选填压轴-高考必做题

1 已知正方体$ABCD-A'B'C'D'$，记过点A与三条直线AB，AD，AA'所成角都相等的直线条数为m，过点A与三个平面AC，AB'，AD'所成角都相等的直线的条数为n，则下面结论正确的是（　　）．

A. $m=1$，$n=1$　　B. $m=4$，$n=1$　　C. $m=3$，$n=4$　　D. $m=4$，$n=4$

2 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=AA_1=1$，点M为AB_1的中点，点P为对角线AC_1上的动点，点Q为底面$ABCD$上的动点，（点PQ可以重合），则$MP+PQ$的最小值为（　　）．

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

3 在平面直角坐标系中，当$P(x,\ y)$不是原点时，定义P的“伴随点”为$P'\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$；当$P$是原点时，定义$P$的“伴随点”为它自身，平面曲线$C$上所有点的“伴随点”所构成的曲线$C'$定义为曲线$C$的“伴随曲线”，现有下列命题：

① 若点A的“伴随点”是点A'，则点A'的“伴随点”是点A；

② 单位圆的“伴随曲线”是它自身；

③ 若曲线C：$f(x)-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{1-x}>0$关于$x$轴对称，则其“伴随曲线”$C'$关于$y$轴对称；

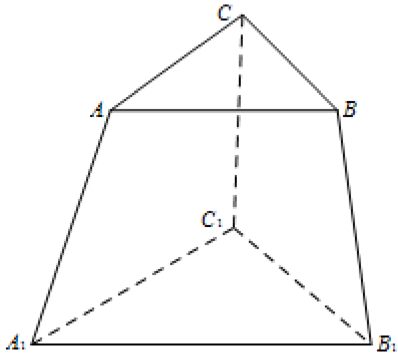
④ 一条直线的“伴随曲线”是一条直线．

其中的真命题是 ______ （写出所有真命题的序号）．

4 曲线C是平面内到定点$A(1,0)$的距离与到定直线$x=-1$的距离之和为3的动点P的轨迹．则曲线C与y轴交点的坐标是 ______ ；又已知点$B(a,1)$（a为常数），那么$|PB|+|PA|$的最小值$d(a)=$ ______ ．

5 设函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A,\omega,\varphi$是常数，$A>0$，$\omega>0$）．$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上具有单调性，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则$f(x)$的最小正周期为__________．

6 某人有4种颜色的灯泡（每种颜色的灯泡足够多），要在如图所示的6个点A、B、C、A_1、B_1、C_1上各装一个灯泡．要求同一条线段两端的灯泡不同色，则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有 ______ 种．（用数字作答）



7 记实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$中的最大数为$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，最小数为$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$．设$\triangle ABC$的三边边长分别为$a,b,c$，且$a\leqslant b\leqslant c$，定义$\triangle ABC$的倾斜度为$t=\max\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\}\cdot\min\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\}$．

（ⅰ）若$\triangle ABC$为等腰三角形，则$t=$ ______ ；

（ⅱ）设$a=1$，则t的取值范围是 ______ ．

8 已知函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$

（1）判断下列三个命题的真假：

①$f(x)$是偶函数；②$f(x)<1$；③当$x=\frac{3}{2}\pi$时，$f(x)$取得极小值．

其中真命题有 ______ ；（写出所有真命题的序号）

（2）满足$f(\frac{n\pi}{6})<f(\frac{n\pi}{6}+\frac{\pi}{6})$的正整数$n$的最小值为 ______ ．

9 已知函数$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}(n\in\mathbf{N}^*)$，关于此函数的说法正确的序号是 ______ ．

①$f_n(x)\ (n\in\mathbf{N}^*)$为周期函数；②$f_n(x)\ (n\in\mathbf{N}^*)$有对称轴；③$(\frac{\pi}{2},0)$为$f_n(x)\ (n\in\mathbf{N}^*)$的对称中心；④$|f_n(x)|\leqslant n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

10 对于各数互不相等的整数数组$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$，（n是不小于3的正整数），对于任意的p，$q\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，当$p<q$时有$i_p>i_q,i_n)$，则称i_p，i_q是该数组的一个“逆序”，一个数组中所有“逆序”的个数称为该数组的“逆序数”，则数组$(2,4,3,1)$中的逆序数等于 ______ ；若数组$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$中的逆序数为n，则数组$(i_n,i_{n-1},\cdots,i_1)$中的逆序数为 ______ ．

11 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}+\cos\pi x$，给出下列命题：

①$f(x)$的最大值为2；

②$f(x)$在$(-10,10)$内的零点之和为0；

③$f(x)$的任何一个极大值都大于1．

其中所有正确命题的序号是 ______ ．

12 在平面直角坐标系中，定义$d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$为两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$之间的“折线距离”．则

（1）到坐标原点O的“折线距离”不超过2的点的集合所构成的平面图形面积是 ______ ．

（2）坐标原点O与直线$2x-y-2\sqrt{3}=0$上任意一点的“折线距离”的最小值是 ______ ．

13 已知函数$y=f(x)$，任取$t\in\mathrm{R}$，定义集合：$A_t=\{y|y=f(x)$，点$P(t,f(t))$，$Q(x,f(x))$满足$|PQ|\leqslant\sqrt{2}\}$．设M_t，m_t分别表示集合A_t中元素的最大值和最小值，记$h(t)=M_t-m_t$．则

（1）若函数$f(x)=x$，则$h(1)=$ ______ ；

（2）若函数$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，则$h(t)$的最小正周期为 ______ ．

14 有一个棱长为1的正方体，按任意方向正投影，其投影面积的最大值是（　）．

A. 1　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

15 在下列命题中：

①存在一个平面与正方体的12条棱所成的角都相等；

②存在一个平面与正方体的6个面所成较小的二面角都相等；

③存在一条直线与正方体的12条棱所成的角都相等；

④存在一条直线与正方体的6个面所成的角都相等．

其中真命题的个数为（　）．

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

16

已知函数$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，任取$t\in\mathbf{R}$，定义集合：$A_t=\{y|y=f(x)$，点$P(t,f(t))$，$Q(x,f(x))$满足$|PQ|\leqslant\sqrt{2}\}$．设M_t,m_t分别表示集合A_t中元素的最大值和最小值，记$h(t)=M_t-m_t$．则

（1）函数$h(t)$的最大值是 ______ ；

（2）函数$h(t)$的单调递增区间为 ______ ．

17 $f(x)$是$\mathbf{R}$上可导的奇函数，$f'(x)$是$f(x)$的导函数．已知$x>0$时$f(x)<f'(x)$，$f(1)=\mathrm{e}$，不等式$0<f(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))\leqslant \mathrm{e}^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$的解集为$M$，则在$M$上$g(x)=\sin 6x$的零点的个数为 ______ ．

18 已知$\triangle ABC$，若存在$\triangle A_1B_1C_1$，满足$\frac{\cos A}{\sin A_1}=\frac{\cos B}{\sin B_1}=\frac{\cos C}{\sin C_1}=1$，则称$\triangle A_1B_1C_1$是$\triangle ABC$的一个“友好”三角形．(i) 在满足下述条件的三角形中，存在“友好”三角形的是 ______ ：（请写出符合要求的条件的序号）

①$A=90^\circ$，$B=60^\circ$，$C=30^\circ$；②$A=75^\circ$，$B=60^\circ$，$C=45^\circ$；③$A=75^\circ$，$B=75^\circ$，$C=30^\circ$．

(ii) 若$\triangle ABC$存在“友好”三角形，且$A=70^\circ$，则另外两个角的度数分别为 ______ ．

19 已知点F为抛物线C：$y^2=2px\ (p>0)$的焦点，点K为点F关于原点的对称点，点M在抛物线C上，则下列说法错误的是（　）．

A. 使得ΔMFK为等腰三角形的点M有且仅有4个

B. 使得ΔMFK为直角三角形的点M有且仅有4个

C. 使得$\angle MKF=\frac{\pi}{4}$的点M有且仅有4个

D. 使得$\angle MKF=\frac{\pi}{6}$的点M有且仅有4个

20 如图展示了一个由区间$(0,1)$到实数集$\mathbf{R}$的映射过程：区间$(0,1)$中的实数m对应数轴上的点M，如图1：将线段AB围成一个圆，使两端点A，B恰好重合，如图2：再将这个圆放在平面直角坐标系中，使其圆心在y轴上，点A的坐标为$(0,1)$，如图3，图3中直线AM与x轴交于点$N(n,0)$，则m的象就是n，记作$f(m)=n$．

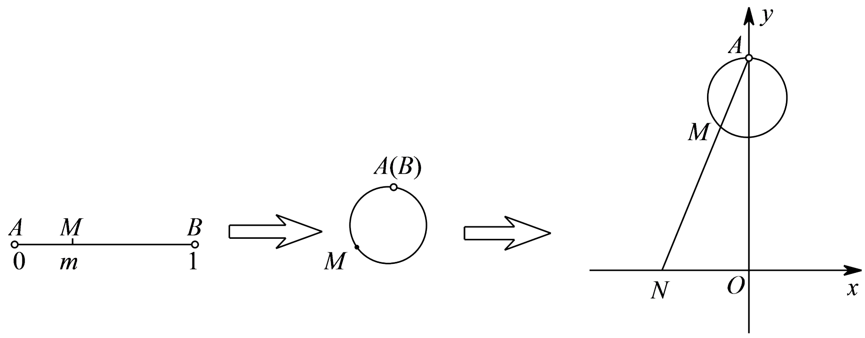


图1　　图2　　图3

（1）方程$f(x)=0$的解是$x=$______．

（2）下列说法中正确命题的序号是______．（填出所有正命题的序号）

①$f\left(\frac{1}{4}\right)=1$；②$f(x)$是奇函数；③$f(x)$在定义域上单调递增；④$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{1}{2},0\right)$对称．

21 由无理数引发的数学危机一直延续到19世纪，直到1872年，德国数学家戴德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数（史称戴德金分割），并把实数理论建立在严格的科学基础上，才结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续2000多年的数学史上的第一次大危机．所谓戴德金分割，是指将有理数集$\mathbf{Q}$划分为两个非空的子集M与N，且满足$M\cup N=\mathbf{Q}$, $M\cap N=\varnothing$，M中的每一个元素都小于N中的每一个元素，则称(M,N)为戴德金分割．试判断，对于任一戴德金分割(M,N)，下列选项中，不可能成立的是（　）．

A. M没有最大元素，N有一个最小元素

B. M有一个最大元素，N有一个最小元素

C. M没有最大元素，N中没有最小元素

D. M有一个最大元素，N没有最小元素

22 数列$\{a_n\}$中，如果存在a_k，使得“$a_k>a_{k-1}$且$a_k>a_{k+1}$”成立（其中$k\geqslant 2$，$k\in N^*$），则称a_k为$\{a_n\}$的一个峰值．

（1）若$a_n=-3n^2+11n$，则$\{a_n\}$的峰值为______．

（2）若$a_n=t\ln n-n$，且$\{a_n\}$不存在峰值，则实数t的取值范围是______．

23 设正数x，y满足$\log_3\frac{1}{x}+\log_3 y=m,(m\in[-1,1])$，若不等式$3ax^2-18xy+(2a+3)y^2\geqslant(x-y)^2$有解，则实数$a$的取值范围是（　　）．

A. $\left(1,\frac{55}{29}\right]$　　B. $\left(1,\frac{31}{21}\right]$　　C. $\left[\frac{31}{21},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{55}{29},+\infty\right)$

24 设直线系M：$x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$），对于下列四个命题：

①M中所有直线均经过一个定点；

②存在定点P不在M中的任一条直线上；

③对于任意整数n（$n\geqslant 3$），存在正n边形，其所有边均在M中的直线上；

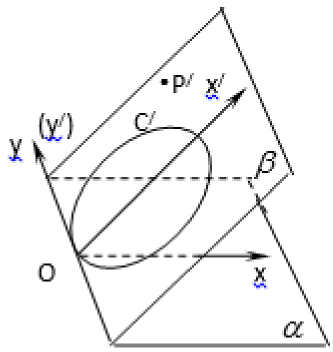
④M中的直线所能围成的正三角形面积都相等．

其中真命题的代号是 ______ （写出所有真命题的代号）．

25 如图，直角坐标系xOy所在的平面为α，直角坐标系$x'Oy'$（其中y'轴与y轴重合）所在的平面为β，$\angle xOx'=45^0$．

（Ⅰ）已知平面β内有一点P' $(2\sqrt{2},2)$，则点P'在平面α内的射影P的坐标为 ______ ；

（Ⅱ）已知平面β内的曲线C'的方程是$(x'-\sqrt{2})^2+2y'^2-2=0$，则曲线$C'$在平面$\alpha$内的射影$C$的方程是 ______ ．



26 已知$x\in R$，定义：$A(x)$表示不小于x的最小整数．如$A(\sqrt{3})=2$，$A(-1.2)=-1$．

若$A(2x+1)=3$，则x的取值范围是 ______ ；

若$x>0$且$A(2x\cdot A(x))=5$，则x的取值范围是 ______ ．

27 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P为BC的中点，Q为线段CC_1上的动点，过点A，P，Q的平面截该正方体所得的截面记为S．则下列命题正确的是 ______ ．（写出所有正确命题的编号）

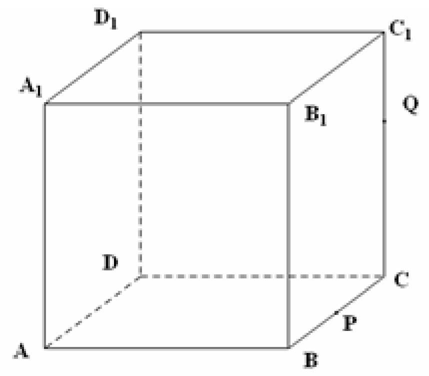
①$0<CQ<\frac{1}{2}$时，S为四边形；

②$CQ=\frac{1}{2}$时，S为等腰梯形；

③当$CQ=\frac{3}{4}$时，S与C_1D_1的交点R满足$C_1R=\frac{1}{3}$；

④当$\frac{3}{4}<CQ<1$时，S为六边形；

⑤当$CQ=1$时，S的面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$．



28 对定义在区间D上的函数$f(x)$和$g(x)$，如果对任意$x\in D$，都有$|f(x)-g(x)|\leqslant 1$成立，那么称函数$f(x)$在区间D上可被$G(X)$替代，D称为“替代区间”．给出以下命题：

①$f(x)=x^2+1$在区间$(-\infty,+\infty)$上可被$g(x)=x^2+\frac{1}{2}$替代；

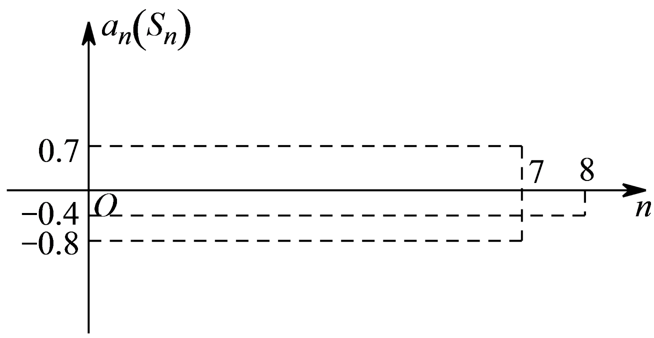
②$f(x)=x$可被$g(x)=1-\frac{1}{4x}$替代的一个“替代区间”为$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]$；

③$f(x)=\ln x$在区间$[1,\mathrm{e}]$可被$g(x)=x-b$替代，则$\mathrm{e}-2\leqslant b\leqslant 2$；

④$f(x)=\lg(ax^2+x)(x\in D_1)$，$g(x)=\sin x(x\in D_2)$，则存在实数$a(a\neq 0)$，使得$f(x)$在区间$D_1\cap D_2$上被$g(x)$替代；

其中真命题的有 ______ ．

29 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．在同一个坐标系中，$a_n=f(n)$及$S_n=g(n)$的部分图象如图所示，则（　）．



A. 当$n=4$时，S_n取得最大值

B. 当$n=3$时，S_n取得最大值

C. 当$n=4$时，S_n取得最小值

D. 当$n=3$时，S_n取得最小

30 设l_1,l_2,l_3为空间中三条互相平行且两两间的距离分别为4，5，6的直线．给出下列三个结论：

①$\exists A_i \in l_i(i=1,2,3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是直角三角形；

②$\exists A_i \in l_i(i=1,2,3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是等边三角形；

③三条直线上存在四点$A_i(i=1,2,3,4)$，使得四面体$A_1A_2A_3A_4$为在一个顶点处的三条棱两两互相垂直的四面体．

其中，所有正确结论的序号是（　　）．

A. ①　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③