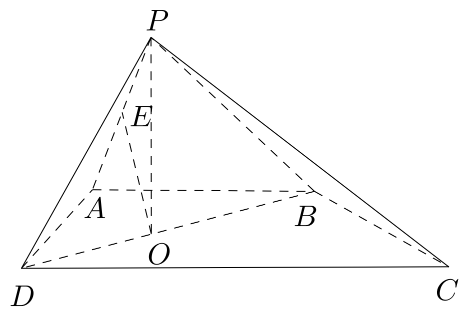
立体几何与空间向量-高考必做题

1 如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是直角梯形，$AB//CD$，$AB\perp AD$，ΔPAB和ΔPAD是两个边长为2的正三角形，$DC=4$，O为BD的中点，E为PA的中点．



（1）求证：$PO\perp$平面$ABCD$；

（2）求证：$OE//$平面PDC；

（3）求直线CB与平面PDC所成角的正弦值．

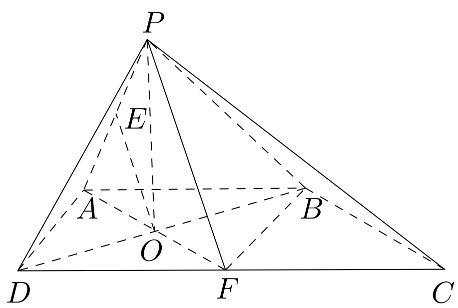
答案 （1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析

（3）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 （1）证明：设F为DC的中点，连接BF，则$DF=AB$

$\because AB\perp AD$，$AB=AD$，$AB//DC$，



$\therefore$四边形$ABFD$为正方形，

$\because O$为BD的中点，

$\therefore O$为AF,BD的交点，

$\because PD=PB=2$，

$\therefore PO\perp BD$，

$\because BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=\sqrt{2}$，$AO=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，

在三角形PAO中，$PO^2+AO^2=PA^2=4$，$\therefore PO\perp AO$，

$\because AO\cap BD=O$，$\therefore PO\perp$平面$ABCD$；

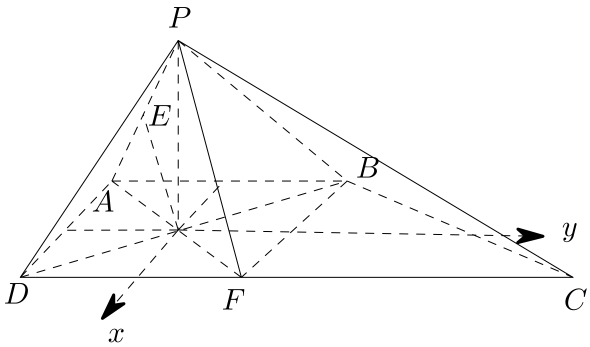
（2）方法1：连接PF，$\because O$为AF的中点，E为PA中点，

$\therefore OE//PF$，

$\because OE\not\subset$平面PDC，$PF\subset$平面PDC，

$\therefore OE//$平面PDC．

方法2：由（Ⅰ）知$PO\perp$平面$ABCD$，又$AB\perp AD$，所以过O分别做AD,AB的平行线，以它们做x,y轴，以OP为z轴建立如图所示的空间直角坐标系，由已知得：



$A(-1,-1,0)$，$B(-1,1,0)$，$D(1,-1,0)$

$F(1,1,0)$，$C(1,3,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，

$E(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

则$\overrightarrow{OE}=(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PF}=(1,1,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PD}=(1,-1,-\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{PC}=(1,3,-\sqrt{2})$．

$\therefore \overrightarrow{OE}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PF}\therefore OE//PF$

$\because OE\not\subset$平面PDC，$PF\subset$平面PDC，$\therefore OE//$平面PDC；

（3）设平面PDC的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，直线CB与平面PDC所成角θ，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1+3y_1-\sqrt{2}z_1=0\\ x_1-y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}y_1=0\\ x_1=\sqrt{2}z_1\end{cases}$，令$z_1=1$，则平面$PDC$的一个法向量为$\vec{n}=(\sqrt{2},0,1)$，

又$\overrightarrow{CB}=(-2,-2,0)$

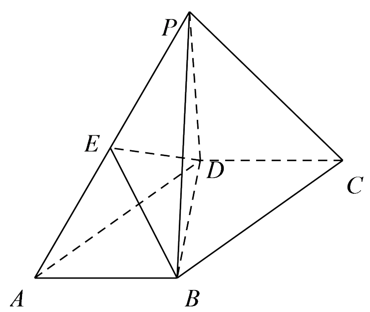
则$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{CB}>\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$直线CB与平面PDC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

考点

一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直
- 空间向量
  - 空间向量及其运算
  - 空间向量的应用

2 如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是平行四边形，$AB\perp BD$ ，$PD\perp$平面$ABCD$，且$PD=AB$，E为PA的中点．



（1）求证:$CD\perp PB$ ．

（2）求证:$PC//$平面BED．

（3）求二面角$E-BD-A$的大小．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）45° ．

解析 （1）$\because PD\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore CD\perp PD$，

$\because CD//AB$，$AB\perp BD$ ，

$\therefore CD\perp BD$．

$\because PD\cap BD=D$，

$\therefore CD\perp$平面PBD，

$\because PB\subset$平面PBD，

$\therefore CD\perp PB$．

（2）如图，连接AC，与BD相交于点O，连接EO．

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore O$为AC的中点．

$\because E$为PA的中点，

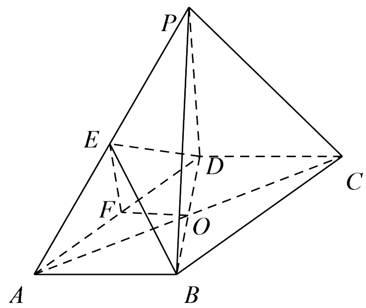
$\therefore EO//PC$，

$\because EO\subset$平面BED，$PC\not\subset$平面BED，

$\therefore PC//$平面BED．

（3）如图，作$OF//AB$，交AD于F点，

则F为AD的中点，



$\because AB\perp BD$，$OF//AB$，

$\therefore OF\perp BD$，

连接EF，则$EF//PD$，

$\because PD\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore PD\perp BD$，从而$EF\perp BD$，

$\therefore BD\perp$平面EOF，

$\therefore \angle EOF$是二面角$E-BD-A$的平面角，

$\because PD=AB$，$EF=\dfrac{1}{2}PD$，$OF=\dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore EF=OF$，

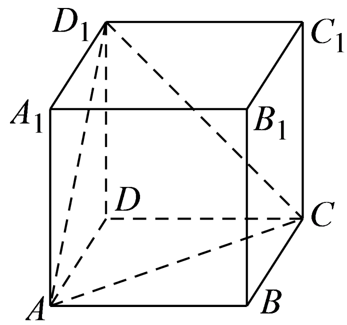
$\because EF\perp OF$，

$\therefore \angle EOF=45^\circ$，

$\therefore$二面角$E-BD-A$的大小为45°．

考点 一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 三公理和三推论
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

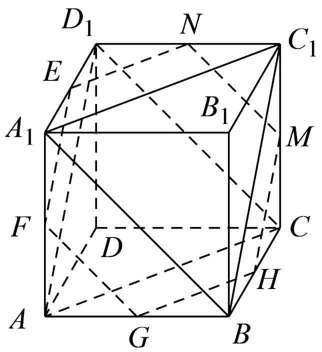
3 在如图所示的棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，作与平面ACD_1平行的截面，则截得的三角形中，面积最大的值是 ______ ；截得的平面图形中，面积最大的值是 ______ .



答案 1．$2\sqrt{3}$

2．$3\sqrt{3}$

解析 如图所示，截得的三角形中$\triangle A_1BC_1$的面积最大，



为边长为$2\sqrt{2}$的等边三角形，面积为$2\sqrt{3}$，

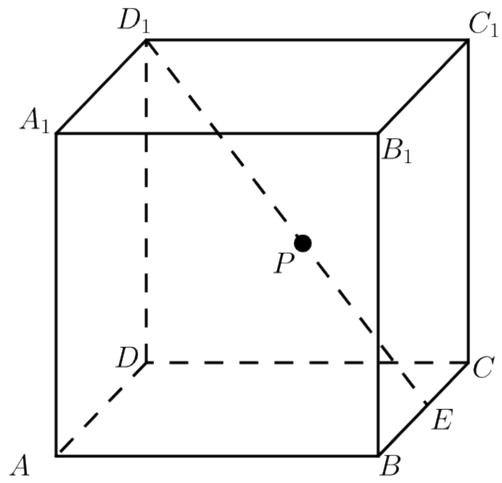
截得的平面图形中，正六边形$EFGHMN$的面积最大，

如图所示E,F,G,H,M,N分别为各边中点，边长为$\sqrt{2}$，面积为$3\sqrt{3}$．

故答案为$2\sqrt{3}$；$3\sqrt{3}$．

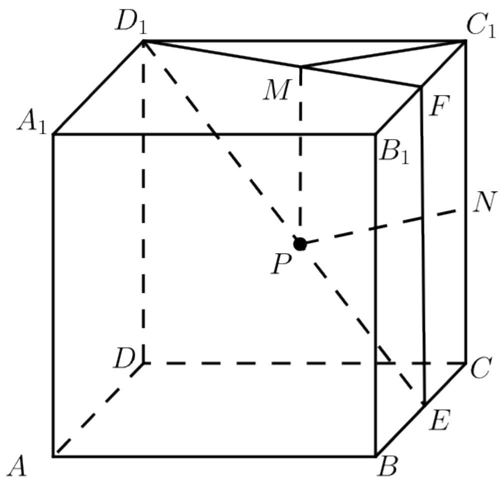
考点 一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体

4 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为BC的中点，点P在线段D_1E上．点P到直线CC_1的距离的最小值为 ______ .



答案 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 如图所示，取B_1C_1的中点F，连接EF ，ED_1



$\because EF//CC_1$ ，$CC_1\perp$底面$ABCD$，

$\therefore$四边形EFC_1C是矩形．

$\therefore CC_1//EF$，又$EF\subset$平面D_1EF，$CC_1\not\subset$平面D_1EF

$\therefore CC_1//$平面D_1EF．

$\therefore$直线C_1C上任一点到平面D_1EF的距离是两条异面直线D_1E与CC_1的距离．过点C_1作$C_1M\perp D_1F$

$\because$平面$D_1EF\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$．

$\therefore C_1M\perp$平面D_1EF．过点M 作$MP//EF$交D_1E于点P，则$MP//C_1C$．

取$C_1N=MP$，连接PN，则四边形$MPNC_1$是矩形．

可得$NP\perp$平面D_1EF

在$\mathrm{Rt}\triangle D_1C_1F$中，$C_1M\cdot D_1F=D_1C_1\cdot C_1F$得$C_1M=\dfrac{2\times 1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$点P到直线CC_1的距离的最小值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间向量
    - 空间向量的应用

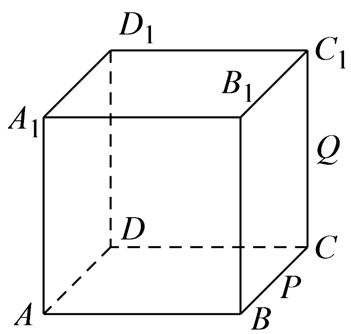
5 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P为BC的中点，Q为线段CC_1上的动点，过点A，P，Q的平面截该正方体所得截面记为S，则下列命题正确的是 ______ .

①当$0<CQ\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$S$为四边形；

②当$CQ=\dfrac{3}{4}$时，S为五边形；

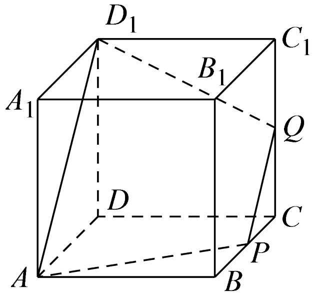
③当$\dfrac{3}{4}<CQ<1$时，S为六边形；

④当$CQ=1$时，S为菱形 .



答案 ①②④

解析 对于①，如图所示



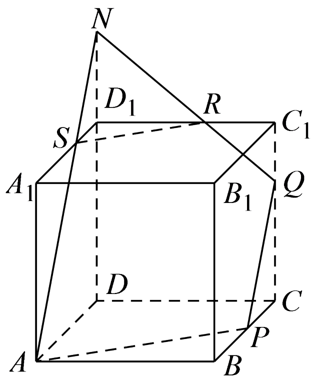
当$CQ=\frac{1}{2}$时，Q为CC_1中点，此时可得$PQ//AD_1$，$AP=QD_1=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

截面$APQD_1$为等腰梯形；

当点Q向C移动时，满足$0<CQ<\frac{1}{2}$，只需在DD_1上取点M满足$AM//PQ$，

即可得截面为四边形$APQM$，①正确；

对于②，当$CQ=\frac{3}{4}$时，如图所示，



延长DD_1至N，使$D_1N=\frac{1}{2}$，

连接AN交A_1D_1于S，连接NQ交C_1D_1于R，连接SR，

可证$AN//PQ$，由$\triangle NRD_1\backsim\triangle QRC_1$，

可得$C_1R:D_1R=C_1Q:D_1N=1:2$，

故可得$C_1R=\frac{1}{3}$，$\therefore$截面$APQRS$是五边形，②正确；

对于③，由②知当$\frac{3}{4}<CQ<1$时，只需点Q上移，

此时的截面形状仍然为上图所示的五边形$APQRS$，$\therefore$③错误；

对于④，当$CQ=1$时，Q与C_1重合，取A_1D_1的中点F，连接AF，

可证$PC_1//AF$，且$PC_1=AF$，可知截面APC_1F为菱形，④正确．

故答案为：①②④．

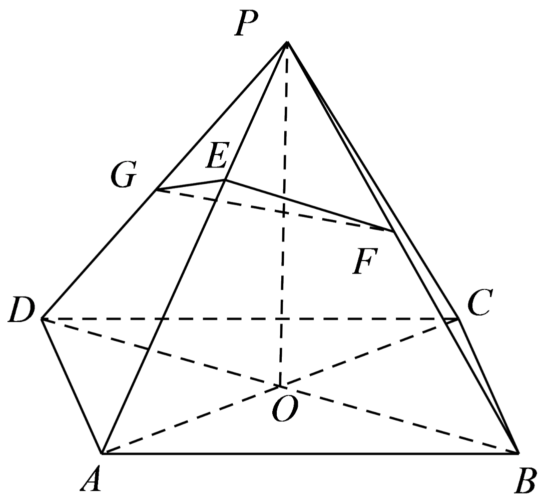
考点 立体几何与空间向量

立体几何初步

空间几何体

点、直线、平面间的位置关系

6 四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$，$AC\cap BD=O$，且$PO\perp$平面$ABCD$，$PO=\sqrt{3}$，点$F$，$G$分别是线段$PB$，$PD$上的中点，$E$在$PA$上，且$PA=3PE$．



（1）求证:$BD//$平面EFG．

（2）求直线AB与平面EFG的成角的正弦值．

（3）请画出平面EFG与四棱锥的表面的交线，并写出作图的步骤．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\frac{\sqrt{21}}{14}$．

（3）连接CG，CF，则四边形$EFCG$为平面EFG与四棱锥的表面的交线．

解析 （1）在$\triangle PBD$中，因为点F，G分别是线段PB，PD上的中点，

所以$FG//BD$，

因为$BD\not\subset$平面EFG，$FG\subset$平面EFG，

所以$BD//$平面EFG．

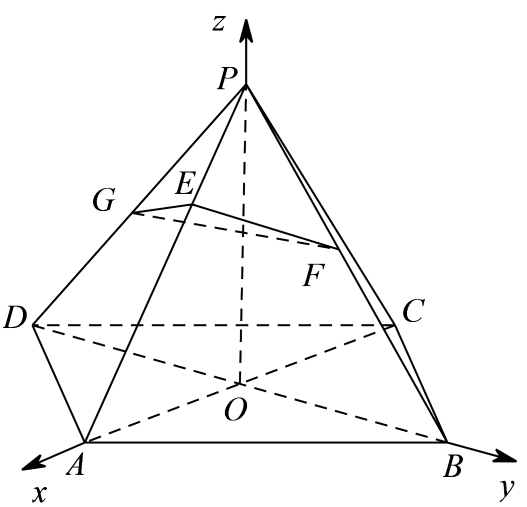
（2）因为底面$ABCD$是边长为2的菱形，

所以$OA\perp OB$，

因为$PO\perp$平面$ABCD$，

所以$PO\perp OA$，$PO\perp OB$,

如图，建立空间直角坐标系，则依题意可得



$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,0,0)$，$D(0,-\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$E\left(\frac{1}{3},0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$G\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$，$\overrightarrow{GF}=(0,\sqrt{3},0)$，

设平面EFG的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}-\frac{1}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{6}z=0\\ \sqrt{3}y=0\end{cases}$令$x=\sqrt{3}$可得$\vec{n}=(-\frac{3}{2},0,\sqrt{3})$

因为$\cos<\overrightarrow{AB}$，$\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}|,|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

所以直线AB与平面EFG的成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$．

（3）法1：延长EF，EG分别交AB，AD延长线于M，N，连接M，N，发现刚好过点C，连接CG，CF，则四边形$EFCG$为平面EFG与四棱锥的表面的交线．

法2：记平面EFG与直线PC的交点为H，设$\overrightarrow{PH}=\lambda\overrightarrow{PC}$，则

$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{PH}=(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})+\lambda(-1,0,-\sqrt{3})=(-\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{(1-2\lambda)\sqrt{3}}{2})$

由$\overrightarrow{FH}\cdot\vec{n}=(-\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{(1-2\lambda)\sqrt{3}}{2})\cdot(-\frac{3}{2},0,\sqrt{3})=\frac{3}{2}\lambda+\frac{3(1-2\lambda)}{2}=0$可得$\lambda=1$

．

所以H即为点C．

所以连接CG，CF，则四边形$EFCG$为平面EFG与四棱锥的表面的交线．

考点　一平面向量

平面向量的基本概念

向量的加法与减法

平面向量的数量积

数量积

立体几何与空间向量

立体几何初步

点、直线、平面间的位置关系

空间中的平行

空间向量

空间直角坐标系

空间向量的应用

7 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是正方体棱上一点（不包括棱的端点），

$|PA|+|PC_1|=m$，

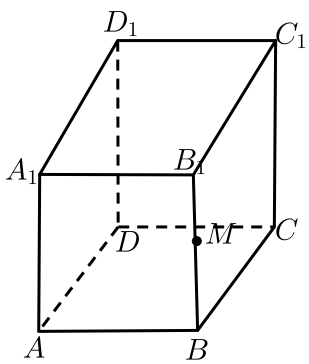
（1）若$m=2$，则满足条件的点P的个数为 ______ .

（2）若满足$|PA|+|PC_1|=m$的点P的个数为6，则m的取值范围是 ______ .

答案 （1）6

（2）$(\sqrt{3},\sqrt{5})$

解析 （1）如下图所示，



AB,AA_1,AD，以及C_1B，C_1C，C_1D_1棱上面的点到A，C_1距离的情况是一致的，

范围在$(\sqrt{3},\sqrt{2}+1)$ 之间，

而另外六条棱上的点情况是一致的，以BB_1为例，

当P 点在M 位置时，值最小是$\sqrt{5}$.

当$m=2$时，满足条件的在AB,AA_1,AD，C_1B，C_1C，C_1D_1棱上各有一点；

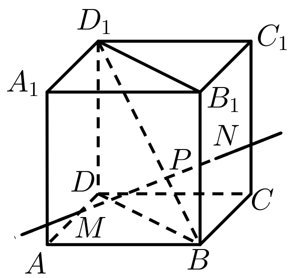
（2）如果满足条件的点个数为6，那么m的取值范围是$(\sqrt{3},\sqrt{5})$．

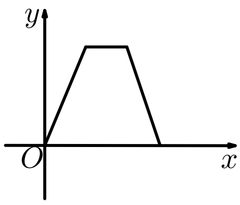
故答案为6，$(\sqrt{3},\sqrt{5})$．

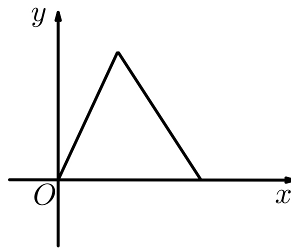
考点

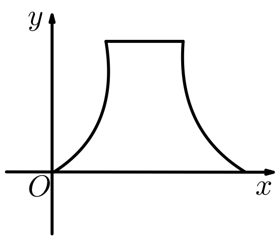
一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系

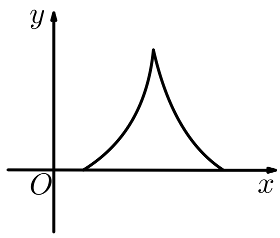
8 如图，动点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上．过点P作垂直于平面BB_1D_1D的直线，与正方体表面相交于M，N．设$BP=x$，$MN=y$，则函数$y=f(x)$的图象大致是（　）．



A. 

B. 

C. 

D. 

答案 B

解析 设正方体的棱长为1，显然，当P移动到对角线BD_1的中点O时，函数

$y=MN=AC=\sqrt{2}$，

取得唯一最大值，所以排除A、C；当P在BO上时，分别过M、N、P作底面的垂线，垂足分别为M_1、N_1、P_1，

则$y=MN=M_1N_1=2BP_1=2x\cos\angle D_1BD=\frac{2\sqrt{6}}{3}x$是一次函数，所以排除$D$．

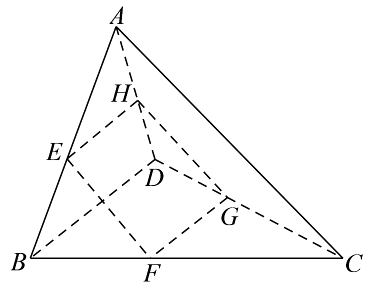
故选B．

考点

函数与导数
- 函数
  - 函数的概念与表示
  - 图象

立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体

9 如图，在空间四边形$ABCD$中，两条对角线AC，BD互相垂直，且长度分别为4和6，平行于这两条对角线的平面与边AB，BC，CD，DA分别相交于点E，F，G，H，记四边形$EFGH$的面积为y，设$\frac{BE}{AB}=x$，则(　)．



A. 函数$y=f(x)$的值域为$(0,4]$

B. 数$y=f(x)$的最大值为8

C. 函数$y=f(x)$在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上单调递减

D. 函数$y=f(x)$满足$f(x)=f(1-x)$

答案 D

解析 先证明出平行四边形$EFGH$是矩形，因为$EF//AC$，所以$\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}=x$，所以$EF=4x$．

又因为$EH//BD$，所以$\frac{AE}{AB}=\frac{EH}{BD}=1-x$，所以$EH=6(1-x)$．

所以矩形$EFGH$的面积$y=24x(1-x)(0<x<1)$，接下来研究这个二次函数的性质可知，D正确．

考点 函数与导数

- 函数
  - 函数的概念与表示
  - 最值
  - 单调性
  - 对称性
- 二次函数
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的垂直

10 如图1，在边长为$2\sqrt{3}$的正方形$ABCD$中，E,O分别为AD,BC的中点，沿EO将矩形$ABOE$折起使得$\angle BOC=120^\circ$，如图2所示，点G在BC上，$BG=2GC$，M,N分别为AB,EG中点．

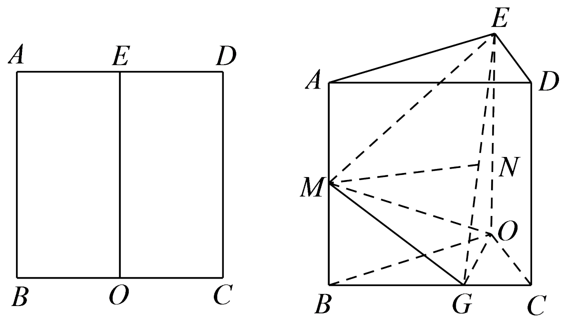


图1　图2

（1）求证：$MN//$平面OBC．

（2）求二面角$G-ME-B$的余弦值．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\frac{\sqrt{42}}{7}$．

解析 （1）法一：如图13取OG中点F，连结BF,FN，

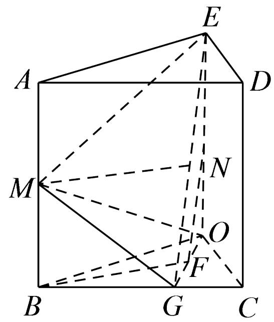


图13

则中位线$FN//\frac{1}{2}OE$且$FN=\frac{1}{2}OE$，

又$BM//OE$且$BM=\frac{1}{2}OE$,

所以$FN//BM$且$FN=BM$，

所以四边形$BFNM$是平行四边形，

所以$MN//BF$，

又$MN\not\subset$平面OBC，$BF\subset$平面OBC，所以$MN//$平面OBC．

法二：如图14，延长EM,OB交于点Q，连结GQ，

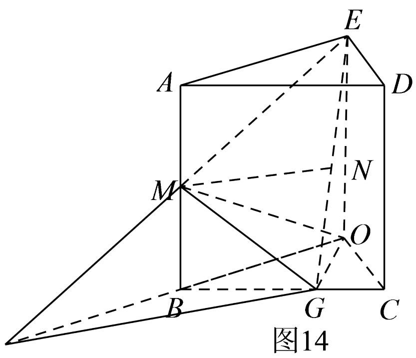


图14

因为$BM//OE$且$BM=\frac{1}{2}OE$，所以$\frac{QM}{QE}=\frac{BM}{OE}=\frac{1}{2}$，

M为EQ中点，所以中位线$MN//QG$,

又$MN\not\subset$平面OBC，$QG\subset$面OBC，所以$MN//$平面OBC．

（2）法一：如图14，因为$OB=OC=\sqrt{3}$，$\angle BOC=120^{\circ}$，

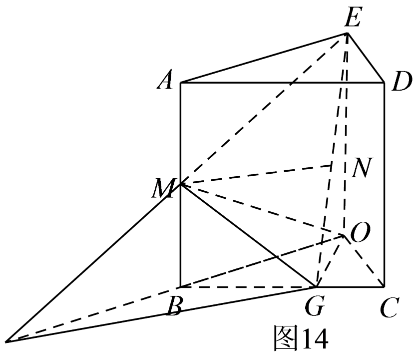


图14

所以$BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB\times OC\times\cos 120^\circ}=3$，

又$BG=2GC$．所以$BG=\frac{2}{3}BC=2,GC=1$，

$OG=\sqrt{CG^2+OC^2-2\times CG\times OC\cos 30^\circ}=1$，

$\therefore OB^2+OG^2=BG^2$，$\therefore\angle BOG=90^\circ$，$OG\perp OB$，

又$\because OE\perp OB$，$OE\perp OC$，$OB\cap OC=O$，

$\therefore OE\perp$平面OBC，$OG\subset$面OBC，$\therefore OE\perp OG$,

又$OB\cap OE=O$，所以$OG\perp$平面OBE，$QE\subset$面OBE, $OG\perp QE$，

又M为EQ中点，所以$OQ=OE=2\sqrt{3}$，所以$OM\perp QE$，$OM\cap OG=O$，

所以$QE\perp$平面OMG，$QE\perp MG$，$\angle OMG$为二面角$G-ME-B$的平面角．

所以$\mathrm{Rt}\triangle MOG$中，$OM=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$，

$MG=\sqrt{(\sqrt{6})^2+1^2}=\sqrt{7}$，

$\cos\angle OMG=\frac{OM}{MG}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，

$\therefore$二面角 $G-ME-B$的余弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$．

法二：如图15，$\because OB=OC=\sqrt{3}$，$\angle BOC=120^\circ$，

$\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB\times OC\times\cos 120^\circ}=3$，又$BG=2GC$，

$\therefore BG=\frac{2}{3}BC=2,GC=1$，

$\therefore OG=\sqrt{CG^2+OC^2-2\times CG\times OC\cos 30^\circ}=1$，

$\therefore OB^2+OG^2=BG^2$，

$\therefore\angle BOG=90^\circ$，$OG\perp OB$，

又$\because OE\perp OB$，$OE\perp OC$，$OB\cap OC=O$，

$\therefore OE\perp$平面OBC，$OG\subset$面OBC，

$\therefore OE\perp OG$，又$OB\cap OE=O$，

所以$OG\perp$平面OBE，$OE\subset$面OBE，$\therefore OG\perp OE$．

建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，

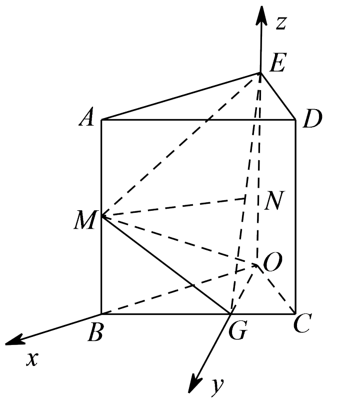


图15

则$M\left(\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$，$G(0,1,0)$，$E\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{MG}=\left(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{ME}=\left(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$，

而$\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$是平面$BOE$的一个法向量，

设平面MGE的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{MG}=-\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}z=0\\\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{ME}=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令$z=1$，则$x=1,y=2\sqrt{3}$，

面MGE的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=\left(1,2\sqrt{3},1\right)$，

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\times\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

所以，二面角$G-ME-B$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算
    - 空间向量的应用

11 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱DD_1，AB上的点．已知下列判断：

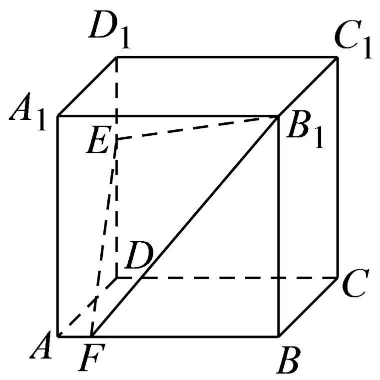
①$A_1C\perp$平面B_1EF；

②$\triangle B_1EF$在侧面BCC_1B_1上的正投影是面积为定值的三角形；

③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面B_1EF平行的直线；

④平面B_1EF与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点E的位置有关，与点F的位置无关．

其中正确判断的个数有（　　）．



A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

答案　B

解析　对于①$A_1C\perp$平面B_1EF，不一定成立，因为$A_1C\perp$平面AC_1D，而两个平面面B_1EF与面AC_1D不一定平行；

对于②$\triangle B_1EF$在侧面BCC_1B_1上的正投影是面积为定值的三角形，此是一个正确的结论，因为其投影三角形的一边是棱BB_1，而E点在面上的投影到此棱BB_1的距离是定值，故正确；

对于③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面B_1EF平行的直线，此两平面相交，一个面内平行于两个平面的交线一定平行于另一个平面，此结论正确；

对于④平面B_1EF与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点E的位置有关，与点F的位置无关，此结论不对，与两者都有关系，可代入几个特殊点进行验证，如F与A重合，E与D重合时的二面角与F与B重合，E与D重合时的情况就不一样，故此命题不正确．

考点　立体几何与空间向量

立体几何初步

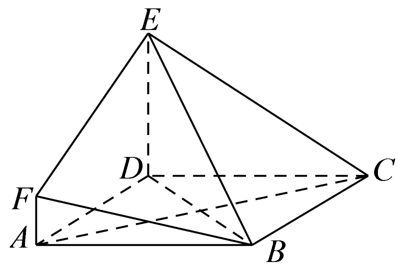
空间几何体

点、直线、平面间的位置关系

空间中的平行

空间中的垂直

12 如图, $ABCD$是边长为3的正方形，$DE\perp$平面$ABCD$，$AF//DE$，$DE=3AF$，BE与平面$ABCD$所成角为60^0．



（1）求证：$AC\perp$平面BDE．

（2）求二面角$F-BE-D$的余弦值．

（3）设点M是线段BD上的一个动点，试确定点M的位置，使得$AM//$平面BEF，并证明你的结论．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$．

（3）点M坐标为$(2,2,0)$，证明见解析．

解析 （1）证明：$\because DE\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，

$\therefore DE\perp AC$，

$\because ABCD$是正方形，

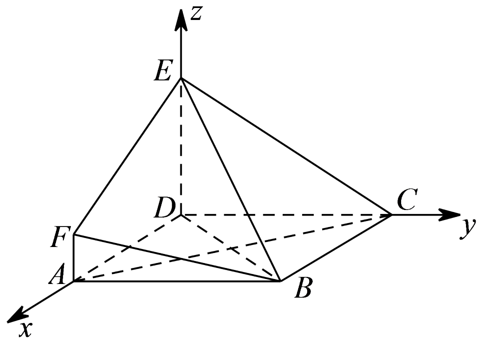
$\therefore AC\perp BD$，

又$\because DE\cap BD=D$，

$\therefore AC\perp$平面BDE．

（2）解：$\because DA$，DC，DE两两垂直，

$\therefore$如图建立空间直角坐标系，



$\because BE$与平面$ABCD$所成角为$60°$，

即$\angle DBE=60°$，

$\therefore \dfrac{ED}{DB}=\sqrt{3}$，

由$AD=3$，知$DE=3\sqrt{6}$，$AF=\sqrt{6}$，

则$A(3,0,0)$，$F(3,0,\sqrt{6})$，$E(0,0,\sqrt{6})$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{EF}=(3,0,-2\sqrt{6})$，

设平面BEF的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-3y+\sqrt{6}z=0\\ 3x-2\sqrt{6}z=0\end{cases}$，

令$z=\sqrt{6}$，则$\vec{n}=(4,2,\sqrt{6})$，

$\because AC\perp$平面BDE，

$\therefore \overrightarrow{CA}$为平面$BDE$的法向量，$\overrightarrow{CA}=(3,-3,0)$，

$\therefore \cos\left\langle \vec{n},\overrightarrow{CA}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{6}{3\sqrt{2}\times\sqrt{26}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，

又$\because$二面角$F-BE-D$为锐角，

$\therefore$二面角$F-BE-D$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$．

（3）点M是线段BD上一个动点，

设$M(t,t,0)$，则$\overrightarrow{AM}=(t-3,t,0)$，

$\because AM//$平面BDE，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$，即$4(t-3)+2t=0$，

解得：$t=2$，

此时，点M坐标为$(2,2,0)$，$BM=\dfrac{1}{3}BD$．

考点 —平面向量

—平面向量的基本定理及坐标表示

平面向量的坐标运算

用坐标表示平面向量共线的条件

立体几何与空间向量

立体几何初步

点、直线、平面间的位置关系

空间中的平行

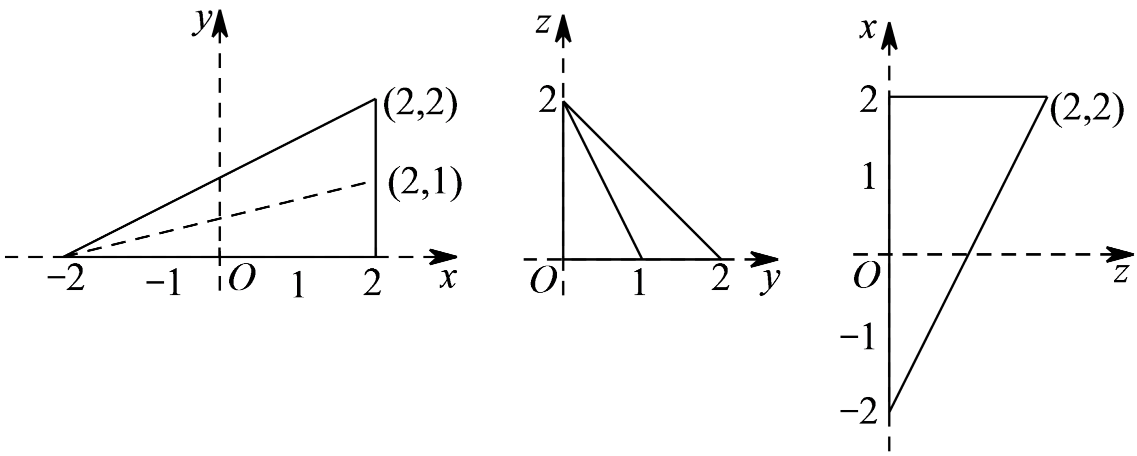
空间中的垂直

空间向量

空间向量及其运算

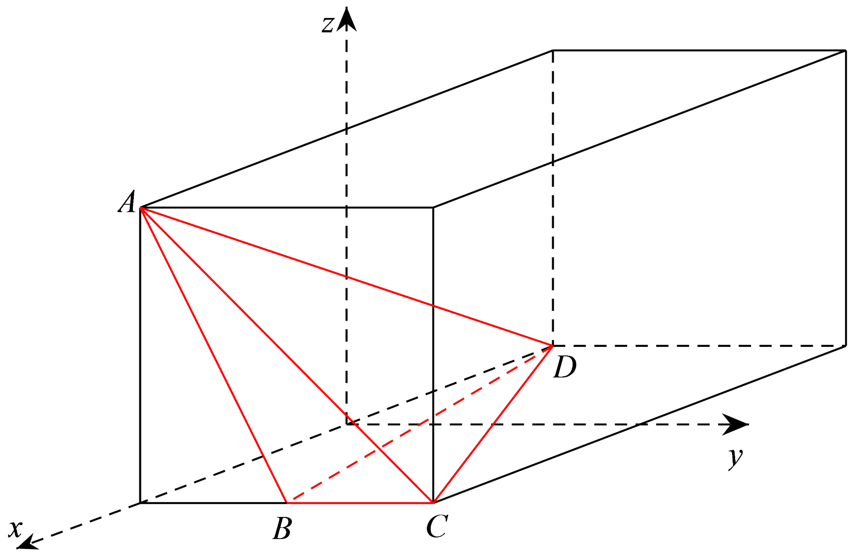
空间向量的应用

13 在空间直角坐标系$O-xyz$中，四面体$A-BCD$在xOy，yOz，zOx坐标平面上的一组正投影图像如图所示（坐标轴用细虚线表示）．该四面体的体积是 ______ ．



答案 $\frac{4}{3}$

解析 该几何体还原如图所示，



易得体积为$V=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times1\times2)\times4=\frac{4}{3}$．

考点

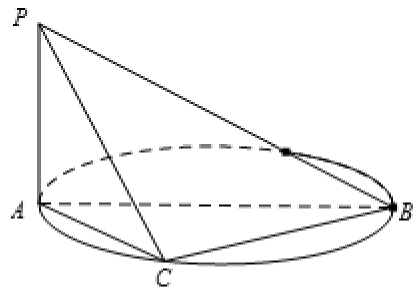
—立体几何与空间向量

　├立体几何初步

　　├空间几何体体积和表面积的计算

　　└三视图

14 如图AB是圆的直径，PA垂直圆所在的平面，C是圆上的点．



（1）求证：平面$PAC\perp$平面PBC．

（2）若$AB=2$，$AC=1$，$PA=1$，求：二面角$C-PB-A$的余弦值．

答案 （1）答案见解析．

（2）答案见解析．

解析 （1）由AB是圆的直径，得$AC\perp BC$．

由$PA\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，得$PA\perp BC$．

又$PA \cap AC = A$，$PA \subset$平面PAC，$AC \subset$平面PAC．

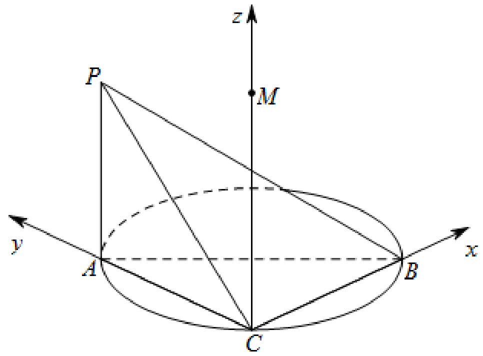
所以$BC \perp$平面PAC．

因为$BC \subset$平面PBC．

所以平面$PBC \perp$平面PAC．

（2）过C作$CM // AP$，则$CM \perp$平面ABC．

以点C为坐标原点，分别以直线CB，CA，CM为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系．



在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\because AB = 2$，$AC = 1$，$\therefore BC = \sqrt{3}$．

又$\because PA = 1$，$\therefore A(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,1,1)$．

故$\overrightarrow{CB} = ($ sqrt3，0，0)，$\overrightarrow{CP} = (0, 1, 1)$．

设平面BCP的法向量为$\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \sqrt{3}x_1 = 0 \\ y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$．

不妨令$y_1 = 1$，则$\overrightarrow{n_1} = (0, 1, -1)$．

因为$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$，$\overrightarrow{AB} = ($ sqrt3，-1，0)，

设平面ABP的法向量为$\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} z_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 - y_2 = 0 \end{cases}$

不妨令$x_2 = 1$，则$\overrightarrow{n_2} = (1$，. sqrt3，0)

于是$cos\left\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right\rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

由图知二面角$C - PB - A$为锐角，

故二面角$C - PB - A$的余弦值为$frac\sqrt{6}4$．

考点　一立体几何与空间向量

立体几何初步

└空间中的垂直

空间向量

└空间向量的应用

15 已知矩形$ABCD$，$AB=1,BC=\sqrt{2}$．将$\triangle ABD$沿矩形的对角线BD所在的直线进行翻折，在翻折过程中（　）．

A. 存在某个位置，使得直线AC与直线BD垂直

B. 存在某个位置，使得直线AB与直线CD垂直

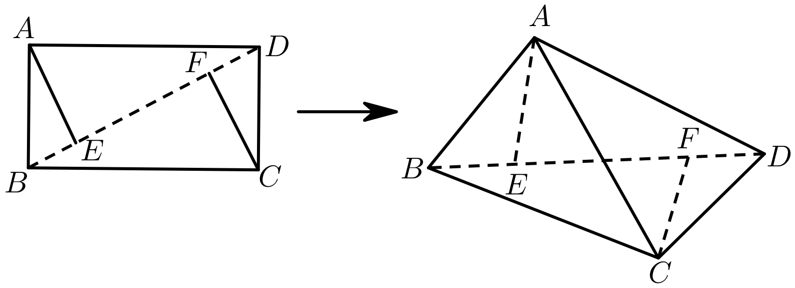
C. 存在某个位置，使得直线AD与直线BC垂直

D. 对任意位置，三直线“AC与BD”，“AB与CD”，“AD与BC”均不垂直

答案 B

解析 如图，$AE\perp BD,CF\perp BD$，依题意，

$AB=1BC=\sqrt{2},AE=CF=\dfrac{\sqrt{6}}{3},BE=CF=FD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，



若存在某个位置，使得直线AC与直线BD垂直，

则$\because AE\perp BD$，$\therefore BD\perp$平面AEC，

从而$BD\perp EC$，与已知矛盾，故A错误；

B．若存在某个位置，使得直线AB与直线CD垂直,

则$CD\perp ABC$，平面$BCD\perp$平面ABC，

取BC中点M，连接ME，则$BD\perp ME$，

$\therefore\angle AEM$就是二面角$A-BD-C$的平面角，

此角显然存在，即当A在底面上的射影位于BC的中点时，

直线AB与直线CD垂直，故B正确；

C．若存在某个位置，使得直线AD与直线BC垂直，

则$BC \perp ACD$，从而$BCD \perp ACD$，

即A在底面BCD上的射影位于线段CD上，审是不可能的，故C错误；D．由上所述可排除D．

考点

—立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

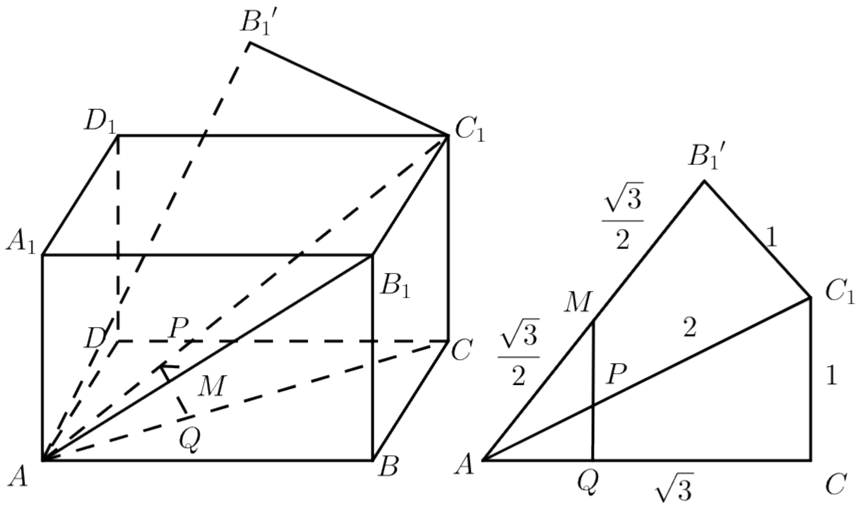
16 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=AA_1=1$，点M为AB_1的中点，点P为对角线AC_1上的动点，点Q为底面$ABCD$上的动点，（点PQ可以重合），则$MP+PQ$的最小值为（　）．

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

答案　C

解析　对角线AC_1上的动点P到底面$ABCD$上的Q点的最小值为点P在底面$ABCD$上的投影，即直线AC上，所以选择确定点Q，点B_1沿着线AC_1旋转，使得ACC_1B_1在一个平面上，过AB_1的中点M做AC的垂线，垂足为Q，MQ与AC_1的交点为P，线段MQ的长度为我们求的最小值．由题意长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=\sqrt{2},BC=AA_1=1$可得$\angle B_1AC_1=\angle CAC_1=\frac{\pi}{6}$，则$\angle MAC_1=\frac{\pi}{3}$，另外$AB_1=\sqrt{3}$，则$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$．

故答案为C．



考点

三角函数与解三角形

解三角形

立体几何与空间向量

立体几何初步

空间几何体

点、直线、平面间的位置关系

17 在半径为R的球内，有一个内接正三棱锥，它的底面上的三个顶点恰好在同一个大圆上，一个动点从三棱锥的一个顶点出发沿球面运动，经过其余三顶点后返回，则经过的最短路程是______．

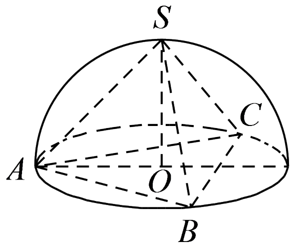
答案 $\frac{7\pi R}{3}$

解析 由题意可知，球面上两点之间最短距离为大圆（圆心为球心）的劣弧的弧长，

内接正三棱锥，它的地瞄三个顶点恰好同在一个大圆上，

一个动点从三棱锥的顶点出发沿球面运动，经过其余三点后返回，

如图所示：



动点从A到S，再到C，到B再回到A，

$\angle SOA=\angle SOC=90^\circ$，

$\angle COB=\angle BOA=120^\circ$，

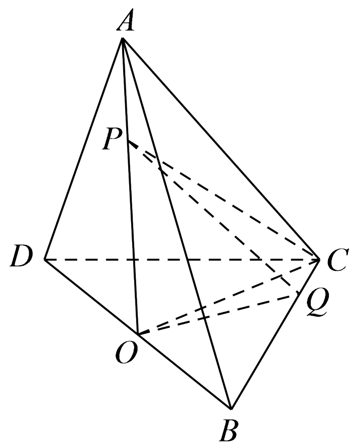
则经过的最短路径为：一个半圆和一个$\frac{2}{3}$圆，

即$\pi R+\frac{2}{3}\times 2\pi R=\frac{7}{3}\pi R$．

考点

—立体几何与空间向量
　—立体几何初步
　　└空间几何体

18 如图，三棱锥$A-BCD$的顶点A、B、C、D都在同一球面上，BD过球心O，且$BD=2$，$\triangle ABC$是边长为$\sqrt{2}$等边三角形，点P，Q分别为线段AO，BC上的动点（不含端点），且$AP=CQ$，则三棱锥$P-QCO$体积的最大值为______．



答案 $\frac{\sqrt{2}}{48}$

解析 因为$AD=AB$且O为BD中点，

所以$AO\perp BD$，

因为平面$ABD\perp$平面BCD，

由面面垂直的性质定理可得$AO\perp$平面BCD，

即$PO\perp$平面COQ．

因为$BC=DC=\sqrt{2}$，$BD=2$，

所以$\triangle BCD$为直角三角形，

则$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，

令$AP=CQ=x(0<x<1)$，

则$V_{P-OQC}=\frac{1}{3}S_{\triangle QOC}\cdot PO$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}S_{\triangle BOC}\right)(1-x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot x(1-x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2$

$=\frac{\sqrt{2}}{48}$，

当且仅当$x=1-x$，

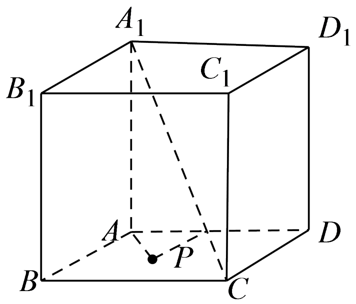
即$x=\frac{1}{2}$时取等号．

故本题正确答案为$\frac{\sqrt{2}}{48}$．

考点

- 不等式与线性规划
  - 均值不等式
    - 均值定理
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体体积和表面积的计算
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的垂直

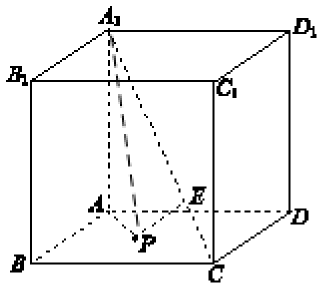
19 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为底面$ABCD$上的动点，$PE\perp A_1C$于E，且$PA=PE$，则点P的轨迹是（　）．



A. 线段　　B. 圆弧　　C. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

答案　A

解析　（解法一）由于$\triangle A_1AP \cong \triangle A_1EP$，



所以$AE=1$，因此E为A_1C上的定点．又$PA=PE$，

所以点P一定在线段AE的垂直平分面与底面$ABCD$的交线上，

因此点P的轨迹是线段．

（解法二）设正方形的边长为1，点P到AB和AD的距离分别为x和y．

由于$\triangle A_1AP\cong\triangle A_1EP$，

所以在$Rt\Delta EPC$中，$\angle CEP=90^o$，$CE=\sqrt{3}-1$，$PE=\sqrt{x^2+y^2}$，

$PC=\sqrt{(1-x)^2+(1-y^2)}$．

由$PC^2=CE^2+PE^2$可得$x+y=\sqrt{3}-1$．

考点　立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系

20　已知正方体$ABCD-A'B'C'D'$，记过点A与三条直线AB，AD，AA'所成角都相等的直线条数为m，过点A与三个平面AC，AB'，AD'所成角都相等的直线的条数为n，则下面结论正确的是（　）．

A. $m=1$，$n=1$　　B. $m=4$，$n=1$　　C. $m=3$，$n=4$　　D. $m=4$，$n=4$

答案 D

解析 以A为原点，AB，AD，AA'所在直线分别为x，y，z轴建立如图所示空间直角坐标系，

如图所示，则$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AA'}=(0,0,1)$，

设过点A与三条直线AB，AD，AA'所成角都相等的直线的方向向量$\vec{v}=(x,y,z)$，

根据题意则有$|x|=|y|=|z|$，

因此方向向量可以为$\vec{v}_1=(1,1,1)$，$\vec{v}_2=(-1,1,1)$，$\vec{v}_3=(1,-1,1)$，$\vec{v}_4=(1,1,-1)$，故

$m=4$；

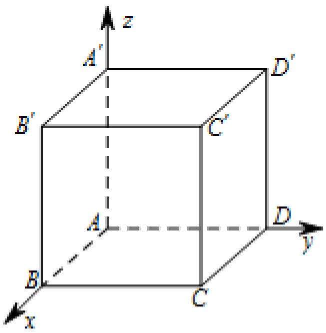
又因为平面AC，AB'，AD'的法向量分别为$(0,0,1)$，$(0,1,0)$，$(1,0,0)$，

设过点A与三个平面AC，AB'，AD'所成角都相等的直线的方向向量$\vec{p}=(x',y',z')$，

则有$|x'|=|y'|=|z'|$，$\vec{p}=(1,1,1)$，$\vec{p}_2=(-1,1,1)$，$\vec{p}_3=(1,-1,1)$，$p_4=(1,1,-1)$，故

$n=4$

故答案选D．

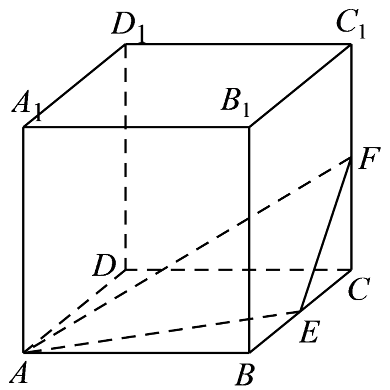


考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算
    - 空间向量的应用

21

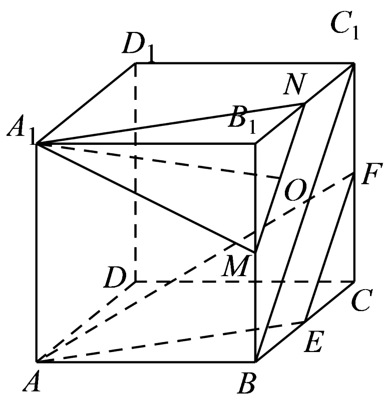
如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别是棱BC,CC_1的中点，P是侧面BCC_1B_1 内一点，若$A_1P//$平面AEF, 则线段A_1P长度的取值范围是（　）.



A. $[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　B. $[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　C. $[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

答案　B

解析　取B_1C_1的中点M,BB_1的中点N,



连结A_1M,A_1N,MN，可以证明平面$A_1MN//$平面AEF，

所以点P位于线段MN上，把三角形A_1MN拿到平面上，

则有$A_1M=A_1N=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$MN=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以当点P位于MN时，A_1P最大，

当P位于中点O时，A_1P最小，

此时$A_1O=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以$A_1O\leqslant A_1P\leqslant A_1M$，即$\frac{3\sqrt{2}}{4}\leqslant A_1P\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以线段A_1P长度的取值范围是$[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$.

故答案为B．

考点

一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行

22 如图所示，正方体$ABCD-A'B'C'D'$的棱长为1，E，F分别是棱AA'，CC'的中点，过直线E，F的平面分别与棱BB'，DD'交于M，N，设$BM=x$，$x\in[0,1]$，给出以下四个命题：

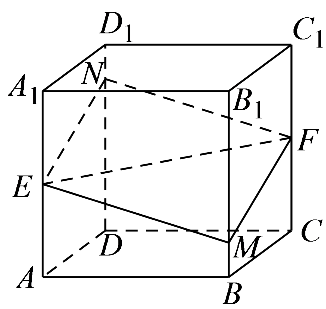
①平面$MENF\perp$平面$BDD'B'$；

②当且仅当$x=\frac{1}{2}$时，四边形$MENF$的面积最小；

③四边形$MENF$周长$L=f(x)$，$x\in[0,1]$是单调函数；

④四棱锥$C'-MENF$的体积$V=h(x)$为常函数；

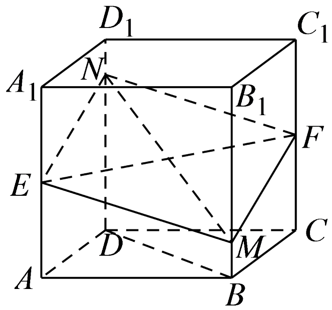
以上命题中假命题的序号为（　）．



A. ①④　　B. ②　　C. ③　　D. ③④

答案 C

解析 ①连接BD，$B'D'$，



在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，

$EF\perp$平面$BDD'B'$，

$\therefore$平面$MENF\perp$平面$BDD'B'$，

①正确；

②连接MN，

$\because EF\perp$平面$BDD'B'$，

四边形$MENF$的对角线EF是固定的，

要使面积最小，

只需MN的长度最小即可，

此时M为棱中点，$x=\dfrac{1}{2}$，

MN长度最小，对应四边形$MENF$的面积最小，

②正确；

③$\because EF\perp MN$，

$\therefore$四边形$MENF$是菱形，

当$x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$时，$EM$长度由大变小，

当$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$时，$EM$长度由小变大，

$\therefore l=f(x)$函数不是单调函数，

③错误；

④连接$C'E$，$C'N$，$C'M$，

四棱锥分割成两个小三棱锥，

以$C'EF$为底，分别以M、N为顶点，

$\because\triangle C'EF$面积是个常数，

M、N到平面$C'EF$的距离是个常数，

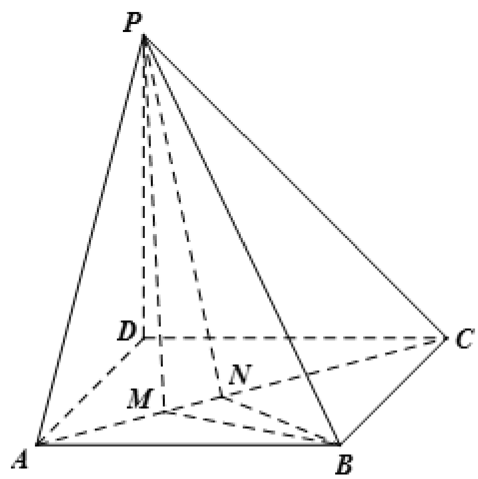
$\therefore$四棱锥$C'-MENF$的体积$V=h(x)$为常函数，

④正确．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 值域
    - 定义域
    - 解析式
    - 最值
    - 单调性
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体体积和表面积的计算
    - 空间几何体
    - 空间中的垂直

23 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为正方形，$PD=AD=2$，M，N分别为线段AC上的点．若$\angle MBN=30^{\circ}$，则三棱锥$M-PNB$体积的最小值为______．



答案 $\frac{4}{3}(2-\sqrt{3})$

解析

$V_{M-PNB}=V_{P-MNB}=\frac{2}{3}S_{\triangle MNB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}MN\times d(B,MN)=\frac{\sqrt{2}}{3}MN$,于是关键求$MN$的最小值。而$\frac{MN}{\sin\angle MBN}$为$\triangle BMN$的外接圆直径，所以$MN$的最小值为$2\sqrt{2}\tan\frac{\pi}{12}=2\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$，所以$V_{M-PNB}$的最小值为$\frac{4}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$．

考点

—立体几何与空间向量

　　├立体几何初步

　　　　└空间几何体

24 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，动点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$表面上运动，且$PA=r(0<r<\sqrt{3})$，记点P的轨迹的长度为$f(r)$，则$f\left(\frac{1}{2}\right)=$ ______ ；关于r的方程$f(r)=k$的解的个数可以为 ______ ．（填上所有可能的值）

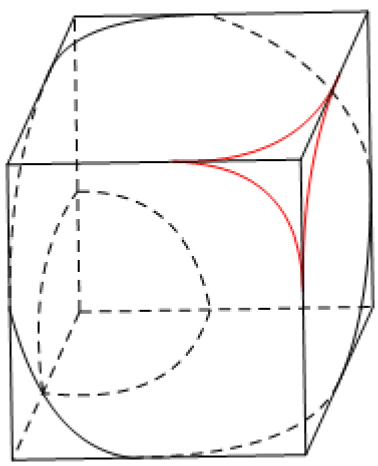
答案

1．$\frac{3\pi}{4}$

2．0，2，3，4

解析

如图所示：



①当$0<r\leqslant 1$时，$f(r)=3\times\frac{\pi}{2}\times r=\frac{3\pi r}{2}$，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$，

此时由一次函数的单调性可得：$0<f(r)\leqslant\frac{3\pi}{2}<5$．

②当$1<r\leqslant\sqrt{2}$时，在平面$ABCD$内，

设以点A为圆心，r为半径的圆弧与BC、CD分别交于点E、F，

则$\cos\angle DAF=\frac{1}{r}$，$\angle EAF=\frac{\pi}{2}-2\angle DAF$，

$\therefore \cos\angle EAF=\sin 2\angle DAF=2\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{r}\right)^2}\cdot\frac{1}{r}=\frac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}$ ，

$\cos\angle EAG=\frac{1}{r^2}$ ，

$\therefore f(r)=3r\arccos\frac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}+3rayc\cos\frac{1}{r^2}$ ；

③当$\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$时，$\because CM=\sqrt{r^2-2}$，

$\therefore C_1M=C_1N=1-\sqrt{r^2-2}$ ，

$\therefore \cos\angle MAN=\frac{2r^2-[\sqrt{2}(1-\sqrt{r^2-2})]^2}{2r^2}=\frac{1+2\sqrt{r^2-2}}{r^2}$ ，

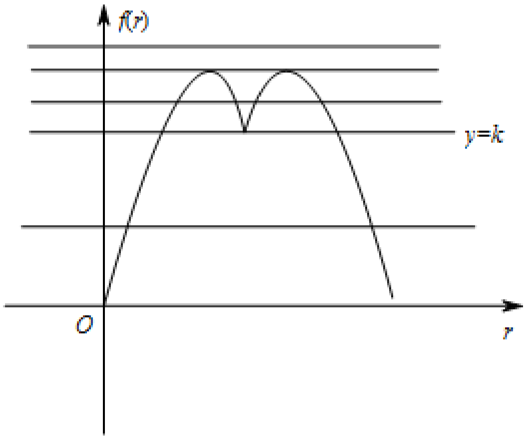
$\therefore f(r)=3r\arccos\frac{1+2\sqrt{r^2-2}}{r^2}$.

综上所述：当$0<r\leqslant 1$时，$f(r)=\frac{3\pi r}{2}$ ；

当$1<r\leqslant\sqrt{2}$时，$f(r)=3r\arccos\frac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}+3rayc\cos\frac{1}{r^2}$ ；

当$\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$时，$f(r)=3r\arccos\frac{1+2\sqrt{r^2-2}}{r^2}$.

根据以上解析式及图性和对称性可得$f(r)$的图象：



由图象不难看出：函数$y=f(r)$与$y=k$的交点个数分别为：0，2，3，4 .

故答案为$\frac{3\pi}{4}$ ；0，2，3，4 .

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 值域
    - 定义域
    - 解析式
    - 函数的概念与表示
    - 图象
  - 函数与方程

函数图象的交点

函数的零点

三角函数与解三角形

三角函数

任意角与弧度制

三角函数的定义

立体几何与空间向量

立体几何初步

空间几何体

解析几何

曲线与方程

25 在下列命题中：

①存在一个平面与正方体的12条棱所成的角都相等；

②存在一个平面与正方体的6个面所成较小的二面角都相等；

③存在一条直线与正方体的12条棱所成的角都相等；

④存在一条直线与正方体的6个面所成的角都相等．

其中真命题的个数为（　）．

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案 D

解析 ①如图：平面CB_1D_1满足题意，

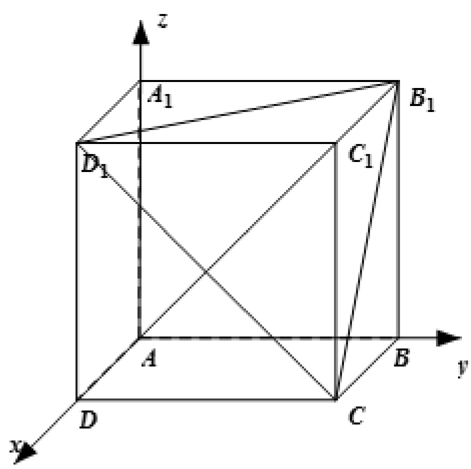
由共线向量的性质可知，平面与正方体的12条棱所成的角

只需验证该平面与3条棱（AB，AD，AA_1）成角即可；

平面CB_1D_1的法向量$\overrightarrow{AC_1}=(1,1,1)$，

$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$

，



所以，该平面与3条棱（AB，AD，AA_1）成角的正弦值分别为

$$\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意；

②平面CB_1D_1满足题意，

平面与正方体的6个面所成较小的二面角只需验证该平面

与3个平面（平面$ABCD$，平面ADD_1A_1，平面AA_1B_1B）成角即可；

平面CB_1D_1的法向量$\overrightarrow{AC_1}=(1,1,1)$，平面$ADD_1A_1$的法向量$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，

平面AA_1B_1B的法向量$\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，平面$ABCD$的法向量$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，

所以，该平面与3个平面（平面$ABCD$，平面ADD_1A_1，平面AA_1B_1B）

所成较小的二面角的余弦值分别为

$$\left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意；

③如图：直线AC_1满足题意，

由共线向量的性质可知，直线与正方体的12条棱所成的角

只需验证该直线与3条棱（AB，AD，AA_1）成角即可；

$\overrightarrow{AC_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，

所以，该直线与3条棱（AB，AD，AA_1）成角的余弦值分别为

$$\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

满足题意；

④直线AC_1满足题意，

直线与正方体的6个面所成角只需验证该直线

与3个平面（平面$ABCD$，平面ADD_1A_1，平面AA_1B_1B）成角即可；

$\overrightarrow{AC_1}=(1,1,1)$，平面$ADD_1A_1$的法向量$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，

平面AA_1B_1B的法向量$\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，平面$ABCD$的法向量$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，

所以，该直线与3个平面（平面$ABCD$，平面ADD_1A_1，平面AA_1B_1B）

所成角的正弦值分别为

$$\left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}，\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}，$$

$$\left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}，$$

满足题意．

故答案选D．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算

26 正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为$2\sqrt{2}$，$AA_1=2$，点M是BC的中点，P是平面A_1BCD_1内的一个动点，且满足$PM\leqslant 2$，P到A_1D_1和AD的距离相等，则点P的轨迹的长度为（　）．

A. π　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

答案 D

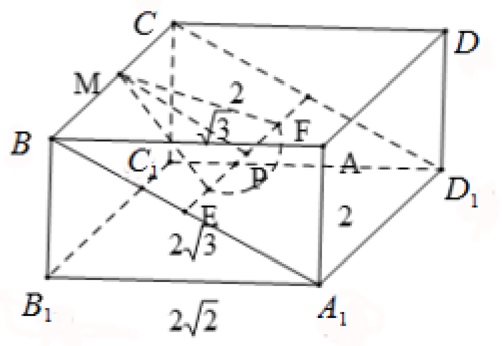
解析 P是平面A_1BCD_1内的一个动点

并且P到A_1D_1和AD的距离相等，

所以点P的轨迹是一条直线，

又$PM\leqslant 2$，所以P的轨迹是线段EF，其长为2．

如图：



考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
- 解析几何
  - 曲线与方程

27 设l_1,l_2,l_3为空间中三条互相平行且两两间的距离分别为4，5，6的直线．给出下列三个结论：

①$\exists A_i\in l_i(i=1,2,3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是直角三角形；

②$\exists A_i\in l_i(i=1,2,3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是等边三角形；

③三条直线上存在四点$A_i(i=1,2,3,4)$，使得四面体$A_1A_2A_3A_4$为在一个顶点处的三条棱两两互相垂直的四面体．

其中，所有正确结论的序号是（　　）．

A. ①　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

答案　B

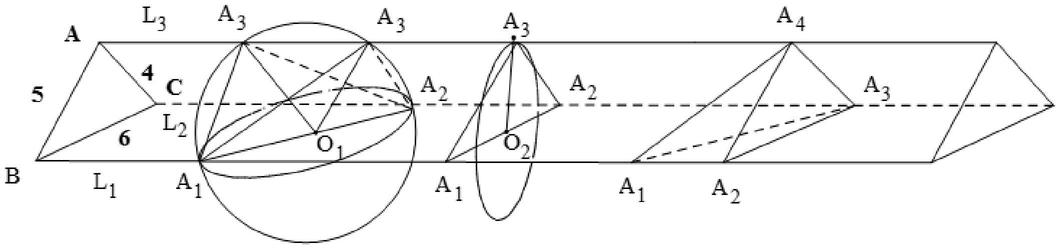
解析　由条件，可以构造一个侧棱长度不限，底面ΔABC边长为4,5,6的直三棱柱，设底面ΔABC高为h．

①正确．在l_1上取A_1,l_2上取A_2,以A_1A_2为直径做球体，可知必存在一球体可交l_3于A_3，由球体性质可知$\Delta A_1A_2A_3$是直角三角形；

②正确．在l_1上取A_1,l_2上取A_2,以A_1A_2中点O为圆心，以$\frac{\sqrt{3}}{2}|A_1A_2|$为半径并且所在面垂直于$A_1A_2$做圆．变化$A_1A_2$长度，可知一定存在一圆可交$l_3$于$A_3$，则$\triangle\ A_1A_2A_3$是等边三角形；

③错误．假设A_1A_2在l_1上，A_3在l_2上，A_4在l_3上，$A_1A_2\perp A_3A_2, A_1A_2\perp A_4A_2, A_4A_2\perp A_3A_2$，可知$\Delta A_2A_3A_4$与直三棱柱的侧棱垂直，$\Delta A_2A_3A_4$全等于$\Delta ABC$，因为$\Delta A_2A_3A_4$为直角三角形，与边长为4,5,6的$\Delta ABC$形状矛盾，则此结论错误．

选答案B．



考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行

28 如图，四面体$OABC$的三条棱OA, OB, OC两两垂直，$OA=OB=2, OC=3$,D为四面体$OABC$外一点．给出下列命题．

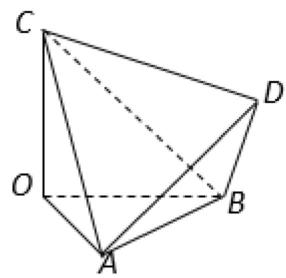
①不存在点D,使四面体ABCD有三个面是直角三角形

②不存在点D,使四面体$ABCD$是正三棱锥

③存在点D,使CD与AB垂直并且相等

④存在无数个点D,使点O在四面体$ABCD$的外接球面上

其中真命题的序号是（　）．



A. ①②　　B. ②③　　C. ③　　D. ③④

答案 D

解析 解：对于①，当D为O关于平面ABC的对称点时，四面体ABCD有三个面是直角三角形，故错误；

对于②，作等边三角形ABD，以AB为轴旋转平面ABD，使$CD=AC$，此时四面体$ABCD$是正三棱锥，故错误；

对于③，当平面$ABD\perp$底面OAB，且$AD=BD=\sqrt{3}$时，CD与AB垂直并且相等，故正确；

对于④，作四面体$OABC$的外接球，在球上且在四面体外存在无数个点D，故正确；

故答案为D．

考点
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

29 在空间中，过点A作平面π的垂线，垂足为B，记$B=f_{\pi}(A)$设α，β是两个不同的平面，对空间任意一点P，$Q_1=f_{\beta}[f_{\alpha}(P)]$，$Q_2=f_{\alpha}[f_{\beta}(P)]$，恒有$PQ_1=PQ_2$，则（　）．

A. 平面α与平面β垂直

B. 平面α与平面β所成的（锐）二面角为45°

C. 平面α与平面β平行

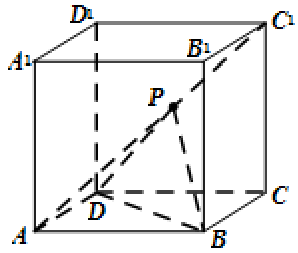
D. 平面α与平面β所成的（锐）二面角为60°

答案 A

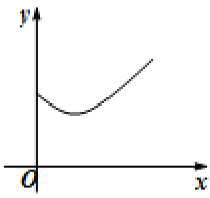
解析 略

考点
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系

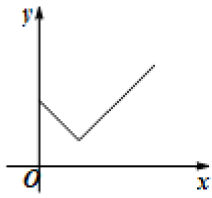
30 如图，P是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$对角线AC_1上一动点，设AP的长度为x，若$\triangle PBD$的面积为$f(x)$，则$f(x)$的图象大致是（　）．



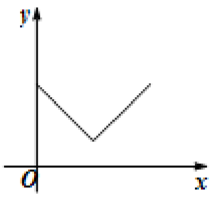
A.



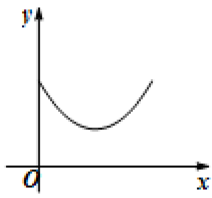
B.



C.



D.



答案 A

解析 设正方体的棱长为1，连接AC交BD于O，

连PO，则PO是等腰$\triangle PBD$的高，

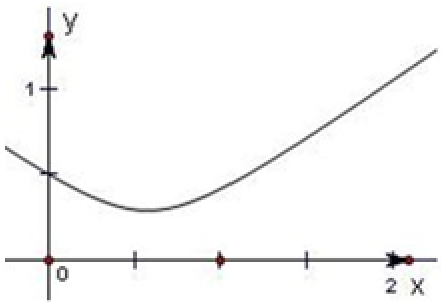
故$\triangle PBD$的面积为$f(x)=\frac{1}{2}BD\times PO$，

在三角形$\triangle PAO$中，

$$PO=\sqrt{PA^2+AO^2-2PA\times AO\cos\angle PAO}=\sqrt{x^2+\frac{1}{2}-2x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}},$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{x^2+\frac{1}{2}-2x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}},$$

画出其图像，如图所示，



对照选项，A正确．

考点 一函数与导数

一函数

└函数的概念与表示

└图象

└立体几何与空间向量

├立体几何初步

└空间几何体