



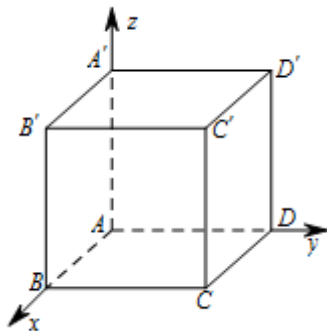
选填压轴-高考必做题

1 已知正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ ，记过点 A 与三条直线 AB ， AD ， AA' 所成角都相等的直线条数为 m ，过点 A 与三个平面 AC ， AB' ， AD' 所成角都相等的直线的条数为 n ，则下面结论正确的是（ ）。

- A. $m = 1, n = 1$ B. $m = 4, n = 1$ C. $m = 3, n = 4$ D. $m = 4, n = 4$

答案 D

解析 以 A 为原点， AB ， AD ， AA' 所在直线分别为 x ， y ， z 轴建立如图所示空间直角坐标系，如图所示，则 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AA'} = (0, 0, 1)$ ，
 设过点 A 与三条直线 AB ， AD ， AA' 所成角都相等的直线的方向向量 $\vec{v} = (x, y, z)$ ，
 根据题意则有 $|x| = |y| = |z|$ ，
 因此方向向量可以为 $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ， $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$ ， $\vec{v}_3 = (1, -1, 1)$ ， $\vec{v}_4 = (1, 1, -1)$ ，故 $m = 4$ ；
 又因为平面 AC ， AB' ， AD' 的法向量分别为 $(0, 0, 1)$ ， $(0, 1, 0)$ ， $(1, 0, 0)$ ，
 设过点 A 与三个平面 AC ， AB' ， AD' 所成角都相等的直线的方向向量 $\vec{p} = (x', y', z')$ ，
 则有 $|x'| = |y'| = |z'|$ ， $\vec{p} = (1, 1, 1)$ ， $\vec{p}_2 = (-1, 1, 1)$ ， $\vec{p}_3 = (1, -1, 1)$ ， $\vec{p}_4 = (1, 1, -1)$ ，故 $n = 4$ 。
 故答案选 D。



考点 一立体几何与空间向量

一立体几何初步

└ 空间几何体



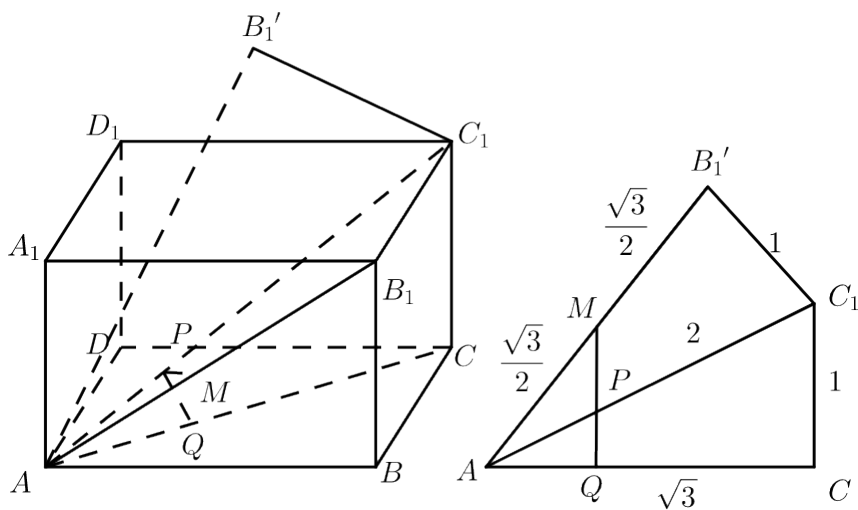
- └ 点、直线、平面间的位置关系
- └ 空间向量
 - └ 空间直角坐标系
 - └ 空间向量及其运算
 - └ 空间向量的应用

2 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = AA_1 = 1$, 点 M 为 AB_1 的中点, 点 P 为对角线 AC_1 上的动点, 点 Q 为底面 $ABCD$ 上的动点, (点 PQ 可以重合), 则 $MP + PQ$ 的最小值为 () .

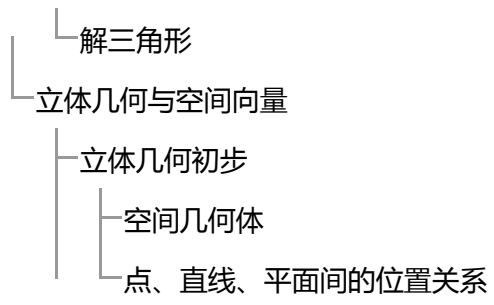
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

答案 C

解析 对角线 AC_1 上的动点 P 到底面 $ABCD$ 上的 Q 点的最小值为点 P 在底面 $ABCD$ 上的投影, 即直线 AC 上, 所以选择确定点 Q , 点 B_1 沿着线 AC_1 旋转, 使得 ACC_1B_1 在一个平面上, 过 AB_1 的中点 M 做 AC 的垂线, 垂足为 Q , MQ 与 AC_1 的交点为 P , 线段 MQ 的长度为我们求的最小值. 由题意长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = AA_1 = 1$ 可得 $\angle B_1AC_1 = \angle CAC_1 = \frac{\pi}{6}$, 则 $\angle MAC_1 = \frac{\pi}{3}$, 另外 $AB_1 = \sqrt{3}$, 则 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$. 故答案为 C .



考点 一三角函数与解三角形





3 在平面直角坐标系中，当 $P(x, y)$ 不是原点时，定义 P 的“伴随点”为 $P' \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$ ；当 P 是原点时，定义 P 的“伴随点”为它自身，平面曲线 C 上所有点的“伴随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”，现有下列命题：

- ① 若点 A 的“伴随点”是点 A' ，则点 A' 的“伴随点”是点 A ；
- ② 单位圆的“伴随曲线”是它自身；
- ③ 若曲线 $C: f(x) - \frac{1}{x} + e^{1-x} > 0$ 关于 x 轴对称，则其“伴随曲线” C' 关于 y 轴对称；
- ④ 一条直线的“伴随曲线”是一条直线。

其中的真命题是 _____（写出所有真命题的序号）。

答案 ②③

解析

$$\text{① 设 } A \text{ 的坐标 } (x, y), \text{ 伴随点 } A' = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right),$$

$$A' \text{ 的伴随点横坐标为 } \frac{\frac{-x}{x^2+y^2}}{\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 + \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right)^2} = -x,$$

同理可得纵坐标为 $-y$ ，

故 $A'' = (-x, -y)$ 。错误；

② 设单位圆上的点 P 的坐标为 $(\cos \theta, \sin \theta)$ ，则 P 的伴随点的坐标为

$$P' = (\sin \theta, -\cos \theta) = \left(\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

所以 P' 也在单位圆上，即： P' 点是 P 点沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 。正确；

③ 设曲线 C 上点 A 的坐标 (x, y) ，其关于 x 轴对称的点 $A_1 = (x, -y)$ 也在曲线 C 上，

$$\text{所以点 } A \text{ 的伴随点 } A' = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right),$$

$$\text{点 } A_1 \text{ 的伴随点 } A_1' = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right), A' \text{ 与 } A_1' \text{ 关于 } y \text{ 轴对称。正确；}$$

④ 反例：例如 $y = 1$ 这条直线，则 $A = (0, 1)$ ， $B = (1, 1)$ ， $C = (2, 1)$ 而这三个点的伴随点分别是 $A' = (1, 0)$ ，

$$B' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), C' = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right) \text{ 而这三个点不在同一直线上}$$

下面给出严格证明：

设点 $P(x, y)$ 在直线 $l: Ax + By + C = 0$ ， P 点的伴随点为 $P' = (x_0, y_0)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} x_0 = \frac{y}{x^2+y^2} \\ y_0 = \frac{-x}{x^2+y^2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{-y_0}{x_0^2+y_0^2} \\ y = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} \end{cases}.$$

$$\text{带入直线方程可知：} A \frac{-y_0}{x_0^2+y_0^2} + B \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} + C = 0,$$



化简得： $-Ay_0 + Bx_0 + C(x_0^2 + y_0^2) = 0$ ，

当 $C = 0$ 时， $C(x_0^2 + y_0^2)$ 是一个常数， P' 的轨迹是一条直线；

当 $C \neq 0$ 时， $C(x_0^2 + y_0^2)$ 不是一个常数， P' 的轨迹不是一条直线。

所以，直线“伴随曲线”不一定是一条直线。错误。

考点

三角函数与解三角形

三角函数

三角函数的定义

解析几何

直线与方程

直线的方程

直线的位置关系

曲线与方程

4

曲线 C 是平面内到定点 $A(1, 0)$ 的距离与到定直线 $x = -1$ 的距离之和为3的动点 P 的轨迹。则曲线 C 与 y 轴交点的坐标是 _____；又已知点 $B(a, 1)$ (a 为常数)，那么 $|PB| + |PA|$ 的最小值 $d(a) =$ _____。

答案

1. $(0, \pm\sqrt{3})$

2. $a + 4$

解析

设点 $P(x, y)$ ，则 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + |x+1| = 3$ ，

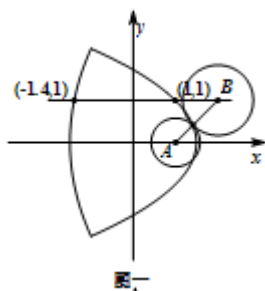
令 $x = 0$ ，可知 $y = \pm\sqrt{3}$ ；

对于第二空，先化解点 P 的轨迹方程

$$y^2 = \begin{cases} -2x + 3, & x \in [-1, \frac{3}{2}] \\ 10x + 15, & x \in [-\frac{3}{2}, -1] \end{cases}$$

$$|PB| + |PA| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

当 $a \geq 1$ 时，如图一：



当 P, A, B 三点共线时，

$$(|PB| + |PA|)_{\min} = |AB| = \sqrt{(a-1)^2 + 1} = \sqrt{a^2 - 2a + 2};$$

同理，当 $a \leq -1.4$ 时， $(|PB| + |PA|)_{\min} = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$ ；

当 $-1 < a < 1$ 时，如图二：

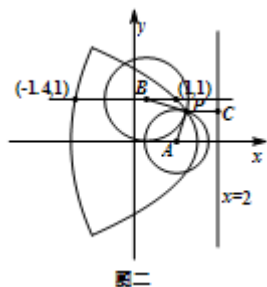
由于点 P 在抛物线（ A 为焦点， $x=2$ 为准线）上，

由定义可知 $PA = PC$ ，

当 P, C, B 三点共线时，

$$(|PB| + |PA|)_{\min} = 2 - a;$$

同理，当 $-1.4 < a \leq -1$ 时，



点 P 在抛物线（ A 为焦点， $x=-4$ 为准线）上，

$$(|PB| + |PA|)_{\min} = a - (-4) = a + 4.$$

考点

一解析几何

—抛物线

—抛物线的定义、图形及标准方程

—抛物线的性质

5 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ （ A, ω, φ 是常数， $A > 0, \omega > 0$ ）. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性，

$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{6})$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.

答案

π



解析

由 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性, $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{6})$ 可知,
 $f(x)$ 有对称中心 $(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}), 0) = (\frac{\pi}{3}, 0)$, 对称轴 $x = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{7\pi}{12}$;
 故 $f(x)$ 的周期为 $4(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = \pi$.

考点

函数与导数

函数

周期性

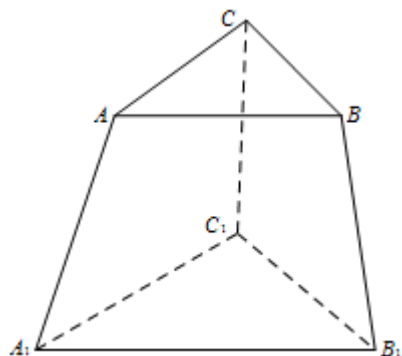
对称性

三角函数与解三角形

三角函数

三角函数图象与性质

- 6 某人有4种颜色的灯泡（每种颜色的灯泡足够多），要在如图所示的6个点 A 、 B 、 C 、 A_1 、 B_1 、 C_1 上各装一个灯泡．要求同一条线段两端的灯泡不同色，则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有 _____ 种．（用数字作答）



答案

216

解析

按照 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A 、 B 、 C 的顺序安装灯泡 A_1 处有4种方法， B_1 处有3种方法， C_1 处有2种方法

（1）当 A 处与 B_1 处不同与 C_1 处相同时， A 处有1种方法，由于装完 B 、 C 后每种颜色的灯泡至少用一个，

因此共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (1 + 2) = 72$ 种．

（2）当 A 处与 B_1 处相同与 C_1 处不同时， A 处有1种方法． B 处有3种方法， C 处有1种方法，

共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 1 = 72$ 种．



(3) 当 A 处与 B_1, C_1 均不相同, A 处有 1 种方法. B, C 处共有 $2 + 1 = 3$ 种方法, 因此, 共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (1 + 2) = 72$ 种.

因此, 由分类计数原理可得共有 $72 + 72 + 72 = 216$ (种) 方法.

考点

一计数原理

—排列与组合

—排列组合的应用

7

记实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的最大数为 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 设 $\triangle ABC$ 的三边边长分别为 a, b, c , 且 $a \leq b \leq c$, 定义 $\triangle ABC$ 的倾斜度为 $t = \max\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} \cdot \min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\}$.

(i) 若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 则 $t =$ _____;

(ii) 设 $a = 1$, 则 t 的取值范围是 _____.

答案

1. 1

2. $[1, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$

解析

(i) 由于 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 且 $a \leq b \leq c$, 因此下列两种情况至少有一种会发生:

若 $a = b$, 则 $t = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = 1$;

若 $b = c$, 则 $t = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$.

因此, t 一定为 1.

(ii) $a = 1$ 时, 由于 $\frac{a}{b} \leq 1, \frac{b}{c} \leq 1, \frac{c}{a} \geq 1$, 因此一定有: $\max\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} = \frac{c}{a} = c$, $\min\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\} = \min\{\frac{1}{b}, \frac{b}{c}\}$.

设 $c = kb, k \geq 1$.

若 $\frac{1}{b} \leq \frac{b}{c}$, 则 $t = c \cdot \frac{1}{b} = k$. 由 $\frac{1}{b} \leq \frac{b}{c}$ 可得 $b^2 \geq c = kb$, 因此 $k \leq b$.

由三角形三边关系可知 $1 + b > kb$, 所以 $b < \frac{1}{k-1}$. 因此 $k \leq b < \frac{1}{k-1}$.

上式中, k 必须满足 $k < \frac{1}{k-1}$, 结合 $k \geq 1$ 可得 $1 \leq k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即 $1 \leq t < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) 若 $\frac{1}{b} > \frac{b}{c}$, 则 $t = c \cdot \frac{b}{c} = b$. 由 $\frac{1}{b} > \frac{b}{c}$ 可得 $b^2 < c$. 将三角形三边关系写为 $k < \frac{1+b}{b}$.

因此 $b < k < \frac{1+b}{b}$.

上式中, b 必须满足 $b < \frac{1+b}{b}$, 结合 $b \geq 1$ 可得 $1 \leq b < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即 $1 \leq t < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

由以上分析可知 $t \in [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.



考点

函数与导数

函数

最值

不等式与线性规划

不等式与不等关系

不等关系

推理与证明

8

已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(1) 判断下列三个命题的真假：

① $f(x)$ 是偶函数；② $f(x) < 1$ ；③ 当 $x = \frac{3}{2}\pi$ 时， $f(x)$ 取得极小值。

其中真命题有 _____；(写出所有真命题的序号)

(2) 满足 $f(\frac{n\pi}{6}) < f(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$ 的正整数 n 的最小值为 _____。

答案

(1) ①②

(2) 9

解析

(1) 证明函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$,当 $x \neq 0$ 时, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$, $\therefore f(x)$ 是偶函数, ①正确;针对 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的性质只须考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时即可,如图: 在单位圆中, $\sin x = MA$, $S_{\triangle OAN} < S_{OAN}$, $\widehat{AN} = l = \frac{l}{r} = l$, $\frac{1}{2}ON \cdot MA < \frac{1}{2}ON \cdot xMA < x$, $\therefore \sin x = MA$, $\therefore \sin x < x \therefore f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1$, ②正确; $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, 令 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0$ 得 $x \cos x - \sin x = 0 \tan x = x$

,

当 $x = \frac{3}{2}\pi$ 时, 不满足 $\tan x = x$, 故当 $x = \frac{3}{2}\pi$ 时, $f(x)$ 取不到极小值, 故③不对,

答案为①②;

(2) 当 $n=1$ 时 $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, $\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 不满足 $f(\frac{n\pi}{6}) < f(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$;当 $n=2$ 时 $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 不满足 $f(\frac{n\pi}{6}) < f(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$;

...



当 $n=8$ 时 $\frac{n\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, 不满足 $f(\frac{n\pi}{6}) < f(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$;
 当 $n=9$ 时 $\frac{n\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$, 满足 $f(\frac{n\pi}{6}) < f(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$;
 故满足 $f(\frac{n\pi}{6}) < f(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$ 的正整数 n 的最小值为9.

考点

函数与导数

函数

最值

单调性

三角函数与解三角形

三角函数

三角函数图象与性质

9 已知函数 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x} (n \in \mathbf{N}^*)$, 关于此函数的说法正确的序号是 _____.

① $f_n(x) (n \in \mathbf{N}^*)$ 为周期函数; ② $f_n(x) (n \in \mathbf{N}^*)$ 有对称轴; ③ $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 为 $f_n(x) (n \in \mathbf{N}^*)$ 的对称中心;
 ; ④ $|f_n(x)| \leq n (n \in \mathbf{N}^*)$.

答案

①②④

解析

$y = \sin x$ 的周期是 2π , $y = \sin nx$ 的周期是 $\frac{2\pi}{n}$;

对于①:

$$\begin{aligned} f_n(x+2\pi) &= \frac{\sin[n(x+2\pi)]}{\sin(x+2\pi)} \\ &= \frac{\sin(nx+n \cdot 2\pi)}{\sin x} = \frac{\sin nx}{\sin x} = f_n(x), \text{①正确;} \end{aligned}$$

对于②:

$$\begin{aligned} f_n(2\pi-x) &= \frac{\sin[n(2\pi-x)]}{\sin(2\pi-x)} = \frac{\sin(n \cdot 2\pi - nx)}{\sin(-x)} \\ &= \frac{\sin(-nx)}{\sin(-x)} = \frac{-\sin nx}{-\sin x} = \frac{\sin nx}{\sin x} = f_n(x), \text{②正确;} \end{aligned}$$

对于③:

(a, b) 为 $f(x)$ 的对称中心的充分必要条件是 $f(x) + f(2a-x) = 2b$; 针对于本题:

$$f_n(x) + f_n(\pi-x) = \frac{\sin nx}{\sin x} + \frac{\sin(n\pi-nx)}{\sin(\pi-x)} = \frac{\sin nx + \sin(n\pi-nx)}{\sin x}$$

当 n 为奇数时,

$$\frac{\sin nx + \sin(n\pi-nx)}{\sin x} = \frac{\sin nx + \sin(\pi-nx)}{\sin x} = \frac{\sin nx + \sin nx}{\sin x} = \frac{2\sin nx}{\sin x} \neq 0;$$



当 n 为偶数时, $\frac{\sin nx + \sin(n\pi - nx)}{\sin x} = \frac{\sin nx + \sin(-nx)}{\sin x} = \frac{\sin nx - \sin nx}{\sin x} = 0$. ③错

误;

对于④:

我们采用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时, $f_1(x) = \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \leq 1$, 命题成立;

假设 $n=k$ 时命题成立, 即 $\left| \frac{\sin kx}{\sin x} \right| \leq k$;

当 $n=k+1$ 时, $\left| \frac{\sin[(k+1)x]}{\sin x} \right| = \left| \frac{\sin(kx+x)}{\sin x} \right| = \left| \frac{\sin kx \cos x + \cos kx \sin x}{\sin x} \right|$
 $= \left| \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \cos x + \cos kx \right| \leq \left| \frac{\sin kx}{\sin x} \cdot \cos x \right| + |\cos kx| \leq |k \cdot 1| + |1| = k+1$

命题仍然成立.

综上, ④正确.

考点

函数与导数

— 函数

— 值域

— 函数的概念与表示

— 最值

— 周期性

— 对称性

— 三角函数与解三角形

— 三角函数

— 三角函数图象与性质

10 对于各数互不相等的整数数组 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$, (n 是不小于3的正整数), 对于任意的 p ,

$q \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, 当 $p < q$ 时有 $i_p > i_q$, 则称 i_p, i_q 是该数组的一个“逆序”, 一个数组中所有“逆序”的个数称为该数组的“逆序数”, 则数组 $(2, 4, 3, 1)$ 中的逆序数等于 _____; 若数组 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ 中的逆序数为 n , 则数组 $(i_n, i_{n-1}, \dots, i_1)$ 中的逆序数为 _____.

答案

1. 4

2. $\frac{n^2 - 3n}{2}$

解析

由题意知数组 $(2, 4, 3, 1)$ 中的逆序有 $2, 1; 4, 1; 3, 1; 4, 3$,



∴逆序数是4，

∴若数组 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ 中的逆序数为 n ，

∴这个数组中可以组成 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个数对，

∴数组 $(i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1)$ 中的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$ 。

考点

集合与常用逻辑用语

— 集合与集合的表示方法

— 集合的概念

— 集合的表示方法

推理与证明

— 合情推理和演绎推理

— 合情推理

11 已知函数 $f(x) = e^{-|x|} + \cos \pi x$ ，给出下列命题：

① $f(x)$ 的最大值为2；

② $f(x)$ 在 $(-10, 10)$ 内的零点之和为0；

③ $f(x)$ 的任何一个极大值都大于1。

其中所有正确命题的序号是 _____。

答案

①②③

解析

$f(x) = e^{-|x|} + \cos \pi x$ ， $e^{-|x|} \leq e^0 = 1$ ， $\cos \pi x \leq 1$ ，

∴ $f(x) \leq 2$ ，当且仅当 $x = 0$ 时取得，①正确；

$f(x)$ 是偶函数，∴ $f(x)$ 的零点（如果有的话）必然成对出现，②正确；

由对称性，我们只研究 $x < 0$ 的情况，此时 $f(x) = e^x + \cos \pi x$ ，

$f'(x) = e^x - \pi \sin \pi x$ ，分别作出 $y = e^x$ 和 $y = \pi \sin \pi x$ 的图像，

可以发现，二者在 $(-2n, -2n+1)$ ($n \in \mathbf{N}_+$)内有两个交点，记为 x_{2n} ， x_{2n-1} ，设

$x_{2n} < x_{2n-1}$ ，

进一步有 $-2n < x_{2n} < -2n + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbf{N}_+$)， x_{2n} 为极大值点，

$f(x_{2n+1}) = e^{x_{2n}} + \cos \pi x_{2n} = \pi \sin \pi x_{2n} + \cos \pi x_{2n} > \sin \pi x_{2n} + \cos \pi x_{2n} = \sqrt{2} \sin\left(\pi x_{2n} + \frac{\pi}{4}\right)$

,



$$\begin{aligned} \because -2n < x_{2n} < -2n + \frac{1}{2}, \\ \therefore -2n\pi + \frac{\pi}{4} < \pi x_{2n} + \frac{\pi}{4} < -2n\pi + \frac{3}{4}\pi, \\ \therefore \sin\left(\pi x_{2n} + \frac{3}{4}\pi\right) &\in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \\ \therefore f(x_{2n}) &> \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \\ \therefore \text{③正确.} \end{aligned}$$

考点

一函数与导数

└ 函数的模型及其应用

12 在平面直角坐标系中，定义 $d(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 为两点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 之间的“折线距离”。则

(1) 到坐标原点 O 的“折线距离”不超过 2 的点的集合所构成的平面图形面积是 _____。

(2) 坐标原点 O 与直线 $2x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 上任意一点的“折线距离”的最小值是 _____。

答案

(1) 8

(2) $\sqrt{3}$

解析

(1) 根据题意，到坐标原点 O 的“折线距离”不超过 2 的点 $P(x, y)$ 满足等式

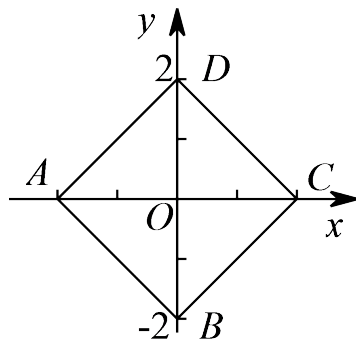
$$d(P, 0) = |x - 0| + |y - 0| \leq 2,$$

即 $|x| + |y| \leq 2$ ，对应的图形是以原点为中心，

各个顶点在坐标轴上且其对角线长为 4 的正方形

及其内部，

如图所示，所求图形面积 $S = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ 。



(2) 设直线 $2x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 上点 Q 坐标为

$$(m, 2m - 2\sqrt{3}),$$

所以坐标原点 O 与点 Q 的“折线距离”为

$$d(O, Q) = |m - 0| + |2m - 2\sqrt{3} - 0|$$

$$= |m| + 2|m - \sqrt{3}|,$$

当 $m \geq \sqrt{3}$ 时， $d(O, Q) = 3m - 2\sqrt{3}$ ，为关于 m 的增函数，

此时 $d(O, Q)_{\min} = \sqrt{3}$ 。



当 $0 < m < \sqrt{3}$ 时, $d(0, Q) = 2\sqrt{3} - m$, 关于 m 的减函数,

此时 $d(0, Q)_{\min} > \sqrt{3}$.

当 $m \leq 0$ 时, $d(0, Q) = 2\sqrt{3} - 3m$ 为关于 m 的减函数,

此时 $d(0, Q)_{\min} = 2\sqrt{3}$, 综上所述,

O 与直线 $2x - y - 2\sqrt{3} = 0$ 上任意一点的“折线距离”的最小值是 $\sqrt{3}$.

考点

一解析几何

— 直线与方程

— 直线的倾斜角与斜率

— 直线的位置关系

13 已知函数 $y = f(x)$, 任取 $t \in \mathbb{R}$, 定义集合: $A_t = \{y | y = f(x), \text{点 } P(t, f(t)), Q(x, f(x)) \text{ 满足 } |PQ| \leq \sqrt{2}\}$. 设 M_t, m_t 分别表示集合 A_t 中元素的最大值和最小值, 记 $h(t) = M_t - m_t$. 则

(1) 若函数 $f(x) = x$, 则 $h(1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, 则 $h(t)$ 的最小正周期为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案

1. 2

2. 2

解析

(1) 若函数 $f(x) = x$, 则点 $P(t, t), Q(x, x)$,

$$\because |PQ| \leq \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{(x-t)^2 + (x-t)^2} \leq \sqrt{2},$$

$$\text{化简可得 } |x-t| \leq 1, -1 \leq x-t \leq 1,$$

$$\text{即 } 1-t \leq x \leq t+1, \text{ 即 } M_t = 1+t, m_t = 1-t,$$

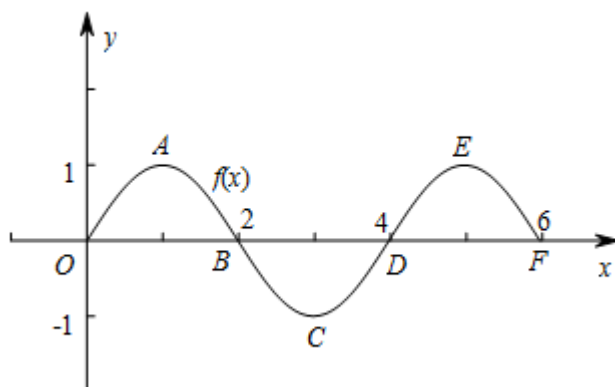
$$\therefore h(t) = M_t - m_t,$$

$$h(1) = (1+1) - (1-1) = 2.$$

(2) 若函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, 此时,

函数的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, 点 $P\left(t, \sin \frac{\pi t}{2}\right), Q\left(x, \sin \frac{\pi x}{2}\right)$,

如图所示: 当点 P 在 A 点时, 点 O 在曲线 OAB 上,



$$M_t = 1, m_t = 0, h(t) = M_t - m_t = 1.$$

当点 P 在曲线上从 A 接近 B 时,

$h(t)$ 逐渐增大, 当点 P 在 B 点时,

$$M_t = 1, m_t = -1, h(t) = M_t - m_t = 2.$$

当点 P 在曲线上从 B 接近 C 时,

$h(t)$ 逐渐减小, 当点 P 在 C 点时,

$$M_t = 1, m_t = 0, h(t) = M_t - m_t = 1.$$

当点 P 在曲线上从 C 接近 D 时,

$h(t)$ 逐渐增大, 当点 P 在 D 点时,

$$M_t = 1, m_t = -1, h(t) = M_t - m_t = 2.$$

当点 P 在曲线上从 D 接近 E 时,

$h(t)$ 逐渐减小, 当点 P 在 E 点时,

$$M_t = 1, m_t = 0, h(t) = M_t - m_t = 1.$$

...依此类推, 发现 $h(t)$ 的最小正周期为2.

故答案为2; 2.

考点

集合与常用逻辑用语

— 集合与集合的表示方法

— 集合的表示方法

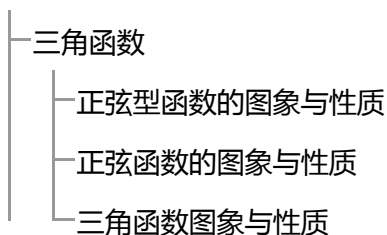
— 函数与导数

— 函数

— 最值

— 周期性

— 三角函数与解三角形



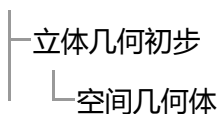
14 有一个棱长为1的正方体，按任意方向正投影，其投影面积的最大值是（ ）。

- A. 1 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

答案 D

解析 因为是按任意方向正投影，
可以让面（设为桌面）定下来，正方体在动；
因此可以想象当正方体体对角线垂直于桌面时，
其在桌面上的投影是个正六边形，此时面积最大；
由于一个顶点到体对角线的距离为 $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ，
所以投影正六边形的对角线长为 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ，
其面积可以看成6个边长为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 的正三角形
的面积和： $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{3}$ 。
故选D。

考点 一立体几何与空间向量



15 在下列命题中：

- ①存在一个平面与正方体的12条棱所成的角都相等；
- ②存在一个平面与正方体的6个面所成较小的二面角都相等；
- ③存在一条直线与正方体的12条棱所成的角都相等；
- ④存在一条直线与正方体的6个面所成的角都相等。

其中真命题的个数为（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

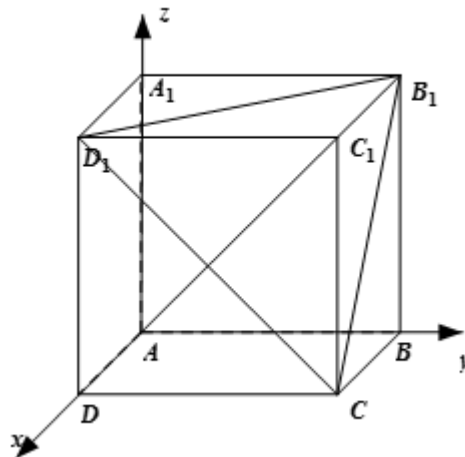
答案 D

解析 ①如图：平面 CB_1D_1 满足题意，

由共线向量的性质可知，平面与正方体的12条棱所成的角

只需验证该平面与3条棱（ AB ， AD ， AA_1 ）成角即可；

平面 CB_1D_1 的法向量 $\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1)$ ，
 $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$



所以，该平面与3条棱（ AB ， AD ， AA_1 ）成角的正弦值分别为

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意；

②平面 CB_1D_1 满足题意，

平面与正方体的6个面所成较小的二面角只需验证该平面

与3个平面（平面 $ABCD$ ，平面 ADD_1A_1 ，平面 AA_1B_1B ）成角即可；

平面 CB_1D_1 的法向量 $\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1)$ ，平面 ADD_1A_1 的法向量 $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ ，

平面 AA_1B_1B 的法向量 $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 0)$ ，平面 $ABCD$ 的法向量 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$ ，

所以，该平面与3个平面（平面 $ABCD$ ，平面 ADD_1A_1 ，平面 AA_1B_1B ）

所成较小的二面角的余弦值分别为

$$\left| \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意；



③如图：直线 AC_1 满足题意，

由共线向量的性质可知，直线与正方体的12条棱所成的角

只需验证该直线与3条棱（ AB ， AD ， AA_1 ）成角即可；

$$\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0), \overrightarrow{AD} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1),$$

所以，该直线与3条棱（ AB ， AD ， AA_1 ）成角的余弦值分别为

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意；

④直线 AC_1 满足题意，

直线与正方体的6个面所成角只需验证该直线

与3个平面（平面 $ABCD$ ，平面 ADD_1A_1 ，平面 AA_1B_1B ）成角即可；

$$\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1), \text{平面} ADD_1A_1 \text{的法向量} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0),$$

$$\text{平面} AA_1B_1B \text{的法向量} \overrightarrow{AD} = (1, 0, 0), \text{平面} ABCD \text{的法向量} \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1),$$

所以，该直线与3个平面（平面 $ABCD$ ，平面 ADD_1A_1 ，平面 AA_1B_1B ）

所成角的正弦值分别为

$$\left| \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意。

故答案选D。

考点

一立体几何与空间向量

—立体几何初步

—空间几何体

—点、直线、平面间的位置关系

—空间向量

—空间直角坐标系



16 已知函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ ，任取 $t \in \mathbf{R}$ ，定义集合： $A_t = \{y | y = f(x), \text{点 } P(t, f(t)), Q(x, f(x)) \text{ 满足}$

$|PQ| \leq \sqrt{2}\}$ 。设 M_t, m_t 分别表示集合 A_t 中元素的最大值和最小值，记 $h(t) = M_t - m_t$ 。则

(1) 函数 $h(t)$ 的最大值是 _____；

(2) 函数 $h(t)$ 的单调递增区间为 _____。

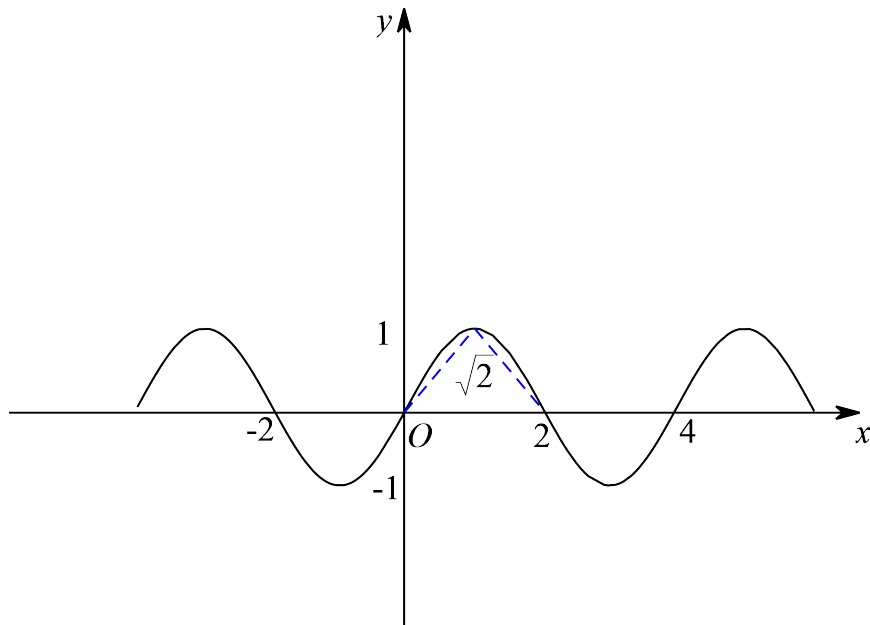
答案

1. 2

2. $(2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$

解析

由函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 图象可知， P 点在 $(0, 0)$ 时，



对应 $|PQ| \leq \sqrt{2}$ 的 Q 点坐标的最高点为 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ，最低点为 $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ ，

此两点也是函数的最高和最低点，

由此可知 $h(t)_{\max} = h(0) = M_0 - m_0 = 1 - (-1) = 2$ 。

同理可得 $t = 2k, k \in \mathbf{Z}$ 时， $h(t)$ 取得最大值 2。

依理，当 $t = 2k-1, k \in \mathbf{Z}$ 时， $h(t)$ 取得最小值 1，

即 $h(t)_{\min} = h(1) = M_1 - m_1 = 1 - 0 = 1$ 。

所以函数 $h(t)$ 的单调递增区间为 $(2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$ ，

故答案为 2， $(2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$ 。



考点

- 集合与常用逻辑用语
 - 集合与集合的表示方法
 - 集合的表示方法
- 函数与导数
 - 函数
 - 函数的概念与表示
 - 最值
- 三角函数与解三角形
 - 三角函数
 - 三角函数图象与性质

- 17 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上可导的奇函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 已知 $x > 0$ 时 $f(x) < f'(x)$, $f(1) = e$, 不等式 $0 < f(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) \leq e^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}$ 的解集为 M , 则在 M 上 $g(x) = \sin 6x$ 的零点的个数为 _____.

答案 2

解析

根据题意, 设 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 其导数 $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

又由当 $x > 0$ 时 $f(x) < f'(x)$, 则 $h'(x) > 0$, 则函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

又由 $f(1) = e$, 则 $h(1) = \frac{f(1)}{e^1} = 1$,

又由 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上可导的奇函数, 则有 $f(0) = 0$, 则 $h(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 0$,

则当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$, 则有 $f(x) > 0$,

又由函数 $f(x)$ 为奇函数, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 则有 $h(x) < 0$,

$0 < f(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) \leq e^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \Rightarrow 0 < \frac{f[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]}{e^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}} \leq 1$

$\Rightarrow h(0) < h[\ln(x + \sqrt{1+x^2})] \leq h(1) \Rightarrow 0 < \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \leq 1$,

即 $1 < x + \sqrt{1+x^2} \leq e$,

解可得: $0 < x \leq \frac{e^2 - 1}{2e}$,

即不等式的解集为 $\left(0, \frac{e^2 - 1}{2e}\right]$, 即 $M = \left(0, \frac{e^2 - 1}{2e}\right]$,

而 $g(x) = \sin 6x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

而 $\frac{\pi}{3} < \frac{e^2 - 1}{2e} < \frac{\pi}{2}$,

在 M 上, $g(x) = \sin 6x$, 有 2 个零点, 即 $\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{3}$.



故答案为：2 .

考点

一函数与导数

函数

└ 奇偶性

函数与方程

└ 函数的零点

导数及其应用

└ 利用导数研究函数的单调性

- 18 已知 $\triangle ABC$ ，若存在 $\triangle A_1B_1C_1$ ，满足 $\frac{\cos A}{\sin A_1} = \frac{\cos B}{\sin B_1} = \frac{\cos C}{\sin C_1} = 1$ ，则称 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 的一个“友好”三角形．(i) 在满足下述条件的三角形中，存在“友好”三角形的是 _____：(请写出符合要求的条件的序号)
- ① $A = 90^\circ$ ， $B = 60^\circ$ ， $C = 30^\circ$ ；② $A = 75^\circ$ ， $B = 60^\circ$ ， $C = 45^\circ$ ；③ $A = 75^\circ$ ， $B = 75^\circ$ ， $C = 30^\circ$ ．
- (ii) 若 $\triangle ABC$ 存在“友好”三角形，且 $A = 70^\circ$ ，则另外两个角的度数分别为 _____．

答案

1 . ②

2 . 45° 和 65°

解析

根据题意可知： $\cos A = \sin A_1$ ， $\cos B = \sin B_1$ ， $\cos C = \sin C_1$ ，

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，正弦值均为正数，因此 $\cos A$ ， $\cos B$ ， $\cos C$ 均为正数，

所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，若 $\triangle A_1B_1C_1$ 也为锐角三角形，

$$\text{则有 } \cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A_1,$$

$$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B_1,$$

$$\cos C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \sin C_1,$$

$$\text{那么, } \frac{\pi}{2} - A = A_1, \frac{\pi}{2} - B = B_1, \frac{\pi}{2} - C = C_1,$$

$$\text{三式相加得: } \frac{3\pi}{2} - \pi = \pi, \text{ 等式不成立,}$$

因此若 $\triangle A_1B_1C_1$ 只能为钝角三角形．

因此在(i)中，①不对；

而③中，若存在“友好”三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ ，则 $A_1 = B_1 = 15^\circ$ ， $C_1 = 120^\circ$ 与已知矛盾；

对于②，存在 $\triangle A_1B_1C_1$ 为“友好”三角形，如 $A_1 = 15^\circ$ ， $B_1 = 30^\circ$ ， $C_1 = 135^\circ$ ．



(ii) 中, 若 $\triangle ABC$ 存在“友好”三角形, $A = 70^\circ$, 不妨设角 C_1 为钝角.

根据上述论断则有 $A_1 = 20^\circ$, $90^\circ - B = B_1$, $90^\circ + C = C_1$,

解得 $B - C = 20^\circ$, 因为 $B + C = 110^\circ$, 所以 $B = 65^\circ$, $C = 45^\circ$

故答案为: ②, 45° 和 65° .

考点

一三角函数与解三角形

— 解三角形

— 解三角形的应用

19 已知点 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$)的焦点, 点 K 为点 F 关于原点的对称点, 点 M 在抛物线 C 上, 则下列说法错误的是().

- A. 使得 $\triangle MFK$ 为等腰三角形的点 M 有且仅有4个
- B. 使得 $\triangle MFK$ 为直角三角形的点 M 有且仅有4个
- C. 使得 $\angle MKF = \frac{\pi}{4}$ 的点 M 有且仅有4个
- D. 使得 $\angle MKF = \frac{\pi}{6}$ 的点 M 有且仅有4个

答案

C

解析

选项A, 以 K 为圆心, KF 为半径作圆, 与抛物线有两个交点, 当 M 在这两个交点处, $KF = KM$, $\triangle MFK$ 为等腰三角形;

以 F 为圆心, FK 为半径作圆, 与抛物线有两个交点, 当 M 在这两个交点处, $FK = FM$, $\triangle MFK$ 为等腰三角形;

故使得 $\triangle MFK$ 为直角三角形的点 M 有4个, A正确.

选项B, 以 KF 为直径作圆与抛物线有两个交点, 当 M 在这两个交点处, $\angle KMF$ 为直角,

过点 F 作垂直于 x 轴的直线与抛物线有两个交点, 当 M 在这两个交点处, $\angle KFM$ 为直角,

故使得 $\triangle MFK$ 为直角三角形的点 M 有4个, B正确.

选项C、D, 易知 $K(-\frac{p}{2}, 0)$, 不妨设过点 K 的直线 l 方程为 $y = k(x + \frac{p}{2})$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = k(x + \frac{p}{2}) \end{cases}$, 消去 y 得 $k^2x^2 + (pk^2 - 2p)x - \frac{p^2k^2}{4} = 0$,



$$\Delta = (pk^2 - 2p)^2 - 4k^2 \cdot \frac{p^2 k^2}{4} \geq 0,$$

化简得 $4 - 4k^2 \geq 0$,

解得 $-1 \leq k \leq 1$,

当 $\angle MKF = \frac{\pi}{4}$ 时, 即 $k = \pm 1$, $\Delta = 0$, 此时直线与抛物线相切,

故使得 $\angle MKF = \frac{\pi}{4}$ 的点 M 只有 2 点, 故 C 错误;

当 $\angle MKF = \frac{\pi}{6}$ 时, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\Delta > 0$, 此时直线与抛物线相交且有两交点,

故使得 $\angle MKF = \frac{\pi}{6}$ 的点 M 只有 4 点, 故 D 正确;

综上, 选 C.

考点

一解析几何

— 直线与圆锥曲线

— 直线与圆锥曲线的位置关系

- 20 如图展示了一个由区间 $(0, 1)$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射过程: 区间 $(0, 1)$ 中的实数 m 对应数轴上的点 M , 如图1: 将线段 AB 围成一个圆, 使两端点 A, B 恰好重合, 如图2: 再将这个圆放在平面直角坐标系中, 使其圆心在 y 轴上, 点 A 的坐标为 $(0, 1)$, 如图3, 图3中直线 AM 与 x 轴交于点 $N(n, 0)$, 则 m 的象就是 n , 记作 $f(m) = n$.

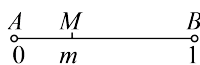


图1

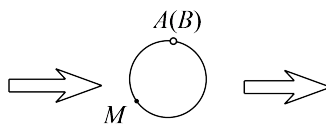


图2

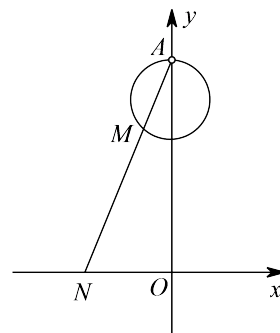


图3

(1) 方程 $f(x) = 0$ 的解是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 下列说法中正确命题的序号是 . (填出所有正命题的序号)

① $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$; ② $f(x)$ 是奇函数; ③ $f(x)$ 在定义域上单调递增; ④ $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

对称.

答案

(1) $\frac{1}{2}$



(2) ③④

解析

(1) 如图, 因为 M 在以 $\left(0, 1 - \frac{1}{2\pi}\right)$ 为圆心, $\frac{1}{2\pi}$ 为半径的圆上运动,方程 $f(x) = 0$, 即 $N(0, 0)$, M 在 A 的正下方,即有 AM 的弧长为 $\frac{1}{2}$, 即 $m = \frac{1}{2}$,解得 $x = \frac{1}{2}$.(2) 对于①, 当 $m = \frac{1}{4}$ 时, $M\left(-\frac{1}{2\pi}, 1 - \frac{1}{2\pi}\right)$,直线 AM 方程 $y = x + 1$, $\therefore N$ 为 $(-1, 0)$, 故 $f\left(\frac{1}{4}\right) = -1$, ①错误;②因为实数 m 所在区间 $(0, 1)$ 不关于原点对称, $\therefore f(x)$ 不存在奇偶性, ②错误;③当实数 m 越来越大时,如图直线 AM 与 x 轴的交点 $N(n, 0)$ 也越来越往右,即 n 也越来越大, 所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增, ③正确;④当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 对应的点在点 A 的正下方, 此时点 $N(0, 0)$, $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,再由图形可知 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 对称, ④正确;⑤当 $f(x) = \sqrt{3}$ 时, $N(\sqrt{3}, 0)$, 直线 $AN: x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$,代入圆方程 $x^2 + \left(y - 1 + \frac{1}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2}$,求得 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}, 1 - \frac{1}{4\pi}\right)$, $AM = \frac{1}{2\pi}$, AM 的弧长为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$,由③可得解集是 $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$, ⑤错误.

故③④正确.

考点

一函数与导数

一函数

└ 函数的概念与表示

└ 映射



- 单调性
- 奇偶性
- 对称性

21 由无理数引发的数学危机一直延续到19世纪，直到1872年，德国数学家戴德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数（史称戴德金分割），并把实数理论建立在严格的科学基础上，才结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续2000多年的数学史上的第一次大危机．所谓戴德金分割，是指将有理数集 $\mathbf{Q}$ 划分为两个非空的子集 M 与 N ，且满足 $M \cup N = \mathbf{Q}$ ， $M \cap N = \emptyset$ ， M 中的每一个元素都小于 N 中的每一个元素，则称 (M, N) 为戴德金分割．试判断，对于任一戴德金分割 (M, N) ，下列选项中，不可能成立的是（ ）．

- A. M 没有最大元素， N 有一个最小元素 B. M 有一个最大元素， N 有一个最小元素
C. M 没有最大元素， N 中没有最小元素 D. M 有一个最大元素， N 没有最小元素

答案 B

解析 若 $M = \{x \in \mathbf{Q} | x < 0\}$ ， $N = \{x \in \mathbf{Q} | x \geq 0\}$ ，
则 M 没有最大元素， N 有最小元素0，故A正确，
若 $M = \{x \in \mathbf{Q} | x < \sqrt{2}\}$ ， $N = \{x \in \mathbf{Q} | x \geq \sqrt{2}\}$ ，
则 M 没有最大元素， N 也没有最小元素，故C正确，
 M 有一个最大元素， N 有最小元素不可能，故B不正确，
若 $M = \{x \in \mathbf{Q} | x \leq 0\}$ ， $N = \{x \in \mathbf{Q} | x > 0\}$ ，
 M 有一个最大元素， N 没有最小元素，D正确，故选B．

考点

- 集合与常用逻辑用语
 - 集合与集合的表示方法
 - 集合的表示方法
 - 集合之间的关系与运算
 - 集合之间的关系
- 推理与证明
 - 合情推理和演绎推理
 - 合情推理



22 数列 $\{a_n\}$ 中, 如果存在 a_k , 使得“ $a_k > a_{k-1}$ 且 $a_k > a_{k+1}$ ”成立(其中 $k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*$), 则称 a_k 为 $\{a_n\}$ 的一个峰值.

(1) 若 $a_n = -3n^2 + 11n$, 则 $\{a_n\}$ 的峰值为 _____.

(2) 若 $a_n = t \ln n - n$, 且 $\{a_n\}$ 不存在峰值, 则实数 t 的取值范围是 _____.

答案 (1) 10

(2) $\{t | t \leq \frac{1}{\ln 2} \text{ 或 } t = \frac{1}{\ln(\frac{n+1}{n})}, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2\}$

解析

(1) 若 $a_n = -3n^2 + 11n$ 可以令 $f(n) = -3n^2 + 11n$,

图象开口向下, 可得 $f(n) = -3n^2 + 11n = -3(n - \frac{11}{6})^2 + \frac{121}{12}$

可以存在 $n = 2$ 使得 $a_2 = -3 \times 4 + 11 \times 2 = 10$ 对于任意的 $n \in \mathbf{N}$ 都有,

$a_n \leq 10$ 可得 $\{a_n\}$ 的峰值为10.

(2) 若 $a_n = t \ln n - n, a_1 = -1, a_2 = t \ln 2 - 2, a_3 = t \ln 3 - 3, a_k = t \ln k - k$

可以令 $g(x) = t \ln x - x, g'(x) = \frac{t}{x} - 1 = \frac{t-x}{x}, (x > t)$,

若 $a_n = t \ln n - n$, 且 a_n 不存在峰值, 即不存在先增后减的情况,

即 $a_1 \geq a_2, -1 \geq t \ln 2 - 2$ 解得 $t \leq \frac{1}{\ln 2}$,

还有另外一种情况, 后面每一项在 t 的调节下都相等, a_n 不存在峰值.

即 $a_n = a_{n+1}$ 所以 $t \ln n - n = t \ln(n+1) - (n+1)$, 解得 $t = \frac{1}{\ln(\frac{n+1}{n})}, n \geq 2,$

$n \in \mathbf{N}^*$

综上, $\{t | t \leq \frac{1}{\ln 2} \text{ 或 } t = \frac{1}{\ln(\frac{n+1}{n})}, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2\}$.

考点

函数与导数

—二次函数

└二次函数的概念、图象和性质

—导数及其应用

└利用导数求函数的极值与最值

—数列

—数列的应用

└数列的单调性和最值



设正数 x, y 满足 $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 y = m, (m \in [-1, 1])$, 若不等式 $3ax^2 - 18xy + (2a + 3)y^2 \geq (x - y)^2$ 有解, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $\left(1, \frac{55}{29}\right]$

B. $\left(1, \frac{31}{21}\right]$

C. $\left[\frac{31}{21}, +\infty\right)$

D. $\left[\frac{55}{29}, +\infty\right)$

答案 C

解析

$$\because \log_3 \frac{1}{x} + \log_3 y = m, \text{ 即 } \log_3 \frac{y}{x} = m,$$

$$\therefore \frac{y}{x} = 3^m, \because m \in [-1, 1], \therefore \frac{y}{x} \in \left[\frac{1}{3}, 3\right].$$

$$\because 3ax^2 - 18xy + (2a + 3)y^2 \geq (x - y)^2,$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = t, \text{ 则 } 2(a + 1)t^2 - 16t + 3a - 1 \geq 0,$$

$$\text{设 } f(t) = 2(a + 1)t^2 - 16t + 3a - 1,$$

$$\because \text{不等式 } 3ax^2 - 18xy + (2a + 3)y^2 \geq (x - y)^2 \text{ 有解},$$

$$\therefore f(t) \text{ 在 } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \text{ 上的最大值 } f_{\max}(x) \geq 0,$$

$$(1) \text{ 当 } a = -1 \text{ 时}, f(t) = -16t - 4,$$

$$\therefore f_{\max}(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{3} - 4 < 0, \text{ 不符合题意},$$

$$(2) \text{ 若 } a < -1, \text{ 则 } f(t) \text{ 开口向下, 对称轴为 } t = 0,$$

$$\therefore f(t) \text{ 在 } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \text{ 上单调递减},$$

$$\therefore f_{\max}(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -6 < 0, \text{ 不符合题意},$$

$$(3) \text{ 若 } a > -1, \text{ 则 } f(t) \text{ 开口向上, 对称轴为 } t = \frac{4}{a+1} > 0,$$

$$(i) \text{ 若 } 0 < \frac{4}{a+1} \leq \frac{1}{3}, \text{ 即 } a \geq 11 \text{ 时}, f(t) \text{ 在 } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore f_{\max}(t) = f(3) = 21a - 31 > 0, \text{ 符合题意},$$

$$(ii) \text{ 若 } \frac{4}{a+1} \geq 3, \text{ 即 } -1 < a \leq \frac{1}{3} \text{ 时}, f(t) \text{ 在 } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore f_{\max}(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29a}{9} - 6 \leq \frac{29}{27} - 6 < 0, \text{ 不符合题意},$$

$$(iii) \text{ 若 } \frac{1}{3} < 3, \text{ 即 } \frac{1}{3} < a < 11 \text{ 时}, f(t) \text{ 在 } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore f_{\max}(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ 或 } f_{\max}(t) = f(3),$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = -6 \geq 0 \text{ 或 } f(3) = 21a - 31 > 0,$$

$$\text{解得 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } a \geq \frac{31}{21}, \text{ 又 } \frac{1}{3} < a < 11,$$

$$\therefore \frac{31}{21} \leq a < 11,$$

$$\text{综上, } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{31}{21}, +\infty\right).$$



故选：C．

考点

一函数与导数

—二次函数

└二次函数与分类讨论

—对数函数

└对数函数的概念、图象及其性质

24 设直线系 $M: x \cos \theta + (y - 2) \sin \theta = 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)，对于下列四个命题：

- ① M 中所有直线均经过一个定点；
- ② 存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上；
- ③ 对于任意整数 n ($n \geq 3$)，存在正 n 边形，其所有边均在 M 中的直线上；
- ④ M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等．

其中真命题的代号是 _____（写出所有真命题的代号）．

答案

②③④

解析

根据直线系 $M: x \cos \theta + (y - 2) \sin \theta = 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

得到所有直线都是圆心为 $(0, 2)$ ，半径为 1 的圆的切线，故所有的直线与一个圆相切，没有过定点，所以①错；

存在 $(0, 2)$ 不在 M 中的任一条直线上，所以②正确；

由于圆的外切正 n 边形所有的边都在直线系 M 中，所以③正确；

M 中的直线所能围成的正三角形的面积一定相等，由它们是同一个圆的外切正三角形可判断出，所以④正确，

故选②③④．

考点

一解析几何

—直线与方程

└直线的方程

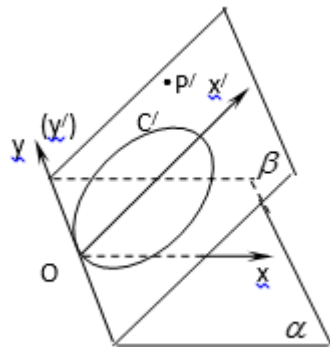
25



如图，直角坐标系 xOy 所在的平面为 α ，直角坐标系 $x'Oy'$ （其中 y' 轴与 y 轴重合）所在的平面为 β ， $\angle xOx' = 45^\circ$ 。

（ I ）已知平面 β 内有一点 $P' (2\sqrt{2}, 2)$ ，则点 P' 在平面 α 内的射影 P 的坐标为 _____ ；

（ II ）已知平面 β 内的曲线 C' 的方程是 $(x' - \sqrt{2})^2 + 2y'^2 - 2 = 0$ ，则曲线 C' 在平面 α 内的射影 C 的方程是 _____ 。



答案

1 . $(2, 2)$

2 . $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

解析

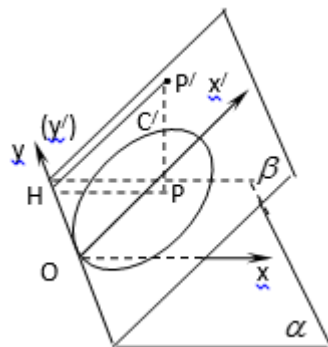
（ I ）设点 P' 在平面 α 内的射影 P 的坐标为 (x, y) ，则点 P 的纵坐标和 $P' (2\sqrt{2}, 2)$ 纵坐标相同，所以 $y = 2$ ，过点 P' 作 $P'H \perp Oy$ ，垂足为 H ，连结 PH ，则 $\angle P'HP = 45^\circ$ ， P 横坐标

$$x = PH = P'H \cos 45^\circ = x' \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 ,$$

所以点 P' 在平面 α 内的射影 P 的坐标为 $(2, 2)$ ；

（ II ）由（ I ）得 $x = x' \cos 45^\circ = x' \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $y' = y$ ，所以 $\begin{cases} x' = \sqrt{2}x \\ y' = y \end{cases}$ 代入曲线 C' 的方程 $(x' - \sqrt{2})^2 + 2y'^2 - 2 = 0$ ，得 $(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + 2y^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$ 。

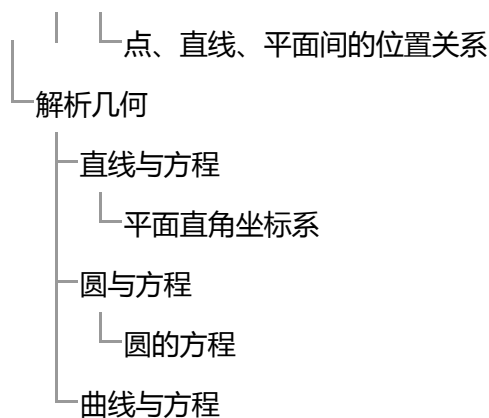
故答案为 $(2, 2)$ ， $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 。



考点

一立体几何与空间向量

一立体几何初步



26 已知 $x \in \mathbb{R}$ ，定义： $A(x)$ 表示不小于 x 的最小整数．如 $A(\sqrt{3}) = 2$ ， $A(-1.2) = -1$ ．

若 $A(2x+1) = 3$ ，则 x 的取值范围是 _____；

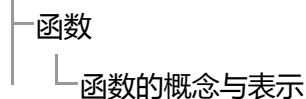
若 $x > 0$ 且 $A(2x \cdot A(x)) = 5$ ，则 x 的取值范围是 _____．

答案

1. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
2. $\left(1, \frac{5}{4}\right]$

解析 (1)由题意有 $2 < 2x+1 \leq 3$ ，解得 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ ．(2)由 $A(x)$ 的定义有 $x \leq A(x) < x+1$ ，即 $A(x)-1 < x \leq A(x)$ ，且 $A(x) \geq 1$ ．由题设有 $4 < 2x \cdot A(x) \leq 5$ ，则 $4 < 2xA(x) \leq 2[A(x)]^2 \Rightarrow A(x) > \sqrt{2}$ ，且 $5 \geq 2xA(x) > 2(A(x)-1)A(x)$ ，解得 $A(x) \leq \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ ，所以 $\sqrt{2} < A(x) \leq \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ ，结合 $A(x)$ 为整数，得 $A(x) = 2$ ，代入 $4 < 2x \cdot A(x) \leq 5$ ，解得 $1 < x \leq \frac{5}{4}$ ．

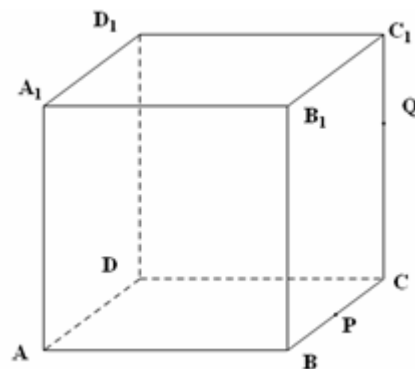
考点 一函数与导数



27 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1， P 为 BC 的中点， Q 为线段 CC_1 上的动点，过点 A ， P ， Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S ．则下列命题正确的是 _____．（写出所有正确命题的编号）

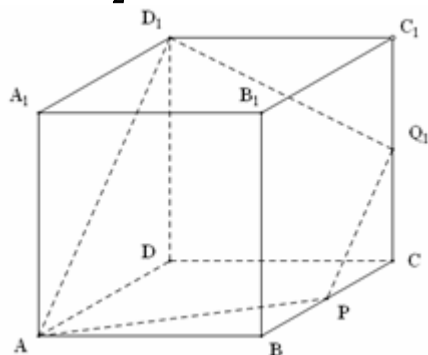


- ① $0 < CQ < \frac{1}{2}$ 时, S 为四边形;
 ② $CQ = \frac{1}{2}$ 时, S 为等腰梯形;
 ③ 当 $CQ = \frac{3}{4}$ 时, S 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R = \frac{1}{3}$;
 ④ 当 $\frac{3}{4} < CQ < 1$ 时, S 为六边形;
 ⑤ 当 $CQ = 1$ 时, S 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

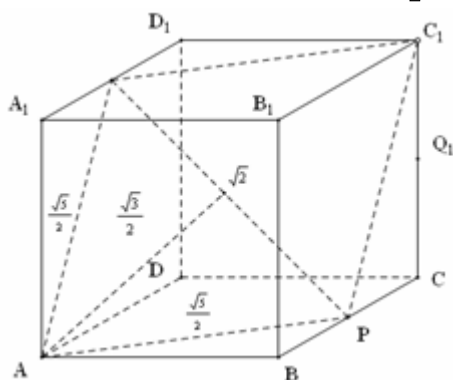


答案 ①②③⑤

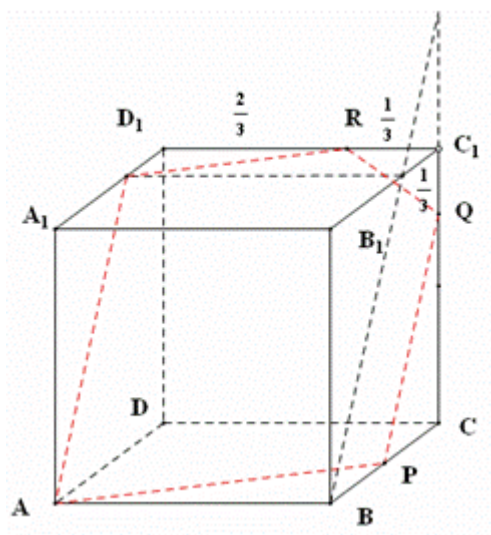
解析 (1) $CQ = \frac{1}{2}$ 时, S 为等腰梯形, ②正确, 图如下:



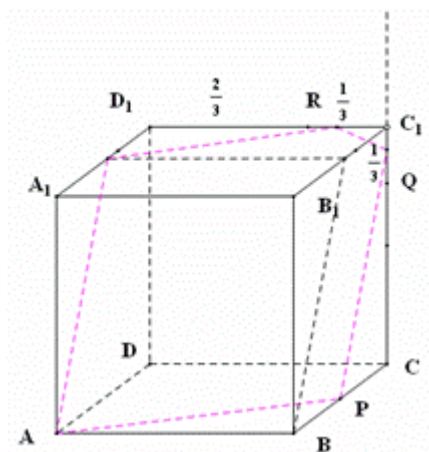
(2) 当 $CQ = 1$ 时, S 的面积为 $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, ⑤正确, 图如下:



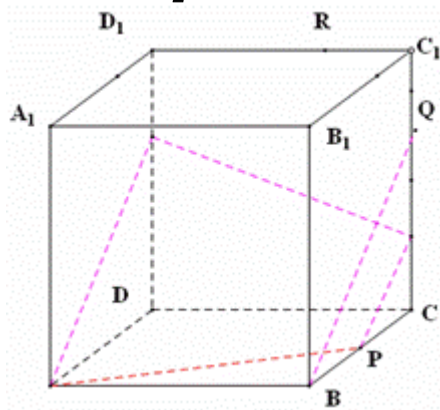
(3) 当 $CQ = \frac{3}{4}$ 时, $C_1R = \frac{1}{3}$, ③正确, 图如下:



(4) 当 $\frac{3}{4} < CQ < 1$ 时, S 为五边形, 如图, 所以④错误.



(5) $0 < CQ < \frac{1}{2}$ 时, S 为四边形, 故①正确.



考点 一 立体几何与空间向量

— 立体几何初步

— 空间几何体



对定义在区间 D 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，如果对任意 $x \in D$ ，都有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$ 成立，那么称函数 $f(x)$ 在区间 D 上可被 $G(x)$ 替代， D 称为“替代区间”。给出以下命题：

- ① $f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上可被 $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ 替代；
 ② $f(x) = x$ 可被 $g(x) = 1 - \frac{1}{4x}$ 替代的一个“替代区间”为 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$ ；
 ③ $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1, e]$ 可被 $g(x) = x - b$ 替代，则 $e - 2 \leq b \leq 2$ ；
 ④ $f(x) = \lg(ax^2 + x)$ ($x \in D_1$)， $g(x) = \sin x$ ($x \in D_2$)，则存在实数 a ($a \neq 0$)，使得 $f(x)$ 在区间 $D_1 \cap D_2$ 上被 $g(x)$ 替代；

其中真命题的有 _____。

答案 ①②③

解析

$$\textcircled{1} \because |f(x) - g(x)| = \frac{1}{2} < 1 ;$$

$f(x)$ 可被 $g(x)$ 替代；

$\therefore$ 该命题为真命题；

$$\textcircled{2} |f(x) - g(x)| = \left| x + \frac{1}{4x} - 1 \right| ;$$

$$\text{设 } h(x) = x + \frac{1}{4x} - 1, h'(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x^2} ;$$

$$\therefore x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \text{ 时, } h'(x) < 0, x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \text{ 时, } h'(x) > 0 ;$$

$$\therefore h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ 是 } h(x) \text{ 的最小值, 又 } h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} ;$$

$$\therefore |f(x) - g(x)| < 1 ;$$

$$\therefore f(x) \text{ 可被 } g(x) \text{ 替代的一个替代区间为 } \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right] ;$$

$\therefore$ 该命题是真命题；

$$\textcircled{3} \text{ 由题意知: } |f(x) - g(x)| = |\ln x - x + b| \leq 1 \text{ 在 } x \in [1, e] \text{ 上恒成立 ;}$$

$$\text{设 } h(x) = \ln x - x + b, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1-x}{x} ;$$

$$\because x \in [1, e] ;$$

$$\therefore h'(x) \leq 0 ;$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } [1, e] \text{ 上单调递减 ;}$$

$$h(1) = b - 1, h(e) = 1 - e + b ;$$

$$1 - e + b \leq h(e) \leq b - 1 ;$$

$$\text{又 } -1 \leq h(x) \leq 1 ;$$



$$\therefore \begin{cases} 1 - e + b \geq 1 \\ b - 1 \leq 1 \end{cases};$$

$$\therefore e - 2 \leq b \leq 2;$$

$\therefore$ 该命题为真命题；

④1) 若 $a > 0$, 解 $ax^2 + x > 0$ 得, $x < -\frac{1}{a}$, 或 $x > 0$;

可取 $D_1 = (0, +\infty)$, $D_2 = \mathbf{R}$;

$$\therefore D_1 \cap D_2 = (0, +\infty);$$

可取 $x = \pi$, 则 $|f(x) - g(x)| = a\pi^2 + \pi > 1$;

$\therefore$ 不存在实数 $a(a > 0)$, 使得 $f(x)$ 在区间 $D_1 \cap D_2$ 上被 $g(x)$ 替代;

2) 若 $a < 0$, 解 $ax^2 + x > 0$ 得, $x < 0$, 或 $x > -\frac{1}{a}$;

$\therefore$ 可取 $D_1 = (-\infty, 0)$, $D_2 = \mathbf{R}$;

$$\therefore D_1 \cap D_2 = (-\infty, 0);$$

取 $x = -\pi$, 则 $|f(-\pi) - g(-\pi)| = |a\pi^2 - \pi| > 1$;

$\therefore$ 不存在实数 $a(a < 0)$, 使得 $f(x)$ 在区间 $D_1 \cap D_2$ 上被 $g(x)$ 替代;

综上得, 不存在实数 $a(a \neq 0)$, 使得 $f(x)$ 在区间 $D_1 \cap D_2$ 上被 $g(x)$ 替代;

$\therefore$ 该命题为假命题;

$\therefore$ 真命题的有: ①②③.

故答案为: ①②③.

考点

集合与常用逻辑用语

常用逻辑用语

命题的概念

四种命题的相互关系

函数与导数

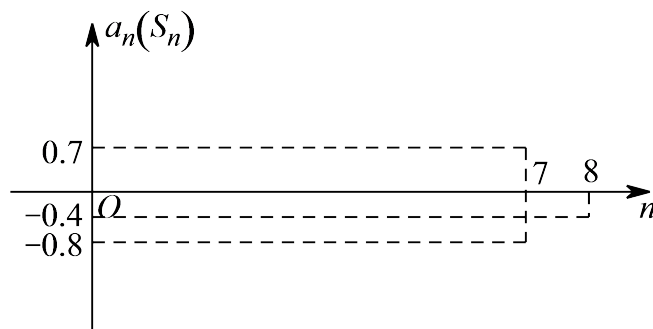
导数及其应用

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

29 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 在同一个坐标系中, $a_n = f(n)$ 及 $S_n = g(n)$ 的部分图象如图所示, 则 ().



A. 当 $n = 4$ 时, S_n 取得最大值

B. 当 $n = 3$ 时, S_n 取得最大值

C. 当 $n = 4$ 时, S_n 取得最小值

D. 当 $n = 3$ 时, S_n 取得最小

答案 A

解析

由图象可知可能: ① $a_7 = 0.7$, $S_7 = -0.8$, $a_8 = -0.4$,

由 $a_7 = 0.7$, $a_8 = -0.4$, 可得 $d = -1.1$, $a_1 = 7.3$.

$\therefore S_7 = \frac{7(7.3 + 0.7)}{2} > 0$, 与 $S_7 = -0.8$, 矛盾, 舍去.

② $a_7 = 0.7$, $S_7 = -0.8$, $S_8 = -0.4$.

由 $S_7 = -0.8$, $S_8 = -0.4$, 可得 $a_8 = 0.4$,

$\therefore \frac{8(a_1 + 0.4)}{2} = -0.4$, 解得 $a_1 = -0.5$,

$\therefore a_8 = -0.5 + 7d$, 解得 $d = \frac{9}{70} \neq 0.4 - 0.7 = -0.3$, 矛盾, 舍去.

③ $a_7 = -0.8$, $S_7 = 0.7$, $a_8 = -0.4$.

由 $a_7 = -0.8$, $S_7 = 0.7$, 可得 $\frac{7(a_1 - 0.8)}{2} = 0.7$, 解得 $a_1 = 1$,

$\therefore -0.8 = 1 + 6d$, 解得 $d = -0.3$, 而 $-0.4 - (-0.8) = 0.4$, 矛盾, 舍去.

④ $a_7 = -0.8$, $S_7 = 0.7$, $S_8 = -0.4$.

由 $a_7 = -0.8$, $S_7 = 0.7$, 可得 $\frac{7(a_1 - 0.8)}{2} = 0.7$, 解得 $a_1 = 1$,

$\therefore -0.8 = 1 + 6d$, 解得 $d = -0.3$, $\therefore a_8 = -0.8 - 0.3 = -1.1$,

$\therefore S_8 = 0.7 - 1.1 = -0.4$, 满足条件.

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 1 - 0.3(n-1) = 1.3 - 0.3n \geq 0$,

解得 $n \leq \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$,

因此当 $n = 4$ 时, S_n 取得最大值.

故选A.



考点

—数列

—等差数列

—等差数列的概念和通项

—等差数列的前n项和

30 设 l_1, l_2, l_3 为空间中三条互相平行且两两间的距离分别为4, 5, 6的直线. 给出下列三个结论:

① $\exists A_i \in l_i (i = 1, 2, 3)$, 使得 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 是直角三角形;

② $\exists A_i \in l_i (i = 1, 2, 3)$, 使得 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 是等边三角形;

③三条直线上存在四点 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 使得四面体 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 为在一个顶点处的三条棱两两互相垂直的四面体.

其中, 所有正确结论的序号是 ().

A. ①

B. ①②

C. ①③

D. ②③

答案

B

解析

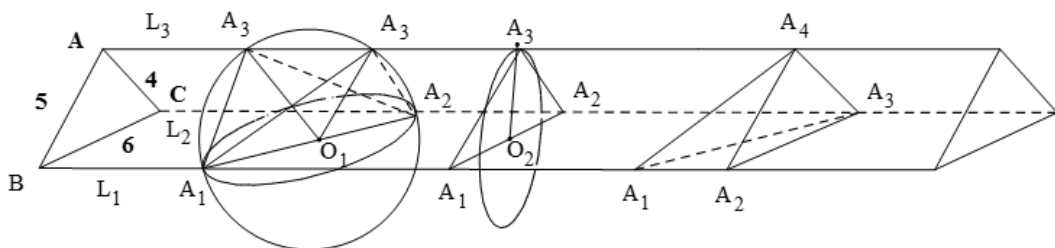
由条件, 可以构造一个侧棱长度不限, 底面 $\triangle ABC$ 边长为4, 5, 6的直三棱柱, 设底面 $\triangle ABC$ 高为 h .

①正确. 在 l_1 上取 A_1 , l_2 上取 A_2 , 以 $A_1 A_2$ 为直径做球体, 可知必存在一球体可交 l_3 于 A_3 , 由球体性质可知 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 是直角三角形;

②正确. 在 l_1 上取 A_1 , l_2 上取 A_2 , 以 $A_1 A_2$ 中点 O 为圆心, 以 $\frac{\sqrt{3}}{2} |A_1 A_2|$ 为半径并且所在面垂直于 $A_1 A_2$ 做圆. 变化 $A_1 A_2$ 长度, 可知一定存在一圆可交 l_3 于 A_3 , 则 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 是等边三角形;

③错误. 假设 $A_1 A_2$ 在 l_1 上, A_3 在 l_2 上, A_4 在 l_3 上, $A_1 A_2 \perp A_3 A_2$, $A_1 A_2 \perp A_4 A_2$, $A_4 A_2 \perp A_3 A_2$, 可知 $\triangle A_2 A_3 A_4$ 与直三棱柱的侧棱垂直, $\triangle A_2 A_3 A_4$ 全等于 $\triangle ABC$, 因为 $\triangle A_2 A_3 A_4$ 为直角三角形, 与边长为4, 5, 6的 $\triangle ABC$ 形状矛盾, 则此结论错误.

选答案B.





考点

一立体几何与空间向量

—立体几何初步

—空间几何体

—点、直线、平面间的位置关系

—空间中的平行