数列-高考必做题

1 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_4=8$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若a_3，a_5分别为等差数列$\{b_n\}$的第6项和第8项，求$|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|\,(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 （1）$a_n=2^{n-1}(n\in N^*)$．

（2）$|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|=\begin{cases}-3n^2+29n, n\leqslant 5, n\in\mathbf{N}^*\\ 3n^2-29n+140, n\geqslant 6, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$．

解析 （1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q．

由$a_1=1$，$a_4=8$

所以$a_4=a_1q^3=q^3=8$．

所以$q=2$．

所以等比数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}(n\in N^*)$．

（2）因为a_3，a_5分别为等差数列$\{b_n\}$的第6项和第8项，

所以$b_6=a_3=4$，$b_8=a_5=16$

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

$\begin{cases}b_8=b_1+7d=16\\ b_6=b_1+5d=4\end{cases}$解得，$\begin{cases}b_1=-26\\ d=6\end{cases}$．

所以等差数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=b_1+(n-1)d=-26+6(n-1)=6n-32$．

因为当$b_n\leqslant 0$时，$n\leqslant 5$．

（1）当$n\leqslant 5$时，$|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|=-(b_1+b_2+b_3++\cdots+b_n)$

$=-\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=-3n^2+29n$．

（2）当$n\geqslant 6$时，

$|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|=-(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)+b_6+\cdots+b_n$，

$=-\dfrac{5(b_1+b_5)}{2}+\dfrac{(n-5)(b_6+b_n)}{2}$

$=70+(3n^2-29n+70)=3n^2-29n+140$．

综上所述：$|b_1|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|=\begin{cases}-3n^2+29n, n\leqslant 5, n\in\mathbf{N}^*\\ 3n^2-29n+140, n\geqslant 6, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$．

考点 一数列

├等差数列
　├等差数列的概念和通项
　├等差数列的性质
　└等差数列的前n项和
├等比数列
　├等比数列的概念和通项
　└等比数列的性质

2 等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4=12$，$S_7=49$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）记$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[0.9]=0$，$[2.6]=2$，令$b_n=[\lg a_n]$．求数列$\{b_n\}$的前2000项和．

答案 （1）$a_n=2n-1$．

（2）5445．

解析 （1）由题设有$\begin{cases}(a_1+2d)+(a_1+3d)=12\\ a_1\times 7+\frac{(7-1)\times 7}{2}d=49\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$，

所以$a_n=2n-1$．

（2）当$1\leqslant a_n<10$，即$1\leqslant n\leqslant 5$时，$\lg a_n\in(0,1)$，$b_n=0$；

当$10\leqslant a_n<100$，即$6\leqslant n\leqslant 50$时，$\lg a_n\in[1,2)$，$b_n=1$；

当$100\leqslant a_n<1000$，即$51\leqslant n\leqslant 500$时，$\lg a_n\in[2,3)$，$b_n=2$；

当$1000\leqslant a_n<10000$，即$501\leqslant n\leqslant 5000$时，

$\lg a_n\in[3,4)$，$b_n=3$；

所以数列b_n的前2000项和为

$(5-0)\times 0+(50-5)\times 1+(500-50)\times 2+(2000-500)\times 3=5445$．

考点 ─数列
├数列的概念
　└数列的前n项和
├等差数列
　└等差数列的概念和通项

3 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n和，若$S_6=51,a_5=13$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n及前n和S_n．

（2）若数列$\{b_n\}$中$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$和$T_n$．

（3）设函数$f(n)=\begin{cases}a_n,n\text{为奇数}\\ f\left(\frac{n}{2}\right),n\text{为偶数}\end{cases}$，$c_n=f(2^n+4)(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{c_n\}$的前$n$和$M_n$（只需写出结论）．

答案 （1）$a_n=3n-2$，$S_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{n}{2}$．

（2）$T_n=\dfrac{n}{3n+1}$．

（3）$M_n=\begin{cases}7,n=1\\ n+3\times2^{n-1},n\geqslant2\end{cases}$．

解析 （1）由题意可知，$\begin{cases}25=6a_1+\frac{5\times6}{2}d\Rightarrow2a_1+5d=17\\ 13=a_1+4d\end{cases}$，

得：$a_1=1,d=3,\Rightarrow a_n=3n-2,S_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{n}{2}$．

（2）$b_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$，

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

$=\dfrac{n}{3n+1}$．

（3）$c_1=f(2+4)=f(3)=a_3,$

$c_2=f(8)=f(1)=a_1,$

$c_3=f(2^3+4)=f(2+1)=a_3,\cdots$

$c_n=f(2^n+4)=f(2^{n-2}+1)=a_{2^{n-2}+1}$，……，

$M_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$，

当$n=1$时，$M_1=f(6)=a_3=7$，

当$n=2,M_2=c_1+c_2=f(6)+f(8)=a_3+a_1=8$，

当$n\geqslant3,M_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$

$=8+3\times(2+1)-2+3\times(2^2+1)-2+3(2^{n-2}+1)-2$

$=8+3(2+2^2+\cdots+2^{n-2})+n-2=n+3\times2^{n-1}$，

所以$M_n=\begin{cases}7,n=1\\ n+3\times2^{n-1},n\geqslant2\end{cases}$．

考点 —数列

—数列的概念

- 数列的定义及表示方法
- 数列的递推公式
- 数列的前n项和
- 等差数列
  - 等差数列的概念和通项
  - 等差数列的性质
  - 等差数列的前n项和
- 等比数列
  - 等比数列的前n项和
- 推理与证明
  - 合情推理和演绎推理
    - 合情推理
  - 数学归纳法
    - 数学归纳法的应用

4 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=9$，a_2为整数，且$S_n\leqslant S_5$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式．

（2）设数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n\leqslant\dfrac{4}{9}$．

答案 （1）$a_n=11-2n$．

（2）证明见解析．

解析 （1）$a_1=9$，a_2为整数，可知：等差数列$\{a_n\}$的公差d为整数，

由$S_n\leqslant S_5$，

$\therefore a_5\geqslant 0$，$a_6\leqslant 0$，则$9+4d\geqslant 0$，$9+5d\leqslant 0$，解得$-\dfrac{9}{4}\leqslant d\leqslant-\dfrac{9}{5}$，$d$为整数，

$d=-2$．

$\therefore a_n=9-2(n-1)=11-2n$．

（2）$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(11-2n)(9-2n)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9-2n}-\dfrac{1}{11-2n}\right)$．

$\therefore$数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和

$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{9-2n}-\dfrac{1}{11-2n}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9-2n}-\dfrac{1}{9}\right)$．

令$b_n=\frac{1}{9-2n}$，由于函数$f(x)=\frac{1}{9-2x}$的图象关于点$(4.5,0)$对称及其单调性，可知：$0<b_1<b_2<b_3<b_4$，$b_5<b_6<b_7<\cdots<0$，

$\therefore b_n\leqslant b_4=1$．

$\therefore T_n\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}$．

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的前n项和
  - 等差数列
    - 等差数列的概念和通项
    - 等差数列的性质

5 已知数列$\{a_n\}$满足$a_2=2$，S_n为其前n项和，且$S_n=\frac{a_n(n+1)}{2}(n=1,2,3,\cdots)$．

（1）求a_1的值；

（2）求证：$a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant 2)$；

（3）判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列，并说明理由．

答案

（1）$a_1=1$．

（2）证明见解析．

（3）答案见解析．

解析

（1）由题意知：$S_2=\frac{3a_2}{2}$，即$a_1+a_2=\frac{3a_2}{2}$．

所以$a_2=2a_1$．

因为$a_2=2$，

所以$a_1=1$．

（2） 因为$S_n=\frac{a_n(n+1)}{2}(n=1,2,3,\cdots)$，

所以$S_{n-1}=\frac{a_{n-1}(n-1+1)}{2}(n\geqslant 2)$．

因为$a_n=S_n-S_{n-1}$，

所以$a_n=\frac{(n+1)a_n-na_{n-1}}{2}$，即$(n-1)a_n=na_{n-1}$．

因为$n\geqslant 2$，

所以$a_n=\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$．

（3）数列$\{a_n\}$是等差数列．理由如下：

由（Ⅱ）得：$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}(n=2,3,4,\cdots)$．

所以$\dfrac{a_n}{n}=a_1=1\,(n\geqslant 2)$，即$a_n=n\,(n\geqslant 2)$．

由（Ⅰ）知：$a_1=1$，所以$a_n=n\,(n\geqslant 1)$．

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，1为公差的等差数列．

考点 —数列
　　—等差数列
　　　└等差数列的概念和通项

6 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+1}+2a_{n-1}=3a_n\,(n\geqslant 2)$．

（1）求证：数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列．

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式

（3）设$b_n=a_n-1$，$S_n=\dfrac{a_1}{b_1b_2}+\dfrac{a_2}{b_2b_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_nb_{n+1}}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使$S_n\geqslant 4m^2-3m$成立，求实数$m$的取值范围．

答案 （1）证明见解析．

（2）$a_n=2^n$．

（3）$-\dfrac{1}{4}<m<1$．

解析 （1）$\because a_{n+1}+2a_{n-1}=3a_n$，

$\therefore\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{3a_n-2a_{n-1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=2$，

$\therefore$数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列．

（2）$\because a_1=2$，$a_2=4$，$\therefore a_2-a_1=2$，

$\therefore\{a_{n+1}-a_n\}$是以$a_2-a_1=2$为首项，公比为2的等比数列，

$\therefore a_{n+1}-a_n=2^n$，

当$n\geqslant 2$时，

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n$，

$\because n=1$适合上式，$\therefore a_n=2^n$.

（3）$\because b_1=a_n-1=2^n-1$,

$\therefore \dfrac{a_n}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{2n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

$\therefore S_n=\left(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

$\because S_{n+1}-S_n=1-\dfrac{1}{2^{n+2}-1}-1+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

$=\dfrac{1}{2^{n+1}-1}-\dfrac{1}{2^{n+2}-1}=\dfrac{2^{n+1}}{(2^{n+2}-1)(2^{n+1}-1)}>0$,

又$\because S_n<1$在$n\in\mathbf{N}^*$上恒成立，

所以$1>4m^2-3m$，解得$-\dfrac{1}{4}<m<1$.

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的递推公式
    - 数列的前n项和
  - 等比数列
    - 等比数列的概念和通项
    - 等比数列的前n项和

7 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=3$，S_n和S_{n+1}满足等式$S_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}S_n+n+1$.

（1）求S_2的值 .

（2）求证：数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列 .

（3）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和 .

答案

（1）8

（2）证明见解析

（3）$T_n=\left(\dfrac{16n}{3}+\dfrac{8}{9}\right)4^n-\dfrac{8}{9}$.

解析

（1）由已知:$S_2=2S_1+2=2a_1+2=8$.

（2）$\because S_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}S_n+n+1$,

$\therefore \dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=1$,

$\therefore$数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以3为首项，1为公差的等差数列．

（3）由（I）可得$\frac{S_n}{n}=3+n-1=n+2$，

化为$S_n=n^2+2n$，

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-\left[(n-1)^2+2(n-1)\right]=2n+1$．

又$a_1=3$也满足．

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$，

$\therefore b_n=a_n\cdot 2^{a_n}=(2n+1)\cdot 2^{2n+1}$．

$\therefore T_n=3\cdot 2^3+5\cdot 2^5+\cdots+(2n+1)\cdot 2^{2n+1}$，

$\therefore 4T_n=3\cdot 2^5+5\cdot 2^7+\cdots+(2n+1)\cdot 2^{2n+3}$，

两式相减，整理可得$T_n=\left(\frac{16n}{3}+\frac{8}{9}\right)4^n-\frac{8}{9}$．

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的定义及表示方法
    - 数列的递推公式
    - 数列的前n项和
  - 等差数列
    - 等差数列的概念和通项
  - 等比数列
    - 等比数列的前n项和

8 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为10，公差为2，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{n}{2}a_n-6n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式．

（2）记$c_n=\max\{a_n,b_n\}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n．（注：$\max\{a,b\}$表示a与b的最大值．）

答案 （1）见解析．

（2）见解析．

解析 （1）$\because$数列$\{a_n\}$是以10为首项，以2为公差的等差数列，

$\therefore a_n=10+2(n-1)=2n+8$，

$\therefore b_n=\frac{n}{2}a_n-6n=\frac{n}{2}\cdot(2n+8n)-6n=n^2-2n$．

（2）$b_n-a_n=(n^2-2n)-(2n+8)=n^2-4n-8$，

令$b_n-a_n=0\Rightarrow n^2-4n-8=0$，

解得$n=2\pm2\sqrt{3}$，

$\therefore$当$1\leqslant n<2+2\sqrt{3}$时，$b_n-a_n<0$，即$a_n>b_n$，

$\therefore$当$n\leqslant5$且$n\in\mathbf{N}^*$时，$c_n=\max\{a_n,b_n\}=a_n=2n+8$，

当$n\geqslant6$且$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n<b_n$，

$c_n=\max\{a_n,b_n\}=b_n=n^2-2n$，

当$n\leqslant5$且$n\in\mathbf{N}^*$时，

$$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\cdot(10+2n+8)}{2}=n^2+9n$$

，

$\therefore S_5=5^2+9\times5=70$，

当$n\geqslant6$且$n\in\mathbf{N}^*$时，

$S_n=S_5+(b_6+b_7+\cdots+b_n)$

$=70+[(6^2-2\times6)+(7^2-2\times7)+\cdots+(n^2-2n)]$

$=70+(6^2+7^2+\cdots+n^2)-2\times(6+7+\cdots+n)$

$=70+[(1^2+2^2+\cdots+n^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)]-2\times\dfrac{(6+n)(n-5)}{2}$

$=70+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-55-(n+6)(n-5)$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(n^2+n-30)+25$

$=\dfrac{1}{3}n^3-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{5}{6}n+45$，

$\therefore S_n=\begin{cases}cn^2+9n,n\leqslant5\\ \frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n+55,n>5\end{cases}$．

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的前n项和
  - 等差数列
    - 等差数列的概念和通项

9 在数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=n-a_n$（$n=1,2,3\ldots$）．

（1）求a_1,a_2,a_3的值；

（2）设$b_n=a_n-1$，求证：数列$\{b_n\}$是等比数列；

（3）设$c_n=b_n\cdot(n-n^2)$（$n=1,2,3...$），如果对任意$n\in N^*$，都有$c_n<\frac{t}{5}$，求正整数t的最小值．

答案 （1）$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{7}{8}$

（2）证明过程见解析

（3）正整数t的最小值是4．

解析 （1）由已知得

$a_1=1-a_1$，得$a_1=\frac{1}{2}$

$a_1+a_2=2-a_2$，得$a_2=\frac{3}{4}$

$a_1+a_2+a_3=3-a_3$，得$a_3=\frac{7}{8}$

（2）由已知得：$S_n=n-a_n$

$\therefore n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=(n-1)-a_{n-1}$

$\therefore n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1-a_n+a_{n-1}$

得$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}$

$\therefore n\geqslant 2$时，$a_n-1=\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)$

即$n\geqslant 2$时，$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1},b_1=a_1-1=-\frac{1}{2}\neq 0$

（3）由（Ⅱ）可得，$b_n=-\frac{1}{2^n}$

$\therefore c_n=b_n\cdot(n-n^2)=\frac{n^2-n}{2^n}$

$\therefore c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2^{n+1}}-\frac{n^2-n}{2^n}=\frac{n(3-n)}{2^{n+1}}$

$\therefore c_1<c_2<c_3=c_4>c_5>\cdots$

$\therefore c_n$有最大值$c_3=c_4=\frac{3}{4}$

对任意$n\in N^*$，都有$c_n<\frac{t}{5}$，当且仅当$\frac{3}{4}<\frac{t}{5}$，

即$t>\frac{15}{4}$，故正整数t的最小值是4．

考点 —数列

　├数列的概念

　│└数列的定义及表示方法

设各项均为正数的数列$\{an\}$的前n项和为S_n，已知数列$\{\sqrt{S_n}\}$是首项为1，公差为1的等差数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）令$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_nS_{2n+1}}+\sqrt{a_{n+1}S_{2n-1}}}$，若不等式$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n\geqslant\dfrac{m}{\sqrt{2n+1}+1}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立，求实数$m$的取值范围．

答案 （1）$a_n=2n-1$．

（2）$\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$．

解析 （1）$\because$数列$\{\sqrt{S_n}\}$是首项为1，公差为1的等差数列，

$\therefore\sqrt{S_n}=1+(n-1)=n$．$\therefore S_n=n^2$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1$；当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

又$a_1=1$适合上式．$\therefore a_n=2n-1$．

（2）$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_nS_{2n+1}}+\sqrt{a_{n+1}S_{2n-1}}}$

$=\dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2\sqrt{(2n+1)(2n-1)}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$，

$\therefore$

$b_1+b_2+\ldots+b_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{2n+1}}$．

$\therefore\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{2n+1}}\geqslant\dfrac{m}{\sqrt{2n+1}+1}$对任意$n\in\mathrm{N}^*$都成立，

得$m\leqslant\dfrac{\left(\sqrt{2n+1}-1\right)\left(\sqrt{2n+1}+1\right)}{2\sqrt{2n+1}}=\dfrac{n}{\sqrt{2n+1}}$对任意$n\in\mathrm{N}^*$都成立．

令$c_n=\dfrac{n}{\sqrt{2n+1}}$，

则$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{(n+1)\sqrt{2n+1}}{n\sqrt{2n+3}}=\dfrac{\sqrt{2n^3+5n^2+4n+1}}{\sqrt{2n^3+3n^2}}>1$，

$\therefore c_{n+1}>c_n$．

$\therefore c_n>c_{n-1}>\cdots>c_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

$\therefore m\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$实数m的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$．

考点 一数列

- 数列的应用
  - 数列与不等式
- 数列的概念
  - 数列的定义及表示方法
- 等差数列
  - 等差数列的概念和通项

11 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$2a_{n+1}=2a_n+p$（p为常数，$n=1,2,3,\cdots$）.

（1）若$S_3=12$，求S_n；

（2）若数列$\{a_n\}$是等比数列，求实数p的值；

（3）是否存在实数p，使得数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$满足：可以从中取出无限多项并按原来的先后次序排成一个等差数列？若存在，求出所有满足条件的p的值；若不存在，说明理由.

答案 （1）$S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$.

（2）$p=0$

（3）$p=0$是唯一满足条件的p的值

解析 （1）因为$a_1=1$，$2a_{n+1}=2a_n+p$，所以$2a_2=2a_1+p=2+p$，$2a_3=2a_2+p=2+2p$.

因为$S_3=12$，所以$2+2+p+2+2p=6+3p=24$，即$p=6$.

所以$a_{n+1}-a_n=3$（$n=1,2,3,\cdots$）.所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，3为公差的等差数列.

所以$S_n=1\times n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 3=\dfrac{3n^2-n}{2}$.

（2）若数列$\{a_n\}$是等比数列，则$a_2^2=a_1a_3$.由（1）可得$\left(1+\dfrac{p}{2}\right)^2=1\times(1+p)$.

解得$p=0$.

当$p=0$时，由$2a_{n+1}=2a_n+p$得$a_{n+1}=a_n=\cdots=1$.显然，数列$\{a_n\}$是以1为首项，1为公比的等比数列.

所以$p=0$.

（3）当$p=0$时，由（2）知$a_n=1$（$n=1,2,3,\cdots$）.

所以$\frac{1}{a_n}=1\,(n=1,2,3,\cdots)$，即数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$就是一个无穷等差数列．

所以当$p=0$时，可以得到满足题意的等差数列．

当$p\neq0$时，因为$a_1=1$，$2a_{n+1}=2a_n+p$，即$a_{n+1}-a_n=\frac{p}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，$\frac{p}{2}$为公差的等差数列．

所以$a_n=\frac{p}{2}n+1-\frac{p}{2}$．

下面用反证法证明：当$p\neq0$时，数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$中不能取出无限多项并按原来的次序排列而成等差数列．

假设在$p_0\neq0$，从数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$中可以取得满足题意的无穷等差数列，不妨记为$\{b_n\}$．设数列$\{b_n\}$的公差为$d$．

（ⅰ）当$p_0>0$时，$a_n>0$（$n=1,2,3,\cdots$）．

所以数列$\{b_n\}$是各项均为正数的递减数列．

所以$d<0$．

因为$b_n=b_1+(n-1)\,d$（$n=1,2,3,\cdots$），

所以当$n>1-\frac{b_1}{d}$时，$b_n=b_1+(n-1)\,d<b_1+\left(1-\frac{b_1}{d}-1\right)d=0$，这与$b_n>0$矛盾．

（ⅱ）当$p_0<0$时，令$\frac{p_0}{2}n+1-\frac{p_0}{2}<0$，解得$n>1-\frac{2}{p_0}$．

所以当$n>1-\frac{2}{p_0}$时，$a_n<0$恒成立．

所以数列$\{b_n\}$必然是各项均为负数的递增数列．

所以$d>0$．

因为$b_n=b_1+(n-1)\,d$（$n=1,2,3,\cdots$），

所以当$n>1-\frac{b_1}{d}$时，$b_n=b_1+(n-1)\,d>b_1+\left(1-\frac{b_1}{d}-1\right)d=0$，这与$b_n<0$矛盾

综上所述，$p=0$是唯一满足条件的p的值．

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的前n项和
  - 等差数列
    - 等差数列的概念和通项

└等差数列的前n项和

等比数列

└等比数列的概念和通项

推理与证明

合情推理和演绎推理

直接证明和间接证明

└反证法

12 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，$7a_2=4a_4$，数列$\{b_n\}$前n项和为S_n，且$S_n=2(b_n-1)(n\in\mathrm{N}^*)$．

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设数列$c_n=\begin{cases}a_n，n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+\\ b_n，n=2k,k\in\mathbf{N}_+\end{cases}$求$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$；

（3）把数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公共项从小到大排成新数列$\{d_n\}$,试写出d_1，d_2，并证明$\{d_n\}$为等比数列．

答案 （1）答案见解析．

（2）答案见解析．

（3）答案见解析．

解析 （1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，则由$7a_2=4a_4$，得$75+d)=4(5+3d)$， 解得$d=3$. 所以$a_n=3n+2$，$n\in N^*$.

因为$S_n=2b_n-1$， ①

所以$S_{n+1}=2b_{n+1}-1$. ②

②-①得$b_{n+1}=2b_{n+1}-2b_n$,

即$b_{n+1}=2b_n$.

由①得$b_1=2b_1-2$,则$b_1=2$.

所以$\{b_n\}$是首项为2,公比为2的等比数列,

所以$b_n=2^n$,$n\in N^*$.

（2）由题知数列$\{c_n\}$的奇数项组成首项为5,公差为6的等差数列；

数列$\{c_n\}$的偶数项组成首项为4,公比为4的等比数列.

n为偶数时,

$T_n=\frac{n}{2}\times5+\frac{1}{2}\times\frac{n}{2}\times(\frac{n}{2}-1)\times6+\frac{4(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}=\frac{3}{4}n^2+n-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot2^{n+2}$；

n为奇数且$n\geqslant3$时,

$T_n=T_{n-1}+a_n=\frac{3}{4}(n-1)^2+(n-1)-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}+3n+2$

$=\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{2}n+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}$.

经检验,当$n=1$时上式也成立.

综上所述，$T_n=\begin{cases}\frac{3}{4}n^2+n-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot2^{n+2}\\ ,\ n=2k,k\in\mathbf{N}_+\\ \frac{3}{4}n^2+\frac{5}{2}n+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot2^{n+1},\ n=2k-1,k\in\mathbf{N}_+\end{cases}$

（3）由$a_n=3n+2$，$b_n=2^n$，可得$d_1=8=a_2=b_3$，$d_2=a_{10}=b_5=32$.

假设$d_n=a_m=b_k=2^k$,

则$3m+2=2^k$.

所以$b_{k+1}=2^{k+1}=2\cdot2^k=2(3m+2)=3(2m+1)+1$,不是数列$\{a_n\}$中的项；

$b_{k+2}=2^{k+2}=4\cdot2^k=4(3m+2)=3(4m+2)+2$，是数列$\{a_n\}$中的第$4m+2$项.

所以$d_{n+1}=a_{4m+2}=b_{k+2}=2^{k+2}$，

从而$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{2^{k+2}}{2^k}=4$.

所以$\{d_n\}$是首项为8,公比为4的等比数列.

考点 —数列

- 数列的概念
  - 数列的前n项和
- 等差数列
  - 等差数列的概念和通项
- 等比数列
  - 等比数列的概念和通项

13 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2^n-1$．数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$b_{n+1}-2b_n=8a_n$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：数列$\{\frac{b_n}{2^n}\}$为等差数列，并求$\{b_n\}$的通项公式

（3）设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，是否存在常数λ，使得不等式$(-1)^n\lambda<1+\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立？若存在，求出$\lambda$的取值范围；若不存在，请说明理由．

答案 （1）$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

（2）证明见解析．

（3）$-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{7}{6}$，证明见解析．

解析 （1）当$n=1$时，$a_1=S_1=2^1-1=1$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$，

因为$a_1=1$适合通项公式$a_n=2^{n-1}$．

所以$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

（2）因为$b_{n+1}-2b_n=8a_n$，

所以$b_{n+1}-2b_n=2^{n+2}$，

即$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{b_n}{2^n}=2$．

所以$\{\frac{b_n}{2^n}\}$是首项为$\frac{b_1}{2^1}=1$，公差为2的等差数列．

所以$\frac{b_n}{2^n}=1+2(n-1)=2n-1$，所以$b_n=(2n-1)\cdot 2^n$．

（3）存在常数λ使得不等式$(-1)^n\lambda<1+\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立．

因为$T_n=1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n$ ①

所以$2T_n=1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(2n-5)\cdot 2^{n-1}+(2n-3)\cdot 2^n+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$ ②

由①-②得$-T_n=2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$，

化简得$T_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$．

因为$\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}=\frac{(2n-3)\cdot 2^{n+1}}{(2n-1)\cdot 2^{n+2}}=\frac{2n-3}{4n-2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{4n-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n-1}$，

（1）当n为奇数时，$(-1)\lambda<1+\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}$，

所以$\lambda>-1-\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}$，即$\lambda>-\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-1}$．

所以当$n=1$时，$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-1}$的最大值为$-\frac{1}{2}$，所以只需$\lambda>-\frac{1}{2}$；

（2）当n为偶数时，$\lambda<1+\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}$，

所以$\lambda<\frac{3}{2}-\frac{1}{2n-1}$，所以当$n=2$时，$\frac{3}{2}-\frac{1}{2n-1}$的最小值为$\frac{7}{6}$，所以只需$\lambda<\frac{7}{6}$；

由（1）（2）可知存在$-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{7}{6}$，使得不等式$(-1)^n\lambda<1+\frac{T_n-6}{T_{n+1}-6}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立．

考点 —数列

—数列的概念

└数列的递推公式

—等差数列

└等差数列的概念和通项

└不等式与线性规划

—不等式与不等关系

└不等式的性质

14 已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1, b_n=\dfrac{3+(-1)^{n-1}}{2}, n\in\mathbf{N}^*$，且$a_1=2$．

（1）求a_2, a_3的值；

（2）设$c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}, n\in\mathbf{N}^*$，证明$\{c_n\}$是等比数列；

（3）设S_n为$\{a_n\}$的前n项和，证明$\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\dfrac{S_{2n}}{a_{2n}}\leqslant n-\dfrac{1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 （1）$a_2=-\dfrac{3}{2}$；$a_3=8$．

（2）证明见解析．

（3）证明见解析．

解析 （1）由$b_n=\dfrac{3+(-1)^{n-1}}{2}, n\in\mathbf{N}^*$,

可得$b_n=\begin{cases}2, n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*\\ 1, n=2k, k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$

又$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$，

当$n=1$时，$a_1+2a_2=-1$，由$a_1=2$，可得$a_2=-\dfrac{3}{2}$；

当$n=2$时，$2a_2+a_3=5$，可得$a_3=8$．

（2）对任意$n\in\mathbf{N}^*$

$a_{2n-1}+2a_{2n}=-2^{2n-1}+1$①

$2a_{2n}+a_{2n+1}=2^{2n}+1$ ②

② - ①，得$a_{2n+1}-a_{2n-1}=3\times2^{2n-1}$，

即$c_n=3\times2^{2n-1}$，于是$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=4$．

所以$\{c_n\}$是等比数列．

（3）$a_1=2$，由（Ⅱ）知，当$k\in\mathbf{N}^*$且$k\geqslant2$时，

$a_{2k-1}=a_1+(a_3-a_1)+(a_5-a_3)+(a_7-a_5)+\cdots+(a_{2k-1}-a_{2k-3})$

$=2+3(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2k-3})=2+3\times\dfrac{2(1-4^{k-1})}{1-4}=2^{2k-1}$

故对任意$k\in\mathbf{N}^*$, $a_{2k-1}=2^{2k-1}$.

由①得$2^{2k-1}+2a_{2k}=-2^{2k-1}+1$，所以$a_{2k}=\dfrac{1}{2}-2^{2k-1}, k\in\mathbf{N}^*$

因此，$S_{2k}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2k-1}+a_{2k})=\dfrac{k}{2}$.

于是，$S_{2k}-1=S_{2k}-a_{2k}=\dfrac{k-1}{2}+2^{2k-1}$.

故

$$\frac{S_{2k-1}}{a_{2k-1}}+\frac{S_{2k}}{a_{2k}}=\frac{\frac{k-1}{2}+2^{2k-1}}{2^{2k-1}}+\frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}-2^{2k-1}}=\frac{k-1+2^{2k}}{2^{2k}}-\frac{k}{2^{2k}-1}=1-\frac{1}{4^k}-\frac{k}{4^k(4^k-1)}$$

.

对于$n=1$，不等式显然成立．

所以，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，

$$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\cdots+\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\frac{S_{2n}}{a_{2n}}$$
$$=(\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2})+(\frac{S_3}{a_3}+\frac{S_4}{a_4})+\cdots+(\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\frac{S_{2n}}{a_{2n}})$$
$$=(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12})+(1-\frac{1}{4^2}-\frac{2}{4^2-(4^2-1)})+\cdots+(1-\frac{1}{4^n}-\frac{n}{(4^n-1)})$$
$$=n-(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})-(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^2(4^2-1)})-\cdots-(\frac{1}{4^n}+\frac{n}{4^n(4^n-1)})$$
$$\leqslant n-(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})=n-\frac{1}{3}.$$

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的定义及表示方法
    - 数列的前n项和
  - 等比数列
    - 等比数列的概念和通项

15 数列$\{a_n\}$满足：$a_{n-1}+a_{n+1}>2a_n(n>1，n\in\mathbf{N}^*)$，给出下述命题：

①若数列$\{a_n\}$满足：$a_2>a_1$，则$a_n>a_{n-1}$成立；

②存在常数c，使得$a_n>c(n\in\mathbf{N}^*)$成立；

③若$p+q>m+n$（其中p，q，m，$n\in\mathbf{N}^*$），则$a_p+a_q>a_m+a_n$；

④存在常数d，使得$a_n>a_1+(n-1)d(n\in\mathbf{N}^*)$都成立．

上述命题正确的是 ______ ．（写出所有正确结论的序号）

答案 ①④

解析 由$a_{n-1}+a_{n+1}>2a_n$得：$a_{n+1}-a_n>a_n-a_{n-1}>a_{n-1}-a_{n-2}>\cdots>a_2-a_1>0$，

$\therefore a_n>a_{n-1}$，①正确；

令$a_n=-\ln n$，此时a_n单调递减且无下界，②错误；

令$a_n=-n^2$，$m=n=2$，$p>2$，$q>2$，此时恒有$a_p+a_q<a_m+a_n$，③错误；

设$a_2-a_1=d$，则$a_{n+1}-a_n>a_n-a_{n-1}>a_{n-1}-a_{n-2}>\cdots>a_2-a_1=d$，

累加得$a_n-a_1>(n-1)d$，即$a_n>a_1+(n-1)d$，④正确．

考点 一数列
- 数列的应用
  - 数列的单调性和最值
- 数列的概念
  - 数列的定义及表示方法

16 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，点O为坐标原点，点$A_n(n,f(n))$，$n\in\mathbf{N}^*$，向量$\vec{i}=(0,1)$，θ_n是向量$\overrightarrow{OA_n}$与$\vec{i}$的夹角，设S_n为数列$\left\{\left|\dfrac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\right|\right\}$的前$n$项和，则$S_{2016}=$______．

答案 $\dfrac{2016}{2017}$

解析 $\because$由已知可得$a_n=\dfrac{1}{n+1}$，即$A_n(n,\dfrac{1}{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$，

又$\because$向量$\vec{i}=(0,1)$，

$\therefore|\cos\theta_n|=\left|\dfrac{\vec{i}\cdot\overrightarrow{OA_n}}{|\vec{i}|\cdot\left|\overrightarrow{OA_n}\right|}\right|=\left|\dfrac{0+\frac{1}{n+1}}{1\cdot\sqrt{n^2+\frac{1}{(n+1)^2}}}\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{n^2(n+1)^2+1}}\right|$，

由平方关系可知，$|\sin\theta_n|=\sqrt{1-\cos^2\theta_n}=\dfrac{n(n+1)}{\sqrt{n^2(n+1)^2+1}}$，

$\therefore\left|\dfrac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\right|=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$\therefore$所求值为$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2016}-\dfrac{1}{2017}=1-\dfrac{1}{2017}=\dfrac{2016}{2017}$

故答案为$\dfrac{2016}{2017}$．

考点 一平面向量
- 平面向量的数量积

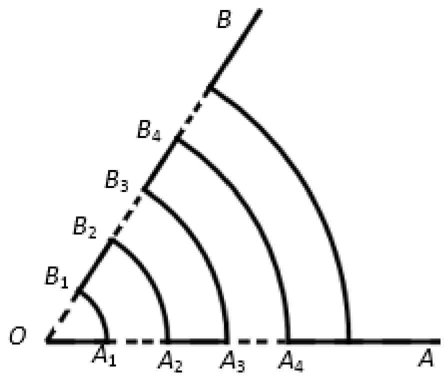
数量积

数列

数列的概念

数列的前n项和

17 如图所示，$\angle AOB = 1rad$，点$A_1, A_2\cdots$在OA上，点$B_1, B_2\cdots$在OB上，其中的每一个实线段和虚线段的长均为1个长度单位，一个动点M从O点出发，沿着实线段和以O为圆心的圆弧匀速运动，速度为1长度单位 / 秒，则质点M到达A_3点处所需要的时间为 ______ 秒，质点M到达A_n点处所需要的时间为 ______ 秒．



答案 1．6

2．$\dfrac{n(n+3)}{2}$

解析 当$n=10$时，质点M到达A_{10}点处经过的路程为$(1+1)+(1+2)+(1+3)\cdots+(1+10)=2+3\cdots+11=65$，速度为1单位/秒，质点$M$到达$A_{10}$点处所需要的时间为65秒，类似的，当$n$为奇数时，质点$M$到达$A_n$点处所需要的时间为：$\dfrac{n(n+1)}{2}$；

当n为偶数时，质点M到达A_n点处所需要的时间为：$\dfrac{n(n+3)}{2}$；

故答案为$a_n=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}, n=2k+1\\ \frac{n(n+3)}{2} n=2k\end{cases}$ $k\in N$.

考点 三角函数与解三角形

三角函数

任意角与弧度制

数列

数列的概念

数列的递推公式

数列的前n项和

等差数列

等差数列的前n项和

18 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n-\lambda}{n+1}a_n$，其中$\lambda\in R$，$n=12\cdots$.

①当$\lambda=0$时，$a_{20}=$______；

②若存在正整数m，当$n>m$时总有$a_n<0$，则λ的取值范围是______.

答案 1．$\dfrac{1}{20}$

2．$(2k-1,2k),k\in N^*$

解析 ①当$\lambda=0$，$\begin{cases}\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}\\ \frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{3}\\ \cdots\\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}\end{cases}$，以上各式想乘可以看出，$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{1}{n}$，又$a_1=1$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{20}$，$a_{20}=\dfrac{1}{20}$ ②由题意知：记$b_n=\dfrac{n-\lambda}{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则λ要满足$\begin{cases}b_{2k}=\frac{2k-\lambda}{2k+1}>0\\ b_{2k-1}=\frac{2k-1-\lambda}{2k}<0\end{cases}$，由此解出取值范围．

故答案为．$\dfrac{1}{20}$；$(2k-1,2k),k\in N^*$ ．

考点 数列

数列的概念

数列的定义及表示方法

19 数列$\{a_n\}$中，如果存在a_k，使得“$a_k>a_{k-1}$且$a_k>a_{k+1}$”成立（其中$k\geqslant 2$，$k\in N^*$），则称a_k为$\{a_n\}$的一个峰值．

（1）若$a_n=-3n^2+11n$，则$\{a_n\}$的峰值为______．

（2）若$a_n=t\ln n-n$，且$\{a_n\}$不存在峰值，则实数t的取值范围是______．

答案 （1）10

（2）$\{t|t\leqslant\dfrac{1}{\ln 2}或t=\dfrac{1}{\ln(\frac{n+1}{n})},n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2\}$

解析　（1）若$a_n=-3n^2+11n$可以令$f(n)=-3n^2+11n$，

图象开口向下，可得$f(n)=-3n^2+11n=-3(n-\frac{11}{6})^2+\frac{121}{12}$

可以存在$n=2$使得$a_2=-3\times4+11\times2=10$对于任意的$n\in\mathbf{N}$都有，

$a_n\leqslant10$可得$\{a_n\}$的峰值为10．

（2）若$a_n=t\ln n-n$，$a_1=-1$，$a_2=t\ln2-2$，$a_3=t\ln3-3$，$a_k=t\ln k-k$

可以令$g(x)=t\ln x-x$，$g'(x)=\frac{t}{x}-1=\frac{t-x}{x},(x>t)$，

若$a_n=t\ln n-n$，且a_n不存在峰值，即不存在先增后减的情况，

即$a_1\geqslant a_2$，$-1\geqslant t\ln2-2$解得$t\leqslant\frac{1}{\ln2}$，

还有另外一种情况，后面每一项在t的调节下都相等，a_n不存在峰值．

即$a_n=a_{n+1}$所以$t\ln n-n=t\ln(n+1)-(n+1)$，解得$t=\frac{1}{\ln(\frac{n+1}{n})}$，$n\geqslant2$，

$n\in\mathbf{N}^*$

综上，$\{t|t\leqslant\frac{1}{\ln2}$或$t=\frac{1}{\ln(\frac{n+1}{n})},n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2\}$．

考点
- 函数与导数
  - 二次函数
    - 二次函数的概念、图象和性质
  - 导数及其应用
    - 利用导数求函数的极值与最值
- 数列
  - 数列的应用
    - 数列的单调性和最值

20　某校数学课外小组在坐标纸上，为学校的一块空地设计植树方案如下：第k棵树种植在点$P_1(x_1,y_1)$处，其中$x_1=1,y_1=1$,当$k\geqslant2$时，

$$\begin{cases}x_1=x_{x-1}+1-5[T(\frac{k-1}{5})-T(\frac{K-2}{5})]\\ y_k=y_{k+1}+T(\frac{k-1}{5})-T(\frac{K-2}{5})\end{cases}$$

$T(a)$表示非负实数a的整数部分，例如T(2,6)=2,T(0,2)=0.

按此方案，第6棵树种植点的坐标应为 ______ ；第2008棵树种植点的坐标应为 ______ ．

答案　1．$(1,2)$

2．$(3,402)$

解析 略

考点
- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的定义及表示方法
    - 数列的递推公式
- 推理与证明
  - 合情推理和演绎推理
    - 合情推理
    - 演绎推理

21 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\sqrt{2}$，$[a_n]$表示a_n的整数部分，(a_n)表示a_n的小数部分，$a_{n+1}=[a_n]+\frac{1}{(a_n)}(n\in N^*)$则$a_n=$______；数列$\{b_n\}$中，$b_1=1,b_2=2,b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}(n\in N^*)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=$______．

答案 1．$2(n-1)+\sqrt{2}$

2．$(n-2)\cdot 2^{n+1}+\sqrt{2}\cdot 2^n+4-\sqrt{2}$

解析 新定义数列问题，可算出前几项，然后找规律进行猜想证明；（填空题证明可从略）

对于第一空：

$a_2=[a_1]+\frac{1}{(a_1)}=1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$；$a_3=[a_2]+\frac{1}{(a_2)}=3+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=4+\sqrt{2}$

$a_4=[a_3]+\frac{1}{(a_3)}=5+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=6+\sqrt{2}$；

找规律猜想：$a_n=2(n-1)+\sqrt{2}$；

对于第二空；由$b_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+2}$知$\{b_n\}$为等比数列，又$b_1=1$，$b_2=2$，易求得$b_n=2^{n-1}$

由前空知$a_n=2(n-1)+\sqrt{2}$，其为等差数列，

可用错位相减法求出$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=(n-2)\cdot 2^{n+1}+\sqrt{2}\cdot 2^n+4-\sqrt{2}$．

考点
- 数列
  - 数列的概念

└数列的递推公式
等差数列
└等差数列的性质
等比数列
└等比数列的性质

22 在数列$\{a_n\}$中，若$a_n^2-a_{n-1}^2=p$，（$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，$p$为常数），则称$\{a_n\}$为“等方差数列”．下列是对“等方差数列”的判断：

①$\{a_n\}$是等方差数列，则$\{a_n^2\}$是等差数列；

②$\{(-1)^n\}$是等方差数列；

③$\{a_n\}$是等方差数列，则$\{a_{kn}\}$（$k\in\mathbf{N}^*$，k为常数）也是等方差数列；

④若$\{a_n\}$既是等方差数列，又是等差数列，则该数列为常数列．

其中正确命题序号为 ______ ．（将所有正确的命题序号填在横线上）

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①②③④

答案 D

解析 ①$\because\{a_n\}$是等方差数列，

$\therefore {a_n}^2-{a_{n-1}}^2=p$（$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$p$为常数）成立，

得到$\{{a_n}^2\}$为首项是${a_1}^2$，公差为p的等差数列；

②$\because {a_n}^2-{a_{n-1}}^2=(-1)^{2n}-(-1)^{2n-1}=1-(-1)=2$，

$\therefore$数列$\{(-1)^n\}$是等方差数列；

③数列$\{a_n\}$中的项列举出来是：

a_1，a_2，$\cdots$，a_k，a_{k+1}，a_{k+2}，$\cdots$，a_{2k}，$\cdots$，a_{3k}，$\cdots$，

数列$\{a_{kn}\}$中的项列举出来是：a_k，a_{2k}，a_{3k}，$\cdots$，

$\because {a_{k+1}}^2-{a_k}^2={a_{k+2}}^2-{a_{k+1}}^2={a_{k+3}}^2-{a_{k+2}}^2=\cdots={a_{2k}}^2-{a_k}^2=p$，

$\therefore({a_{k+1}}^2-{a_k}^2)+({a_{k+2}}^2-{a_{k+1}}^2)+({a_{k+3}}^2-{a_{k+2}}^2)+\cdots+({a_{2k}}^2-{a_{2k-1}}^2)$

$={a_{2k}}^2-{a_k}^2=kp$，

类似地有：${a_{kn}}^2-{a_{kn-1}}^2={a_{kn-1}}^2-{a_{kn-2}}^2=\cdots={a_{kn+3}}^2-{a_{kn+2}}^2$

$={a_{kn+2}}^2-{a_{kn+1}}^2={a_{kn+1}}^2-{a_{kn}}^2=p$，

同上连加可得${a_{kn+1}}^2-{a_{kn}}^2=kp$，

$\therefore$数列$\{a_{kn}\}$是等方差数列；

④$\{a_n\}$既是等方差数列，又是等差数列，

$\therefore {a_n}^2-{a_{n-1}}^2=p$，且$a_n-a_{n-1}=d(d\neq 0)$，

$\therefore a_n+a_{n-1}=\dfrac{p}{d}$，联立解得$a_n=\dfrac{d}{2}+\dfrac{p}{2d}$，

$\therefore\{a_n\}$为常数列，当$d=0$时，

显然$\{a_n\}$为常数列，

$\therefore$该数列为常数列．

故答案为①②③④．

考点

—数列
- 数列的概念
  - 数列的定义及表示方法
- 等差数列
  - 等差数列的性质

23 已知数量$\{a_n\}$的各项均为正整数，对于$n=1,2,3,\cdots$,有

$$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+5, a_n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_n}{2^k}, a_n\text{为偶数}k\text{为使}a_{n+1}\text{为奇数的正整数}\end{cases}$$

当$a_1=11$时，$a_{100}=$______；若存在$m\in\mathbf{N}^*$，当$n>m$且a_n为奇数时，a_n恒为常数p，则p的值为______．

答案

1．62

2．1或5

解析

由题设知，$a_1=11$，$a_2=3\times 11+5=38$，$a_3=\dfrac{38}{2}=19$，

$a_4=3\times 19+5=62$，$a_5=\dfrac{62}{2}=31$，$a_6=3\times 31+5=98$，

$a_7=\dfrac{98}{2}=49$，$a_8=3\times 49+5=152$，$a_5=\dfrac{152}{2^3}=19$，

$\therefore\{a_n\}$，从第3项开始是周期为6的周期数列，

$\therefore a_{100}=a_{3+(6\times 16+1)}=a_4=62$．

若存在$m\in\mathbf{N}^*$，当$n>m$且a_n为奇数时，a_n恒为常数p，

则$a_n=p$，$a_{n+1}=3p+5$，$a_{n+2}=\dfrac{3p+5}{2^k}=p$，

$\therefore\left(3-2^k\right)p=-5$，

$\because$数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，

$\therefore$当$k=2$时，$p=5$，

当$k=3$时，$p=1$．

考点

一数列
- 数列的概念
  - 数列的定义及表示方法

24 已知向量序列：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\cdots$满足如下条件：

$|\boldsymbol{a}_1|=4|\boldsymbol{d}|=2$，$2\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{d}=-1$且$\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_{n-1}=\boldsymbol{d}$（$n=2,3,4,\cdots$）．

若$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_k=0$，则$k=$ ______ ；$|\boldsymbol{a}_1|,|\boldsymbol{a}_2|,|\boldsymbol{a}_3|,\cdots,|\boldsymbol{a}_n|,\cdots$中第 ______ 项最小．

答案

1．9

2．3

解析

由题可知$|\boldsymbol{a}_1|=2,|\boldsymbol{d}|=\dfrac{1}{2}$，又$\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_{n-1}=\boldsymbol{d}$，故$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_1+(n-1)\boldsymbol{d}$，

所以$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{a}_1\cdot[\boldsymbol{a}_1+(k-1)\boldsymbol{d}]={\boldsymbol{a}_1}^2+(k-1)\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{d}=0$，解得$k=9$；

由题可得：$|\boldsymbol{a}_n|^2=(\boldsymbol{a}_1+(n-1)\boldsymbol{d})^2={\boldsymbol{a}_1}^2+(n-1)^2\boldsymbol{d}^2+2(n-1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{d}=\dfrac{1}{4}\left(n^2-6n+21\right)$

，

故$n=3$时最小．

考点

平面向量
- 平面向量的基本概念
  - 向量的线性运算
- 平面向量的数量积
  - 数量积

数列
- 数列的概念
  - 数列的定义及表示方法

等差数列

等差数列的概念和通项

25 已知函数$f(x)=x^2\sin x$，各项均不相等的有限项数列$\{x_n\}$的各项x_i满足$|x_i|\leqslant 1$．令$F(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$，$n\geqslant 3$且$n\in\mathbf{N}$，例如：$F(3)=(x_1+x_2+x_3)\cdot(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$．

下列给出的结论中：

①存在数列$\{x_n\}$使得$F(n)=0$；

②如果数列$\{x_n\}$是等差数列，则$F(n)>0$；

③如果数列$\{x_n\}$是等比数列，则$F(n)>0$；

正确结论的序号是 ______ ．

答案 ①③

解析 可得$f(x)=x^2\sin x$是奇函数，只需考查$0<x\leqslant 1$时的性质，

此时$y=x^2$，$y=\sin x$都是增函数，

可得$f(x)=x^2\sin x$在$[0,1]$上递增，$\therefore f(x)=x^2\sin x$在$[-1,1]$上单调递增．

若$x_1+x_2<0$，则$x_1<-x_2$，$\therefore f(x_1)<f(-x_2)$，

即$f(x_1)<-f(x_2)$，$\therefore f(x_1)+f(x_2)<0$．

同理若$x_1+x_2>0$，可得$f(x_1)+f(x_2)>0$，

$\therefore x_1+x_2\neq 0$时，$(x_1+x_2)(f(x_1)+f(x_2))>0$．

①显然是对的，只需$\{x_n\}$满足$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，

②显然是错的，若$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，$F(n)=0$，

③数列$\{x_n\}$是等比数列，各项符号一致的情况显然符合；

若各项符号不一致，公比$q<0$，

若n是偶数，$(x_{2i-1}+x_{2i})=x_1q^{2i-2}(1+q)$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$\frac{n}{2}$符号一致，

又$(x_{2i-1}+x_{2i})$，$[f(x_{2i-1})+f(x_{2i})]$符号一致，$\therefore$符合$F(n)>0$；

若n是奇数，可证明“$(x_{2i-1}+x_{2i})=x_1q^{2i-2}(1+q)$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$\frac{n-1}{2}$和$x_n=x_1q^{n-1}$符号一致”

或者“$(x_{2i}+x_{2i+1})=x_1q^{2i-1}(1+q)$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$\frac{n-1}{2}$和$x_1$符号一致”，

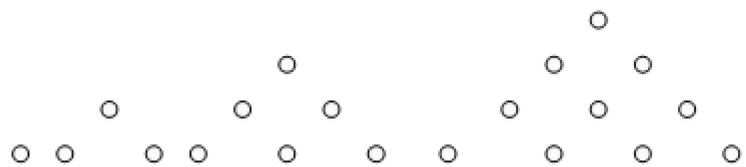
同理可证符合$F(n)>0$；

故答案为①③．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 单调性
    - 奇偶性
- 数列
  - 等差数列
    - 等差数列的概念和通项
    - 等差数列的性质
  - 等比数列
    - 等比数列的概念和通项
    - 等比数列的性质
- 推理与证明
  - 合情推理和演绎推理
    - 合情推理
    - 演绎推理

26 南宋数学家杨辉曾经研究过如图所示的三角形数：



将三角形数1，3，6，10，$\cdots$记为数列$\{a_n\}$，将可被5整除的三角形数从小到大的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$，可以推测：b_2是数列$\{a_n\}$中的第______项；$b_{2k-1}=$______．（用k表示）

答案

1．5

2．$\dfrac{25k^2-5k}{2}$

解析

三角形数的前项为1，3，6，10，15，

所以$b_1=10$，$b_2=15$，b_2是$\{a_n\}$中的第5项．

$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，因为a_n是整数，

故当$n=5m-1$或$5m$时$(m\in\mathbf{N}^*)$，

a_n能被5整除．

所以$b_{2k-1}=a_{5k-1}=\dfrac{25k^2-5k}{2}$．

故答案为5，$\dfrac{25k^2-5k}{2}$．

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的递推公式
  - 等差数列
    - 等差数列的前n项和
- 计数原理
  - 二项式定理
    - 杨辉三角

27 无穷等差数列$\{a_n\}$的各项均为整数，首项为a_1，公差为d，S_n是其前n项和，3、21、15是其中的三项．给出下列命题：

①对任意满足条件的d，存在a_1，使得99一定是数列$\{a_n\}$中的一项；

②对任意满足条件的d，存在a_1，使得30一定是数列$\{a_n\}$中的一项；

③存在满足条件的数列$\{a_n\}$，使得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_{2n}=4S_n$成立．

其中正确命题为 ______ ．（写出所有正确命题的序号）

答案 ①③

解析 $\because 21-15=6$，$21-3=18$，$15-3=12$，

6，12，18均是6的倍数，

又$\because 99-21=78$，$99-15=84$，$99-3=96$，

78、84、96均是6的倍数，

$\therefore$①正确，②不正确．

$\because S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

$\therefore 4S_n=2n(a_1+a_n)$，

$S_n=\dfrac{2n(a_1+a_{2n})}{2}=n(a_1+a_{2n})$.

∵3、15、21是其中三项，

又∵$\{a_n\}$各项均为整数，

∴$a_1=3$，$d=6$，

∴$2n[3+3+(n-1)\times6]=12n_2$ ，

$S_{2n}=n[3+3+(2n-1)\times6]=12n_2$ ，

∴③正确．

故答案为①③．

考点

- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的递推公式
    - 数列的前n项和
  - 等差数列
    - 等差数列的概念和通项
    - 等差数列的前n项和

28 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{1}{k}$，$k\geqslant2$，$k\in\mathbf{N}^*$，$[a_n]$表示不超过a_n的最大整数（如$[1.6]=1$），记$b_n=[a_n]$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n．

①若数列$\{a_n\}$是公差为1的等差数列，则$T_4=$______．

②若数列$\{a_n\}$是公比为$k+1$的等比数列，则$T_n=$______．

答案

1．6

2．$\dfrac{(k+1)^n-kn-1}{k^2}$

解析

（1）由题意可知$0<a_1<1$，所以$1<a_2<2$，$2<a_3<3$，$3<a_4<4$，

则$b_1=0$，$b_2=1$，$b_3=2$，$b_4=3$，所以$T_4=0+1+2+3=6.$

（2）由题意可知$a_n=\dfrac{1}{k}\cdot(k+1)^{n-1}$，

则$a_n-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k}\cdot[(k+1)^{n-1}-1]=\dfrac{1}{k}[C_{n-1}^{0}k^{n-1}+C_{n-1}^{1}k^{n-2}+\ldots+C_{n-1}^{n-3}k^2+C_{n-1}^{n-2}k^1+1-1]$

$=\dfrac{1}{k}[C_{n-1}^{0}k^{n-1}+C_{n-1}^{1}k^{n-2}+\ldots+C_{n-1}^{n-3}k^2+C_{n-1}^{n-2}k^1]$

$=C_{n-1}^{0}k^{n-2}+C_{n-1}^{1}k^{n-3}+\ldots+C_{n-1}^{n-3}k^1+C_{n-1}^{n-2}k^0$ ，

所以$a_n-\frac{1}{k}$为整数，又$0<\frac{1}{k}<1$，所以$[a_n]=a_n-\frac{1}{k}$，

则$T_n=a_1-\frac{1}{k}+a_2-\frac{1}{k}+\ldots a_n-\frac{1}{k}$

$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)-\frac{n}{k}$

$=\frac{1}{k}\cdot\frac{1-(k+1)^n}{1-(k+1)}-\frac{n}{k}=\frac{(k+1)^n-kn-1}{k^2}$.

考点

- 数列
  - 等比数列
    - 等比数列的前n项和
- 计数原理
  - 二项式定理
    - 二项式定理的应用

29 已知数列$\{a_n\}$满足$na_{n+2}-(n+2)a_n=\lambda(n^2+2n)$，其中$a_1=1$，$a_2=2$，若$a_n<a_{n+1}$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则实数λ的取值范围是______ .

答案 $[0,+\infty)$

解析 由$na_{n+2}-(n+2)a_n=\lambda n(n+2)$，

得$\frac{a_{n+2}}{n+2}-\frac{a_n}{n}=\lambda$，

$\therefore$数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$的奇数项与偶数项均是以λ为公差的等差数列，

$\because a_1=1$，$a_2=2$，

$\therefore$当n为奇数时，$\frac{a_n}{n}=1+\lambda\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=\frac{n-1}{2}\lambda+1$，

$\therefore a_n=\frac{n^2-n}{2}\lambda+n$；

当n为偶数时，$\frac{a_n}{n}=1+\lambda\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n-2}{2}\lambda+1$，

$\therefore a_n=\frac{n^2-2n}{2}\lambda+n$.

当n为奇数时，由$a_n<a_{n+1}$，得$\frac{n^2-n}{2}\lambda+n<\frac{(n+1)^2-2(n+1)}{2}\lambda+n+1$，

即$\lambda(n-1)>-2$.

若$n=1$，$\lambda\in\mathbf{R}$，

若$n>1$则$\lambda>\frac{2}{n-1}$，

$\therefore\lambda\geqslant 0$；

当n为偶数时，由$\frac{n^2-2n}{2}\lambda+n<\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}\lambda+n+1$，

即$3n\lambda>-2$，$\therefore\lambda>\frac{2}{3n}$，即$\lambda\geqslant 0$．

综上，λ的取值范围为$[0,+\infty)$．

故答案为：$[0,+\infty)$．

考点

—数列
- 数列的应用
  - 数列与不等式
- 数列的概念
  - 数列的递推公式
- 等差数列
  - 等差数列的性质

30 对于数列$\{a_n\}$，若$\forall m$，$n\in\mathbf{N}^*$（$m\neq n$），都有$\frac{a_m-a_n}{m-n}\geqslant t$（$t$为常数）成立，则称数列$\{a_n\}$具有性质$P(t)$．

(1) 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$，且具有性质$P(t)$，则t的最大值为 ______ ．

(2) 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-\frac{a}{n}$，且具有性质$P(10)$，则实数a的取值范围是 ______ ．

答案

1．2

2．$[36,+\infty)$

解析

(1)由于数列$a_n=2^n$的变化速度随着n的增大越来越快，

所以$\frac{a_m-a_n}{m-n}\geqslant t$只要保证$\frac{a_m-a_n}{m-n}$的最小值都比$t$大即可，

所以当$m=2$，$n=1$时，$t\leqslant 2$．

(2)令函数$f(x)=x^2-\frac{a}{x}$由题意可知$\frac{a_m-a_n}{m-n}\geqslant t$等价于$f'(x)\geqslant 10$在$x\in\mathbf{N}^*$恒成立

即$f'(x)=2x+\frac{a}{x^2}\geqslant 10\Rightarrow a\geqslant -2x^3+10x^2$

令$g(x)=-2x^3+10x^2$的最大值小于等于a

$g'(x)=-6x^2+20x=-2x(3x-10)$

$g(x)$在$(0,\frac{10}{3})$单调递增，在$(\frac{10}{3},+\infty)$上单调递减

又因为$g(3)=36$；$g(4)=32$所以$a\geqslant 36$．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 单调性
- 数列
  - 数列的概念
    - 数列的定义及表示方法
    - 数列的递推公式