



数列-高考必做题

1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_4 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 a_3 , a_5 分别为等差数列 $\{b_n\}$ 的第6项和第8项, 求 $|b_1| + |b_2| + |b_3| + \cdots + |b_n|$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

2 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 = 12$, $S_7 = 49$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9] = 0$, $[2.6] = 2$, 令 $b_n = [\lg a_n]$. 求数列 $\{b_n\}$ 的前2000项和.

3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 和, 若 $S_6 = 51$, $a_5 = 13$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 和 S_n .

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 和 T_n .

(3) 设函数 $f(n) = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ f(\frac{n}{2}), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, $c_n = f(2^n + 4)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 和 M_n (只需写出结论).

4 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 9$, a_2 为整数, 且 $S_n \leq S_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n \leq \frac{4}{9}$.

5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2$, S_n 为其前 n 项和, 且 $S_n = \frac{a_n(n+1)}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求证: $a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1}$ ($n \geq 2$);

(3) 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列, 并说明理由.

6



已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n$ ($n \geq 2$).

(1) 求证: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(3) 设 $b_n = a_n - 1$, $S_n = \frac{a_1}{b_1 b_2} + \frac{a_2}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n b_{n+1}}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使 $S_n \geq 4m^2 - 3m$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

7 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 3$, S_n 和 S_{n+1} 满足等式 $S_{n+1} = \frac{n+1}{n}S_n + n + 1$.

(1) 求 S_2 的值.

(2) 求证: 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列.

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n \cdot 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

8 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为10, 公差为2, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n}{2}a_n - 6n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = \max\{a_n, b_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n . (注: $\max\{a, b\}$ 表示 a 与 b 的最大值.)

9 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

(1) 求 a_1, a_2, a_3 的值;

(2) 设 $b_n = a_n - 1$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 $c_n = b_n \cdot (n - n^2)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 如果对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $c_n < \frac{t}{5}$, 求正整数 t 的最小值.

10 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为1, 公差为1的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n S_{2n+1}} + \sqrt{a_{n+1} S_{2n-1}}}$, 若不等式 $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \geq \frac{m}{\sqrt{2n+1} + 1}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 求实数 m 的取值范围.

11 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = 2a_n + p$ (p 为常数, $n = 1, 2, 3, \dots$).



- (1) 若 $S_3 = 12$, 求 S_n ;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 , 求实数 p 的值 ;
- (3) 是否存在实数 p , 使得数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 满足 : 可以从中取出无限多项并按原来的先后次序排成一个等差数列 ? 若存在 , 求出所有满足条件的 p 的值 ; 若不存在 , 说明理由 .

12 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 5$, $7a_2 = 4a_4$, 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2(b_n - 1)(n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 ;
- (2) 设数列 $c_n = \begin{cases} a_n, & n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^+ \\ b_n, & n = 2k, k \in \mathbf{N}^+ \end{cases}$ 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;
- (3) 把数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项从小到大排成新数列 $\{d_n\}$, 试写出 d_1, d_2 , 并证明 $\{d_n\}$ 为等比数列 .

13 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n - 1$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2$, $b_{n+1} - 2b_n = 8a_n$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;
- (2) 证明 : 数列 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列 , 并求 $\{b_n\}$ 的通项公式
- (3) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 是否存在常数 λ , 使得不等式 $(-1)^n \lambda < 1 + \frac{T_n - 6}{T_{n+1} - 6} (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立 ? 若存在 , 求出 λ 的取值范围 ; 若不存在 , 请说明理由 .

14 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}a_n + b_na_{n+1} = (-2)^n + 1, b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, n \in \mathbf{N}^*$, 且 $a_1 = 2$.

- (1) 求 a_2, a_3 的值 ;
- (2) 设 $c_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}, n \in \mathbf{N}^*$, 证明 $\{c_n\}$ 是等比数列 ;
- (3) 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 证明 $\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} + \cdots + \frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \leq n - \frac{1}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$.

15 数列 $\{a_n\}$ 满足 : $a_{n-1} + a_{n+1} > 2a_n (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$, 给出下述命题 :

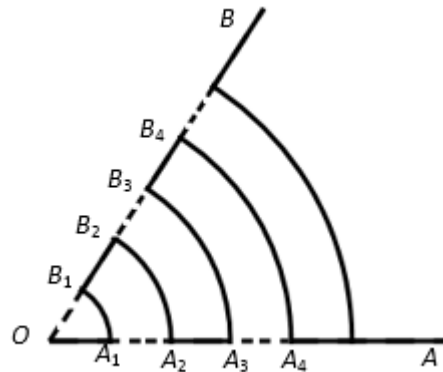
- ① 若数列 $\{a_n\}$ 满足 : $a_2 > a_1$, 则 $a_n > a_{n-1}$ 成立 ;
- ② 存在常数 c , 使得 $a_n > c (n \in \mathbf{N}^*)$ 成立 ;
- ③ 若 $p + q > m + n$ (其中 $p, q, m, n \in \mathbf{N}^*$) , 则 $a_p + a_q > a_m + a_n$;
- ④ 存在常数 d , 使得 $a_n > a_1 + (n - 1)d (n \in \mathbf{N}^*)$ 都成立 .



上述命题正确的是 ____ . (写出所有正确结论的序号)

- 16 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 点 O 为坐标原点 , 点 $A_n(n, f(n))$, $n \in \mathbf{N}^*$, 向量 $\vec{i} = (0, 1)$, θ_n 是向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 与 $\vec{i}$ 的夹角 , 设 S_n 为数列 $\left\{ \left| \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n} \right| \right\}$ 的前 n 项和 , 则 $S_{2016} =$ ____ .

- 17 如图所示 , $\angle AOB = 1 \text{ rad}$, 点 $A_1, A_2 \cdots$ 在 OA 上 , 点 $B_1, B_2 \cdots$ 在 OB 上 , 其中的每一个实线段和虚线段的长均为 1 个长度单位 , 一个动点 M 从 O 点出发 , 沿着实线段和以 O 为圆心的圆弧匀速运动 , 速度为 1 长度单位 / 秒 , 则质点 M 到达 A_3 点处所需要的时间为 ____ 秒 , 质点 M 到达 A_n 点处所需要的时间为 ____ 秒 .



- 18 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{n+1} a_n$, 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \dots$.

① 当 $\lambda = 0$ 时 , $a_{20} =$ ____ ;

② 若存在正整数 m , 当 $n > m$ 时总有 $a_n < 0$, 则 λ 的取值范围是 ____ .

- 19 数列 $\{a_n\}$ 中 , 如果存在 a_k , 使得 “ $a_k > a_{k-1}$ 且 $a_k > a_{k+1}$ ” 成立 (其中 $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}^*$) , 则称 a_k 为 $\{a_n\}$ 的一个峰值 .

(1) 若 $a_n = -3n^2 + 11n$, 则 $\{a_n\}$ 的峰值为 ____ .

(2) 若 $a_n = t \ln n - n$, 且 $\{a_n\}$ 不存在峰值 , 则实数 t 的取值范围是 ____ .

- 20 某校数学课外小组在坐标纸上 , 为学校的一块空地设计植树方案如下 : 第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k, y_k)$ 处 , 其中 $x_1 = 1, y_1 = 1$, 当 $k \geq 2$ 时 ,



$$\begin{cases} x_1 = x_{x-1} + 1 - 5[T(\frac{k-1}{5}) - T(\frac{K-2}{5})] \\ y_k = y_{k+1} + T(\frac{k-1}{5}) - T(\frac{K-2}{5}) \end{cases}$$

$T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分,例如 $T(2,6)=2, T(0,2)=0$.

按此方案,第6棵树种植点的坐标应为 _____ ;第2008棵树种植点的坐标应为 _____ .

21 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \sqrt{2}$, $[a_n]$ 表示 a_n 的整数部分, (a_n) 表示 a_n 的小数部分,

$$a_{n+1} = [a_n] + \frac{1}{(a_n)} (n \in \mathbf{N}^*) \text{ 则 } a_n = \text{_____}; \text{ 数列 } \{b_n\} \text{ 中, } b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 则 } \sum_{i=1}^n a_i b_i = \text{_____}.$$

22 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = p$, ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, p 为常数), 则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”. 下列

列是对“等方差数列”的判断:

- ① $\{a_n\}$ 是等方差数列, 则 $\{a_n^2\}$ 是等差数列;
- ② $\{(-1)^n\}$ 是等方差数列;
- ③ $\{a_n\}$ 是等方差数列, 则 $\{a_{kn}\}$ ($k \in \mathbf{N}^*$, k 为常数)也是等方差数列;
- ④若 $\{a_n\}$ 既是等方差数列, 又是等差数列, 则该数列为常数列.

其中正确命题序号为 _____. (将所有正确的命题序号填在横线上)

A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①②③④

23 已知数量 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 对于 $n = 1, 2, 3, \dots$, 有

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 5, & a_n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{2^k}, & a_n \text{ 为偶数 } k \text{ 为使 } a_{n+1} \text{ 为奇数的正整数} \end{cases}$$

当 $a_1 = 11$ 时, $a_{100} = \text{_____}$; 若存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 当 $n > m$ 且 a_n 为奇数时, a_n 恒为常数 p , 则 p 的值为 _____.

24 已知向量序列: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 满足如下条件:

$$|a_1| = 4|d| = 2, 2a_1 \cdot d = -1 \text{ 且 } a_n - a_{n-1} = d (n = 2, 3, 4, \dots).$$

若 $a_1 \cdot a_k = 0$, 则 $k = \text{_____}$; $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|, \dots$ 中第 _____ 项最小.

25



已知函数 $f(x) = x^2 \sin x$ ，各项均不相等的有限项数列 $\{x_n\}$ 的各项 x_i 满足 $|x_i| \leq 1$ 。令

$$F(n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad n \geq 3 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}, \text{ 例如: } F(3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)).$$

下列给出的结论中：

- ① 存在数列 $\{x_n\}$ 使得 $F(n) = 0$ ；
- ② 如果数列 $\{x_n\}$ 是等差数列，则 $F(n) > 0$ ；
- ③ 如果数列 $\{x_n\}$ 是等比数列，则 $F(n) > 0$ ；

正确结论的序号是 _____。

26 南宋数学家杨辉曾经研究过如图所示的三角形数：



将三角形数 $1, 3, 6, 10, \dots$ 记为数列 $\{a_n\}$ ，将可被5整除的三角形数从小到大的顺序组成一个新数列 $\{b_n\}$ ，可以推测： b_2 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 _____ 项； $b_{2k-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（用 k 表示）

27 无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，首项为 a_1 ，公差为 d ， S_n 是其前 n 项和，3、21、15 是其中的三项。给出下列命题：

- ① 对任意满足条件的 d ，存在 a_1 ，使得 99 一定是数列 $\{a_n\}$ 中的一项；
- ② 对任意满足条件的 d ，存在 a_1 ，使得 30 一定是数列 $\{a_n\}$ 中的一项；
- ③ 存在满足条件的数列 $\{a_n\}$ ，使得对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $S_{2n} = 4S_n$ 成立。

其中正确命题为 _____。（写出所有正确命题的序号）

28 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{k}$ ， $k \geq 2$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ ， $[a_n]$ 表示不超过 a_n 的最大整数（如 $[1.6] = 1$ ），记 $b_n = [a_n]$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n 。

- ① 若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，则 $T_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- ② 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $k+1$ 的等比数列，则 $T_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

29



已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+2} - (n+2)a_n = \lambda(n^2 + 2n)$ ，其中 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，若 $a_n < a_{n+1}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是_____。

30 对于数列 $\{a_n\}$ ，若 $\forall m, n \in \mathbf{N}^* (m \neq n)$ ，都有 $\frac{a_m - a_n}{m - n} \geq t$ (t 为常数)成立，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(t)$ 。

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ ，且具有性质 $P(t)$ ，则 t 的最大值为_____。

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - \frac{a}{n}$ ，且具有性质 $P(10)$ ，则实数 a 的取值范围是_____。