统计概率-高考必做题

1 2017年冬，北京雾霾天数明显减少．据环保局统计三个月的空气质量，达到优良的天数超过70天，重度污染的天数仅有4天．主要原因是政府对治理雾霾采取了有效措施，如：①减少机动车尾气排放．②实施了煤改电或煤改气工程．③关停了大量的排污企业．④部分企业季节性的停产．为了解农村地区实施煤改气工程后天燃气使用情况，从某乡镇随机抽取100户，进行月均用气量调查，得到的用气量数据（单位：千立方米）均在区间$(0,5]$内，将数据按区间列表如下：

分组	频数	频率
$(0,1]$	14	0.14
$(1,2]$	x	m
$(2,3]$	55	0.55
$(3,4]$	4	0.04
$(4,5]$	2	0.02
合计	100	1

（1）求表中x，m的值，若同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计该乡镇每户月平均用气量．

（2）从用气量在区间$(3,4]$和区间$(4,5]$的用户中任选3户，进行燃气使用的满意度调查，求这3户用气量处于不同区间的概率．

（3）若将频率看成概率，从该乡镇中任意选出了3户，用X表示用气量在区间$(1,3]$内的户数，求X的分布列和期望．

答案 （1）2.05．

（2）$\frac{4}{5}$．

（3）答案见解析．

解析 （1）$x=100-75=25$，$m=\frac{25}{100}=0.25$， 估计该村每户平均用气量为：$\frac{0.5\times14+1.5\times25+2.5\times55+3.5\times4+4.5\times2}{100}=2.05$．

（2）设$A=$“这3户用气量处于不同区间”，则

$$P(A)=\frac{C_4^2C_2^1+C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

（3）X的可能取值为0，1，2，3，则

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{4}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

$$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{4}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$$

$$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{64}{125}$$

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

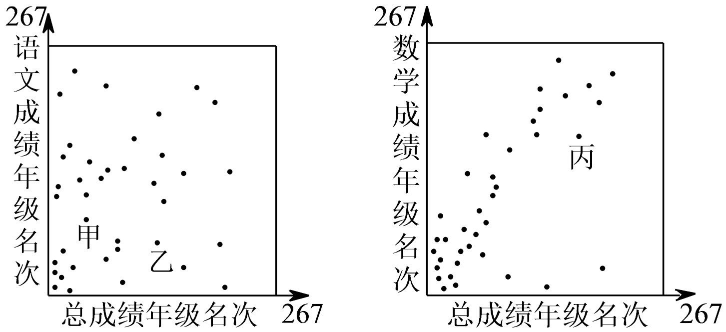
$$EX=0\times\frac{1}{125}+1\times\frac{12}{125}+2\times\frac{48}{125}+3\times\frac{64}{125}=\frac{12}{5}$$

或$X\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$，所以$EX=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$．

考点

- 统计
  - 用样本估计总体
    - 频率分布表、直方图、折线图
    - 用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征
- 概率
  - 事件与概率
    - 古典概型
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列
    - n次重复试验与二项分布
    - 取有限值的离散型随机变量的均值、方差
- 计数原理
  - 加法原理、乘法原理
    - 分类加法计数原理、分步乘法计数原理
  - 排列与组合
    - 组合问题

高三年级267位学生参加期末考试，某班37位学生的语文成绩，数学成绩与总成绩在全年级中的排名情况如图所示，甲、乙、丙为该班三位学生．



从这次考试成绩看，

①在甲、乙两人中，其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是 ______ ．

②在语文和数学两个科目中，丙同学的成绩名次更靠前的科目是 ______ ．

答案 1．乙

2．数学

解析 ①乙；②按照全年级排名答案为语文靠前，按照班级排名答案为数学靠前．

考点 统计

└用样本估计总体

3 交强险是车主必须为机动车购买的险种，若普通6座以下私家车投保交强险第一年的费用（基准保费）统一为a元，在下一年续保时，实行的是费率浮动机制，保费与上一年度车辆发生道路交通事故的情况相联系，发生交通事故的次数越多，费率就越高，具体浮动情况如表：

交强险浮动因素和浮动费率比率表		
	浮动因素	浮动比率
A_1	上一个年度未发生有责任道路交通事故	下浮10%
A_2	上两个年度未发生有责任道路交通事故	下浮20%
A_3	上三个及以上年度未发生有责任道路交通事故	下浮30%
A_4	上一个年度发生一次有责任不涉及死亡的道路交通事故	0%
A_5	上一个年度发生两次及两次以上有责任道路交通事故	上浮10%

A_6	上一个年度发生有责任道路交通死亡事故	上浮30%

某机构为了解某一品牌普通6座以下私家车的投保情况，随机抽取了100辆车龄已满三年的该品牌同型号私家车的下一年续保时的情况，统计如下表：

类型	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
数量	20	10	10	30	20	10

以这100辆该品牌车的投保类型的频率代替一辆车投保类型的概率，完成下列问题．

（1）按照我国《机动车交通事故责任强制保险条例》汽车交强险价格的规定，$a=950$（元），记X为某同学家的一辆该品牌车在第四年续保时的费用，求X的分布列与数学期望．

（2）某二手车销售商专门销售这一品牌的二手车，且将下一年的交强险保费高于基本保费的车辆记为事故车，假设购进一辆事故车亏损5000元，一辆非事故车盈利10000元．

① 若该销售商购进三辆（车龄已满三年）该品牌二手车，求这三辆车中至多有一辆事故车的概率．

② 若该销售商一次购进100辆（车龄已满三年）该品牌二手车，求该销售商获得利润的期望值．

答案 （1）答案见解析．

（2）① 0.784．

② 55万元．

解析 （1）由题意可知：X的可能取值为$0.9a$，$0.8a$，$0.7a$，a，$1.1a$，$1.3a$，

由统计数据可知：$P(X=0.9a)=\frac{1}{5}$，

$P(X=0.8a)=\frac{1}{10}$，

$P(X=0.7a)=\frac{1}{10}$，

$P(X=a)=\frac{3}{10}$，

$P(X=1.1a)=\frac{1}{5}$，

$P(X=1.3a)=\frac{1}{10}$．

$\therefore X$的分布列为：

X	$0.9a$	$0.8a$	$0.7a$	a	$1.1a$	$1.3a$
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$\therefore$

$$EX=0.9a\times\frac{1}{5}+0.8a\times\frac{1}{10}+0.7a\times\frac{1}{10}+a\times\frac{3}{10}+1.1a\times\frac{1}{5}+1.3a\times\frac{1}{10}=\frac{9.8}{10}a=931$$

.

（2）① 由统计数据可知任意一辆该品牌车龄已满三年的二手车为事故车的概率为 $\frac{3}{10}$，

三辆车中至多有一辆事故车的概率为

$$P=C_3^0\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(1-\frac{3}{10}\right)^3+C_3^1\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(1-\frac{3}{10}\right)^2=0.784$$.

② 设Y为该销售商购进并销售一辆二手车的利润，Y的可能取值为-5000，10000，

$P(Y=-500)=\frac{3}{10}$，$P(Y=10000)=\frac{7}{10}$，

$\therefore Y$的分布列为：

Y	-5000	10000
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

$EY=-5000\times\frac{3}{10}+10000\times\frac{7}{10}=5500$.

所以该销售商一次购进100辆该品牌车龄已满三年的二手车获得利润的期望值为$100EY=550000$元$=55$万元．

考点

- 概率
  - 事件与概率
    - 随机事件的概率
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列
    - 概率的乘法原理
- 计数原理
  - 排列与组合
    - 排列组合的应用

4 “微信运动”是一个类似计步数据库的公众帐号．用户只需以运动手环或手机协处理器的运动数据为介，然后关注该公众号，就能看见自己与好友每日行走的步数，并在同一排行榜上得以体现．现随机选取朋友圈中的50人，记录了他们某一天的走路步数，并将数据整理如下：

步数/步	$0\sim3000$	3001~6000	6001~8000	8001~10000	10000以上
男性人数/人	1	2	7	15	5
女性人数/人	0	3	5	9	3

规定:人一天行走的步数超过8000步时被系统速定为“积极性”，否则为“懈怠性”．

（1）(1)　填写下面列联表（单位：人），根据列联表判断是否有90%的把握认为“评定类型与性别有关”：

	积极性	懈怠性	总计
男			
女			
总计			

附

$P\left(K^2\geqslant k_0\right)$	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

（2）为了进一步了解“懈息性”人群中每个人的生活习惯，从步行数在3001~6000的人群中再随机抽取3人，求选中的人中男性人数超过女性人数的概率．

答案　（1）没有．

（2）$\dfrac{3}{10}$．

解析　（1）根据题意完成下面的列联表：

	积极性	懈怠性	总计
男	20	10	30
女	12	8	20
总计	32	18	50

根据上表数据可得$K^2=\dfrac{50(20\times8-10\times12)^2}{30\times20\times32\times18}\approx0.231<2.706$，

∴没有90%的把握认为“评定类型与性别有关”．

（2）设步行数在3001~6000的男性编号为$1,2$，女性编号为a,b,c，

选取三位情形有共计10种情形：

$(1,2,a)$，$(1,2,b)$，$(1,2,c)$，$(1,a,b)$，$(1,a,c)$，$(1,b,c)$，$(2,a,b)$，$(2,a,c)$，$(2,b,c)$，(a,b,c)，

符合条件的情形有：$(1,2,a)$，$(1,2,b)$，$(1,2,c)$共计3种，

$\therefore$概率为$\frac{3}{10}$．

考点

- 统计
  - 统计案例
    - 独立性检验
- 概率
  - 事件与概率
    - 随机事件的概率
    - 古典概型

5 “微信运动”是一个类似计步数据库的公众帐号．用户只需以运动手环或手机协处理器的运动数据为介，然后关注该公众号，就能看见自己与好友每日行走的步数，并在同一排行榜上得以体现．现随机选取朋友圈中的50人，记录了他们某一天的走路步数，并将数据整理如下：

步数/步	$0\sim3000$	3001~6000	6001~8000	8001~10000	10000以上
男性人数/人	1	2	7	15	5
女性人数/人	0	3	7	9	1

规定：人一天行走的步数超过8000步时被系统评定为“积极性”，否则为“懈怠性”．

（1）以这50人这一天行走的步数的频率代替1人一夫行走的步数发生的概率，记X表示随机抽取3人中被系统评为“积极性”的人数，求$P(X\leqslant2)$和X的数学期望．

（2）为调查评定系统的合理性，拟从这50人中先抽取10人（男性6人女性4人）．其中男性中被系统评定为“积极性”的有4人，“懈怠性”的有2人，从中任意选取3人，记选到“积极性”的人数为x；其中女性中被系统评定为“积极性”和“懈怠性”的各有2人，从中任意选取2人，记选到积极性”的人数为y；求$x>y$的概率．

答案 （1）$\frac{98}{125}$，$\frac{9}{5}$．

（2）$\frac{11}{15}$．

解析 （1）被系统评为“积极性”的概率为$\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$，$X\sim B\left(3,\frac{3}{5}\right)$．

故$P(X\leqslant 2)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{98}{125}$.

X的数学期望$E(X)=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$.

（2）$x>y$包含$x=3,y=2$，$x=3,y=1$，

$x=3,y=0$，$x=2,y=1$，

$x=2,y=0$，$x=1,y=0$，

$P(x=3,y=2)=\frac{C_4^3}{C_6^3}\times\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{30}$ ，

$P(x=3,y=1)=\frac{C_4^3}{C_6^3}\times\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{15}$ ，

$P(x=3,y=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}\times\frac{C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{30}$ ，

$P(x=2,y=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{5}$ ，

$P(x=2,y=0)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}\times\frac{C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{10}$ ，

$P(x=1,y=0)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}\times\frac{C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{30}$ ，

所以$P(x>y)=\frac{1}{30}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{11}{15}$.

考点

- 统计
  - 用样本估计总体
    - 样本数据的基本数字特征
- 概率
  - 事件与概率
    - 随机事件的概率
    - 两个互斥事件的概率加法公式
  - 随机变量的分布列
    - 概率的乘法原理
- 计数原理
  - 加法原理、乘法原理
    - 分类加法计数原理、分步乘法计数原理
  - 排列与组合
    - 排列组合的应用

调查表明：甲种农作物的长势与海拔高度、土壤酸碱度、空气湿度的指标有极强的相关性，现将这三项的指标分别记为x, y, z，并对它们进行量化：0表示不合格，1表示临界合格，2表示合格，再用综合指标$\omega = x + y + z$的值评定这种农作物的长势等级，若$\omega \geqslant 4$，则长势为一级．若$2 \leqslant \omega \leqslant 3$，则长势为二级．若$0 \leqslant \omega \leqslant 1$，则长势为三级，为了了解目前这种农作物长势情况，研究人员随机抽取10块种植地，得到如表中结果：

种植地编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
(x, y, z)	$(1,1,2)$	$(2,1,1)$	$(2,2,2)$	$(0,0,1)$	$(1,2,1)$
种植地编号	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
(x, y, z)	$(1,1,2)$	$(1,1,1)$	$(1,2,2)$	$(1,2,1)$	$(1,1,1)$

（1）在这10块该农作物的种植地中任取两块地，求这两块地的空气湿度的指标z相同的概率．

（2）从长势等级是一级的种植地中任取一块地，其综合指标为A，从长势等级不是一级的种植地中任取一块地，其综合指标为B，记随机变量$X = A - B$，求X的分布列及其数学期望．

答案　（1）$\dfrac{7}{15}$．

（2）$\dfrac{44}{21}$．

解析　（1）由表可知：空气湿度指标为1的有$A_2, A_4, A_5, A_7, A_9, A_{10} \cdots$，

空气湿度指标为2的有$A_1, A_3, A_6, A_8, \cdots$．

在这10块种植地中任取两块地，基本事件总数$n = \mathrm{C}_{10}^2 = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$，

这两块地的空气温度的指标z相同包含的基本事件个数：

$m = \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_4^2 = \dfrac{6 \times 5}{2} + \dfrac{4 \times 3}{2} = 21$，

$\therefore$这两地的空气温度的指标z相同的概率$P = \dfrac{m}{n} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$．

（2）由题意得10块种植地的综合指标如下表：

编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
综合指标	4	4	6	1	4	4	3	5	4	3

其中长势等级是一级$(\omega \geqslant 4)$有$A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_8, A_9$共7个，

长势等级不是一级$(\omega < 4)$的有A_4, A_7, A_{10}共3个，

随机变量$X = A - B$的所有可能取值为$1, 2, 3, 4, 5$，

$w = 4$的有A_1, A_2, A_5, A_6, A_9共5块地，$w = 3$的有A_7, A_{10}共2块地，

这时有$X=4-3=1$所以$P(x=1)=\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{10}{21}$，

同理$P(x=2)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{2}{21}$，

$P(x=3)=\frac{C_5^1C_1^1+C_1^1C_2^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{7}{21}$，

$P(x=4)=\frac{C_1^1C_1^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{1}{21}$，$P(x=5)=\frac{C_1^1C_1^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{1}{21}$，

$\therefore X$的分布列为：

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$

$EX=1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{2}{21}+3\times\frac{7}{21}+4\times\frac{1}{21}+5\times\frac{1}{21}=\frac{44}{21}$.

考点

- 概率
  - 事件与概率
    - 基本事件空间
    - 随机事件的概率
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列
- 计数原理
  - 加法原理、乘法原理
    - 分类加法计数原理、分步乘法计数原理
  - 排列与组合
    - 排列组合的应用

7 在一场娱乐晚会上, 有5位民间歌手(1至5号)登台演唱, 由现场数百名观众投票选出最受欢迎歌手．各位观众须彼此独立地在选票上选3名歌手, 其中观众甲是1号歌手的歌迷, 他必选1号, 不选2号, 另在3至5号中随机选2名．观众乙和丙对5位歌手的演唱没有偏爱, 因此在1至5号中随机选3名歌手．

（1）求观众甲选中3号歌手且观众乙未选中3号歌手的概率;

（2）X表示3号歌手得到观众甲、乙、丙的票数之和, 求X的分布列和数学期望．

答案 （1）$\frac{4}{15}$;

（2）X的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{20}{75}$	$\frac{33}{75}$	$\frac{18}{75}$

数学期望$EX=\frac{28}{15}$.

解析 （1）设事件A表示:观众甲选中3号歌手且观众乙未选中3号歌手．

观众甲选中3号歌手的概率为$\frac{2}{3}$,观众乙未选中3号歌手的概率为$1-\frac{3}{5}$．

所以$P(A)\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$．

因此，观众甲选中3号歌手且观众乙未选中3号歌手的概率为$\frac{4}{15}$

（2）X表示3号歌手得到观众甲、乙、丙的票数之和，则X可取0,1,2,3．

观众甲选中3号歌手的概率为$\frac{2}{3}$,观众乙选中3号歌手的概率为$\frac{3}{5}$．

当观众甲、乙、丙均未选中3号歌手时，这时$X=0$,

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{4}{75}$．

当观众甲、乙、丙中只有1人选中3号歌手时，

这时$X=1$,

$P(X=1)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{8+6+6}{75}=\frac{20}{75}$

．

当观众甲、乙、丙中只有2人选中3号歌手时，这时$X=2$,

$P(X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{12+9+12}{75}=\frac{33}{75}$

．

当观众甲、乙、丙均选中3号歌手时，这时$X=3$,$P(X=3)\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{18}{75}$．

X的分布列如下表：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{20}{75}$	$\frac{33}{75}$	$\frac{18}{75}$

$EX=0\cdot\frac{4}{75}+1\cdot\frac{20}{75}+2\cdot\frac{33}{75}+3\cdot\frac{18}{75}=\frac{20+66+54}{75}=\frac{28}{15}$

所以，数学期望$EX=\frac{28}{15}$.

考点 —概率

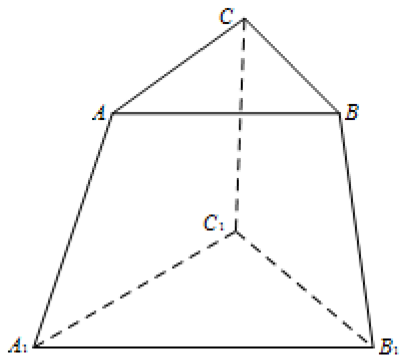
—事件与概率

└随机事件的概率

—随机变量的分布列

取有限值的离散型随机变量及其分布列
取有限值的离散型随机变量的均值、方差

8 某人有4种颜色的灯泡（每种颜色的灯泡足够多），要在如图所示的6个点A、B、C、A_1、B_1、C_1上各装一个灯泡．要求同一条线段两端的灯泡不同色，则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有 ______ 种．（用数字作答）



答案 216

解析 按照A_1、B_1、C_1、A、B、C的顺序安装灯泡A_1处有4种方法，B_1处有3种方法，C_1处有2种方法

（1）当A处与B_1处不同与C_1处相同时，A处有1种方法，由于装完B，C后每种颜色的灯泡至少用一个，

因此共有$4\times3\times2\times1\times(1+2)=72$种．

（2）当A处与B1处相同与C1处不同时，A处有1种方法．B处有3种方法，C处有1种方法，

共有$4\times3\times2\times1\times3\times1=72$种．

（3）当A处与B_1，C_1均不相同时，A处有1种方法．B，C处共有$2+1=3$种方法，

因此，共有$4\times3\times2\times1\times(1+2)=72$种．

因此，由分类计数原理可得共有$72+72+72=216$（种）方法．

考点 计数原理
排列与组合
排列组合的应用

9

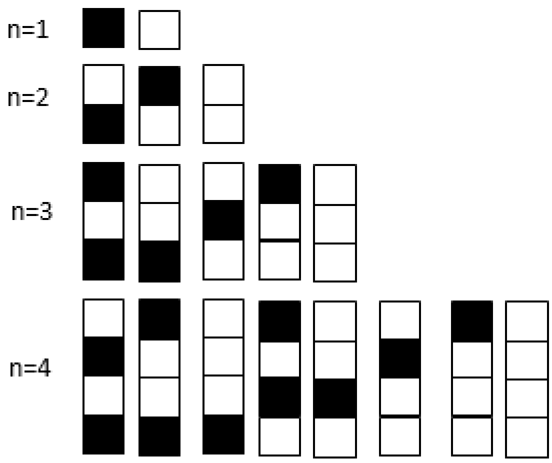
正六边形中心和顶点共7个点，以其中3个点为顶点的三角形共有 ______ 个．

答案 32

解析 略

考点
- 计数原理
  - 排列与组合
    - 排列组合的应用

10 给n个则上而下相连的正方形着黑色或白色．当$n \leqslant 4$时，在所有不同的着色方案中，黑色正方形互不相邻的着色方案如下图所示：



由此推断，当$n = 6$时，黑色正方形互不相邻着色方案共有 ______ 种，至少有两个黑色正方形相邻着色方案共有 ______ 种．（结果用数值表示）

答案

1．21

2．43

解析 设n个正方形时黑色正方形互不相邻的着色方案数为a_n，由图可知，

$a_1 = 2$，$a_2 = 3$，

$a_3 = 5 = 2 + 3 = a_1 + a_2$，

$a_4 = 8 = 3 + 5 = a_2 + a_3$，

由此推断$a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 6 = 13$，$a_6 = a_4 + a_5 = 8 + 13 = 21$，故黑色正方形互不相邻着色方案共有21种；由于给6个正方形着黑色或白色，每一个小正方形有2种方法，所以一共有$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$种方法，由于黑色正方形互不相邻着色方案共有21

种，所以至少有两个黑色正方形相邻着色方案共有$64-21=43$种着色方案．

故答案为$21,43$．

考点

—计数原理

—排列与组合

└排列组合的应用

11 在测量某物体的重量时，得到如下数据：a_1，a_2，$\cdots a_9$，其中$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_9$，若用$a$表示该物体重量的估计值，使$a$与每一个数据差的平方和最小，则$a$等于 ______ ；若用$b$表示该物体重量的估计值，使$b$与每一个数据差的绝对值的和最小，则$b$等于 ______ ．

答案

1．$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_9}{9}$

2．a_5

解析

由题可知a与每一个数据差的平方和等于

$(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\cdots+(a_9-a)^2$

$=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_9^2)-2a(a_1+a_2+\cdots+a_9)+9a^2$，

$f(a)=9a^2-2a(a_1+a_2+\cdots+a_9)+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_9^2)$，

当$a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_9}{9}$时，二次函数$f(a)$有最小值；

b与每一个数据差的绝对值的和等于

$|a_1-b|+|a_2-b|+\cdots+|a_9-b|$，易知$a_1\leqslant b\leqslant a_9$，

当$a_i\leqslant b\leqslant a_{i+1}$，$i=1,2,3,\cdots,8$，

由于$|a_1-b|+|a_2-b|+\cdots+|a_9-b|$

$=ib-(a_1+a_2+\cdots+a_i)+(a_{i+1}+\cdots+a_9)-(9-i)b$

$=a_1+a_2+\cdots+a_9+(2i-9)b-2(a_1+a_2+\cdots+a_i)$，

令$M=(2i-9)b-2(a_1+a_2+\cdots+a_i)$

当$i=1$时，$M\in[-7a_2-2a_1,-9a_1]$；

当$i=2$时，$M\in[-5a_3-2(a_1+a_2),-7a_2-2a_1]$；

当$i=3$时，$M\in[-3a_4-2(a_1+a_2+a_3),-5a_3-2(a_1+a_2)]$；

当$i=4$时，$M\in[-a_5-2(a_1+a_2+a_3+a_4),-3a_4-2(a_1+a_2+a_3)]$；

当$i=5$时，$M\in[a_5-2(a_1+a_2+\cdots+a_5),a_6-2(a_1+a_2+\cdots+a_5)]$

即$M\in[-a_5-2(a_1+a_2+\cdots+a_4),a_6-2(a_1+a_2+\cdots+a_5)]$；

当$i=6$时，$M\in[3a_6-2(a_1+a_2+\cdots+a_6),3a_7-2(a_1+a_2+\cdots+a_6)]$，

即$M\in[a_6-2(a_1+a_2+\cdots+a_5),3a_7-2(a_1+a_2+\cdots+a_6)]$；

当$i=7$时，$M\in[5a_7-2(a_1+a_2+\cdots+a_7),5a_8-2(a_1+a_2+\cdots+a_7)]$

即$M\in[3a_7-2(a_1+a_2+\cdots+a_6),5a_8-2(a_1+a_2+\cdots+a_7)]$；

当$i=8$时，$M\in[7a_8-2(a_1+a_2+\cdots+a_8),7a_9-2(a_1+a_2+\cdots+a_8)]$

即$M\in[5a_8-2(a_1+a_2+\cdots+a_7),7a_9-2(a_1+a_2+\cdots+a_8)]$；

综上，当$b=a_5$时，b与每一个数据差的绝对值的和最小．

故答案为$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_9}{9}$；$a_5$．

考点

- 统计
  - 用样本估计总体
    - 样本数据的基本数字特征

12 如果小明在某一周的第一天和第七天分别吃了3个水果，且从这周的第二天开始，每天所吃水果的个数与前一天相比，仅存在三种可能：或“多一个”或“持平”或“少一个”，那么，小明在这一周中每天所吃水果个数的不同选择方案共有（　）．

A. 50种　　B. 51种　　C. 140种　　D. 141种

答案　D

解析　小明共有6次选择，因为第一天和第七天均吃3个水果，

所以在这6次选择中“多一个“和”少一个“的次数应相同，“持平”次数为偶数．

当6次选择均为“持平”时，共有$C_6^6=1$种方案；

当6次选择中有4次“持平”时，选择“多一个”和“少一个”各1次，

共有$A_6^2C_4^4=30$种方案；

当6次选择中有2次“持平”时，选择“多一个”和“少一个”各2次，

共有$C_6^2C_4^2C_4^4=90$种方案；

当6次选择中有0次“持平”时，选择“多一个”和“少一个”各3次，

共有$C_6^3C_3^3=20$种方案．

综上可得小明在这一周中每天所吃水果个数的不同选择方案

共有$1+30+90+20=141$种方案．

考点 计数原理
- 排列与组合
  - 排列组合的应用

13 用a代表红球，b代表蓝球，c代表黑球，由加法原理及乘法原理，从1个红球和1个篮球中取出若干个球的所有取法可由$(1+a)(1+b)$的展开式$1+a+b+ab$表示出来，如："1"表示一个球都不取、"a"表示取出一个红球，面"ab"用表示把红球和篮球都取出来．以此类推，下列各式中，其展开式可用来表示从5个无区别的红球、5个无区别的蓝球、5个有区别的黑球中取出若干个球，且所有的篮球都取出或都不取出的所有取法的是（　）．

A. $(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1+b^5)(1+c)^5$

B. $(1+a^5)(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c)^5$

C. $(1+a)^5(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c^5)$

D. $(1+a^5)(1+b)^5(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5)$

答案 A

解析 因为所有的篮球都取出或都不取出，故展开式中不可能存在含有"b，b^2，b^3，b^4"因式的项，故排除B，C，D，答案为A．

考点 计数原理
- 排列与组合
  - 排列组合的应用

14 已知甲盒中仅有1个球且为红球，乙盒中有m个红球和n个篮球$(m\geqslant 3,n\geqslant 3)$，从乙盒中随机抽取$i(i=1,2)$个球放入甲盒中．

（a）放入i个球后，甲盒中含有红球的个数记为$\xi_i\ (i=1,2)$；

（b）放入i个球后，从甲盒中取1个球是红球的概率记为$p_i\ (i=1,2)$．

则（　　）.

A. $p_1>p_2,E(\xi_1)<E(\xi_2)$

B. $p_1<p_2,E(\xi_1)>E(\xi_2)$

C. $p_1>p_2,E(\xi_1)>E(\xi_2)$

D. $p_1>p_2,E(\xi_1)<E(\xi_2)$

答案 C

解析 $p_1=\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m+n}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2m+n}{2(m+n)}$，$p_2=\dfrac{3m^2-3m+2mn+n^2-n}{3(m+n)(m+n-1)}$，$p_1-p_2=\dfrac{2m+n}{2(m+n)}-\dfrac{3m^2-3m+2mn+n^2-n}{3(m+n)(m+n-1)}=\dfrac{5mn+n(n-1)}{6(m+n)(m+n-1)}>0$，故$p_1>p_2$，$E(\xi_1)=0\times(\dfrac{n}{m+n}\times\dfrac{1}{2})+1\times\dfrac{2m+n}{2(m+n)},E(\xi_2)=\dfrac{3m^2-3m+2mn+n^2-n}{3(m+n)(m+n-1)}$，由上面比较可知$E\xi_1)>E(\xi_2)$，故选C．

考点
- 概率
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列

15 设集合$A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\,|x_i\in\{-1,0,1\}\,i=1,2,3,4,5\}$，那么集合$A$中满足条件“$1\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|\leqslant3$”的元素个数为（　　）.

A. 60　　B. 90　　C. 120　　D. 130

答案 D

解析 如果和为1，有如下两种情形：四个0，一个1，共有5种；四个0，一个-1，共有5种；

如果和为2，有如下三种情况：两个1，三个0，共有10种；；两个-1，三个0，共有10种；一个1，一个-1，三个0，共有20种，

如果和为3，有如下4种情形：三个1，两个0共有10种；

两个1，一个-1，两个0，共有30种；

两个-1，一个1，两个0，共有30种；

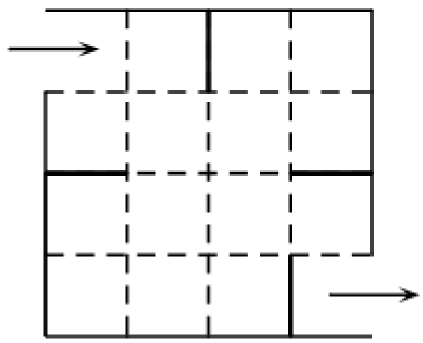
三个-1，两个0．共有10种，共有130种．

故答案选D．

考点
- 集合与常用逻辑用语

- 集合与集合的表示方法
  - 集合的表示方法
- 不等式与线性规划
  - 绝对值不等式
    - 绝对值不等式的解法
- 计数原理
  - 加法原理、乘法原理
    - 两个计数原理的应用
  - 排列与组合
    - 排列组合的应用

16 有一种走“方格迷宫”游戏，游戏规则是每次水平或竖直走动一个方格，走过的方格不能重复，只要有一个方格不同即为不同走法．现有如下图的方格迷宫，图中的实线不能穿过，则从入口走到出口共有多少种不同走法？（　）．



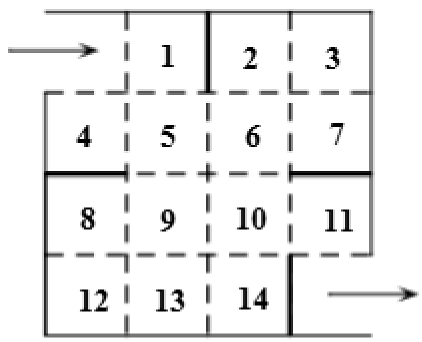
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

答案　B

解析　如图：走出迷宫的方式方法如下：

$$1-5-\begin{cases}9-\begin{cases}8-12-13-14-10-11\\13-14-10-11\\10-11\end{cases}\\6-10-11\end{cases};$$

$$4-5-\begin{cases}9-\begin{cases}8-12-13-14-10-11\\13-14-10-11\\10-11\end{cases}\\6-10-11\end{cases},$$

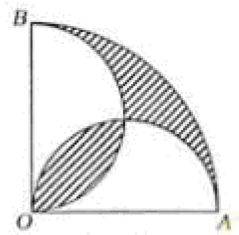


共8种．

故答案选B．

考点 —计数原理
- 排列与组合
  - 排列组合的应用

17 如图，在圆心角为直角的扇形OAB中，分别以OA，OB为直径作两个半圆．在扇形OAB内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是（　）．



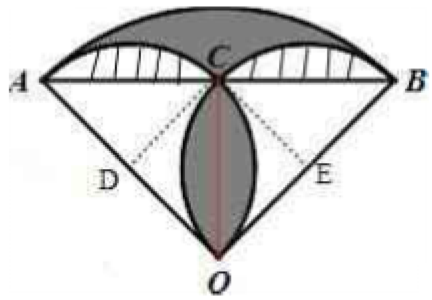
A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$　　B. $\frac{1}{\pi}$　　C. $1-\frac{2}{\pi}$　　D. $\frac{2}{\pi}$

答案 C

解析 设扇形的半径为r，则扇形OAB的面积为$\frac{1}{4}\pi r^2$．

连接OC，把下面的阴影部分平均分成了2部分，

然后利用位移割补的方法，分别平移到图中划线部分，



则阴影部分的面积为：$\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2$．

所以此点取自阴影部分的概率是$\frac{\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{4}\pi r^2}=1-\frac{2}{\pi}$．

考点 —概率
- 事件与概率
  - 几何概型

18 甲乙两人一起去游“2011西安世园会”，他们约定，各自独立地从1到6号景点中任选4个进行游览，每个景点参观1小时，则最后一小时他们同在一个景点的概率是（　）．

A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{5}{36}$　　D. $\frac{1}{6}$

答案 D

解析 甲乙两人各自独立任选4个景点的情形共有$A_6^4\cdot A_6^4$（种）；最后一小时他们同在一个景点的情形有$A_5^3\cdot A_5^3\times 6$（种），所以$P=\dfrac{A_5^3\cdot A_5^3\times 6}{A_6^4\cdot A_6^4}=\dfrac{1}{6}$．

故答案选D．

考点
- 概率
  - 事件与概率
    - 古典概型
- 计数原理
  - 排列与组合
    - 排列组合的应用

19 某车站每天$8:00-9:00$，$9:00-10:00$都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间是相互独立的，其规律为：

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客$8:20$到车站，则它候车时间的数学期望为 ______ （精确到分）．

答案 27

解析 旅客候车的分布列为：

候车时间（分）	10	30	50	70	90
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$

候车时间的数学期望为$10\times\dfrac{1}{2}+30\times\dfrac{1}{3}+50\times\dfrac{1}{36}+70\times\dfrac{1}{12}+90\times\dfrac{1}{18}=27$．

考点
- 概率
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列
    - 取有限值的离散型随机变量的均值、方差

20 一袋子里有a个白球和b个黑球，从中任取一个球，如果取出白球，则把它放回袋中；如果取出黑球，则该黑球不再放回，另补一个白球放到袋中．在重复n次这样的操作后，记袋中白球的个数为X_n．

（1）求$E(X_1)$．

（2）设$P(X_n=a+k)=p_k$，求$P(X_{n+1}=a+k)$，$k=0,1,2,\cdots,b$．

（3）证明：$E(X_{n+1})=\left(1-\dfrac{1}{a+b}\right)E(X_n)+1$．

答案 （1）$\dfrac{a^2+ab+b}{a+b}$

（2）$=\dfrac{(a+k)p_k+(a-k+1)p_{k-1}}{a+b}$

（3）证明见解析

解析 （1）如果取出的是白球，则$X_1=a$，概率为$P_1=\dfrac{a}{a+b}$．

如果取出的是黑球，则$X_1=a+1$，概率为$P_2=\dfrac{b}{a+b}$．

故$E(X_1)=a\cdot\dfrac{a}{a+b}+(a+1)\cdot\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a^2+ab+b}{a+b}$．

（2）①$k=0$时，$P(X_{n+1}=a)=p_0\cdot\dfrac{a}{a+b}$．

②$k\geqslant 1$时，$X_{n+1}=a+k$有两种可能，

一是：$X_n=a+k$，且第$n+1$次取出的是白球．

二是：$X_n=a+k-1$，且第$n+1$次取出的是黑球．

于是

$$P(X_{n+1}=a+k)=P(X_n=a+k)\cdot\frac{a+k}{a+b}+P(X_n=a+k-1)\cdot\frac{a+b-(a+k-1)}{a+b}$$

．

$$=\frac{(a+k)p_k}{a+b}+\frac{(a-k+1)p_{k-1}}{a+b}=\frac{(a+k)p_k+(a-k+1)p_{k-1}}{a+b}$$

．

（3）第$n+1$次白球的个数X_{n+1}的数学期望EX_{n+1}分为两类：

①若第$n+1$次取出的是白球，由于每次白球和黑球的总个数为$a+b$，

这种情形发生的概率是$\dfrac{EX_n}{a+b}$，此时白球的个数的数学期望为EX_n．

②若第$n+1$次取出的是黑球，这种情况发生的概率是$1-\dfrac{EX_n}{a+b}$，此时白球的个数变为EX_n+1．

故$EX_{n+1}=\dfrac{EX_n}{a+b}EX_n+\left(1-\dfrac{EX_n}{a+b}\right)(EX_n+1)=\left(1-\dfrac{1}{a+b}\right)EX_n+1$．

考点 一概率

—随机变量的分布列

—取有限值的离散型随机变量及其分布列

—取有限值的离散型随机变量的均值、方差

21 已知一个口袋有m个白球，n个黑球（m，$n\in\mathbf{N}^*$ ，$n\geqslant 2$），这些球除颜色外全部相同．现将口袋中的球随机的逐个取出，并放入如图所示的编号为1，2，3，……，$m+n$的抽屉内，其中第k次取球放入编号为k的抽屉（$k=1$，2，3，……，$m+n$）．

1	2	3	……	$m+n$

（1）试求编号为2的抽屉内放的是黑球的概率p．

（2）随机变量X表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数，$E(X)$是X的数学期望，证明 $E(X)<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}$．

答案 （1）$\dfrac{n}{m+n}$．

（2）证明见解析．

解析 （1）$P=\dfrac{\mathrm{C}_n^1\mathrm{A}_{m+n-1}^{m+n-1}}{\mathrm{A}_{m+n}^{m+n}}=\dfrac{n}{m+n}$．

（2）由题意X取值依次可能为$\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\cdots,\dfrac{1}{n+m}$.

每个抽屉放入黑球的概率都是$\dfrac{n}{n+m}$．

所以$P(X=\dfrac{1}{n+k})=C_{n+k-1}^{n-1}(\dfrac{n}{m+n})^{n-1}\cdot(\dfrac{m}{m+n})^{k}\cdot\dfrac{n}{m+n},k=0,1,2,\cdots,n)$，

所以$E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n+k}\cdot P(X=\dfrac{1}{n+k})$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n+k}\cdot C_{n+k-1}^{n-1}(\dfrac{n}{m+n})^{n}\cdot(\dfrac{m}{m+n})^{k}$

$<\dfrac{n}{m+n}\sum\limits_{k=0}^{n}[\dfrac{1}{n+k-1}\cdot C_{n+k-1}^{n-1}(\dfrac{n}{m+n})^{n-1}\cdot(\dfrac{m}{m+n})^{k}]$

$<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}\sum\limits_{k=0}^{n}[C_{n+k-2}^{n-2}(\dfrac{n}{m+n})^{n-2}\cdot(\dfrac{m}{m+n})^{k}]$

$<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}$．

考点 —概率

—事件与概率

—古典概型

—随机变量的分布列

超几何分布

取有限值的离散型随机变量的均值、方差

计数原理

排列与组合

排列组合的应用

22 某晚会有6个歌唱节目和5个舞蹈节目依次表演．

（1）一共有多少种不同表演顺序．

（2）如果某著名歌唱家排在最后作为压台戏，则可排多少种节目单．

（3）如果甲、乙两个舞蹈节目必须排在第一个和最后一个表演，则可排多少种节目单．

（4）如果A、B两个歌唱节目不能在第一个和最后一个表演，则可排多少种节目单．

（5）如果某歌唱家不在第一个和最后一个表演，则可排多少种节目单．

（6）如果某歌唱家只能第一个和最后一个表演，则可排多少种节目单．

（7）如果6个歌唱节目连续表演，5个舞蹈也连续表演，则可排多少种节目单．

（8）如果歌唱节目和舞蹈节目相间表演，则可排多少种节目单．

（9）如果5个舞蹈节目不相邻表演，则可排多少种节目单．

（10）如果甲舞蹈节目给A歌唱节目伴舞，乙舞蹈节目给B歌唱节目伴舞，则可排多少种节目单．

答案

（1）39916800

（2）3628800

（3）725760

（4）26127360

（5）32659200

（6）7257600

（7）86400

（8）86400

（9）1814400

（10）362880

解析 (1)一共11个节目全排列，则有$\mathrm{A}_{11}^{11}=39916800$种节目单．

(2)若著名歌唱家排在最后一个表演，前面十个节目全排列，则有$\mathrm{A}_{10}^{10}=3628800$种节目单．

(3)先排第一个节目和最后一个节目有A_2^2种排法，余下九个节目全排列有A_9^9种排法，故共有$\mathrm{A}_2^2\cdot\mathrm{A}_9^9=725760$种排法．

(4)先排第一个节目和最后一个节目，有A_9^2种排法，余下9个节目全排列有A_9^9种排法，故共有$\mathrm{A}_9^2\cdot\mathrm{A}_9^9=26127360$种排法．

(5)先排第一个节目和最后一个节目，有A_{10}^2种排法，余下9个节目全排列有A_9^9种排法，故共有$\mathrm{A}_{10}^2\cdot\mathrm{A}_9^9=32659200$种排法．

(6)先考虑某歌唱家表演有A_2^1种方法，余下10个节目有A_{10}^{10}种排法，故共有$\mathrm{A}_2^1\cdot\mathrm{A}_{10}^{10}=7257600$种排法．

(7)可先歌唱节目连续表演，也可舞蹈节目连续表演，故共有$2\mathrm{A}_6^6\cdot\mathrm{A}_5^5=86400$种排法．

(8)先歌唱节目再舞蹈节目，刚好全部相间表演，则有$\mathrm{A}_6^6\cdot\mathrm{A}_6^5=86400$种排法．

(9)先考虑歌唱节目则有7个空位，再将7个舞蹈节目插入7个空位中，则有：$\mathrm{A}_6^6\cdot\mathrm{A}_7^5=1814400$种排法．

(10)因甲舞蹈节目与A歌唱节目同时表演，乙舞蹈节目与B歌唱节目同时表演，故把两个节目看成一个节目，这样一共有9个节目表演，所以，有$\mathrm{A}_9^9362880$种排法．

考点
- 计数原理
  - 排列与组合
    - 排列、组合的概念
    - 排列组合的应用

23 求证：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$(\sqrt{2}+1)^n$都能写成$\sqrt{m}+\sqrt{m-1}(m\in\mathbf{N}^*)$的形式．（例如$(\sqrt{2}+1)^2=\sqrt{9}+\sqrt{8}$）

答案 证明见解析

解析 $(1+\sqrt{2})^n=a+b\sqrt{2}\cdots$①，则$(1-\sqrt{2})^n=a-b\sqrt{2}\cdots$②，其中$a$，$b\in\mathbf{N}^*$．

理由如下：由二项式定理可以知，

其中$a=\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^2+4\mathrm{C}_n^4+8\mathrm{C}_n^6+\cdots+2^k\mathrm{C}_n^{2k}$，

$b\sqrt{2}=\sqrt{2}(\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^3+4\mathrm{C}_n^5+8\mathrm{C}_n^7+\cdots+2^m\mathrm{C}_n^{2m+1})$，（其中$2k$，$2m+1$分别为不超过$n$的最大偶数和奇数）．

此时$(1+\sqrt{2})^n=a+b\sqrt{2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{2b^2}$，易得其中$a^2$，$2b^2$均为整数．

而且联立①②可得，$a=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2}$，$b\sqrt{2}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}$，

$a^2-2b^2=a$

$=\left[\dfrac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2}\right]^2-\left[\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}\right]^2$

$=(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n$

$=(-1)^n$．

即若n是偶数$a^2-2b^2=1$，若n是奇数$2b^2-a^2=1$．

考点

- 计数原理
  - 二项式定理
    - 二项式定理的应用
- 推理与证明
  - 直接证明和间接证明
    - 综合法与分析法

24 最近，张师傅和李师傅要将家中闲置资金进行投资理财．现有两种投资方案，且一年后投资盈亏的情况如下：

投资股市：

投资结果	获利	不赔不赚	亏损
概　率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

购买基金：

投资结果	获利	不赔不赚	亏损
概　率	p	$\frac{1}{3}$	q

（1）当$p=\frac{1}{2}$时，求q的值；

（2）已知“购买基金”亏损的概率比“投资股市”亏损的概率小，求p的取值范围；

（3）已知张师傅和李师傅两人都选择了“购买基金”来进行投资，假设三种投资结果出现的可能性相同，求一年后他们两人中至少有一人获利的概率．

答案 （1）$q=\frac{1}{6}$

（2）$\frac{7}{24}<p\leqslant\frac{2}{3}$

（3）$\frac{5}{9}$

解析 （1）因为“购买基金”后，投资结果只有“获利”、“不赔不赚”、“亏损”三种且三种投资结果相互独立，

所以 $p+\frac{1}{3}+q=1$．

又因为 $p=\frac{1}{2}$，

所以 $q=\frac{1}{6}$．

（2）由“购买基金”亏损的概率比“投资股市”亏损的概率小，得 $q<\frac{3}{8}$，

因为 $p+\frac{1}{3}+q=1$，

所以 $q=\frac{2}{3}-p<\frac{3}{8}$，

解得 $p>\frac{7}{24}$．

又因为 $p+\frac{1}{3}+q=1$，$q\geqslant 0$，

所以 $p\leqslant\frac{2}{3}$．

所以 $\frac{7}{24}<p\leqslant\frac{2}{3}$．

（3）记事件A为“一年后张师傅和李师傅两人中至少有一人获利”，

用a，b，c分别表示一年后张师傅购买基金“获利”、“不赔不赚”、“亏损”，用x，y，z分别表示一年后李师傅购买基金“获利”、“不赔不赚”、“亏损”，

则一年后张师傅和李师傅购买基金，所有可能的投资结果有$3\times 3=9$种，

它们是：(a,x)，(a,y)，(a,z)，(b,x)，(b,y)，(b,z)，(c,x)，(c,y)，(c,z)，

所以事件A的结果有5种，

它们是：(a,x)，(a,y)，(a,z)，(b,x)，(c,x)．

因此这一年后张师傅和李师傅两人中至少有一人获利的概率$P(A)=\frac{5}{9}$．

考点 概率

—事件与概率

　—随机事件的概率

　—随机事件的运算

　—两个互斥事件的概率加法公式

25 回答下列问题：

（1）求$7C_6^3-4C_7^4$的值；

（2）设$m,n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant m$，求证：

$$(m+1)\,C_m^m+(m+2)\,C_{m+1}^m+(m+3)\,C_{m+2}^m+\cdots+nC_{n-1}^m+(n+1)\,C_n^m=(m+1)\,C_{n+2}^{m+2}$$.

答案 （1）0

（2）证明见解析

解析 （1）$7C_6^3-4C_7^4=7\times20-4\times35=0$；

（2）对任意的$m\in\mathbf{N}^*$，

① 当$n=m$时，左边$=(m+1)\,C_m^m=m+1$，右边$=(m+1)\,C_{m+2}^{m+2}=m+1$，等式成立，

② 假设$n=k\,(k\geqslant m)$时命题成立，

即

$$(m+1)\,C_m^m+(m+2)\,C_{m+1}^m+(m+3)\,C_{m+2}^m+\cdots+kC_{k-1}^m+(k+1)\,C_k^m=(m+1)\,C_{k+2}^{m+2}$$

，

当$n=k+1$时，

左边=

$$(m+1)\,C_m^m+(m+2)\,C_{m+1}^m+(m+3)\,C_{m+2}^m+\cdots+kC_{k-1}^m+(k+1)\,C_k^m+(k+2)\,C_{k+1}^m$$

$=(m+1)\,C_{k+2}^{m+2}+(k+2)\,C_{k+1}^m$ ，

右边$=(m+1)\,C_{k+3}^{m+2}$ ，

而$(m+1)\,C_{k+3}^{m+2}-(m+1)\,C_{k+2}^{m+2}$ ，

$$=(m+1)\left[\frac{(k+3)!}{(m+2)!(k-m+1)!}-\frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m)!}\right]$$

$$=(m+1)\times\frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m+1)!}[k+3-(k-m+1)]$$

$$=(k+2)\,\frac{(k+1)!}{m!(k-m+1)!}$$

$$=(k+2)\,C_{k+1}^m$$

因此$(m+1)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}+(k+2)\mathrm{C}_{k+1}^{m}=(m+1)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}$，

因此左边=右边， 因此$n=k+1$时命题也成立，

综合①②可得命题对任意$n\geqslant m$均成立．

另解：因为$(k+1)\mathrm{C}_{k}^{m}=(m+1)\mathrm{C}_{k+1}^{m+1}$，所以

左边

$=(m+1)\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+(m+1)\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+(m+1)\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=(m+1)\left(\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}\right)$

又由$\mathrm{C}_{n}^{k}=\mathrm{C}_{n-1}^{k}+\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$，知

$\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}=\mathrm{C}_{n+1}^{m+2}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_{n}^{m+2}+\mathrm{C}_{n}^{m+1}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\cdots=\mathrm{C}_{m+2}^{m+2}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}$

，

所以，左边=右边．

考点

- 计数原理
  - 加法原理、乘法原理
    - 分类加法计数原理、分步乘法计数原理
  - 排列与组合
    - 排列、组合的概念
    - 排列组合的应用
- 推理与证明
  - 数学归纳法
    - 数学归纳法的概念
    - 数学归纳法的应用

26 乒乓球单打比赛在甲、乙两名运动员间进行，比赛采用7局4胜制（即先胜4局者获胜，比赛结束），假设两人在每一局比赛中获胜的可能性相同．

（1）求甲以4比1获胜的概率；

（2）求乙获胜且比赛局数多于5局的概率；

（3）求比赛局数的分布列．

答案 （1）$\frac{1}{8}$

（2）$\frac{5}{16}$

（3）

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

解析　（1）由已知，甲、乙两名运动员在每一局比赛中获胜的概率都是$\frac{1}{2}$．

记“甲以4比1获胜”为事件A，

则$P(A)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$．

（2）记“乙获胜且比赛局数多于5局”为事件B．

因为，乙以4比2获胜的概率为$P_1=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$，

乙以4比3获胜的概率为$P_2=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$，

所以$P(B)=P_1+P_2=\frac{5}{16}$．

（3）设比赛的局数为X，则X的可能取值为$4,5,6,7$．

$P(X=4)=2C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$，

$P(X=5)=2C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(X=6)=2C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$，

$P(X=7)=2C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$．

比赛局数的分布列为：

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

考点

- 概率
  - 事件与概率
    - 随机事件的概率
    - 随机事件的运算
    - 两个互斥事件的概率加法公式
  - 随机变量的分布列
    - 取有限值的离散型随机变量及其分布列
- 计数原理

排列与组合

└排列、组合的概念

27 某地区2007年至2013年农村居民家庭纯收入y（单位：千元）的数据如下表：

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
人均纯收入y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

（1）求y关于t的线性回归方程；

（2）利用（1）中的回归方程，分析2007年至2013年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况，并预测该地区2015年农村居民家庭人均纯收入．

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$

答案 （1）线性回归方程为$\hat{y}=0.5t+2.3$．

（2）在2007年至2013年该地区农村居民家庭人均纯收入在逐渐增加，该地区2015年农村居民家庭人均纯收入为6.8千元.

解析 （1）由题意知，$\bar{t}=4,\bar{y}=4.3$,所以$\hat{b}=\dfrac{3\times1.4+2+0.7+0+0.5+1.8+3\times1.6}{9+4+1+0+1+4+9}=0.5$

，

所以$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=4.3-0.5\times4=2.3$，

所以线性回归方程为$\hat{y}=0.5t+2.3$．

（2）由（I）中的线性回归方程可知，在2007年至2013年该地区农村居民家庭人均纯收入在逐渐增加，令$t=9$得：$\hat{y}=0.5\times9+2.3=6.8$，该地区2015年农村居民家庭人均纯收入为6.8千元.

考点 统计

变量的相关性

└两个变量的线性相关

28

某商场在店庆日进行抽奖促销活动，当日在该店消费的顾客可参加抽奖．抽奖箱中有大小完全相同的4个小球，分别标有字“生”“意”“兴”“隆”．顾客从中任意取出1个球，记下上面的字后放回箱中，再从中任取1个球，重复以上操作，最多取4次，并规定若取出“隆”字球，则停止取球．获奖规则如下：依次取到标有“生”“意”“兴”“隆”字的球为一等奖；不分顺序取到标有“生”“意”“兴”“隆”字的球，为二等奖；取到的4个球中有标有“生”“意”“兴”三个字的球为三等奖．

（1）求分别获得一、二、三等奖的概率；

（2）设摸球次数为ξ，求ξ的分布列和数学期望．

答案 （1）$\frac{1}{256}$，$\frac{5}{256}$，$\frac{9}{64}$．

（2）取球次数ξ的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

$E\xi=2.75$

解析 （1）设“摸到一等奖、二等奖、三等奖”分别为事件A，B，C．

则$P(A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$，

$P(B)=\frac{\mathrm{A}_3^3-1}{4^4}=\frac{5}{256}$

三等奖的情况有：“生，生，意，兴”；“生，意，意，兴”；“生，意，兴，兴”三种情况．

$P(C)=(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times A_4^2)+(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times A_4^2)+(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times A_4^2)$

$=\frac{9}{64}$．

（2）设摸球的次数为ξ，则$\xi=1,2,3,4$

$P(\xi=1)=\frac{1}{4}$，$P(\xi=2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$，

$P(\xi=3)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$，$P(\xi=4)=1-P(\xi=1)-P(\xi=2)-P(\xi=3)=\frac{27}{64}$

故取球次数ξ的分布列为

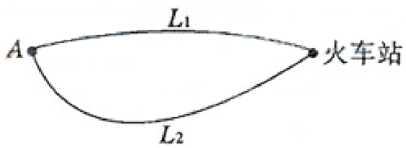
ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

$E\xi=\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{16}\times 2+\frac{9}{64}\times 3+\frac{27}{64}\times 4=2.75$．

考点

- 概率
  - 事件与概率
  - 随机变量的分布列
- 计数原理

29 如图，A地到火车站共有两条路径L_1和L_2，据统计，通过两条路径所用的时间互不影响，所用时间落在个时间段内的频率如下表：



时间（分钟）	10～20	20～30	30～40	40～50	50～60
L_1的频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
L_2的频率	0	0.1	0.4	0.4	0.1

现甲、乙两人分别有40分钟和50分钟时间用于赶往火车站．

（1）为了尽最大可能在各自允许的时间内赶到火车站，甲和乙应如何选择各自的路径？

（2）用X表示甲、乙两人中在允许的时间内能赶到火车站的人数，针对（1）的选择方案，求X的分布列和数学期望．

答案 （1）甲应选择路径L_1；乙应选择路径L_2．

（2）（2）X的分布列为

X	0	1	2
P	0．04	0．42	0．54

$EX=0\times0.04+1\times0.42+2\times0.54=1.5$．

解析 （1）甲应选择路径L_1；乙应选择路径L_2．

（2）用A,B分别表示针对（1）的选择方案，甲、乙在各自允许的时间内赶到火车站，由（1）知$P(A)=0.6$，$P(B)=0.9$，又事件A,B相互独立，X的取值是$0,1,2$，

$\therefore P(X=0)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.4\times0.1=0.04$，

$P(X=1)=P(\overline{A}B+A\overline{B})=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=0.4\times0.9+0.6\times0.1=0.42$

$P(X=2)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.6\times0.9=0.54$，

$\therefore X$的分布列为

X	0	1	2
P	0.04	0.42	0.54

$\therefore EX = 0\times 0.04 + 1\times 0.42 + 2\times 0.54 = 1.5$.

考点

一概率

随机变量的分布列

取有限值的离散型随机变量及其分布列

取有限值的离散型随机变量的均值、方差

30 在集合$\{1,2,3,4,5\}$中任取一个偶数a和一个奇数b构成以原点为起点的向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$，从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形，记所有作成的平行四边形的个数为n，其中面积等于2的平行四边形的个数为m，则$\frac{m}{n}=$（　）.

A. $\frac{2}{15}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{4}{15}$　　D. $\frac{1}{3}$

答案　B

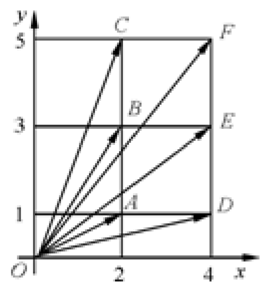
解析

$\because$以原点为起点的向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$有

$(2,1)$、$(2,3)$、$(2,5)$、$(4,1)$、$(4,3)$、$(4,5)$共6个，

可作平行四边形的个数$n=\mathrm{C}_6^2=15$个，结合图形进行计算，

其中由$(2,1)(4,1)$、$(2,1)(4,3)$、$(2,3)(4,5)$确定的平行四边形面积为2，共有3个，则$\frac{m}{n}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，选B .



考点

集合与常用逻辑用语

集合之间的关系与运算

集合之间的关系

平面向量

平面向量的基本概念

向量的线性运算

计数原理

排列与组合

排列组合的应用