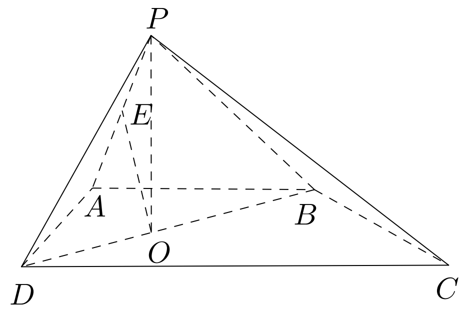
# 立体几何与空间向量-高考必做题

1 如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是直角梯形，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$\Delta PAB$和$\Delta PAD$是两个边长为2的正三角形，$DC=4$，$O$为$BD$的中点，$E$为$PA$的中点．

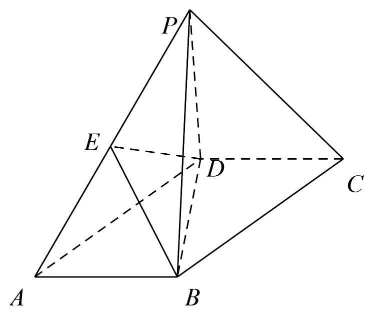



（1）求证：$PO\perp$平面$ABCD$；

（2）求证：$OE//$平面$PDC$；

（3）求直线$CB$与平面$PDC$所成角的正弦值．

2 如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是平行四边形，$AB\perp BD$，$PD\perp$平面$ABCD$，且$PD=AB$，$E$为$PA$的中点．

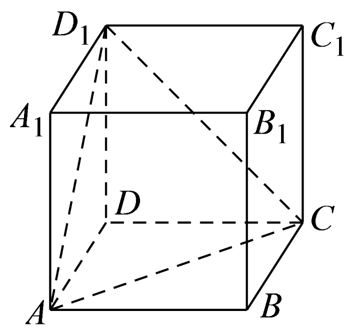



（1）求证:$CD\perp PB$．

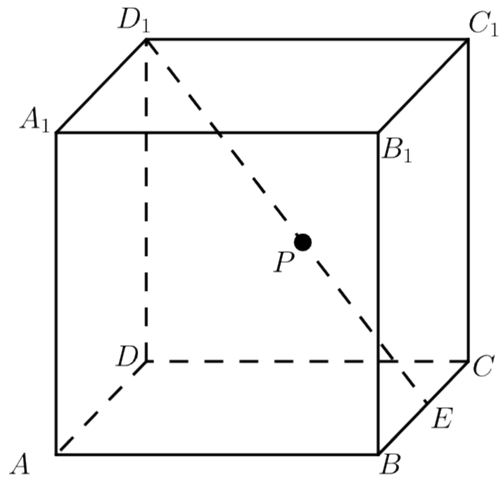
（2）求证:$PC//$平面$BED$．

（3）求二面角$E-BD-A$的大小．

3 在如图所示的棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，作与平面$ACD_1$平行的截面，则截得的三角形中，面积最大的值是 ______ ；截得的平面图形中，面积最大的值是 ______ ．




4 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$E$为$BC$的中点，点$P$在线段$D_1E$上．点$P$到直线$CC_1$的距离的最小值为 ______ ．



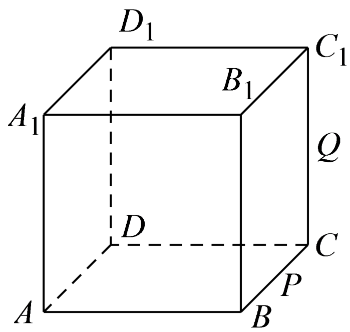

5 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，$P$为$BC$的中点，$Q$为线段$CC_1$上的动点，过点$A$，$P$，$Q$的平面截该正方体所得截面记为$S$，则下列命题正确的是 ______ ．

①当$0<CQ\leqslant\frac{1}{2}$时，$S$为四边形；

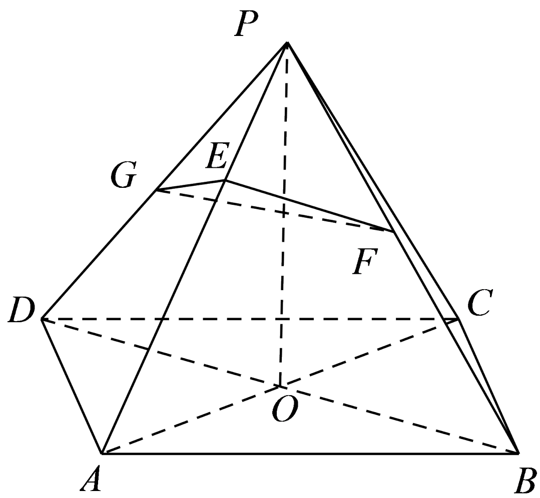
②当$CQ=\frac{3}{4}$时，$S$为五边形；

③当$\frac{3}{4}<CQ<1$时，$S$为六边形；

④当$CQ=1$时，$S$为菱形．




6 四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$，$AC\cap BD=O$，且$PO\perp$平面$ABCD$，$PO=\sqrt{3}$，点$F$，$G$分别是线段$PB$，$PD$上的中点，$E$在$PA$上，且$PA=3PE$．




（1）求证:$BD//$平面$EFG$．

（2）求直线$AB$与平面$EFG$的成角的正弦值．

（3）请画出平面$EFG$与四棱锥的表面的交线，并写出作图的步骤．

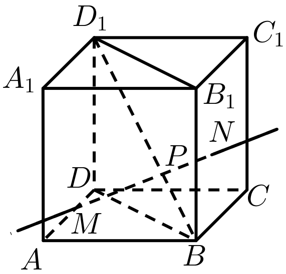
7 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$P$是正方体棱上一点（不包括棱的端点），$|PA|+|PC_1|=m$，

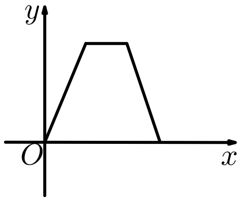
（1）若$m=2$，则满足条件的点$P$的个数为 ______ ．

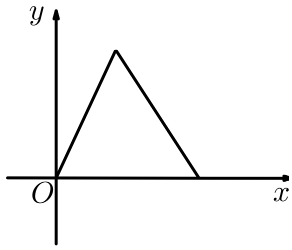
（2）若满足$|PA|+|PC_1|=m$的点$P$的个数为6，则$m$的取值范围是 ______ ．

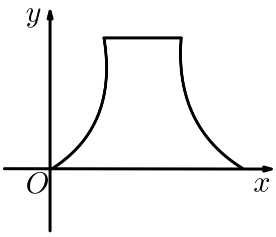
8

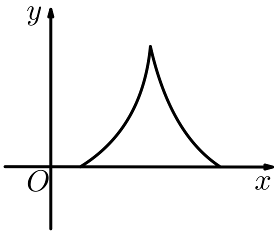
如图，动点$P$在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线$BD_1$上．过点$P$作垂直于平面$BB_1D_1D$的直线，与正方体表面相交于$M$，$N$．设$BP=x$，$MN=y$，则函数$y=f(x)$的图象大致是（　）．



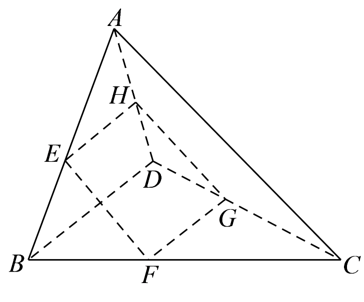

A. 

B. 

C. 

D. 

9 如图，在空间四边形$ABCD$中，两条对角线$AC$，$BD$互相垂直，且长度分别为4和6，平行于这两条对角线的平面与边$AB$，$BC$，$CD$，$DA$分别相交于点$E$，$F$，$G$，$H$，记四边形$EFGH$的面积为$y$，设$\frac{BE}{AB}=x$，则(　)．




A. 函数$y=f(x)$的值域为$(0,4]$

B. 数$y=f(x)$的最大值为8

C. 函数$y=f(x)$在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上单调递减

D. 函数$y=f(x)$满足$f(x)=f(1-x)$

10 如图1，在边长为$2\sqrt{3}$的正方形$ABCD$中，$E,O$分别为$AD,BC$的中点，沿$EO$将矩形$ABOE$折起使得$\angle BOC=120^\circ$，如图2所示，点$G$在$BC$上，$BG=2GC$，$M,N$分别为$AB,EG$中点．

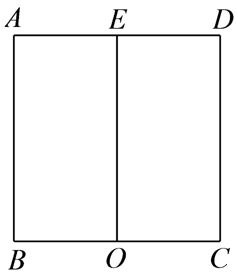


图1

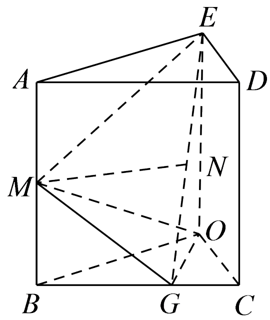


图2

（1）求证：$MN//$平面$OBC$．

（2）求二面角$G-ME-B$的余弦值．

11 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$E$，$F$分别为棱$DD_1$，$AB$上的点． 已知下列判断：

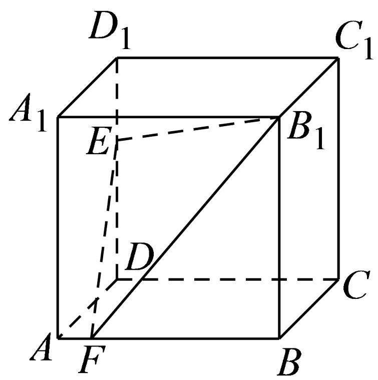
①$A_1C\perp$平面$B_1EF$；

②$\triangle B_1EF$在侧面$BCC_1B_1$上的正投影是面积为定值的三角形；

③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面$B_1EF$平行的直线；

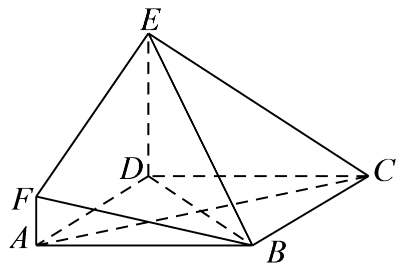
④平面$B_1EF$与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点$E$的位置有关，与点$F$的位置无关．

其中正确判断的个数有（　　）．




A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

12 如图, $ABCD$是边长为3的正方形，$DE\perp$平面$ABCD$，$AF//DE$，$DE=3AF$，$BE$与平面$ABCD$所成角为$60^0$．

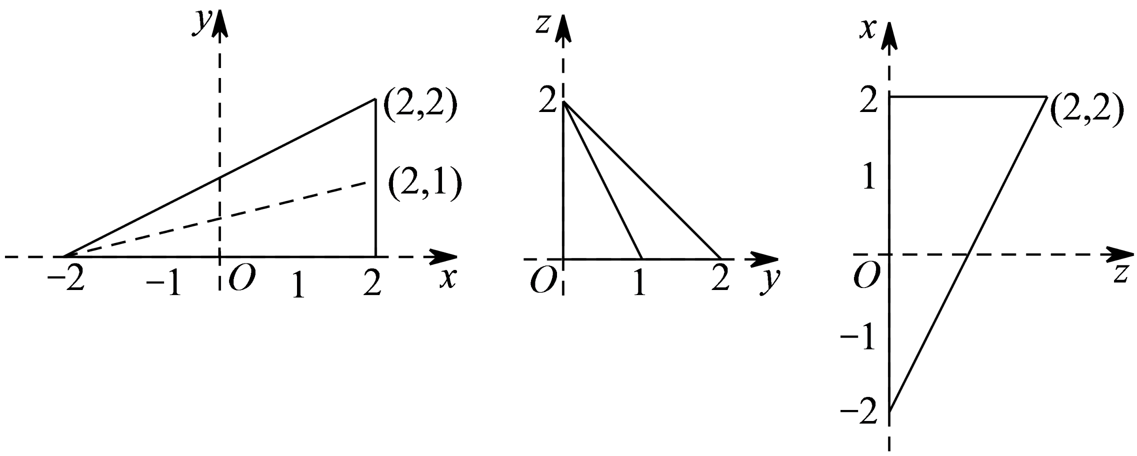



（1）求证：$AC\perp$平面$BDE$．

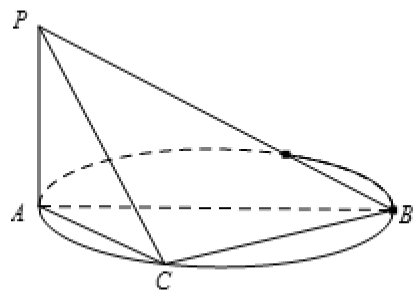
（2）求二面角$F-BE-D$的余弦值．

（3）设点$M$是线段$BD$上的一个动点，试确定点$M$的位置，使得$AM//$平面$BEF$，并证明你的结论．

13 在空间直角坐标系$O-xyz$中，四面体$A-BCD$在$xOy$，$yOz$，$zOx$坐标平面上的一组正投影图像如图所示（坐标轴用细虚线表示）．该四面体的体积是 ______ ．




14 如图$AB$是圆的直径，$PA$垂直圆所在的平面，$C$是圆上的点．




（1）求证：平面$PAC\perp$平面$PBC$．

（2）若$AB=2$，$AC=1$，$PA=1$，求：二面角$C-PB-A$的余弦值．

15 已知矩形$ABCD$，$AB=1, BC=\sqrt{2}$．将$\triangle ABD$沿矩形的对角线$BD$所在的直线进行翻折，在翻折过程中（　）．

A. 存在某个位置，使得直线$AC$与直线$BD$垂直

B. 存在某个位置，使得直线$AB$与直线$CD$垂直

C. 存在某个位置，使得直线$AD$与直线$BC$垂直

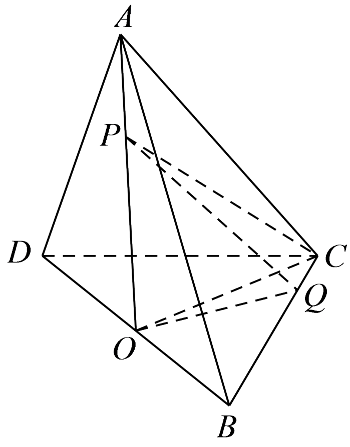
D. 对任意位置，三直线“$AC$与$BD$”，“$AB$与$CD$”，“$AD$与$BC$”均不垂直

16 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=AA_1=1$，点$M$为$AB_1$的中点，点$P$为对角线$AC_1$上的动点，点$Q$为底面$ABCD$上的动点，（点$PQ$可以重合），则$MP+PQ$的最小值为（　）．

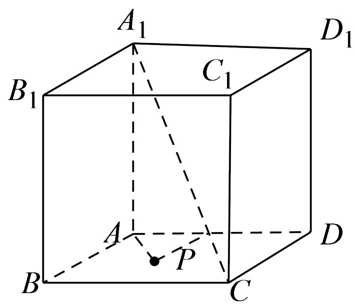
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $1$

17 在半径为$R$的球内，有一个内接正三棱锥，它的底面上的三个顶点恰好在同一个大圆上，一个动点从三棱锥的一个顶点出发沿球面运动，经过其余三顶点后返回，则经过的最短路程是______．

18 如图，三棱锥$A-BCD$的顶点$A$、$B$、$C$、$D$都在同一球面上，$BD$过球心$O$，且$BD=2$，$\triangle ABC$是边长为$\sqrt{2}$等边三角形，点$P$，$Q$分别为线段$AO$，$BC$上的动点（不含端点），且$AP=CQ$，则三棱锥$P-QCO$体积的最大值为______．




19 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$P$为底面$ABCD$上的动点，$PE\perp A_1C$于$E$，且$PA=PE$，则点$P$的轨迹是（　）．

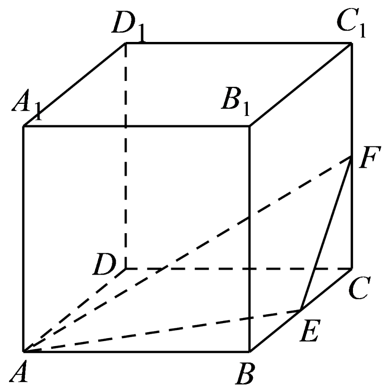



A. 线段　　B. 圆弧　　C. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

20 已知正方体$ABCD-A'B'C'D'$，记过点$A$与三条直线$AB$，$AD$，$AA'$所成角都相等的直线条数为$m$，过点$A$与三个平面$AC$，$AB'$，$AD'$所成角都相等的直线的条数为$n$，则下面结论正确的是（　）．

A. $m=1$，$n=1$　　B. $m=4$，$n=1$　　C. $m=3$，$n=4$　　D. $m=4$，$n=4$

21 如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$E,F$分别是棱$BC,CC_1$的中点，$P$是侧面$BCC_1B_1$内一点，若$A_1P//$平面$AEF$, 则线段$A_1P$长度的取值范围是（　）．




A. $[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　B. $[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　C. $[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

22 如图所示，正方体$ABCD-A'B'C'D'$的棱长为1，$E$，$F$分别是棱$AA'$，$CC'$的中点，过直线$E$，$F$的平面分别与棱$BB'$，$DD'$交于$M$，$N$，设$BM=x$，$x\in[0,1]$，给出以下四个命题：

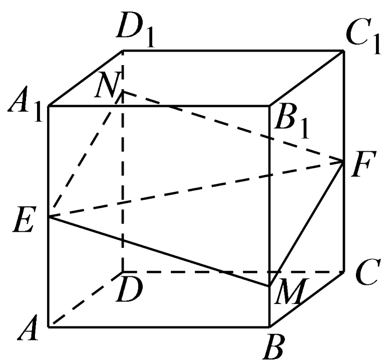
①平面$MENF\perp$平面$BDD'B'$；

②当且仅当$x=\frac{1}{2}$时，四边形$MENF$的面积最小；

③四边形$MENF$周长$L=f(x)$，$x\in[0,1]$是单调函数；

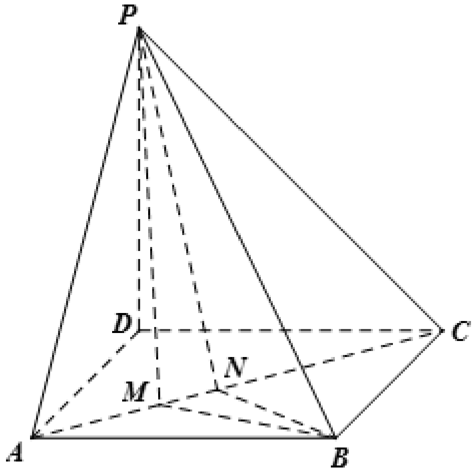
④四棱锥$C'-MENF$的体积$V=h(x)$为常函数；

以上命题中假命题的序号为（　）．




A. ①④　　B. ②　　C. ③　　D. ③④

23 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为正方形，$PD=AD=2$，$M$，$N$分别为线段$AC$上的点．若$\angle MBN=30^{\circ}$，则三棱锥$M-PNB$体积的最小值为 ______ ．




24 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，动点$P$在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$表面上运动，且$PA=r(0<r<\sqrt{3})$，记点$P$的轨迹的长度为$f(r)$，则$f\left(\frac{1}{2}\right)=$______；关于$r$的方程$f(r)=k$的解的个数可以为______．（填上所有可能的值）

25 在下列命题中：

①存在一个平面与正方体的12条棱所成的角都相等；

②存在一个平面与正方体的6个面所成较小的二面角都相等；

③存在一条直线与正方体的12条棱所成的角都相等；

④存在一条直线与正方体的6个面所成的角都相等．

其中真命题的个数为（　）．

A. $1$　　B. $2$　　C. $3$　　D. $4$

26 正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为$2\sqrt{2}$，$AA_1=2$，点$M$是$BC$的中点，$P$是平面$A_1BCD_1$内的一个动点，且满足$PM\leqslant 2$，$P$到$A_1D_1$和$AD$的距离相等，则点$P$的轨迹的长度为（　）．

A. $\pi$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2$

27 设$l_1,l_2,l_3$为空间中三条互相平行且两两间的距离分别为4，5，6的直线．给出下列三个结论：

①$\exists A_i\in l_i(i=1,2,3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是直角三角形；

②$\exists A_i\in l_i(i=1,2,3)$，使得$\triangle A_1A_2A_3$是等边三角形；

③三条直线上存在四点$A_i(i=1,2,3,4)$，使得四面体$A_1A_2A_3A_4$为在一个顶点处的三条棱两两互相垂直的四面体．

其中，所有正确结论的序号是（　）．

A. ①　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

28 如图，四面体$OABC$的三条棱$OA,OB,OC$两两垂直，$OA=OB=2,OC=3,D$为四面体$OABC$外一点．给出下列命题．

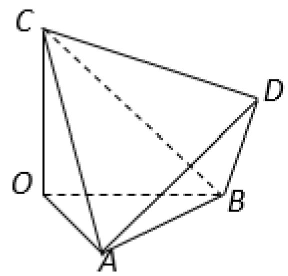
①不存在点$D$,使四面体ABCD有三个面是直角三角形

②不存在点$D$,使四面体$ABCD$是正三棱锥

③存在点$D$,使$CD$与$AB$垂直并且相等

④存在无数个点$D$,使点$O$在四面体$ABCD$的外接球面上

其中真命题的序号是（　）．



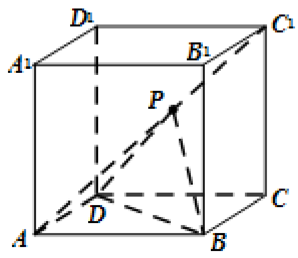

A. ①②　　B. ②③　　C. ③　　D. ③④

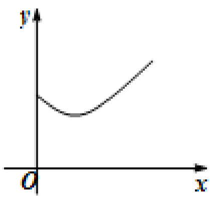
29 在空间中，过点A作平面$\pi$的垂线，垂足为B，记$B=f_\pi(A)$设$\alpha$，$\beta$是两个不同的平面，对空间任意一点$P$，$Q_1=f_\beta[f_\alpha(P)]$，$Q_2=f_\alpha[f_\beta(P)]$，恒有$PQ_1=PQ_2$，则（　）．

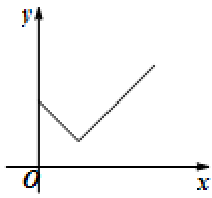
A. 平面α与平面β垂直　　B. 平面α与平面β所成的（锐）二面角为$45°$

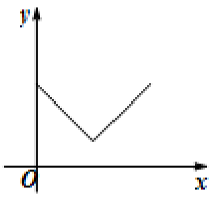
C. 平面α与平面β平行　　D. 平面α与平面β所成的（锐）二面角为$60°$

30 如图，$P$是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$对角线$AC_1$上一动点，设$AP$的长度为$x$，若$\triangle PBD$的面积为$f(x)$，则$f(x)$的图象大致是（　）．




A. 


B. 


C. 


D.