots+90) \times 5$
 $= 150 + 450 \times 5 = 150 \times 6 = 2400.$

评注 “乘 15”可改为“加一半,再添 0”.即 160×15 可改为 $(160+80) \times 10 = 2400$. 这“加一半”比“乘 15”更容易心算.

例 5 计算:

(1) $78+76+81+82+77+80+79+83$;

(2) $998+1413+9989+548-164-236$.

分析 (1) 注意配对;(2) 注意凑整.

解 (1) 原式 $= (79+80) \times 4 = 160 \times 4 - 4 = 640 - 4 = 636$.

(2) 原式 $= (1000-2) + 1413 + (10\ 000-11) + 548$
 $- (164+236)$
 $= 11\ 000 + 1400 + 548 - 400$
 $= 12\ 548.$

评注 (1) 运用交换律,可使原式成为 8 个连续整数的和.

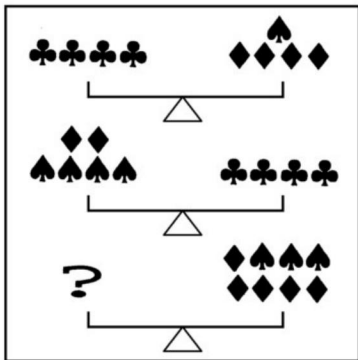
(2) 用心算或用草稿纸直接得出答案.

专题 2

简单推理

推理问题,需要弄清题意,仔细分析,还要用简明的语言或文字给出解答.

例 1 如图前两个天平平衡,要使第三个天平也平衡,左端要放几张梅花?



分析与解 我们先估计一下.放 4 张梅花显然不够(第三个天平右边的黑桃、方块均多于第一个天平).放 8 张梅花又太多了:将前两个天平的梅花合并,一共 8 张.相当于将方块、黑桃也合并,即 5 张黑桃、6 张方块合在一起,才等于 8 张梅花.合并后,与第三个天平相比,黑桃多出 $2(=5-3)$ 张、方块多出 $1(=6-5)$ 张.

从第二个天平看出,2 张黑桃、1 张方块合起来,正好是 2 张梅花(左、右各取一半的牌).于是从 8 张梅花中去掉 2 张,即在第三个天平的左边放 6 张梅花,两边正好平衡.

评注 这类问题与等式(方程)的变形有关.

有兴趣的读者可参看《训练逻辑思维的游戏》(盖尔著,丁丽梅、丁大刚译,世界图书出版公司,2007 年出版).

例 2 图 1 是 4×4 的正方形. 要在每个小方格中填入 1, 2, 3, 4 中的一个, 使得每一行、每一列, 这 4 个数字都恰好出现一次, 而且符合图 2 的要求, 即在相关的区域内施行所标的运算(+或-), 结果是图中所标的数. 例如左上方, 两个数相减, 差应当为 1. 右下方 3 个数相加, 和应为 8, 等等.

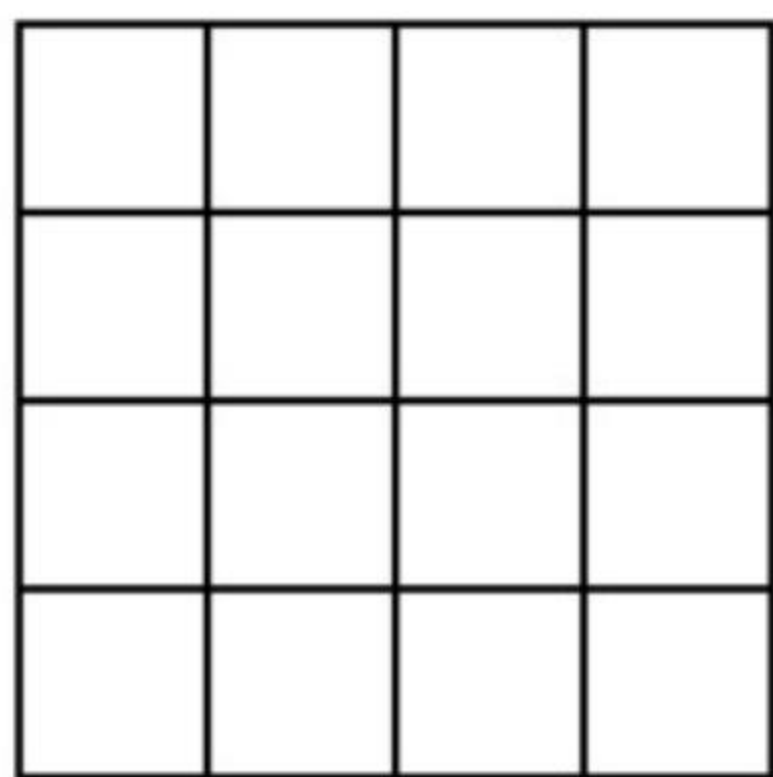


图 1

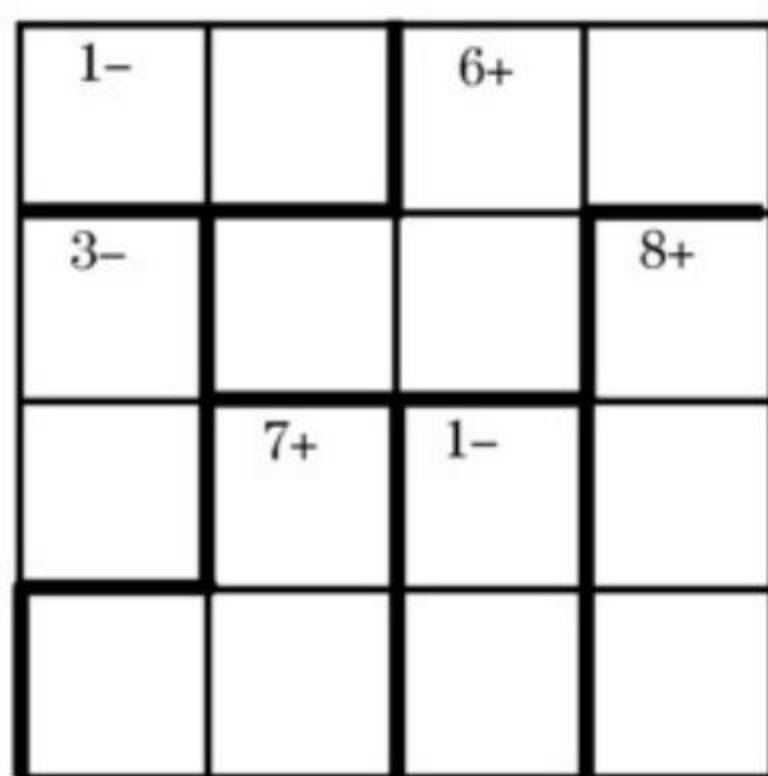


图 2

分析与解 首先, 右边的第 4 列 4 个数的和是

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

所以右上角的方格应填 $2 (= 10 - 8)$.

这个 2 与其他 3 个数的和是 6. 所以其他 3 个数是 1, 1, 2. 并且一个 1 在这个 2 的旁边, 另一个 1 在第二行第二列. 第二行第三列是 2.

左边有两个数的差是 3. 这两个数只能是 1 与 4. 由于第二行已经有 1, 所以第二行第一列是 4, 第三行第一列是 1.

接下去, 第二行第四列是 3, 第一行第一列是 3, 第一行第二列是 4, 第四行第一列是 2, 第三行第二列是 2, 第四行第二列是 3, 第三行第三列是 3, 第四行第三列是 4.

最后答案如图 3.

评注 这类问题并不困难, 多试几次一定能成功.

有兴趣的读者可参见《聪明格》(宫本

3	4	1	2
4	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	1

图 3

哲也著,中译本已由华东师范大学出版社出版)。

例3 4支球队,每两队比赛1场. 每场胜队得3分,负队得0分,平各得1分. 已知赛完各队的得分分别为2、3、4、5. 问第4名负于哪个队?

分析与解 第1名得分最高(得5分),似乎第4名应当负于第1名. 但仔细分析,结论却并非如此. 每个队赛了3场. 所以得5分的队,3场的分数是3,1,1(否则,和不会是5);得4分的队,3场的分数是3,1,0;得2分的队,3场的分数是1,1,0. 得3分的队,则有两种可能:3,0,0或者1,1,1. 需要研究一下:这两种可能都存在呢? 还是只有一种可能,是哪一种可能?

由于每个平局产生两个1,所以在上面各队各场的分数中,1的总个数是偶数. 因此,得3分的队,3场的分数只能是1,1,1.

得4分的队胜了1场(有1个3分). 它胜哪个队呢? 只能胜得2分的队. 因为只有两个队输过,即得4分的队与得2分的队. 得4分的队当然不能胜自己,只能胜得2分的队. 换句话说,第4名负于第2名.

评注 不难进一步推出第1名胜第2名,第2名胜第4名,其余的都是平局.

本题是一道说理题. 理由要充足、清楚. 说法则可以多种多样,不一定完全相同.

本题还可以用图来说明,更为直观. 方法如下:

如图4,用4个点A、B、C、D分别表示得分为5、4、3、2的4个队.

因为 $5=3+1+1$,所以A队胜1场、平2场. 由A画出一条带有箭头的线,表示A胜了箭头指向的队,又画出两条不带箭头的线,表示A与其他两队赛平.

根据上面所说,C队三场皆平. 所以C与A之间的线是没有箭头的. 而且C还引出2条没有箭头的线.

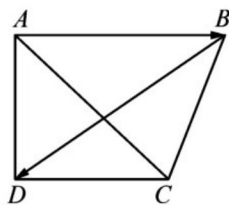


图4

因为 $4=3+1+0$, 所以图 4 中两条没有箭头的线交汇在 D , 而由 A 引出的有箭头的线指向 B . 最后, B 还引出一条有箭头的线指向 D . 即第 4 名 D 负于第 2 名 B .

例 4 99 只筐. 每只中有苹果和桔子, 但各筐中苹果的重量不一定相同, 桔子的重量也不一定相同. 其中是否有 50 筐, 这 50 筐中苹果的重量超过一半, 桔子的重量也超过一半?

分析与解 先取出苹果最重的一筐.

其余的 98 筐, 按照苹果的重量由大到小排成一列. 然后将它们分成两组:

排在 $1, 3, \dots, 97$ 的筐是第一组.

排在 $2, 4, \dots, 98$ 的筐是第二组.

如果第一组 49 筐中, 桔子总重量不比第二组重, 那么将先取出的一筐加入第二组. 这 50 筐中, 桔子总重量当然超过一半. 而且由于最先取出的一筐, 苹果最重, 所以其中苹果的重量不少于第 1 筐(即排在第 1 的筐). 而第 2 筐苹果重量不少于第 3 筐, \dots , 第 96 筐苹果重量不少于第 97 筐. 因此, 这 50 筐中, 苹果的总重量也超过一半.

如果第一组 49 筐中, 桔子总重量比第二组重, 那么将先取出的一筐加入第一组. 这 50 筐满足要求.

评注 本题看似简单, 却并不容易. 关键在如何能同时满足苹果、桔子两方面的要求.

例 5 有 8 个密码, 都是由 3 个字母组成的. 相同字母代表相同的数字, 不同字母代表不同的数字. 这 8 个密码是

WNX、RWQ、SXW、XNS、PST、NXY、QWN、TSX.

已知其中有 4 个密码分别代表

571、439、286、837.

请破译这 8 个密码.

分析与解 837 与 439, 这一对的中间数都是“3”, 此外没有相

同的数字.

看 8 个未知密码,中间字母相同的有 4 对——

WNX 与 XNS

QWN 与 RWQ

NXY 与 SXW

PST 与 TSX

由于第一对、第二对、第四对除了中间字母相同外,还有相同的字母,因此,837 与 439 只能是第三对——NXY 与 SXW.

又由于在 4 个已知密码中,“7”、“3”、“8”都在密码的中间出现过,而在 8 个未知密码中,中间的字母只有“N”、“W”、“X”、“S”,所以, $7 \neq Y$.

由此可知:

$NXY = 439$, $SXW = 837$, $S = 8$, $X = 3$, $W = 7$, $N = 4$,
 $Y = 9$, $WNX = 743$, $XNS = 348$.

又因为 $W = 7$,而 $1 \neq N$,所以, $RWQ = 571$, $R = 5$, $Q = 1$,
 $QWN = 174$.

最后,因为 $6 \neq X$,所以, $PST = 286$, $TSX = 683$.

评注 这类问题需要仔细观察,根据所给的条件,找到“突破口”.

首先要找出 8 个未知密码与 4 个已知密码有什么特征,又有什么联系.

在众多特征与联系中,要抓住关键所在,即: 837 与 439 这一对已知密码.

专题 3

幻方、数阵图

三阶幻方,每行的和,每列的和,每条对角线的和都相等.

记每条线(行、列或对角线)的和为 s ,幻方中央的数为 a . 三阶幻方有以下性质:

1. $3 \times a = s$.

这是因为两条对角线与第二列,合在一起是 3 个 s . 其中 a 出现了 3 次,第一行、第三行的数各出现 1 次,合起来是 $3 \times a$ 再加 2 个 s . 所以 $3 \times a$ 正好是 $1(=3-2)$ 个 s .

2. 在每一条过 a 的线上, a 是其他两个数的平均数.

这是因为每条线上 3 个数的和是 s ,也就是 $3 \times a$,所以另两个数的和是 $2 \times a$,即 a 是另两个数的平均数.

3. 幻方中 3 个不同行也不同列的数中,对角线上的数是其他两个数的平均数.

如图,过 d 的对角线与第一行,合起来是 2 个 s . 第二列与第三列合起来也是 2 个 s . 两者相等. 去掉相同的数,就得到 2 个 d 与 $b+c$ 相等,即 d 是 b 、 c 的平均数.

d		
		b
	c	

例 1 下图是一个三阶幻方,已填好三个数. 请填出其他的数.

		64
	70	53

分析 利用上面所说的性质.

解 由性质 3, 左上角应填

$$(64 + 70) \div 2 = 67.$$

由性质 2, 中央的数是

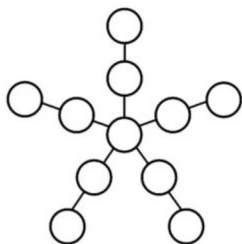
$$(67 + 53) \div 2 = 60.$$

每一行的和是 $60 \times 3 = 180$, 每一列的和也是 180. 这就不难填出其他各数, 如图所示.

67	50	63
56	60	64
57	70	53

评注 在三阶幻方的填写中, 上述性质经常用到.

例 2 将 1~11 填入图中, 使每条线上 3 个数的和都相等.

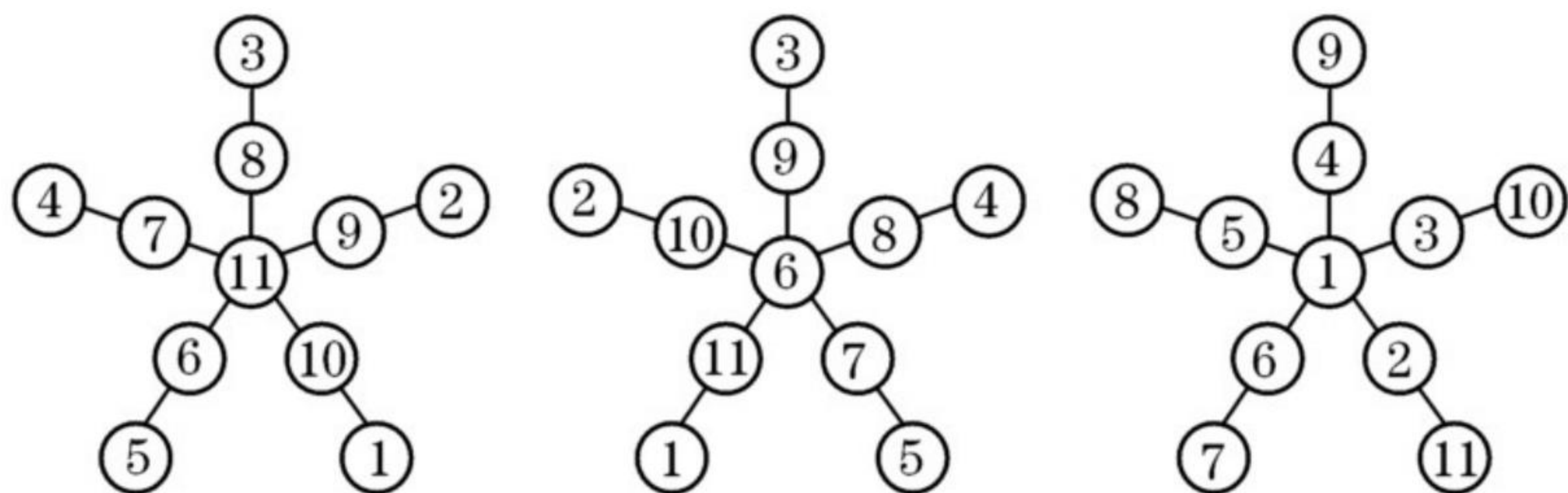


分析 去掉中央的数, 其余 10 个数可以分成 5 组, 每组 2 个数的和相等. 如果中央的数是 11, 那么其余 10 个数的和 $1 + 2 + \dots + 10 = 55$, 每组 2 个数的和是 $55 \div 5 = 11$.

如果将 11 换成 6, 那么其余 10 个数的和增加了 $5 (= 11 - 6)$, 每组 2 个数的和是 $12 (= 11 + 5 \div 5)$.

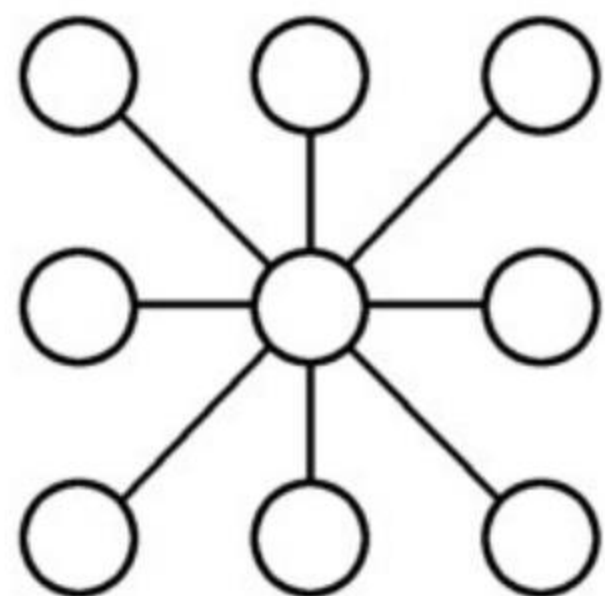
如果将 11 换成 1, 那么其余 10 个数的和增加 10, 每组 2 个数的和是 13.

解 有 3 种填法:



评注 中央的数只能是 11、6、1，不能是其他的数。因为换成其他的数，外围 10 个数的和比 55 多出的部分不是 5、10，不能被 5 整除，所以不能分成和相等的 5 组。

例 3 将 26, 27, 28, 36, 37, 38, 46, 47, 48 这 9 个数填入圈中，使每条线上 3 个数的和都是 111。



分析 4 条线，每条线上 3 个数的和是 111，因此 4 条线的总和是 4×111 。其中中央的数出现 4 次，其余的数各出现 1 次。

解 中央的数是

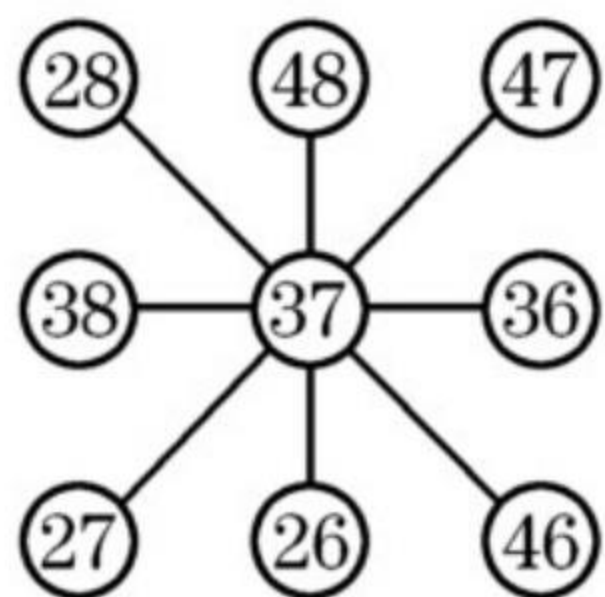
$$[4 \times 111 - (26 + 27 + 28 + 36 + 37 + 38 + 46 + 47 + 48)] \div 3 = 111 \div 3 = 37.$$

于是，每条线上其他 2 个数的和是

$$111 - 37 = 2 \times 37.$$

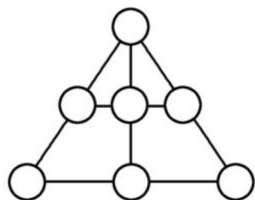
$$48 + 26 = 47 + 27 = 46 + 28 = 38 + 36 = 2 \times 37 \quad (*)$$

所以得到下面的填法



评注 其实直接由(*)出发就可以填成上图.

例4 将1~7填入下图的圈中,使每条线上的和都相等.



分析 $1+2+3+4+5+6+7=4\times 7$.

设顶上面填的数是 a .这个数在3条线上,这3条线上数的和相加,等于 a 的3倍加上2条横线上数的和.

由于每条线上数的和都相等,所以一条线上数的和等于 a 的3倍.

图中7个数的和,等于两条横线上数的和加上 a ,因而也就等于 a 的 $(3\times 2+1)$ 倍.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad a &= (1+2+3+4+5+6+7) \div (3\times 2+1) \\ &= 4\times 7 \div 7 = 4. \end{aligned}$$

每条线上数的和是

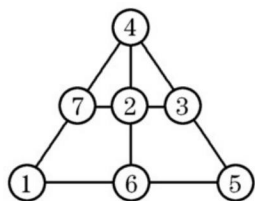
$$4\times 3 = 12.$$

由

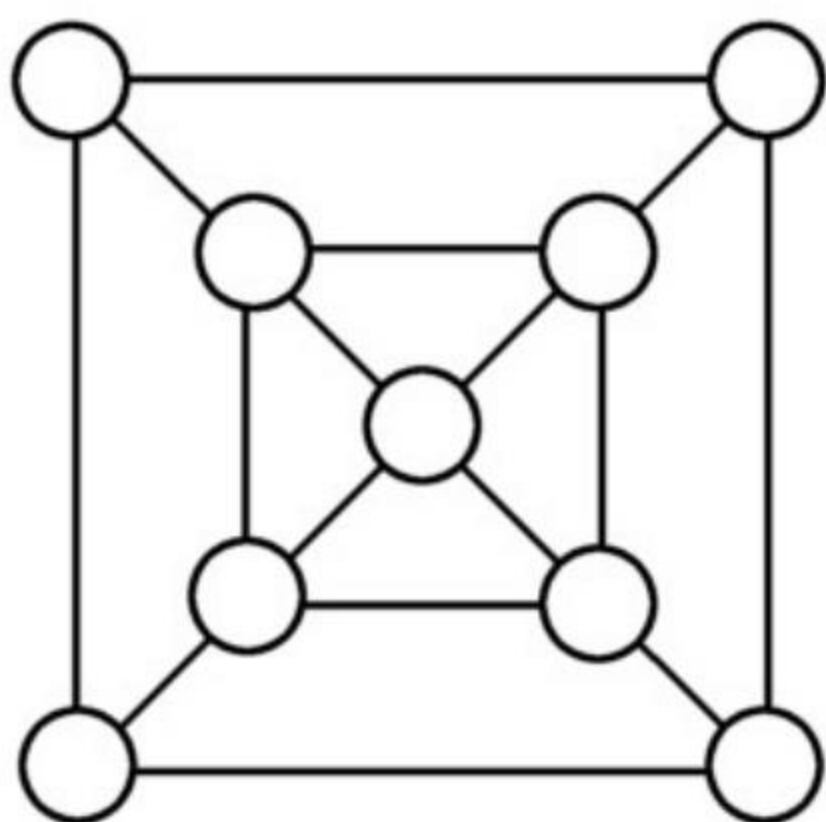
$$12 - 4 = 8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5,$$

$$12 = 7 + 2 + 3 = 6 + 5 + 1,$$

得出符合要求的图是



例5 将1~9填入下图,使两条对角线上各5个数的和相等;两个正方形顶点上各4个数的和也相等,并且这个和加上中央的数与一条对角线上5个数的和相等.



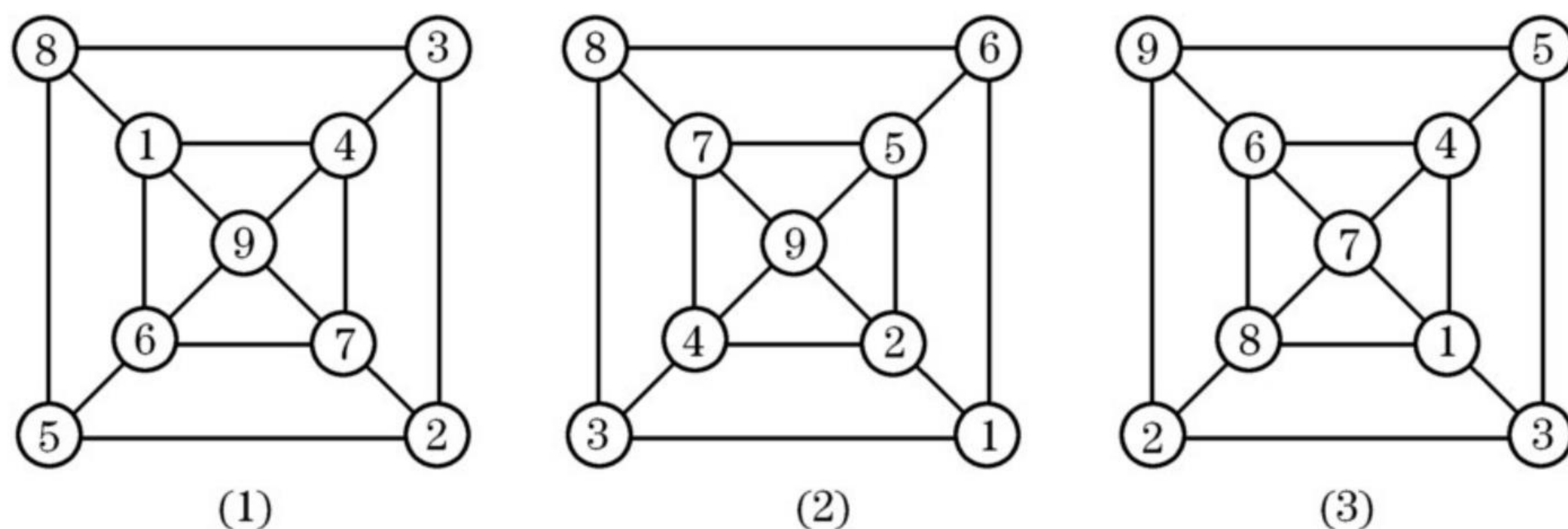
分析 如果中央的数是9,那么每条对角线上其余4个数的和是

$$(1+2+\cdots+8)\div 2=18.$$

每个正方形的4个顶点的4个数,和也是18.由

$$\begin{aligned} 18 &= 8+7+2+1=6+5+4+3, \\ &= 8+2+5+3=6+4+7+1 \end{aligned}$$

可得图(1).



又由

$$18=8+1+6+3=7+2+5+4$$

得图(2).

还可以得到很多符合要求的图.例如7在中央时的图(3).

评注 本题要求不多(最后一句“并且这个和加上中央的数与一条对角线上5个数的和相等”,其实是多余的,它已经暗含在前面的要求之中),所以满足条件的图很多.有兴趣的读者可以将它们一一找出.

本题中央的数一定是奇数,不能是偶数.

专题 4

算式谜

算式谜可以培养观察与推理的能力.

这里只讨论加减法的算式谜.

例 1 下面的算式中,不同的汉字代表不同的数字.“神”、“舟”、“五”、“号”各代表什么数字?

$$\begin{array}{r} \text{神 舟 五 号} \\ \text{舟 五 号} \\ \text{五 号} \\ + \quad \quad \text{号} \\ \hline 1 \ 5 \ 0 \ 6 \end{array}$$

分析 先讨论千位、百位.

解 “神”代表 1,而且百位不向千位进位.

百位上,“舟”+“舟”是小于 5 的偶数,而且从十位至多进 2 (3 个两位数的和小于 300),所以两个“舟”是 $5-1=4$ (不是 $5-3=2$).“舟”代表 2.

十位上,“五”+“五”+“五”至多为 10,而且是 3 的倍数.从个位相加至多进 3 (4 个个位数的和小于 40),所以“五”是

$$(10-1) \div 3 = 3$$

(不是 $(10-4) \div 3 = 2$).

最后,由

$$16 \div 4 = 4$$

得出“号”代表 4.

答:“神”、“舟”、“五”、“号”分别代表 1、2、3、4.

评注 解题应从简单的做起.加法算式谜,通常从首位或末位

入手.

例2 下面的算式中,不同字母代表不同的数字.请说出各个字母代表的数字.

$$\begin{array}{r} B D C E \\ + A D A E \\ \hline A E C B E \end{array}$$

分析 从首位与末位入手.

解 万位的 $A = 1$ (两个四位数相加,和小于 19 999).

个位的 $E + E = E$ (不会等于 $10 + E$),所以 $E = 0$.

这时算式可简化为

$$\begin{array}{r} B D C \\ + 1 D 1 \\ \hline 1 0 C B \end{array}$$

这个算式中,两个两位数相加,至多向百位进 1(和小于 199),而 $B+1$ 或再加上进上的 1,等于 10. 所以 $B = 9$ 或 8.

在个位, $C+1 = B$ (不可能等于 $10+B$,因为 C 至多是 9,而 B 不等于 0),不向十位进位. 十位 2 个 D 相加得 C 或 $10+C$,所以 C 是偶数, B 是奇数.

因此 $B = 9, C = 8, D = C \div 2 = 4$,原算式是

$$\begin{array}{r} 9 4 8 0 \\ + 1 4 1 0 \\ \hline 1 0 8 9 0 \end{array}$$

答: $A、B、C、D、E$ 分别代表 1、9、8、4、0.

评注 奇偶性很起作用.

例3 天然居是北京一家著名的饭店. 在下面的算式中,不同汉字代表不同数字.“天”、“然”、“居”各代表什么数字?

$$\begin{array}{r}
 \text{客上天然居} \\
 \text{客上天然居} \\
 \text{客上天然居} \\
 + \text{客上天然居} \\
 \hline
 \text{居然天上客}
 \end{array}$$

分析 万位上看,“客”只能是 1 或 2. 个位上看,“客”是偶数,因而是 2.

解 “客”是 2.

从万位看,“居”是 8 或 9. 从个位看, $4 \times$ “居”是 32 或 12, 所以“居”是 8.

千位上, 不进位(万位上, 4 个 2 正好是 8). 所以“上”小于 3. “客”已经是 2, 所以“上”是 1 或 0.

十位上, 4 个“然”再加个位进来的 3, 和是奇数. 所以“上”是奇数, 因而是 1. 4 个“然”加 3 等于 31 或 11(不能等于 21), 所以“然”是 7 或 2. 但“客”已经是 2, “然”是 7.

上面的算式可简化成

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \text{天} \\
 \text{天} \\
 + \text{天} \\
 \hline
 30
 \end{array}$$

所以“天”是 9.

答:“天”、“然”、“居”分别代表 9、7、8.

评注 理由要充足, 说理要完整、简明.

例 4 算式中, \square 、 \triangle 、 \circ 、 \odot 代表不同的数字. 它们分别是多少?

$$\begin{array}{r}
 \square \\
 \square \triangle \\
 \square \triangle \circ \\
 + \square \triangle \circ \odot \\
 \hline
 2002
 \end{array}$$

分析 先定出□,再将算式简化.

解 百位相加进位(和不会为0),所以千位上,□是1,从算式中去掉1111(即□□□□),简化为

$$\begin{array}{r} \triangle \\ \triangle \bigcirc \\ + \triangle \bigcirc \odot \\ \hline 891 \end{array}$$

($2002 - 1111 = 891$), 因为

$$800 + 80 + 8 = 888$$

小于891,所以△是8而不能比8小.

$$891 - 888 = 3.$$

所以○是0,◎是3.

答:□、△、○、◎分别代表1、8、0、3.

评注 算式谜中,可以利用已经得到的结果将算式简化.在例2、3、4中,我们均这样做.

例5 在下面的减法算式中,不同汉字代表不同的数,并且“居”、“然”、“上”、“客”中恰有一个字与算式中已经写出的数相同.这个字代表多少?

$$\begin{array}{r} \text{居 然 天 上 客} \\ - \text{客 上 天 然 居} \\ \hline 65934 \end{array}$$

分析 考虑运算中是否有低位不够减、必须向高位借的情况.

解 差的百位是9而不是0,表明被减数的百位一定被低位借去1.因此十位的“上”比“然”小.

这时千位的“然”比“上”大,不需要借位.所以万位上,

$$\text{“居”} = \text{“客”} + 6.$$

千位上,“然”被百位借去1,所以

“然”=“上”+6.

相差为6的数字对,只有9与3,8与2,7与1,6与0.但3、9均在算式中出现,而1、2、8、7均未出现,所以“居”与“客”,“然”与“上”中必有一对是6与0.

由于0不能出现在首位,所以只能是“然”=6,“上”=0.

答:与已经写出的数相同的是“然”,代表6.

评注 本题是由例3衍生出的题目.我们可以利用普通的算式,将其中一部分数字用符号或文字代表,产生算式谜.

例6 下面各算式中,不同字母代表不同的数字,相同的字母代表相同的数字.问:它们各代表什么数字?

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad A \ B \ C \ D \\
 - \quad A \ B \ C \\
 \hline
 D \ C \ D \ C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 (2) \quad A \ B \\
 - \quad C \ D \\
 \hline
 E \ F \\
 + \quad G \ H \\
 \hline
 P \ P \ P
 \end{array}$$

解 (1) 如果百位上 $B > A$,那么千位上 A 与 D 相同,这不可能.所以 $B < A$,并且

$$C = 10 + B - A \text{ 或 } C = (10 - 1) + B - A.$$

因为 A 至多为9,所以 C 不小于 B ,从而 C 大于 B .原算式可拆为两个算式

$$\begin{array}{r}
 A \ B \\
 - \quad A \\
 \hline
 D \ C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 C \ D \\
 - \quad B \ C \\
 \hline
 D \ C
 \end{array}$$

后一个算式中,由十位得 $C > D$.结合个位得

$$C = B + D + 1. \quad \textcircled{1}$$

前一个算式中,

$$C = 10 + B - A, \quad \textcircled{2}$$

$$A = D + 1. \quad \textcircled{3}$$

由①、③得

$$C = A + B. \quad \textcircled{4}$$

由②与④得

$$A + B = 10 + B - A.$$

所以

$$A = 10 - A,$$

$$A = 10 \div 2 = 5,$$

$$D = A - 1 = 4.$$

又由上面分成的第二个算式得

$$C + C = 10 + D = 14,$$

所以

$$C = 7.$$

最后由①得

$$B = C - D - 1 = 7 - 4 - 1 = 2.$$

A、B、C、D分别是5、2、7、4.

原算式是

$$\begin{array}{r} 5274 \\ - \quad 527 \\ \hline 4747 \end{array}$$

本题中的字母之间有一定的关系,需要仔细观察、分析,找出这些关系.利用这些关系求出字母代表的数字.

(2) 由百位得 $P = 1$. 由加法算式

$$\begin{array}{r} E F \\ + G H \\ \hline 1 1 1 \end{array}$$

得(注意 F 、 H 均不为 1)

$$F + H = 11, \quad \textcircled{1}$$

$$E + G = 10. \quad \textcircled{2}$$

于是有 6 种可能的情况:

(i) F 、 H 为 2、9(这里指 $F=2$, $H=9$ 或 $F=9$, $H=2$. 以下同), E 、 G 为 3、7.

(ii) F 、 H 为 2、9, E 、 G 为 4、6.

(iii) F 、 H 为 3、8, E 、 G 为 4、6.

(iv) F 、 H 为 4、7, E 、 G 为 2、8.

(v) F 、 H 为 5、6, E 、 G 为 2、8.

(vi) F 、 H 为 5、6, E 、 G 为 3、7.

对于(i), A 、 B 、 C 、 D 只能为 0、4、5、6、8 中的 4 个. 因为 $\overline{CD} \geq 40$,

$$32 + 40 = 72,$$

所以 A 一定是 8, E 一定是 3. $F=2$ 或 9.

在 $F=2$ 时, 减法算式是

$$\begin{array}{r} 8 6 \\ - 5 4 \\ \hline 3 2 \end{array}$$

在 $F=9$ 时, 减法算式是

$$\begin{array}{r} 8 5 \\ - 4 6 \\ \hline 3 9 \end{array}$$

对于(ii), A 、 B 、 C 、 D 只能为 0、3、5、7、8 中的 4 个. 因为 $\overline{CD} \geq 30$,

$$42 + 30 = 72,$$

所以 A 一定是 8, E 一定是 4, C 一定是 3. 但这时无论 $F=2$ 或 9, 均得不到合乎要求的算式.

对于(iii), A 、 B 、 C 、 D 只能为 0、2、5、7、9 中的 4 个. 因为 $\overline{CD} \geq 20$,

$$43 + 20 = 63 > 60,$$

所以 $A=7$ 或 9.

$A=7$ 时, $E=4$, $C=2$. 但这时无论 $F=3$ 或 8, 均得不到合乎要求的算式.

$A=9$ 时, $E=6$ 或 4. 若 $E=6$, 则 $C=2$. 在 $F=3$ 时, $D=7$, $B=0$. 减法算式为

$$\begin{array}{r} 90 \\ - 27 \\ \hline 63 \end{array}$$

在 $F=8$ 时, $D=7$, $B=5$, 减法算式为

$$\begin{array}{r} 95 \\ - 27 \\ \hline 68 \end{array}$$

若 $E=4$, 则 $C=5$. 但这时无论 $F=3$ 或 8, 均得不到合乎要求的算式.

对于(iv)、(v)、(vi), 可进行同样的讨论. 得出这些情况均得不出合乎要求的解.

于是, 一定有四组解, 算式如下:

$$\begin{array}{r} 86 \\ - 54 \\ \hline 32 \\ + 79 \\ \hline 111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ - 46 \\ \hline 39 \\ + 72 \\ \hline 111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 90 \\ - 27 \\ \hline 63 \\ + 48 \\ \hline 111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 95 \\ - 27 \\ \hline 68 \\ + 43 \\ \hline 111 \end{array}$$

在有多种可能时, 应当逐个进行讨论. 这种方法就叫做枚举法. 枚举时, 特别留心不要遗漏可能发生的情况.

专题 5

平均数

若干个数的平均数,定义是

$$\text{平均数} = \text{和} \div (\text{数的个数})$$

因此

$$\text{和} = \text{平均数} \times (\text{数的个数})$$

例 1 三(1)班的数学兴趣小组,在一次竞赛中,2人得100分,3人得95分,1人得85分,2人得80分,2人得70分.这个小组的平均成绩是多少?

分析 求出分数的总和(总成绩),再除以人数.

解 $(100 \times 2 + 95 \times 3 + 85 + 80 \times 2 + 70 \times 2) \div (2 + 3 + 1 + 2 + 2) = 870 \div 10 = 87.$

答:平均成绩是87分.

又解 先估计一下,平均成绩大致为90分.以90分为基准数,2个100分与2个80分可改为4个90分,1个95分与1个85分可改为2个90分.还有2个95分,比2个90分多出10分,但2个70分比2个90分少40分.因此总成绩比10个90分少30(=40-10)分,平均成绩是

$$90 - 30 \div 10 = 87(\text{分}).$$

评注 实际计算时,后一种解法更加简捷.

例 2 三(2)班共40人,有2个人因病未参加考试,平均成绩是86分.后来,两个人补考,成绩分别为72、60分.这个班的平均成绩是多少分?

分析 先算出总成绩再平均或者考虑这两名同学将原来的成绩拉下多少分.

解 $(86 \times 38 + 72 + 60) \div 40 = 3400 \div 40 = 85.$

答:平均成绩是 85 分.

又解 $(86 - 72) + (86 - 60) = 40.$

$$86 - 40 \div 40 = 85.$$

评注 想一想后一种解法的理由.

例 3 一个探险队有 9 人,平均年龄 26 岁.后来又增加 1 名队员,平均年龄增加到 27 岁.增加的这名队员多大年龄?

分析 可以算出 9 个人年龄的和及 10 个人年龄的和.

解 $27 \times 10 - 26 \times 9 = 36.$

答:增加的队员年龄是 36 岁.

又解 增加的人年龄比 27 多,多出的岁数可以使得前 9 个人的平均年龄增加 $1(=27-26)$ 岁,也就是说多出 $1 \times 9 = 9$ 岁.因而增加的队员是 $27 + 9 = 36$ (岁).

评注 有时一道问题有多种解法.应当加以比较,找出最好的,也就是最简单的解法.

例 4 5 个小朋友,排成一排.已知他们的平均体重是 27 千克,前 3 个人的平均体重是 24 千克,后 3 个人的平均体重是 30 千克.中间的小朋友体重是多少千克?

分析 前 3 个人的总重量加上后 3 个人的总重量,等于 5 个人的总重量加上中间的小朋友的体重.

解 $24 \times 3 + 30 \times 3 - 27 \times 5 = 27.$

答:中间的小朋友重 27 千克.

又解 增加 1 个人,与中间的小朋友体重相同.这时 6 个人的平均体重是 $(24 + 30) \div 2 = 27$ (千克).与原来 5 个人的平均体重正好相同.所以增加的人体重为 27 千克,即中间的小朋友体重为 27 千克.

例 5 甲、乙、丙三个数.甲、乙的平均数加丙得 159.乙、丙的

平均数加甲得 160. 丙、甲的平均数加乙得 161. 求甲、乙、丙这三个数.

分析 159×2 是甲加乙加 2 个丙. 160×2 是乙加丙加 2 个甲, 161×2 是丙加甲加 2 个乙. 从而乙比甲多 $161 \times 2 - 160 \times 2$, 甲比丙多 $160 \times 2 - 159 \times 2$.

解 乙比甲多

$$161 \times 2 - 160 \times 2 = 2.$$

甲比丙多

$$160 \times 2 - 159 \times 2 = 2.$$

即甲正好是乙与丙的平均数. 从而 160 就是 2 个甲, 甲是

$$160 \div 2 = 80,$$

乙是

$$80 + 2 = 82,$$

丙是

$$80 - 2 = 78.$$

答: 甲是 80, 乙是 82, 丙是 78.

评注 例 5 的解法很多. 上面的解法关键在弄清 159×2 、 160×2 与 161×2 的意义. 意义清楚了, 问题就容易解决.

例 6 28 个自然数的平均数是 23. 其中不同的自然数共 24 个, 并且是连续的自然数. 有一个自然数出现 3 次, 另有 2 个自然数各出现 2 次. 问: 出现 2 次的自然数最小是多少?

分析 在《奥数教程》三年级第七讲的练习题 11、12 中, 讨论过出现 2 次的自然数最大是多少的问题. 可以参照那里的解法. 先举出一个实例, 其中出现 2 次的自然数最小是 11. 再证明出现 2 次的自然数不能小于 11.

解 11~35 这 25 个自然数的平均数是 23.

11、34、24 的平均数也是 23. 所以

11, 12, ..., 34, 11, 34, 34, 25

这 28 个数的平均数是 23, 而且其中 34 出现 3 次, 11、25 各出现 2

次.

另一方面,出现 2 次的数不能小于 11. 如果小于 11,那么 24 个连续自然数至多是 $10\sim 33$. 但是 28 个数 $10\sim 33$, 10, 32, 33, 33 的平均数小于 23($11\sim 35$ 的平均数是 23, 10、10、29 这 3 个数的平均数小于 23). 与要求不符.

所以出现 2 次的自然数最小是 11.

专题 6

和差问题

和差问题的解法是

$$(\text{和} + \text{差}) \div 2 = \text{大数},$$

$$(\text{和} - \text{差}) \div 2 = \text{小数}.$$

在和或差没有直接给出时,需先求出和或差.

例 1 长方形的周长是 32 米,长比宽多 4 米,问长、宽各多少米?

分析与解 长、宽共

$$32 \div 2 = 16(\text{米}).$$

$$(16 + 4) \div 2 = 10(\text{米}).$$

$$(16 - 4) \div 2 = 6(\text{米}).$$

答:长 10 米,宽 6 米.

评注 求出长为 10 米后,可用 $10 - 4$ 得出宽.

例 2 10 千克苹果与 10 千克桃子,共 70 元,1 千克苹果比 1 千克桃子多 1 元,苹果、桃子每千克各几元?

分析 先求出 1 千克苹果与 1 千克桃子共几元.

解 $70 \div 10 = 7(\text{元}).$

$$(7 + 1) \div 2 = 4(\text{元}).$$

$$4 - 1 = 3(\text{元}).$$

答:苹果每千克 4 元,桃子每千克 3 元.

例 3 小华、小苹共有 300 元,如果小苹借给小华 60 元,那么小华、小苹两人的钱数相等,问小华、小苹各有多少元?

分析 本题的关键是求出“差”。“小苹借给小华 60 元,那么小苹、小华两人的钱数相等”也就是“小苹的钱数减 60”等于“小华的钱数加 60”。从而小苹比小华多 120 元。

解 小苹比小华多

$$60 \times 2 = 120(\text{元}).$$

$$(300 + 120) \div 2 = 210(\text{元}).$$

$$210 - 120 = 90(\text{元}).$$

答: 小苹 210 元,小华 90 元。

评注 “差”未直接给出,需要经过计算. 不可粗枝大叶,以为 60 就是差。

更简单的解法是小苹借 60 元给小华后,每人

$$300 \div 2 = 150(\text{元}),$$

所以小苹原有

$$150 + 60 = 210(\text{元}),$$

小华原有

$$150 - 60 = 90(\text{元}).$$

所以不一定非套和差问题的公式。

例 4 有一架天平,一个 100 克的砝码及 20 个 1 克的砝码. 甲、乙、丙三个物体,重量都是整数克重,并且都在 50 克与 60 克之间. 如何用这架天平及上述砝码称出这三个物体的重量。

分析与解 只能每次将两个物体放在一起称. 第一次称甲、乙两个,第二次称乙、丙两个,第三次称甲、丙两个. 第一次称的结果是甲、乙两个的和. 第二次与第三次结果的差就是甲、乙两个的差. 再用和差问题的公式就可以求出甲、乙的重量. 用第二次称的结果减去乙的重量就得到丙的重量。

例如三次称得的重量分别为 111、112、107. 那么甲、乙、丙的

重量分别为 53、58、54(克).

也可先求出甲、乙、丙的和是 $(111 + 112 + 107) \div 2 = 165$.

例 5 甲、乙两地相距 40 千米. 小华和小丽两人, 同时分别由甲、乙出发, 相向而行. 8 小时在途中相遇. 如果两人同时由甲地向乙地出发, 5 小时后, 小华在小丽前 5 千米. 小华、小丽每小时各行多少千米?

解 小华、小丽的速度和是每小时

$$40 \div 8 = 5(\text{千米}),$$

速度差是每小时

$$5 \div 5 = 1(\text{千米}).$$

小华每小时走

$$(5 + 1) \div 2 = 3(\text{千米}).$$

小丽每小时走

$$3 - 1 = 2(\text{千米}).$$

答: 小华每小时行 3 千米, 小丽每小时行 2 千米.

评注 本题是和差问题与行程问题的综合.

例 6 9 块糕, 重量分别为 2500, 440, 560, 1200, 800, 760, 600, 900, 1300(单位: 克). 现在要将其中的一块切成两块(不一定一样重). 然后将糕分别放进两个袋子, 每个袋子 5 块糕, 并且两袋糕的重量相等. 问: 应当切哪一块糕? 怎样分糕?

分析 糕的重量可以换成其他的数. 我们应当设计一种普遍适用的分法. 首先, 我们应当切最大的一块. 在最大的一块比其他的块大很多时, 更是非切这一块不可. 怎么切, 需根据其他块分成两袋的情况而定.

将重量排个序, 从大到小是

$$2500, 1300, 1200, 900, 800, 760, 600, 560, 440.$$

将 1300, 900, 760, 560 放进第一只袋子, 1200, 800, 600, 440 放进第二只袋子, 两袋的重量相差

$$1300 - 1200 + 900 - 800 + 760 - 600 + 560 - 440 = 480(\text{克}).$$

现在要将重为 2500 克的糕切成两块, 一块比另一块重 480 克.

解 $(2500 + 480) \div 2 = 1490(\text{克}),$

$$(2500 - 480) \div 2 = 1010(\text{克}).$$

将 1490 克的放进第二只袋中, 1010 克的放进第一只袋中, 两只袋子中各有 5 块糕, 而且总重量相等.

评注 在最重的一块未切之前, 根据我们的分法, 第一袋比第二袋重, 而且第一袋比第二袋多出的重量少于次重的一块(想一想为什么), 当然更少于最重的一块. 因此, 可以用和差问题的解法来分第一块.

专题 7

倍数问题

已知两个数的和与两个数的倍数关系,求这两个数,通常称为“和倍问题”.解法是

$$\text{和} \div (\text{倍数} + 1) = \text{小数}.$$

已知两个数的差与两个数的倍数关系,求这两个数,通常称为“差倍问题”.解法是

$$\text{差} \div (\text{倍数} - 1) = \text{小数}.$$

例 1 某演出队用 1600 元买 10 套相同的服装.每套服装有上衣和裤子.每件上衣的价格是每条裤子的 3 倍.一件上衣多少钱?

分析 这是和倍问题.

解 一套服装(一件上衣、一条裤子)

$$1600 \div 10 = 160(\text{元}).$$

每条裤子

$$160 \div (3 + 1) = 40(\text{元}).$$

一件上衣

$$40 \times 3 = 120(\text{元}).$$

答: 一件上衣 120 元.

评注 可用综合算式直接得出一件上衣

$$1600 \div 10 \div (3 + 1) \times 3 = 120(\text{元}).$$

用综合算式,不仅有可能简化计算,而且有助于思维能力的提高.

例2 小江家里养的白兔比黑兔多48只.白兔只数是黑兔的7倍.白兔、黑兔各多少只?

分析 这是差倍问题.

解 $48 \div (7 - 1) = 8(\text{只}),$

$8 \times 7 = 56(\text{只}).$

答:黑兔8只,白兔56只.

例3 小华有苹果和梨子共22个.苹果数比梨子数的3倍还多2个.苹果、梨子各多少个?

分析 如果去掉2个苹果,那么苹果数正好是梨子数的3倍,而苹果、梨子的总数是 $(22 - 2)$ 个.这是和倍问题.

解 梨子数是

$$(22 - 2) \div (3 + 1) = 5(\text{个}).$$

苹果数是

$$5 \times 3 + 2 = 17(\text{个}).$$

答:苹果17个,梨子5个.

评注 遇到不熟悉、不能直接运用公式的问题,要善于将它们化为熟悉的、能直接运用公式的问题.在例3中,去掉2个苹果就能达到这一目的.苹果减少了,总数也随着它减少,但梨子数没有变.

求出梨子数后,也可用

$$22 - 5 = 17(\text{个})$$

得出苹果数.

例4 两个整数相除,商是7,余数是2.被除数、除数、商及余数的和是51.被除数与除数各是多少?

分析 被除数、除数、商及余数有如下关系:

$$\text{被除数} = \text{除数} \times \text{商} + \text{余数}. \quad \textcircled{1}$$

现在①就是

$$\text{被除数} = \text{除数} \times 7 + 2.$$

与例3类似,被除数减2正好是除数的7倍,而被除数减2与除数的和是 $51 - 7 - 2 - 2$.

解 除数是

$$(51 - 7 - 2 - 2) \div (7 + 1) = 5.$$

被除数是

$$7 \times 5 + 2 = 37.$$

答:被除数是37,除数是5.

评注 带余除法(带有余数的除法)的公式(1),虽然简单,却很有用,很重要.

例5 甲的存款是乙的3倍.如果甲、乙都取出6000元,那么甲的存款就是乙的4倍.问甲、乙现在各有存款多少元?

分析 画一个图,用一条线段表示乙的存款,长3倍的另一条线段表示甲的存款.



在第一条线段中取去一段表示6000.在第二条线段中取去3个6000,剩下的是第一条线段剩下的3倍.根据题意,如果取去1个6000,那么第二条线段剩下的是第一条剩下的4倍.所以 $2(=3-1)$ 个6000,就是第一条线段剩下的 $1(=4-3)$ 倍.

解 乙取出6000元后,存款是

$$6000 \times (3 - 1) \div (4 - 3) = 12\ 000(\text{元}).$$

乙原有存款

$$12\ 000 + 6\ 000 = 18\ 000(\text{元}).$$

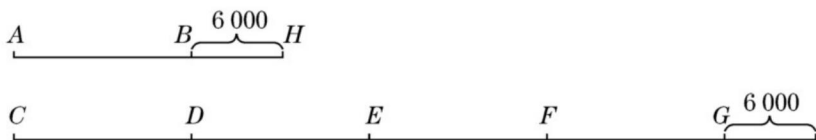
甲原有存款

$$18\ 000 \times 3 = 54\ 000(\text{元}).$$

答：甲原有存款 54 000 元，乙原有存款 18 000 元.

评注 画线段图有助于解决倍数问题. 下讲的年龄问题中，也有些例题采用类似的办法.

本题也可用一条线段 AB 表示乙取出 6000 元后的存款. 另一条长为 4 倍的线段 CG (由 4 条等于 AB 的线段 CD 、 DE 、 EF 、 FG 组成) 表示甲取出 6000 元后的存款.



第一条线段增加 6000，第二条线段也增加 6000. 这时第二条长度是第一条的 3 倍. 所以 CF 是 AH 的 $2(=3-1)$ 倍， CE 是 AB 的 2 倍，所以 EF 是 6000 的 2 倍. 即 AB 是 $6000 \times 2 = 12\ 000$.

专题 8

年龄问题

年龄问题,往往能化为和差问题或倍数问题.

例1 父亲今年年龄比女儿的2倍还大3岁.再过10年,父女年龄的和是95.父亲、女儿今年各多少岁?

分析 10年后,父、女各增加10岁,年龄和是95,所以现在父女年龄的和是 $95 - 10 \times 2$.化为和倍问题.

解 女儿今年

$$(95 - 10 \times 2 - 3) \div (1 + 2) = 24(\text{岁}).$$

父亲今年

$$24 \times 2 + 3 = 51(\text{岁}).$$

答:父亲今年51岁,女儿今年24岁.

例2 王老师的年龄比小明年龄的2倍多6岁.10年前王老师的年龄和小明8年后的年龄相同.小明今年多少岁?

分析 “10年前王老师的年龄和小明8年后的年龄相同”表明王老师比小明大 $(10 + 8)$ 岁.而这个年龄差是不会变的,所以现在王老师仍比小明大这么多.问题化为差倍问题.

解 小明年龄是

$$(10 + 8 - 6) \div (2 - 1) = 12(\text{岁}).$$

答:小明今年12岁.

评注 在年龄问题中,两个人年龄的差是不会改变的,应充分利用这一点来解题.

例3 父亲今年32岁,儿子8岁.多少年后,父亲年龄是儿子

年龄的 2 倍?

分析 年龄差保持不变. 化为差倍问题.

解 父亲年龄是儿子 2 倍时, 儿子

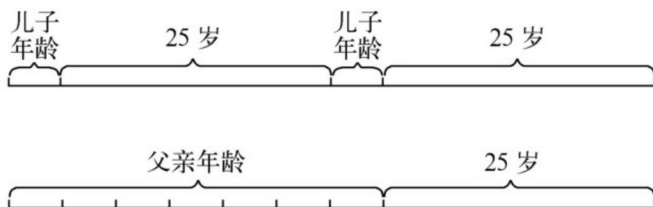
$$(32 - 8) \div (2 - 1) = 24(\text{岁}).$$

$$24 - 8 = 16.$$

答: 16 年后, 父亲年龄是儿子年龄的 2 倍.

例 4 10 年前, 父亲年龄是儿子的 7 倍. 15 年后, 父亲年龄是儿子的 2 倍. 今年父子各多少岁?

分析 10 年前儿子的年龄用 1 条小线段表示, 父亲的年龄用 7 条同样长的小线段表示(如图):



从 10 年前到 15 年后, 儿子增加 25 岁, 父亲也增加 25 岁. 但这时父亲年龄是儿子的 2 倍. 比较两个图可以知道 10 年前, 儿子年龄的 5 倍是 25 岁.

解 $10 + 15 = 25.$

$$25 \times (2 - 1) \div (7 - 2) = 5.$$

儿子 10 年前 5 岁, 现在

$$5 + 10 = 15(\text{岁}).$$

父亲现在

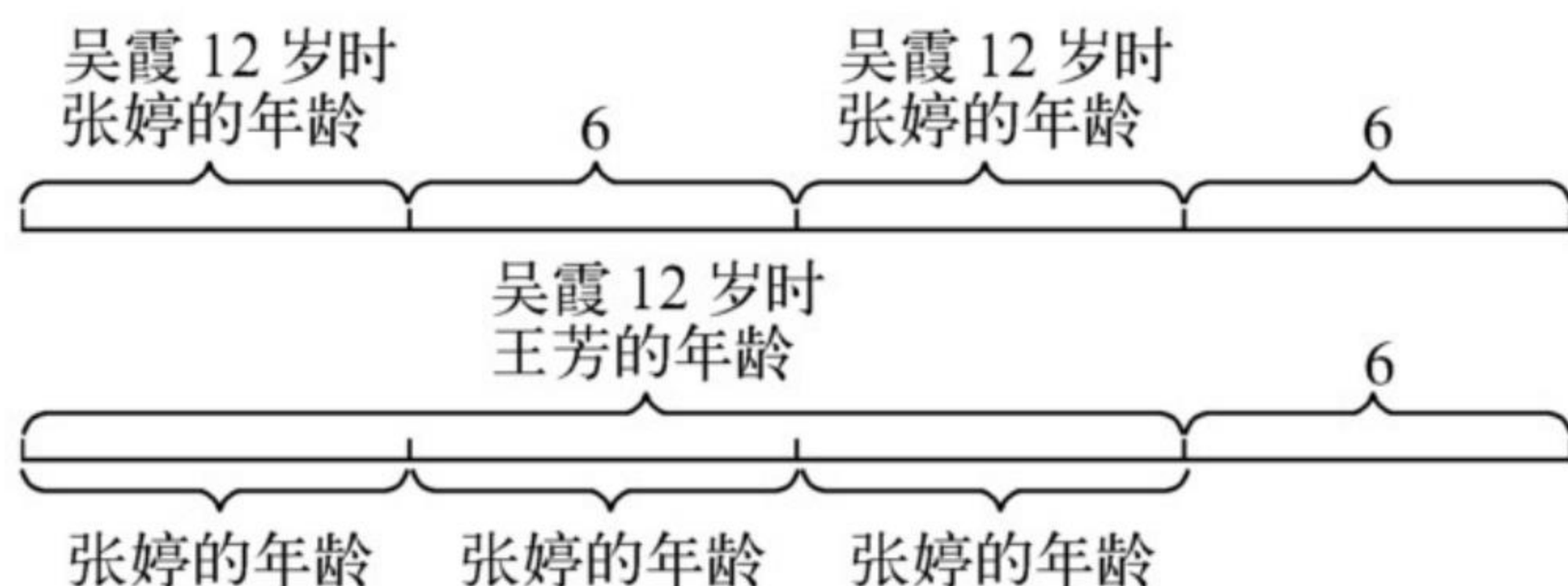
$$5 \times 7 + 10 = 45(\text{岁}).$$

答: 今年父亲 45 岁, 儿子 15 岁.

评注 复杂的问题, 画线段图可以帮助思考. 例 4 中, 线段图很有作用.

例5 王芳、张婷、吴霞三个人,今年年龄的和是72岁.吴霞18岁时,王芳的年龄是张婷年龄的2倍.吴霞12岁时,王芳年龄是张婷的3倍.王芳、张婷、吴霞三个人今年各多少岁?

分析 吴霞12岁,王芳年龄是张婷的3倍.经过6年(即吴霞18岁),王芳年龄是张婷的2倍,比较下面的图可以看出吴霞12岁时,张婷的年龄加6正好是张婷年龄的2倍.所以那时张婷6岁.



解 吴霞12岁时,张婷的年龄是

$$6 \times (2 - 1) \div (3 - 2) = 6(\text{岁}).$$

这时王芳的年龄是

$$6 \times 3 = 18(\text{岁}).$$

三个人年龄的和是

$$12 + 6 + 18 = 36(\text{岁}).$$

$$(72 - 36) \div 3 = 12.$$

即从吴霞12岁到现在经过了12年.

$$12 + 18 = 30,$$

$$12 + 12 = 24,$$

$$12 + 6 = 18.$$

答:今年王芳30岁,吴霞24岁,张婷18岁.

评注 本题涉及三个人的年龄,但关键还是王、张两个人的年龄关系.画图的方法与上题类似.

专题 9

行程问题(一)

行程问题的基本公式是

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}.$$

由此可得

$$\text{速度} = \text{路程} \div \text{时间},$$

$$\text{时间} = \text{路程} \div \text{速度}.$$

涉及两个人的行程问题,最基本的有两种:

1. 相遇问题. 两人从两地同时出发,相向而行. 这时,

$$\text{相遇时间} = \text{两地距离} \div \text{速度和}.$$

2. 追及问题. 两人从两地同时出发,一前一后,同向而行. 速度快的从后面追上. 这时

$$\text{追上时间} = \text{两地距离} \div \text{速度差}.$$

例 1 甲、乙两人同时从相距 10 千米的两地出发,相向而行. 甲带的一只狗也同时出发,以每小时 5 千米的速度向乙奔去. 遇到乙后,狗返身向甲奔去. 再遇到甲又立即返身奔向乙……直至甲、乙相遇时狗才停歇. 甲每小时行 3 千米,乙每小时行 2 千米. 这只狗一共跑了多少千米?

分析 先算出两人相遇所需时间. 这也是狗跑的时间.

解 经过

$$10 \div (3 + 2) = 2(\text{小时}),$$

甲、乙相遇.

狗共跑

$$5 \times 2 = 10(\text{千米}).$$

答:狗跑了 10 千米.

评注 算出狗跑的时间就能算出它跑的路程. 如果先算狗从甲到乙跑了多少千米,再算从乙跑回甲多少千米……那么解答繁琐之至.

例 2 A、B 两城相距 500 千米. 甲乙两车从 A 城、丙车从 B 城同时出发,相向而行. 甲、乙的速度分别为每小时 50 千米和每小时 40 千米. 过一段时间后,甲在乙前方 20 千米. 这时甲、丙相距 280 千米. 求丙的速度.

分析 先算出甲比乙多走 20 千米需要多少时间,这也是丙走的时间. 要求丙的速度,只要求出丙走的路程即可.

解 甲每小时比乙多走 $(50-40)$ 千米. 甲在乙前 20 千米,说明甲已行了

$$20 \div (50 - 40) = 2(\text{小时}),$$

甲行了

$$50 \times 2 = 100(\text{千米}),$$

丙 2 小时行了

$$500 - 100 - 280 = 120(\text{千米}),$$

丙的速度是每小时

$$120 \div 2 = 60(\text{千米}).$$

答:丙的速度是每小时 60 千米.

评注 对于同向而行(同时出发):

$$\text{多走的路程} = \text{时间} \times \text{速度差}.$$

例 3 甲、乙二人从 A 城去 B 城. 甲每小时行 5 千米,乙每小

时行 4 千米. 甲出发时, 乙已先走了 3 小时. 甲走 10 千米后, 决定以每小时 6 千米的速度前进. 问再用几小时甲追上乙?

分析 先算出甲决定改变速度时, 乙在甲前面多少千米.

解 甲走 10 千米, 乙走

$$10 \div 5 \times 4 = 8(\text{千米}),$$

这时, 乙在甲前面

$$4 \times 3 + 8 - 10 = 10(\text{千米}),$$

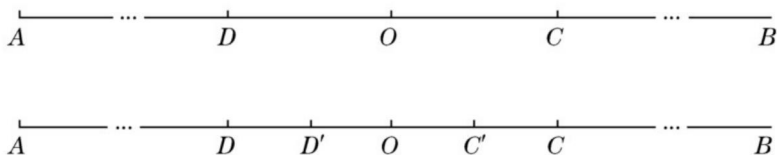
甲追上乙需

$$10 \div (6 - 4) = 5(\text{小时}).$$

答: 再用 5 小时甲追上乙.

例 4 甲、乙两人从相距 15 300 米的两地 A、B 同时出发, 相向而行, 51 分钟后相遇. 如果两人每分钟都多走 3 米, 那么他们相遇的地点离原来相遇的地点 30 米. 求两人原来的速度.

分析 不难求出甲、乙的速度和, 只需求出他们的速度差. 不妨设甲比乙快, 相遇地点 C 应在中点 O 的右面(靠近 B 的那一侧). 设 C 关于中点 O 的对称点是 D, 则甲比乙多走了 DC.



速度增加后, 速度和增加, 速度差不变. 不难算出甲、乙现在相遇的时间是 50 分钟, 比原来少 1 分钟. 设相遇在 C' , C' 关于中点 O 的对称点是 D' , 则甲比乙多走了 $D'C'$, $C'C = 30$ 米.

由于速度差不变, 而时间少了 1 分钟, 所以甲比乙多走的 $D'C'$ 小于原来多走的 DC. DC 比 $D'C'$ 多出 $2 \times C'C$, 即 2×30 米. 这 2×30 米, 就是 1 分钟甲比乙多走的距离.

解 原来速度和是每分钟

$$15\ 300 \div 51 = 300(\text{米}),$$

速度增加后,经过

$$15\ 300 \div (300 + 3 \times 2) = 50(\text{分钟}),$$

两人相遇. 两人的速度差是每分钟

$$30 \times 2 \div (51 - 50) = 60(\text{米}).$$

$$(300 + 60) \div 2 = 180(\text{千米}),$$

$$180 - 60 = 120(\text{千米}).$$

答:原来两人的速度分别为每分钟 180 米与每分钟 120 米.

评注 通过画图,弄清“30 米”的意义是解决本题的关键.

例 5 甲、乙两人骑车从 A 往 B,丙骑车从 B 往 A. A、B 相距 450 千米,三人同时出发. 甲每小时行 36 千米,乙每小时行 30 千米,丙每小时行 26 千米. 经过多少时间,乙恰好在甲、丙两人之间的中点(即乙与甲的距离等于乙与丙的距离)?

分析与解 设想有一个丁骑车,与甲、乙同时从 A 出发,由 A 往 B,每小时行 24 千米.

因为 $36 - 30 = 30 - 24$,所以乙始终在甲、丁之间的中点. 问题转化为丙在什么时候与丁相遇.

$$450 \div (26 + 24) = 9(\text{小时})$$

即出发后 9 小时,乙恰好在甲、丙之间的中点.

增加一个人的想法甚妙. 做数学,不只是套用固定的方法,更要有自己的新想法.

专题 10

行程问题(二)

行程问题的变化很多. 这里再举一些例题加以说明.

例 1 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时相向而行. 甲每小时走 4 千米, 乙每小时走 2 千米. 相遇时, 距离 A、B 的中点 4 千米. A、B 两地相距多少千米?

分析 相遇时, 甲比乙多走 $4 \times 2 = 8$ 千米. 从而可以算出两人所用的时间及 A、B 的距离.

解 $4 \times 2 \div (4 - 2) \times (4 + 2) = 24$ (千米).

答: A、B 的距离是 24 千米.

例 2 小胡骑自行车, 以每分钟 250 米的速度, 从 33 路公交车的始发站出发, 沿 33 路公交车的路线前进. 在他离始发站 2000 米时, 一辆 33 路公交车从始发站出发, 以每分钟 750 米的速度前进. 每行 2 分钟到达一个车站并停车 1 分钟. 多少分钟这辆公交车追上小胡?

分析 如果公交车不靠站, $(2000 \div (750 - 250) =)4$ 分钟就可追上小胡. 但 4 分钟内, 公交车要停靠 2 个站, 共停留 2 分钟. 2 分钟, 小胡又行了 $250 \times 2 = 500$ (米). 所以实际追及的距离是 2500 米.

解 如果不靠站, 公交车要用

$$2000 \div (750 - 250) = 4(\text{分钟})$$

追上小胡. 但 4 分钟公交车要停 2 站, 每站停靠 1 分钟, 所以公交车用

$$4 + 1 \times 2 = 6(\text{分钟})$$

追上小胡 2000 米. 而在 2 分钟内小胡又行

$$250 \times 2 = 500(\text{米}),$$

公交车再用

$$500 \div (750 - 250) = 1(\text{分钟})$$

追上小胡, 共用

$$6 + 1 = 7(\text{分钟}).$$

答: 公交车追上小胡要 7 分钟.

评注 解题有时不是一步就能做完, 需要逐步逼近答案. 例 2 中, 先求出追上 2000 米要多少时间, 再求出追上 500 米(小胡在公交车停靠时间内走的距离)又要多少时间. 合在一起得出追上小胡的时间.

例 3 下雪天, 小赵从家出发步行上学. 10 分钟后, 爸爸发现他忘记带作业本了, 便去追小赵. 走了 4 分钟, 发现小赵留下的足印. 又走了 6 分钟追上小赵. 小赵的足印从踩下到消失(被雪掩盖)需要多少分钟?

分析 爸爸走了 4 分钟, 发现小赵留下的足印(在这前面的足印已被雪掩盖). 应当算出小赵留下这些足印的时间.

解 爸爸用

$$4 + 6 = 10(\text{分钟})$$

追上小赵. 小赵已经行了

$$10 + 10 = 20(\text{分钟}),$$

爸爸的速度是小赵的

$$20 \div 10 = 2(\text{倍}),$$

所以爸爸走 4 分钟的路程, 小赵需

$$4 \times 2 = 8(\text{分钟}),$$

小赵走了 8 分钟时留下的足印,到爸爸发现时已保留了

$$(10 - 8) + 4 = 6(\text{分钟}),$$

而后即被雪掩盖.

答:足印从踩下到消失需 6 分钟.

评注 应用题,首先要仔细读题,弄清题意.例 3 只要弄清题意,其实相当容易.

例 4 4000 米的环形跑道.甲、乙两人同时从起跑线出发,甲每分钟跑 200 米,乙每分钟跑 150 米.经过多长时间,甲第一次从乙身后超过乙?这时各跑了多少米?再经过多长时间,甲第二次超过乙?这时又各跑了多少米?

分析 甲第一次从乙身后超过乙,表明甲比乙多跑 1 圈,即 400 米.第二次超过乙表明甲比乙多跑 2 圈,即 800 米.

解 甲第一次从乙身后超过乙,用了

$$400 \div (200 - 150) = 8(\text{分钟}),$$

这时,甲跑

$$200 \times 8 = 1600(\text{米}),$$

乙跑

$$150 \times 8 = 1200(\text{米}).$$

第二次超过乙,用 $2 \times 8 = 16$ (分钟).这时,甲跑 $2 \times 1600 = 3200$ (米).乙跑 $2 \times 1200 = 2400$ (米).

答:经过 8 分钟,甲第一次从乙身后超过乙.这时甲跑 1600 米,乙跑 1200 米.经过 16 分钟,甲第二次超过乙.这时甲跑 3200 米,乙跑 2400 米.

评注 环形跑道上的追及问题,如果同时同地出发,超过几次就意味多跑几圈.

例 5 A、B 两地相距 1200 千米.甲车从 A 到 B 需 10 小时,乙车从 A 到 B 需 15 小时.甲、乙都从 A 出发,乙先行 2 小时.甲要

走多远才能追上乙?

分析 先求出甲车、乙车的速度.

解 甲车每小时行

$$1200 \div 10 = 120(\text{千米}),$$

乙车每小时行

$$1200 \div 15 = 80(\text{千米}).$$

乙在甲前

$$80 \times 2 = 160(\text{千米}).$$

甲需

$$160 \div (120 - 80) = 4(\text{小时})$$

追上乙. 这时甲行

$$120 \times 4 = 480(\text{千米}).$$

答:甲行 480 千米才能追上乙.

评注 更简单的解法是:甲应走

$$1200 \div (15 - 10) \times 2 = 480(\text{千米}).$$

理由如下:1200 千米,乙比甲多用 $5(= 15 - 10)$ 小时,所以 $(1200 \div 5)$ 千米,乙比甲多用 1 小时. $1200 \div 5 \times 2$ 千米,乙比甲多用 2 小时. 换句话说,甲行 $1200 \div 5 \times 2$ 千米比乙少 2 小时. 乙如果先行 2 小时,那么甲行 $1200 \div 5 \times 2$ 千米正好追上乙.

应当努力寻求更好的解法.

例 6 甲、乙分别从 A、B 同时出发,第一次相遇在距 A 600 米的 C 点. 各自继续前进. 甲到达 B 点后,立即返回,速度降为原来的一半. 乙到达 A 点后,也立即返回,速度降为原来的一半. 第二次在 D 点相遇. D 距 B 100 米. 求 A、B 间的距离.

分析 如果两人速度不变,那么从出发到第二次相遇,两人所

走距离的和是 $3 \times AB$. 因此, 甲走的距离是 600 米的 3 倍. 这在《奥数教程》三年级第 22 讲例 4 中已经讨论过. 现在两人的速度发生变化, 甲走的距离也应发生变化. 变成多少? 这就是本题的关键.

甲从 A 到 B , 乙从 B 到 A , 各用原来的速度走了 1 个全程. 两人合起来走了 2 个全程.

甲由 B 到 D , 乙由 A 到 D , 两人合起来又走了一个全程. 如果两人的速度没有改变, 那么甲应走 $2 \times BD$ 的路程, 乙应走 $2 \times AD$. 两人合起来又走了 2 个全程. 而且甲应走到离 B

$$2 \times 100 = 200(\text{米})$$

的地方. 从出发算起, 甲、乙共走了 4 个全程, 甲走了

$$4 \times 600 = 2400(\text{米}).$$

解 A 、 B 间的距离是

$$4 \times 600 - 2 \times 100 = 2200(\text{米}).$$

问题发生变化, 解答也随之发生变化. 需要灵活应用过去的解法. 分析中的“如果”二字将本题的情况化为过去讨论过的情况. 这种方法值得注意.