



函数与导数-高考必做题

1 已知函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$ 图象上一点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = -3x + 2 \ln 2 + 2$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 若方程 $f(x) + m = 0$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 内有两个不等实根, 求实数 m 的取值范围 (其中 e 为自然对数的底, $e \approx 2.7$).

(3) 令 $g(x) = f(x) - nx$, 如果 $g(x)$ 图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0), B(x_2, 0), x_1 < x_2$, AB 中点为 $C(x_0, 0)$, 求证: $g'(x_0) \neq 0$.

答案

(1) $a = 2, b = 1$.

(2) $1 < m \leq 2 + \frac{1}{e^2}$.

(3) 见解析.

解析

(1) $f'(x) = \frac{a}{x} - 2bx, f'(2) = \frac{a}{2} - 4b, f(2) = a \ln 2 - 4b$,

所以 $\frac{a}{2} - 4b = -3$, 且 $a \ln 2 - 4b = -6 + 2 \ln 2 + 2$,

解得 $a = 2, b = 1$.

(2) $f(x) = 2 \ln x - x^2$, 令 $h(x) = f(x) + m = 2 \ln x - x^2 + m$,

则 $h'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1-x^2)}{x}$, 令 $h'(x) = 0, x = 1$ ($x = -1$ 舍去).

在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 内, 当 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 是增函数;

当 $x \in (1, e]$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 是减函数

则方程 $h(x) = 0$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 内有两个不等实根的充要条件是 $\begin{cases} h\left(\frac{1}{e}\right) \leq 0 \\ h(1) > 0 \\ h(e) \leq 0 \end{cases}$,

即 $1 < m \leq 2 + \frac{1}{e^2}$.

(3) $g(x) = 2 \ln x - x^2 - nx, g'(x) = \frac{2}{x} - 2x - n$.

假设结论不成立, 则有 $\begin{cases} 2 \ln x_1 - x_1^2 - nx_1 = 0, (1) \\ 2 \ln x_2 - x_2^2 - nx_2 = 0, (2) \\ x_1 + x_2 = 2x_0, (3) \\ \frac{2}{x_0} - 2x_0 - n = 0, (4) \end{cases}$,

(1) - (2), 得 $2 \ln \frac{x_1}{x_2} - (x_1^2 - x_2^2) - n(x_1 - x_2) = 0$.

所以 $n = 2 \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} - 2x_0$.

由(4)得 $n = \frac{2}{x_0} - 2x_0$, 所以 $\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x_0}$,



$$\text{即 } \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{2}{x_1 + x_2}, \text{ 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2 \frac{x_1}{x_2} - 2}{\frac{x_1}{x_2} + 1}, (5),$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2}, u(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1} (0 < t < 1).$$

$$\text{则 } u'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0, \text{ 所以 } u(t) \text{ 在 } 0 < t < 1 \text{ 上是增函数,}$$

$$u(t) < u(1) = 0, \text{ 所以(5)式不成立, 与假设矛盾,}$$

$$\text{所以 } g'(x_0) \neq 0.$$

考点

函数与导数

导数及其应用

导数与零点

导数概念及其几何意义

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

推理与证明

直接证明和间接证明

反证法

2 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 - 3x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程.

(2) 当 $a > 0$ 时, 试讨论函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的极值点的个数.

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

答案

(1) $15x - y - 36 = 0$.

(2) 答案见解析.

(3) $\left[\frac{1}{4e^3}, +\infty\right)$.

解析

(1) 当 $a = 0$ 时, $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x$,

$$f'(x) = 2x^2 - 3, \therefore f'(3) = 15,$$

$$f(3) = 9,$$

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为 $y - 9 = 15(x - 3)$, 化为

$$15x - y - 36 = 0.$$



(2) 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 2x^2 - 4ax - 3$, $\Delta = 16a^2 + 24 > 0$,

$$\text{由 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 6}}{2}. x_1 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 6}}{2} < 0,$$

$$x_2 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 6}}{2} > 1.$$

$$\text{由 } x_1 > -1, \text{ 解得 } a > \frac{1}{4}.$$

因此, 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = x_1$,

$\therefore$ 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_1, 0)$

时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减.

此时函数 $f(x)$ 取得极大值, 只有一个.

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f'(x) \leq 0$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 无极值点.

综上可得: 当 $a > \frac{1}{4}$ 时, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内取得一个极大值.

当 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内无极值点.

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, $af'(x) + 4a^2x \geq \ln x - 3a - 1$ 恒成立 $\Leftrightarrow a \geq \frac{\ln x - 1}{2x^2} (x > 0)$.

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x - 1}{2x^2}, x > 0, g'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{2x^3},$$

令 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$, 此时函数 $g(x)$ 单调递增; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > e^{\frac{3}{2}}$

, 此时函数 $g(x)$ 单调递减.

$$\therefore \text{当 } x = e^{\frac{3}{2}} \text{ 时, 函数 } g(x) \text{ 取得最大值, } g(x)_{\max} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4e^{\frac{3}{2}}}, +\infty\right)$.

考点

一 函数与导数

— 导数及其应用

— 导数与恒成立

— 导数概念及其几何意义

— 利用导数求函数的极值与最值

3

已知 $\frac{1}{3} \leq k < 1$, 设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是关于 x 的方程 $|2^x - 1| = k$ 的两个实数根, x_3, x_4 ($x_3 < x_4$) 是方程 $|2^x - 1| = \frac{k}{2k+1}$ 的两个实数根, 则 $(x_4 - x_3) + (x_2 - x_1)$ 的最小值是 _____.

答案

$\log_2 3$



解析

作出函数 $y = |2^x - 1|$ 的图象如图：由图象知当 $k = \frac{1}{3}$ 时， $x_2 - x_1$ 最小，此时由 $|2^x - 1| = \frac{1}{3}$

$$\text{得 } 2^x - 1 = \frac{1}{3} \text{ 或 } 2^x - 1 = -\frac{1}{3},$$

$$\text{即 } 2^x = \frac{4}{3} \text{ 或 } 2^x = \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } x = \log_2 \frac{4}{3} \text{ 或 } x = \log_2 \frac{2}{3}, \text{ 即 } x_2 = \log_2 \frac{4}{3} \text{ 或 } x_1 = \log_2 \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } x_2 - x_1 = \log_2 \frac{4}{3} - \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 2 = 1,$$

$$\text{对于 } \frac{k}{2k+1} \text{ 则当 } k = \frac{1}{3} \text{ 时, } \frac{k}{2k+1} \text{ 有最小值为 } \frac{\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{5},$$

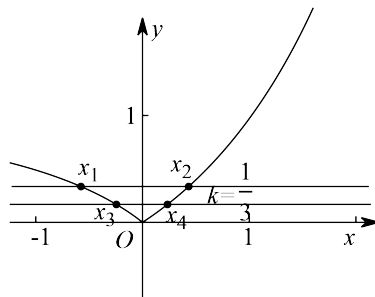
$$\text{则当 } |2^x - 1| = \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{5} \text{ 时, } x_4 - x_3 \text{ 最小,}$$

$$\text{即此时 } 2^x - 1 = \frac{1}{5} \text{ 或 } 2^x - 1 = -\frac{1}{5},$$

$$\text{即 } 2^x = \frac{6}{5} \text{ 或 } 2^x = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } x = \log_2 \frac{6}{5} \text{ 或 } x = \log_2 \frac{4}{5}, \text{ 即 } x_4 = \log_2 \frac{6}{5} \text{ 或 } x_3 = \log_2 \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } x_4 - x_3 = \log_2 \frac{6}{5} - \log_2 \frac{4}{5} = \log_2 \frac{3}{2},$$

故 $(x_4 - x_3) + (x_2 - x_1)$ 的最小值是 $\log_2 3$,故答案为： $\log_2 3$.

考点

一函数与导数

└ 对数函数

└ 对数函数的概念、图象及其性质

4

设函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$.(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.(2) 若函数有两个零点，求满足条件的最小正整数 a 的值.(3) 若方程 $f(x) = c$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ，求证： $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0$.

答案

$$(1) \left(\frac{a}{2}, +\infty\right), \left(0, \frac{a}{2}\right).$$

$$(2) 3$$

(3) 证明见解析.

解析

$$(1) x \in (0, +\infty).$$



$$f'(x) = 2x - (a-2) - \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - (a-2)x - a}{x} = \frac{(2x-a)(x+1)}{x}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{a}{2}$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{a}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{a}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{a}{2})$.

(2) 由(1)可得, 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 则 $a > 0$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(\frac{a}{2}) < 0$, 即

$$-a^2 + 4a - 4a \ln \frac{a}{2} < 0.$$

$$\because a > 0, \therefore a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4 > 0.$$

令 $h(a) = a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4$, 可知 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $h(2) = -2$,

所以存在零点 $h(a_0) = 0$, $a_0 \in (2, 3)$,

当 $a > a_0$ 时, $h(a) > 0$; 当 $0 < a < a_0$ 时, $h(a) < 0$.

所以满足条件的最小正整数 $a = 3$.

又当 $a = 3$ 时, $f(3) = 3(2 - \ln 3) > 0$, $f(1) = 0$, $\therefore a = 3$ 时, $f(x)$ 由两个零点.

综上所述, 满足条件的最小正整数 a 的值为 3.

(3) $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = c$ 得两个不等实数根, 由(1)可知: $a > 0$.

不妨设 $0 < x_1 < x_2$. 则 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 = c$, $x_2^2 - (a-2)x_2 - a \ln x_2 = c$.

两式相减得 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 - x_2^2 + (a-2)x_2 + a \ln x_2 = 0$,

$$\text{化为 } a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}.$$

$\because f'(\frac{a}{2}) = 0$, 当 $x \in (0, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故只要证明 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2}$ 即可,

即证明 $x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$, 即证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2}$,

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1), \text{ 令 } g(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}, \text{ 则 } g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}.$$

$\because 1 > t > 0, \therefore g'(t) > 0$.

$\therefore g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数, 又在 $t = 1$ 处连续且 $g(1) = 0$,

$\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时, $g(t) < 0$ 总成立. 故命题得证.

考点

一 函数与导数

— 函数与方程

— 函数的零点

— 导数及其应用



利用导数研究函数的单调性

利用导数证明不等式

5 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$, $g(x) = e^x$ (其中 e 为自然对数的底数) .

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $y = f(x) \cdot g(x)$ 在区间 $[-2, 0]$ 上的最大值 .

(2) 若 $a = -1$, 关于 x 的方程 $f(x) = k \cdot g(x)$ 有且仅有一个根, 求实数 k 的取值范围 .

(3) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, $x_1 \neq x_2$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < |g(x_1) - g(x_2)|$ 均成立, 求实数 a 的取值范围 .

答案

(1) 1 .

(2) $k > \frac{3}{e^2}$ 或 $0 < k < \frac{1}{e}$.

(3) $-1 \leq a \leq 2 - 2\ln 2$.

解析

(1) $a = 1$ 时, $y = (x^2 + x + 1)e^x$, $y' = (x + 1)(x + 2)e^x$,

令 $y' > 0$, 解得: $x > -1$ 或 $x < -2$, 令 $y' < 0$, 解得: $-2 < x < -1$,

$\therefore$ 函数 $y = f(x) \cdot g(x)$ 在 $[-2, -1]$ 递减, 在 $[-1, 0]$ 递增,

而 $x = -2$ 时, $y = \frac{3}{e^2}$, $x = 0$ 时, $y = 1$,

故函数在 $[-2, 0]$ 上的最大值是 1 .

(2) 由题意得: $k = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$ 有且只有一个根,

令 $h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{-(x-1)(x-2)}{e^x}$,

故 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, $(1, 2)$ 上单调递增, $(2, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)$ 极大 = $h(2) = \frac{3}{e^2}$, $h(x)$ 极小 = $h(1) = \frac{1}{e}$,

因为 $h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递减, 且函数值恒为正, 又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

所以当 $k > \frac{3}{e^2}$ 或 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时, $k = h(x)$ 有且只有一个根 .

(3) 设 $x_1 < x_2$, 因为 $g(x) = e^x$ 在 $[0, 2]$ 单调递增,

故原不等式等价于 $|f(x_1) - f(x_2)| < g(x_2) - g(x_1)$ 在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 且 $x_1 < x_2$ 恒成立,

所以 $g(x_1) - g(x_2) < f(x_1) - f(x_2) < g(x_2) - g(x_1)$ 在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 且 $x_1 < x_2$ 恒成立,

即 $\begin{cases} g(x_1) - f(x_1) < g(x_2) - f(x_2) \\ f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \end{cases}$ 在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 且 $x_1 < x_2$ 恒成立,



则函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ 和 $G(x) = f(x) + g(x)$ 都在 $[0, 2]$ 单调递增，

则有 $\begin{cases} G'(x) = g'(x) + f'(x) = e^x + 2x + a \geq 0 \\ F'(x) = g'(x) - f'(x) = e^x - 2x - a \geq 0 \end{cases}$ ，在 $[0, 2]$ 恒成立，

当 $a \geq -(e^x + 2x)$ 恒成立时，因为 $-(e^x + 2x)$ 在 $[0, 2]$ 单调递减，

所以 $-(e^x + 2x)$ 的最大值为 -1 ，所以 $a \geq -1$ ，

当 $a \leq e^x - 2x$ 恒成立时，因为 $e^x - 2x$ 在 $[0, \ln 2]$ 单调递减，在 $[\ln 2, 2]$ 单调递增，

所以 $e^x - 2x$ 的最小值为 $2 - 2\ln 2$ ，所以 $a \leq 2 - 2\ln 2$ ，

综上： $-1 \leq a \leq 2 - 2\ln 2$ 。

考点

一函数与导数

函数

└ 最值

函数与方程

└ 方程根的个数

导数及其应用

└ 导数与恒成立

└ 导数概念及其几何意义

└ 导数的运算

└ 利用导数研究函数的单调性

└ 利用导数求函数的极值与最值

6 已知函数 $f(x) = (x - a)^2 \ln x$ ， $a \in \mathbb{R}$ 。

(1) 若 $a = 3\sqrt{e}$ ，其中 e 为自然对数的底数，求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的单调区间。

(2) 若函数 $f(x)$ 既有极大值，又有极小值，求实数 a 的取值范围。

答案

(1) 当 $x \in (\sqrt{e}, 3\sqrt{e})$ 时， $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 单调递增；

当 $x \in (3\sqrt{e}, +\infty)$ 时， $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 单调递减；

当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 单调递减。

(2) $a > -2e^{-\frac{3}{2}}$ 且 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 。

解析

(1) $F(x) = \frac{(x - a)^2 \ln x}{x}$ ，

$F'(x) = \frac{(x^2 - a) \ln x + (x - a)^2}{x^2} = \frac{(x - a)[(x + a) \ln x + x - a]}{x^2}$ ，



$$\text{由 } a = 3\sqrt{e} \text{ 知, } F'(x) = \frac{(x - 3\sqrt{e})[(x + 3\sqrt{e})\ln x + x - 3\sqrt{e}]}{x^2},$$

$$\text{设 } m(x) = (x + 3\sqrt{e})\ln x + x - 3\sqrt{e},$$

$$\text{则 } m'(x) = \ln x + \frac{3\sqrt{e}}{x} + 2, \quad m''(x) = \frac{1}{x} - \frac{3\sqrt{e}}{x^2} = \frac{x - 3\sqrt{e}}{x^2},$$

$$\therefore m'(x) \geq m'(3\sqrt{e}) = \ln(3\sqrt{e}) + 3 > 0,$$

$\therefore m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 观察知 $m(e) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (\sqrt{e}, 3\sqrt{e})$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增;

当 $x \in (3\sqrt{e}, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减.

$$(2) \quad f(x) = (x - a)^2 \ln x, \quad f'(x) = 2(x - a) \ln x + (x - a)^2 \cdot \frac{1}{x} = (x - a) \left(2 \ln x + \frac{x - a}{x} \right)$$

$$\text{由 } 2 \ln x + \frac{x - a}{x} = 0, \text{ 得 } 2x \ln x + x = a,$$

$$\text{设 } h(x) = 2x \ln x + x, \text{ 则 } h'(x) = 3 + 2 \ln x, \text{ 由 } h'(x) = 0, \text{ 得 } x = e^{-\frac{3}{2}}.$$

当 $x \in (0, e^{-\frac{3}{2}})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

$$\therefore h(x)_{\min} = h(e^{-\frac{3}{2}}) = -2e^{-\frac{3}{2}}.$$

又 $x \rightarrow 0^+$ 时 $h(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ 时 $h(x) \rightarrow +\infty$,

$$\therefore a \geq -2e^{-\frac{3}{2}}, \text{ 这是必要条件.}$$

检验: 当 $a = -2e^{-\frac{3}{2}}$ 时, $f(x)$ 既无极大值, 也无极小值;

当 $-2e^{-\frac{3}{2}} < a < 0$ 时, 满足题意; 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 只有一个极值点, 舍去;

当 $a > 0$ 时, 则 $2 \ln a + \frac{a - 1}{a} \neq 0$, 则 $a \neq 1$.

综上, 符合题意的 a 的范围为 $a > -2e^{-\frac{3}{2}}$ 且 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$.

考点

一 函数与导数

— 导数及其应用

— 导数与零点

— 导数与分类讨论

— 利用导数研究函数的单调性

- 7 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$ ($a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$) 的图象在点 $(x, f(x))$ 处的切线的斜率为 $k(x)$, 且函数 $g(x) = k(x) - \frac{1}{2}$ 为偶函数. 若函数 $k(x)$ 满足下列条件: ① $k(-1) = 0$; ② 对一切实数 x , 不



等式 $k(x) \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 恒成立.

(1) 求函数 $k(x)$ 的表达式.

(2) 求证: $\frac{1}{k(1)} + \frac{1}{k(2)} + \cdots + \frac{1}{k(n)} > \frac{2n}{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

答案 (1) $k(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

(2) 证明过程见解析.

解析 (1) 由已知得: $k(x) = f'(x) = ax^2 + bx + c$.

由 $g(x) = k(x) - \frac{1}{2}x$ 为偶函数,

得 $g(x) = ax^2 + bx + c - \frac{1}{2}x$ 为偶函数, 显然有 $b = \frac{1}{2}$.

又 $k(-1) = 0$, $\therefore a - b + c = 0$, 即 $a + c = \frac{1}{2}$.

又 $\because k(x) \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 对一切实数 x 恒成立,

即对一切实数 x , 不等式 $\left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{2}x + c - \frac{1}{2} \leq 0$ 恒成立.

显然, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不符合题意.

当 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, 应满足 $\begin{cases} a - \frac{1}{2} < 0 \\ \Delta = \frac{1}{4} - 4\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(c - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases}$

注意到 $a + c = \frac{1}{2}$, 解得 $a = c = \frac{1}{4}$.

$\therefore k(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

(2) $\because k(n) = \frac{n^2 + 2n + 1}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}$, $\therefore \frac{1}{k(n)} = \frac{4}{(n+1)^2}$.

要证不等式 $\frac{1}{k(1)} + \frac{1}{k(2)} + \cdots + \frac{1}{k(n)} > \frac{2n}{n+2}$ 成立,

即证 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{n}{2n+4}$.

$\because \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$,

$\therefore$

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4}$

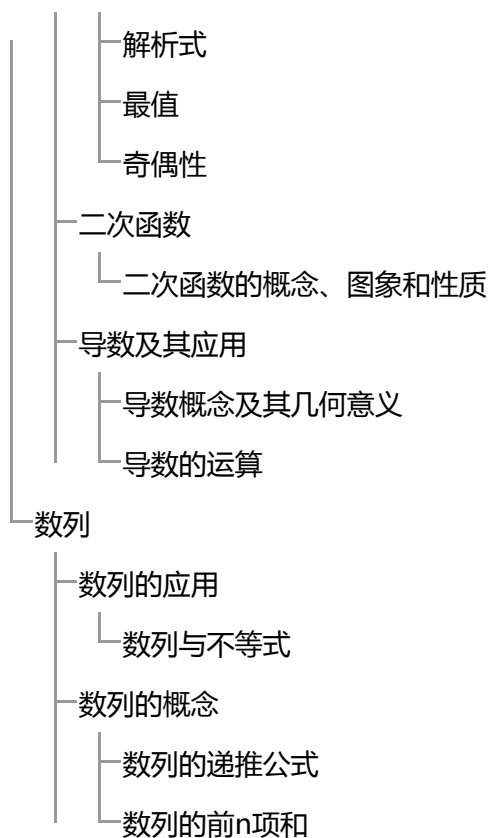
.

$\therefore \frac{1}{k(1)} + \frac{1}{k(2)} + \cdots + \frac{1}{k(n)} > \frac{2n}{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 成立.

考点 一函数与导数

一函数

└ 值域



8 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + ax$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与 x 轴平行。

- (1) 求 a 的值。
- (2) 若 $g(x) = e^x - 2x - 1$ ，求函数 $g(x)$ 的最小值。
- (3) 求证：存在 $c < 0$ ，当 $x > c$ 时， $f(x) > 0$ 。

答案

(1) $a = -1$

(2) $1 - 2\ln 2$

(3) 证明见解析

解析

(1) $f'(x) = e^x - 2x + a$ ，

由已知可得 $f'(0) = 0$ ，所以 $1 + a = 0$ ，得 $a = -1$ 。

(2) $g'(x) = e^x - 2$ ，令 $g'(x) = 0$ ，得 $x = \ln 2$ ，

所以 x ， $g'(x)$ ， $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+



$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$
--------	------------	-----	------------

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 - 1 = 1 - 2\ln 2$.

(3) 证明：显然 $g(x) = f'(x)$ 且 $g(0) = 0$,

由(II)知, $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减,在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

又 $g(\ln 2) < 0$, $g(2) = e^2 - 5 > 0$,

由零点存在定理,存在唯一实数 $x_0 \in (\ln 2, +\infty)$,满足 $g(x_0) = 0$,

即 $e^{x_0} - 2x_0 - 1 = 0$, $e^{x_0} = 2x_0 + 1$,

综上, $g(x) = f'(x)$ 存在两个零点,分别为0, x_0 .

所以 $x < 0$ 时, $g(x) > 0$,即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;

$0 < x < x_0$ 时, $g(x) < 0$,即 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减;

$x > x_0$ 时, $g(x) > 0$,即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(0)$ 是极大值, $f(x_0)$ 是极小值,

$$f(x_0) = e^{x_0} - x_0^2 - x_0 = 2x_0 + 1 - x_0^2 - x_0 = -x_0^2 + x_0 + 1 = -\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4},$$

因为 $g(1) = e - 3 < 0$, $g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} - 4 > 0$,

所以 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$,所以 $f(x_0) > 0$,

因此 $x \geq 0$ 时, $f(x) > 0$.

因为 $f(0) = 1$ 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

所以一定存在 $c < 0$ 满足 $f(c) > 0$,

所以存在 $c < 0$,当 $x > c$ 时, $f(x) > 0$.

考点

一函数与导数

—导数及其应用

—导数与零点

—导数概念及其几何意义

—导数的运算

—利用导数研究函数的单调性

—利用导数求函数的极值与最值

9

已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + \ln x, a \in \mathbb{R}$.



- (1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值 .
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$ 恰有两个不等的实根, 求实数 a 的取值范围 .
- (3) 设 $g(x) = e^x - x - 1$, 若对任意的 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围 .

答案 (1) 答案见解析 .

(2) $a > 1$.

(3) $[-1, 0]$

解析 (1) 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - 3x + \ln x, f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$,

令 $f'(x) = 0$ 得: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$,

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大	单调递减	极小	单调递增

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时: $f(x)$ 有极大值, 且 $f(x)_{\text{极大值}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} - \ln 2$,

当 $x = 1$ 时: $f(x)$ 有极小值, 且 $f(x)_{\text{极小值}} = -2$.

(2) $\because f(x) = 2ax^2 - 2(a+1)x$,

$$\therefore ax^2 - (2a+1)x + \ln x = 2ax^2 - 2(a+1)x,$$

$$\therefore ax^2 - x = \ln x, x \in (0, +\infty),$$

显然 $a \leq 0$ 时, $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 只有 1 个交点, 不合题意,

当 $a = 1$ 时, 函数 $y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ 时: $y_{\min} = -\frac{1}{4}$, 而 $y = \ln \frac{1}{2} < \ln e^{-\frac{1}{4}}$,

,

$\therefore 0 < a \leq 1$ 时, $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 只有 1 个交点, 不合题意,

$a > 1$ 时, 画出函数 $y = ax^2 - x$ 与 $y = \ln x$ 的图象,

如图示:



图象有2个交点,

综上: $a > 1$.

(3) 由 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 0$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数, 在 $(0, +\infty)$ 是增函数,

即 $g(x)_{\text{最小值}} = g(0) = 0$.

对于任意的 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 恒成立, 则有 $f(x_1) \leq g(0)$ 即可.

即不等式 $f(x) \leq 0$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$$f'(x) = \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x},$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 是减函数,

$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(1) = -1 < 0$,

$\therefore a = 0$ 符合题意.

$$(2) \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x},$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 是减函数,

$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(1) = -a - 1 \leq 0$,

得 $-1 \leq a < 0$,

$\therefore -1 \leq a < 0$ 符合题意.

$$(3) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x}, f'(x) = 0 \text{ 得: } x_1 = \frac{1}{2a}, x_2 = 1,$$

$a > \frac{1}{2}$ 时, $0 < x_1 < 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得: $0 < x < \frac{1}{2a}$ 或 $x > 1$,

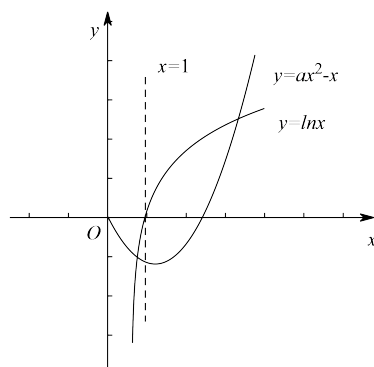
令 $f'(x) < 0$, 解得: $\frac{1}{2a} < x < 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 是增函数,

而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 这与对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f(x) \leq 0$ 矛盾.

同理 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时也不成立.

综上所述: a 的取值范围为 $[-1, 0]$.





函数的模型及其应用

导数及其应用

利用导数研究函数的单调性

- 10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是 () .

A. $(\frac{1}{2}, \sqrt{e})$

B. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e})$

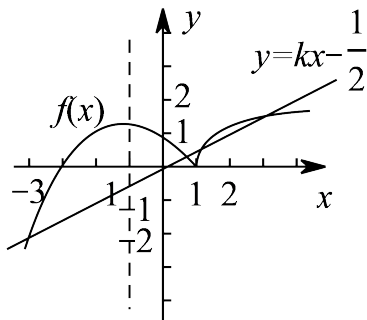
C. $[\frac{1}{2}, \sqrt{e})$

D. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}]$

答案 B

解析

要证 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 有 4 个不等的实根，
只需 $f(x)$ 的图象与 $y = kx - \frac{1}{2}$ 有 4 个交点，
如图：



如图点 $(1, 0)$ 在 $y = kx - \frac{1}{2}$ 的下方，

$$\therefore k \cdot 1 - \frac{1}{2} > 0 \text{ 得 } k > \frac{1}{2}.$$

再根据当 $y = kx - \frac{1}{2}$ 与 $y = \ln x$ 相切时，

设切点坐标为 m ，

$$\text{则 } k = \frac{\ln m + \frac{1}{2}}{m - 0} = \frac{1}{m},$$

$$\therefore m = \sqrt{e},$$

$$\text{此时 } k = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{e}}{e},$$

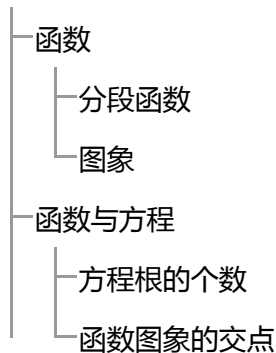
此时 $f(x)$ 与 $y = kx - \frac{1}{2}$ 有 3 个交点，

$$\therefore k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right).$$

故选 B.



考点 一函数与导数



11 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2x - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $a = 4$, 求函数 $f(x)$ 的极值 ;
- (2) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一的零点 x_0 , 求 a 的取值范围 ;
- (3) 若 $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 设 $g(x) = a(1-x)^2 - 2x - 1 - \ln(1-x)$, 求证 : $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一的零点 x_1 , 且对 (2) 中的 x_0 , 满足 $x_0 + x_1 > 1$.

答案 (1) $f(x)$ 有极小值 $\frac{3}{4} + \ln 4$, 无极大值 .

(2) $a > -\frac{1}{2}$

(3) 证明过程见解析 .

解析 (1) 当 $a = 4$ 时 , $f(x) = 4x^2 + 2x - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$,

$$f'(x) = 8x + 2 - \frac{1}{x} = \frac{8x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{(4x-1)(2x+1)}{x} .$$

由 $x \in (0, +\infty)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{4}$.

当 x 变化时 , $f'(x)$, $f(x)$ 的变化如下表 :

x	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 单调递减 , 在 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 单调递增 ,

$f(x)$ 有极小值 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} + \ln 4$, 无极大值 .

(2) 解法一 : $f'(x) = 2ax + 2 - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 + 2x - 1}{x}$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $2ax^2 + 2x - 1 = 0$, 设 $h(x) = 2ax^2 + 2x - 1$.

则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一的零点 x_0 等价于 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一的零点 x_0 ,



当 $a = 0$ 时, 方程的解为 $x = \frac{1}{2}$, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, 由函数 $h(x)$ 图象的对称轴 $x = -\frac{1}{2a} < 0$,

函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

且 $h(0) = -1$, $h(1) = 2a + 1 > 0$, 所以满足题意;

当 $a < 0$, $\Delta = 0$ 时, $a = \frac{1}{2}$, 此时方程的解为 $x = 1$, 不符合题意;

当 $a < 0$, $\Delta \neq 0$ 时, 由 $h(0) = -1$,

只需 $h(1) = 2a + 1 > 0$, 得 $-\frac{1}{2} < a < 0$.

综上, $a > -\frac{1}{2}$.

解法二: $f'(x) = 2ax + 2 - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 + 2x - 1}{x}$

令 $f'(x) = 0$, 由 $2ax^2 + 2x - 1 = 0$, 得 $a = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$.

设 $m = \frac{1}{x}$, 则 $m \in (1, +\infty)$, $a = \frac{1}{2}m^2 - m = \frac{1}{2}(m-1)^2 - \frac{1}{2}$,

问题转化为直线 $y = a$ 与函数 $h(m) = \frac{1}{2}(m-1)^2 - \frac{1}{2}$ 的图象在 $(1, +\infty)$ 恰有一个交点问题.

又当 $m \in (1, +\infty)$ 时, $h(m)$ 单调递增,

故直线 $y = a$ 与函数 $h(m)$ 的图象恰有一个交点, 当且仅当 $a > -\frac{1}{2}$.

(3) 设 $t = 1 - x$, 则 $t \in (0, 1)$, $p(t) = g(1-t) = at^2 + 2t - 3 - \ln t$,

$p'(t) = 2at + 2 - \frac{1}{t} = \frac{2at^2 + 2t - 1}{t}$

由 $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 故由(2)可知,

方程 $2at^2 + 2t - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一的解 x_0 ,

且当 $t \in (0, x_0)$ 时, $p'(t) < 0$, $p(t)$ 单调递减;

当 $t \in (x_0, 1)$ 时 $p'(t) > 0$, $p(t)$ 单调递增.

又 $p(1) = a - 1 < 0$, 所以 $p(x_0) < 0$.

取 $t = e - 3 + 2a \in (0, 1)$,

则 $pe - 3 + 2a = ae - 6 + 4a + 2e - 3 + 2a - 3 \ln e - 3 + 2a$

$= ae - 6 + 4a + 2e - 3 + 2a - 3 + 3 - 2a$

$= ae - 6 + 4a - 2 + 2e - 3 + 2a > 0$,

从而当 $t \in (0, x_0)$ 时, $p(t)$ 必存在唯一的零点 t_1 , 且 $0 < t_1 < x_0$,

即 $0 < 1 - x_1 < x_0$, 得 $x_1 \in (0, 1)$, 且 $x_0 + x_1 > 1$,

从而函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一的零点 x_1 , 满足 $x_0 + x_1 > 1$.



考点

一函数与导数

函数

└ 单调性

函数与方程

└ 函数的零点

导数及其应用

└ 导数与零点

└ 导数与分类讨论

└ 导数的运算

└ 利用导数研究函数的单调性

└ 利用导数求函数的极值与最值

└ 利用导数证明不等式

12 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{ex}$ (e 为自然对数的底数) .

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 是否存在正实数 x 使得 $f(1+x) = f(1-x)$? 若存在, 求出 x 的值; 若不存在, 请说明理由 .

(3) 若存在不等实数 x_1, x_2 , 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$.

答案

(1) $y = f(x)$ 减区间为 $(-\infty, 1)$, 增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 不存在, 理由见解析 .

(3) 证明见解析 .

解析

(1) $y = f(x)$ 减区间为 $(-\infty, 1)$, 增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 若 $f(x) = \frac{e^x}{ex}$ 满足题意, 则令 $f(x) = \frac{ex}{e^x}$ 也满足题意, 反之亦然, 令 $f(x) = \frac{ex}{e^x}$.

不存在正实数 x 使得 $f(1-x) = f(1+x)$ 成立,

事实上, 知函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上递增,

而当 $x \in (0, 1)$, 有 $y \in (0, 1)$, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, 有 $0 < y < 1$,

因此, 若存在正实数 x 使得 $f(1-x) = f(1+x)$, 必有 $x \in (0, 1)$,

令 $F(x) = f(1+x) - f(1-x) = \frac{x+1}{e^x} + (x-1)e^x$,

则 $F'(x) = x\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$,



因为 $x \in (0, 1)$,

所以 $F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 为 $(0, 1)$ 上的增函数,

所以 $F(x) > F(0) = 0$,

即 $f(1+x) > f(1-x)$,

故不存在正实数 x 使得 $f(1-x) = f(1+x)$ 成立.

(3) 与 (2) 同理, 证 (2) 中函数 $f(x)$ 的导函数在 $\frac{(x_1+x_2)}{2}$ 处的函数值小于 2 即可.

① 若 $x_2 \geq 2$, 则 $\frac{x_1+x_2}{2} \in (1, +\infty)$, 由 (1) 知: 函数 $y = f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$.

② 若 $x_2 \in (1, 2)$, 由 (2) 知: 当 $x \in (0, 1)$,

则有 $f(1+x) > f(1-x)$,

而 $1-x_1 \in (0, 1)$,

所以 $f(2-x_1) = f[1+(1-x_1)] > f[1-(1-x_1)] = f(x_1)$,

即 $f(2-x_1) > f(x_2)$,

而 $2-x_1, x_2 \in (1, 2)$, 由 (1) 知: 函数 $y = f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $2-x_1 < x_2$, 即有 $\frac{x_1+x_2}{2} \in (1, +\infty)$,

由 (1) 知: 函数 $y = f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$,

综合①, ②得: 若存在不等实数 x_1, x_2 ,

使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则总有 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$.

考点

一 函数与导数

— 函数

└ 单调性

— 导数及其应用

└ 导数的运算

└ 利用导数研究函数的单调性

└ 利用导数求函数的极值与最值



设函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = (2-a)(x-1) - 2f(x)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象上任意不同两点, 线段 AB 中点为 $C(x_0, y_0)$, 直线 AB 的斜率为 k . 证明: $k > f(x_0)$.

(3) 设 $F(x) = |f(x)| + \frac{b}{x+1}$ ($b > 0$), 对任意 $x_1, x_2 \in (0, 2]$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} < -1$, 求实数 b 的取值范围.

答案

(1) 答案见解析.

(2) 证明见解析.

(3) $b \geq \frac{27}{2}$.

解析

(1) 当 $a = 1$ 时,

$$g(x) = (x-1) - 2f(x) = (x-1) - 2\ln x = x - 1 - 2\ln x,$$

定义域为 $(0, +\infty)$;

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x};$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

即 $g(x)$ 的单调增区间为 $(2, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, 2)$.

(2) 证明: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$, 又 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

$$\text{所以 } f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_1 + x_2};$$

$$\text{即证, } \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_1 + x_2},$$

$$\text{不妨设 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 即证: } \ln x_2 - \ln x_1 > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1};$$

$$\text{即证: } \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right)}{\frac{x_2}{x_1} + 1};$$

$$\text{设 } t = \frac{x_2}{x_1} > 1, \text{ 即证: } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} = 2 - \frac{4}{t+1};$$

$$\text{即证: } \ln t + \frac{4}{t+1} - 2 > 0, \text{ 其中 } t \in (1, +\infty);$$

$$\text{事实上, 设 } k(t) = \ln t + \frac{4}{t+1} - 2, (t \in (1, +\infty)),$$

$$\text{则 } k'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0;$$

所以 $k(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $k(t) > k(1) = 0$;



即结论成立.

$$(3) \text{ 由题意得 } \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} + 1 < 0,$$

$$\text{即 } \frac{F(x_1) + x_1 - (F(x_2) + x_2)}{x_1 - x_2} < 0;$$

设 $G(x) = F(x) + x$, 则 $G(x)$ 在 $(0, 2]$ 单调递减,

$$\text{① 当 } x \in [1, 2] \text{ 时, } G(x) = \ln x + \frac{b}{x+1} + x,$$

$$G'(x) = \frac{1}{x} - \frac{b}{(x+1)^2} + 1 \leq 0;$$

$$b \geq \frac{(x+1)^2}{x} + (x+1)^2 = x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3 \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{设 } G_1(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3, \text{ 则 } G_1'(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^2};$$

$$\text{当 } x \in [1, 2], G_1'(x) > 0;$$

$$\therefore G_1(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上单调递增, } G_1(x) \leq \frac{27}{2};$$

$$\text{故 } b \geq \frac{27}{2}.$$

$$\text{② 当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } G(x) = -\ln x + \frac{b}{x+1} + x;$$

$$G_1(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3,$$

$$G'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{b}{(x+1)^2} + 1 \leq 0,$$

$$b \geq -\frac{(x+1)^2}{x} + (x+1)^2 = x^2 + x - \frac{1}{x} - 1 \text{ 在 } (0, 1) \text{ 恒成立,}$$

$$\text{设 } G_2(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} - 1, G_2'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} > 0,$$

$$\text{即 } G_2(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 单调递增, 故 } G_2(x) < G_2(1) = 0,$$

$$\therefore b \geq 0,$$

$$\text{综上所述: } b \geq \frac{27}{2}.$$

考点

函数与导数

函数

定义域

导数及其应用

导数与恒成立

导数概念及其几何意义

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

利用导数证明不等式



—解析几何

—直线与方程

—直线的倾斜角与斜率

14 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(x-a)}{x}$.

(1) 若 $a = -1$, 证明: 函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数 .

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - y = 0$ 平行, 求 a 的值 .

(3) 若 $x > 0$, 证明: $\frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{x}{e^{x-1}}$ (其中 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数) .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) 0 .

(3) 证明见解析 .

解析

(1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2} ,$$

设 $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$,

$$\therefore g'(x) = 1 - [\ln(x+1) + 1] = -\ln(x+1) ,$$

$\therefore g'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 ,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数 ,

$$\therefore g(x) \leq g(0) = 0 ,$$

$\therefore f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 ,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数 .

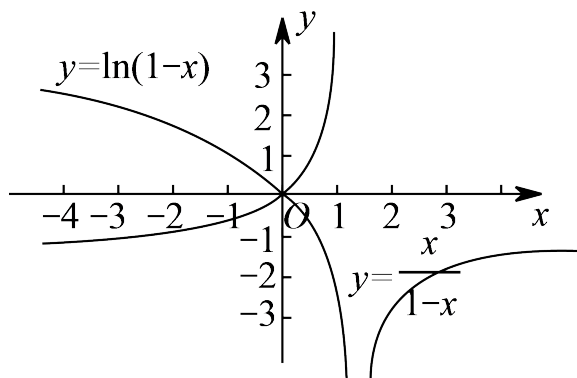
$$(2) \therefore f'(x) = \frac{x - (x-a)\ln(x-a)}{(x-a)x^2} ,$$

$$\therefore k = f'(1) = \frac{1 - (1-a)\ln(1-a)}{1-a} ,$$

$\therefore y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - y = 0$ 平行 ,

$$\therefore \frac{1 - (1-a)\ln(1-a)}{1-a} = 1 ,$$

即 $\ln(1-a) = \frac{a}{1-a}$, 分别画出 $y = \ln(1-x)$ 与 $y = \frac{x}{1-x}$ 的图象 ,



又图象可知交点为 $(0,0)$

$\therefore$ 解得 $a = 0$.

$$(3) \because \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\ln e^x}{e^x - 1} = \frac{\ln(e^x - 1 + 1)}{e^x - 1},$$

$$\therefore \frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\ln(e^x - 1 + 1)}{e^x - 1},$$

由(1)知, 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

故要证原不等式成立, 只需要证明: 当 $x > 0$ 时, $x < e^x - 1$,

令 $h(x) = e^x - 1 - x$,

则 $h'(x) = e^x - 1 > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore h(x) > h(0) = 0$, 即 $x < e^x - 1$,

$\therefore f(x) > f(e^x - 1)$,

即 $\frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{x}{e^x - 1}$.

考点

函数与导数

函数与方程

函数图象的交点

导数及其应用

导数概念及其几何意义

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

利用导数证明不等式

解析几何



— 直线与方程

— 直线的倾斜角与斜率

— 直线的方程

15 已知函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ ，任取 $t \in \mathbf{R}$ ，定义集合： $A_t = \{y | y = f(x), \text{点 } P(t, f(t)), Q(x, f(x)) \text{ 满足 } |PQ| \leq \sqrt{2}\}$ 。设 M_t, m_t 分别表示集合 A_t 中元素的最大值和最小值，记 $h(t) = M_t - m_t$ 。则

(1) 函数 $h(t)$ 的最大值是 _____；

(2) 函数 $h(t)$ 的单调递增区间为 _____。

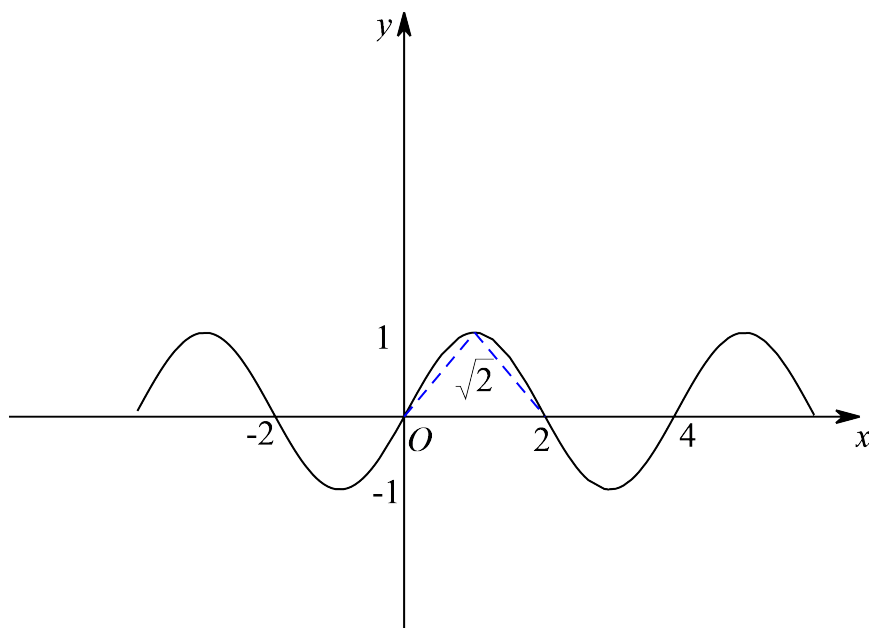
答案

1. 2

2. $(2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$

解析

由函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 图象可知， P 点在 $(0, 0)$ 时，



对应 $|PQ| \leq \sqrt{2}$ 的 Q 点坐标的最高点为 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ，最低点为 $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ ，

此两点也是函数的最高和最低点，

由此可知 $h(t)_{\max} = h(0) = M_0 - m_0 = 1 - (-1) = 2$ 。

同理可得 $t = 2k, k \in \mathbf{Z}$ 时， $h(t)$ 取得最大值 2。

依理，当 $t = 2k-1, k \in \mathbf{Z}$ 时， $h(t)$ 取得最小值 1，

即 $h(t)_{\min} = h(1) = M_1 - m_1 = 1 - 0 = 1$ 。



所以函数 $h(t)$ 的单调递增区间为 $(2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$,

故答案为 $2, (2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$.

考点

集合与常用逻辑用语

— 集合与集合的表示方法

— 集合的表示方法

函数与导数

— 函数

— 函数的概念与表示

— 最值

三角函数与解三角形

— 三角函数

— 三角函数图象与性质

16 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时,

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$, 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个零点, 则 a 的取值范围是().

A. $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

C. $(0, \frac{\sqrt{5}}{5})$

D. $(0, \frac{\sqrt{6}}{6})$

答案

A

解析

$\because f(x+2) = f(x) - f(1)$,

令 $x = -1$, 则 $f(1) = f(-1) - f(1)$,

$\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

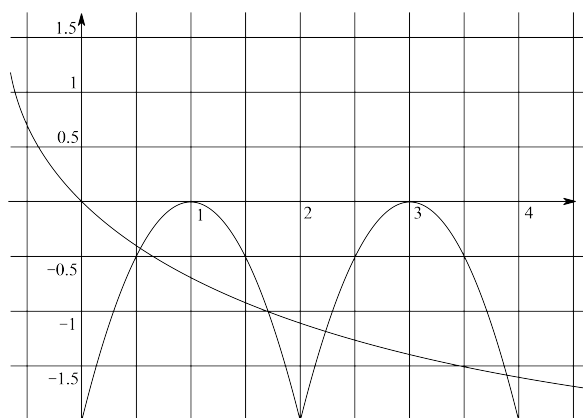
$\therefore f(1) = 0$.

$\therefore f(x) = f(x+2)$,

则函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的, 周期为2的偶函数,

又 $\because$ 当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$,

令 $g(x) = \log_a(x+1)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的部分图象如下图:



$y = f(x) - \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个零点可化为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上至少有三个交点，

$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

$$\text{则} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a 3 > -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

考点

一函数与导数

— 函数

└ 奇偶性

— 二次函数

└ 二次函数的概念、图象和性质

— 对数函数

└ 对数函数的概念、图象及其性质

— 函数与方程

└ 方程根的个数

└ 函数的零点

17 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$ ，关于 x 的不等式 $f^2(x) + af(x) > 0$ 只有两个整数解，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $\left(\frac{1}{3}, \ln 2\right]$

B. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right)$

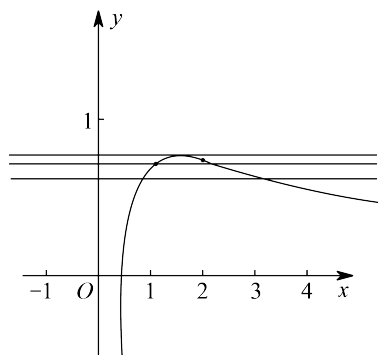
C. $\left(-\ln 2, -\frac{1}{3}\ln 6\right]$

D. $\left(\frac{1}{3}\ln 6, \ln 2\right)$

答案

C

解析



函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2},$$

当 $f'(x) > 0$ 得 $1 - \ln(2x) > 0$, 即 $\ln(2x) < 1$,

即 $0 < 2x < e$, 即 $0 < x < \frac{e}{2}$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $1 - \ln(2x) < 0$, 得 $\ln(2x) > 1$,

即 $2x > e$, 即 $x > \frac{e}{2}$,

即当 $x = \frac{e}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 同时也是最大值 $f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\ln e}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$,

即当 $0 < x < \frac{e}{2}$ 时, $f(x) < \frac{2}{e}$ 有一个整数解1,

当 $x > \frac{e}{2}$ 时, $0 < f(x) < \frac{2}{e}$ 有无数个整数解,

若 $a = 0$, 则 $f^2(x) + af(x) > 0$ 得 $f^2(x) > 0$, 此时有无数个整数解, 不满足条件.

若 $a > 0$,

则由 $f^2(x) + af(x) > 0$ 得 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < -a$,

当 $f(x) > 0$ 时, 不等式由无数个整数解, 不满足条件.

当 $a < 0$ 时, 由 $f^2(x) + af(x) > 0$ 得 $f(x) > -a$ 或 $f(x) < 0$,

当 $f(x) < 0$ 时, 没有整数解,

则要使当 $f(x) > -a$ 有两个整数解,

$$\because f(1) = \ln 2, f(2) = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2, f(3) = \frac{\ln 6}{3},$$

$\therefore$ 当 $f(x) \geq \ln 2$ 时, 函数有两个整数点1, 2, 当 $f(x) \geq \frac{\ln 6}{3}$ 时, 函数有3个整数点1, 2, 3

,

$\therefore$ 要使 $f(x) > -a$ 有两个整数解,

$$\text{则 } \frac{\ln 6}{3} \leq -a < \ln 2,$$

$$\text{即 } -\ln 2 < a \leq -\frac{1}{3}\ln 6.$$

故选C.



考点

一函数与导数

二次函数

二次型函数

导数及其应用

导数与零点

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

- 18 对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ ，若满足① $f(0) = 0$ ；②当 $x \in \mathbf{R}$ ，且 $x \neq 0$ 时，都有 $xf'(x) > 0$ ；③当 $x_1 < 0 < x_2$ ，且 $|x_1| = |x_2|$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 为“偏对称函数”。现给出四个函数： $f_1(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$ ； $f_2(x) = e^x - x - 1$ ； $f_3(x) = \begin{cases} \ln(-x+1), & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$ ， $f_4(x) = \begin{cases} x(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则其中是“偏对称函数”的函数个数为（ ）。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案

C

解析

有题意可得：“偏对称函数”满足（1）函数的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且过坐标原点；

（2）函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减；

（3）若 $x_1 < 0 < x_2$ ，且 $|x_1| = |x_2|$ ，则 $f(x_1) < f(x_2)$ ，

由函数的解析式可知，则函数 $\phi(x)$ ， $h(x)$ 是“偏对称函数”。

$$\phi(1) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \phi(2) = -64 + \frac{3}{2}64 < \phi(1),$$

不满足第二条，则函数 $\phi(x)$ 不是“偏对称函数”。

$$g(1) = \frac{3}{2}, g(-1) = \frac{9}{2} > \frac{3}{2}, \text{不满足第三条,}$$

则函数 $g(x)$ 不是“偏对称函数”。

综上可得，“偏对称函数”的个数为2个。

故选C。

考点

一函数与导数

一函数

分段函数

定义域



函数的概念与表示

单调性

19 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q} \end{cases}$, 则 :

(1) $f(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 给出下列三个命题 : ①函数 $f(x)$ 是偶函数 ; ②存在 $x_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2, 3, \dots)$, 使得以点 $(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形 ; ③存在 $x_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2, 3, 4)$, 使得以点 $(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, 3, 4)$ 为顶点的四边形为菱形 . 其中 , 所有真命题的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 (1) 1

(2) ①③

解析 (1) 由题可知 $f(x) \in \mathbf{Q}$, 所以 $f(f(x)) = 1$.

(2) ①若 x 为有理数 , 则 $-x$ 也为有理数 , $\therefore f(x) = f(-x) = 1$,

若 x 为无理数 , 则 $-x$ 也为无理数 , $\therefore f(x) = f(-x) = 0$,

综上有 $f(x) = f(-x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数 , 故①正确 .

②根据 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q} \end{cases}$ 可知 : 假设存在等腰直角三角形 ABC , 则斜边 AB 知能在 x 轴上或在直线 $y = 1$ 上 , 且斜边上的高始终是 1 , 不妨假设 AB 在 x 轴 , 则 $AB = 2$, 故点 A, B 的坐标不可能是无理数 , 故不存在 . 另外 , 当 AB 在 $y = 1$ 上 , C 在 x 轴时 , 由于 $AB = 2$, 则 C 的坐标应是有理数 , 故假设不成立 , 即不存在符合题意的等腰直角三角形 , 故②错误 .

③取两个自变量是有理数 , 使得另外两个无理数的差与两个有理数的差相等 , 即可画出平行四边形 , 且对角线互相垂直 , 所以可以做出点 $(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, 3, 4)$ 为顶点的四边形为菱形 , 故③正确 .

综上 , 所有真命题的序号是①③ .

考点 一函数与导数

一函数

└ 分段函数



函数的概念与表示

复合函数

20 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且满足 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1) \\ g(x), & x \in (1, 2] \end{cases}$ ， $f(x+2) = -f(x)$ 。

(1) 函数 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = |\log_3 |x||$ 的交点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

(1) $2x - 4$

(2) 10

解析

(1) 当 $x \in (2, 3)$ 时， $2 - x \in (0, 1)$ ，所以有 $f(2 - x) = 2(2 - x) = 4 - 2x$ ，

又因为 $f(x+2) = -f(x)$ ，所以 $f(x) = -f(x-2)$ ，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(2-x) = f(x-2)$ ，

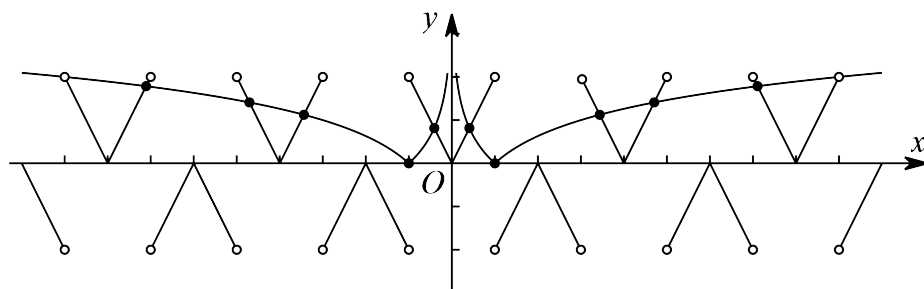
所以 $f(x) = -f(x-2) = -f(2-x) = 2x - 4$ ，

所以 $g(x) = 2x - 4$ 。

(2) 因为 $f(x+2) = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 周期为 4。

且 $f(1) = -f(-1) = -f(1)$ ，所以 $f(1) = 0$

又因为两函数均为偶函数，可作出两函数的图像，如下：



易知共有 10 个交点。

考点

一函数与导数

函数

分段函数

奇偶性

周期性



函数与方程

函数图象的交点

- 21 设 D 是函数 $y = f(x)$ 定义域内的一个区间, 若存在 $x_0 \in D$, 使 $f(x_0) = -x_0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“次不动点”, 也称 $f(x)$ 在区间 D 上存在次不动点. 若函数 $f(x) = ax^2 - 3x - a + \frac{5}{2}$ 在区间 $[1, 4]$ 上存在次不动点, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{2}]$

答案 D

解析 依题意, 存在 $x \in [1, 4]$,

$$\text{使 } F(x) = f(x) + x = ax^2 - 2x - a + \frac{5}{2} = 0,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 使 } F(1) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$\text{当 } x \neq 1 \text{ 时, 解得 } a = \frac{4x-5}{2(x^2-1)},$$

$$\therefore a' = \frac{-2x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)^2} = 0,$$

$$\text{得 } x = 2 \text{ 或 } x = \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} < 1, \text{舍去}\right),$$

x	$(1, 2)$	2	$(2, 4)$
a'	$+$	0	$-$
a	$\nearrow$	最大值	$\searrow$

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } a_{\text{最大}} = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以常数 } a \text{ 的取值范围是 } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

故选 D.

考点 一 函数与导数

导数及其应用

导数概念及其几何意义

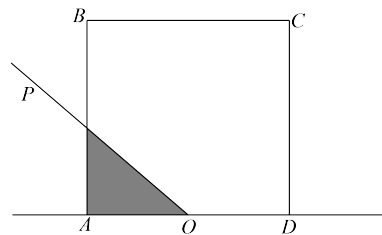
导数的运算

利用导数求函数的极值与最值



如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2， O 为 AD 中点，射线 OP 从 OA 出发，绕着点 O 顺时针方向旋转至 OD ，在旋转的过程中，记 $\angle AOP$ 为 $x(x \in [0, \pi])$ ， OP 所经过的在正方形 $ABCD$ 内的区域（阴影部分）的面积 $S = f(x)$ ，那么对于函数 $f(x)$ 有以下三个结论：

- ① $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；
 ② 任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，都有 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$ ；
 ③ 任意 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 。



其中所有正确结论的序号是 _____。

答案 ①②

解析 ①如图，当 $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$ 时， OP 与 AB 相交于点 M ，因为 $AO = 1$ ，则 $AM = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 正确；
 ②由于对称性 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 恰好是正方形的面积，所以
 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$ 正确；
 ③显然 $f(x)$ 是增函数，所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，错误。

故答案为①②。

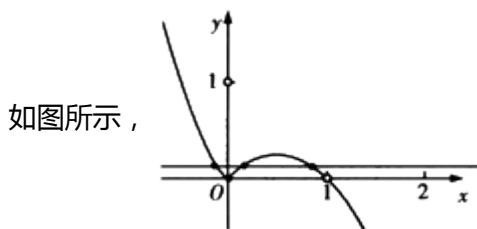
考点 一函数与导数

函数
 函数的概念与表示
 最值
 对称性

- 23 对于实数 a 和 b ，定义运算“ $*$ ”： $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$ ，设 $f(x) = (2x - 1) * (x - 1)$ ，且关于 x 的方程 $f(x) = m(m \in \mathbf{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 ，则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是 _____。

答案 $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{16}, 0\right)$

解析 $f(x) = (2x - 1) * (x - 1) = \begin{cases} (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x - 1), & x \leq 0 \\ (x - 1)^2 - (2x - 1)(x - 1), & x > 0 \end{cases}$ ，
 即 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ 。



关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有三个互不相等的实根 x_1, x_2, x_3 ，

即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 有三个不同的交点，

则 $0 < m < \frac{1}{4}$ 。不妨设从左到右的交点的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 。

当 $x > 0$ 时， $-x^2 + x = m$ ，即 $x^2 - x + m = 0$ ，

$$\therefore x_2 + x_3 = 1,$$

$$\therefore 0 < x_2 x_3 < \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2, \text{ 即 } 0 < x_2 x_3 < \frac{1}{4};$$

当 $x < 0$ 时，由 $\begin{cases} 2x^2 - x = \frac{1}{4} \\ x < 0 \end{cases}$ ，得 $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$ ， $\therefore \frac{1 - \sqrt{3}}{4} < x_1 < 0$ 。

$$\therefore 0 < -x_1 < \frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

$$\therefore 0 < -x_1 x_2 x_3 < \frac{\sqrt{3} - 1}{16},$$

$$\therefore \frac{1 - \sqrt{3}}{16} < x_1 x_2 x_3 < 0.$$

考点

一 函数与导数

— 函数

— 图象

— 函数与方程

— 函数图象的交点

24 已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - mx$ ($m \in \mathbf{R}$)。

(1) 当 $m = -1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程。

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减，求 m 的取值范围。

(3) 设 $0 < a < b$ ，求证： $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 。

答案

(1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y = 0$ 。

(2) m 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 。

(3) 证明见解析。

解析

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 。



当 $m = -1$ 时, $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} + x$,

所以 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + 1$.

因为 $f(1) = 2$ 且 $f'(1) = 2$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y = 0$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减,

则 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - m \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \leq m$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} (x > 0)$,

则 $m \geq [g(x)]_{\max}$.

因为 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1 (x > 0)$,

所以当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有最大值 1.

所以 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(3) 因为 $0 < a < b$, 不等式 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 等价于 $\ln b - \ln a < \frac{b - a}{\sqrt{ab}}$.

即 $\ln \frac{b}{a} < \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$, 令 $\sqrt{\frac{b}{a}} = t (t > 1)$, 原不等式转化为 $2\ln t < t - \frac{1}{t}$.

令 $h(t) = 2\ln t + \frac{1}{t} - t$,

由 (2) 知 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(t) = 2\ln t + \frac{1}{t} - t$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以, 当 $t > 1$ 时, $h(t) < h(1) = 0$.

即当 $t > 1$ 时, $2\ln t + \frac{1}{t} - t < 0$ 成立.

所以, 当时 $0 < a < b$, 不等式 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立.

考点

一 函数与导数

— 导数及其应用

— 导数与恒成立

— 导数概念及其几何意义

— 利用导数研究函数的单调性

— 利用导数证明不等式



已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x+2}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值.

(2) 若对 $\forall x > 0$, $f(x) + g(x) > 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(3) 求证: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < \ln(n+1)$, ($n \in \mathbf{N}^*$).

答案

(1) 单调增区间是 $(-1, 0)$, 单调减区间是 $(0, +\infty)$, $f(x)_{\max} = 0$, 无最小值.

(2) $[2, +\infty)$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $-1 < x < 0$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 0$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(-1, 0)$, 单调减区间是 $(0, +\infty)$,

$f(x)_{\max} = f(0) = 0$, 无最小值.

(2) 若对 $\forall x > 0$, $f(x) + g(x) > 1$ 恒成立,

则对 $\forall x > 0$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2 + 2x + a}{x+2} > 1$ 恒成立,

即对 $\forall x > 0$, $a > (x+2)[1 - \ln(1+x)]$ 恒成立,

令 $h(x) = (x+2)[1 - \ln(1+x)]$, 则

$h'(x) = 1 - \ln(1+x) - \frac{x+2}{x+1} = -\ln(1+x) - \frac{1}{x+1}$,

当 $x > 0$ 时, 显然 $h'(x) = -\ln(1+x) - \frac{1}{x+1} < 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $h(x) < h(0) = 2$,

$\therefore a \geq 2$, 即 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

(3) 证明: 由 (2) 知, 当 $a = 2$, $x > 0$ 时, $\ln(1+x) + \frac{2}{x+2} > 1$, 即

$\ln(1+x) > \frac{x}{x+2}$,

在上式中, 令 $x = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 得 $\ln \frac{k+1}{k} > \frac{\frac{1}{k}}{2 + \frac{1}{k}}$, 即 $\ln \frac{k+1}{k} > \frac{1}{2k+1}$,

依次令 $k = 1, 2, 3, \dots, n$,

得 $\ln \frac{2}{1} > \frac{1}{3}$, $\ln \frac{3}{2} > \frac{1}{5}$, $\ln \frac{4}{3} > \frac{1}{7}$, $\dots$, $\ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2n+1}$,

将这 n 个式子左右两边分别相加得 $\ln(n+1) > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$,

即 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < \ln(n+1)$, ($n \in \mathbf{N}^*$).



考点

函数与导数

导数及其应用

导数与恒成立

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

利用导数证明不等式

不等式与线性规划

解不等式

分式不等式

26

函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$, 函数 $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2}$,(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .(2) 证明 : 当 $x > 0$ 时 , 有 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$.(3) 证明 : 当 $a \in (0, 1)$ 时 , 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上存在极小值 .

答案

(1) 单调递增区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(-2, +\infty)$, 无单调递减区间 .

(2) 证明见解析 .

(3) 证明见解析 .

解析

(1) $\because f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x (x \neq -2)$,

$$\therefore f'(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x + \frac{(x+2) - (x-2)}{(x+2)^2} \cdot e^x = \frac{x^2 - 4 + 4}{(x+2)^2} \cdot e^x = \frac{x^2}{(x+2)^2} \cdot e^x > 0 ,$$

 $\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -2)$ 和 $(-2, +\infty)$, 无单调递减区间 .(2) 由题意可知 , 要证 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$, 只需证 $\frac{x-2}{x+2} \cdot e^x > -1$,由 (1) 可知 $f(x) = \frac{x-2}{x+2} \cdot e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 , $\therefore f(x)_{\min} > f(0) = -1$, 即有 $\frac{x-2}{x+2} \cdot e^x > -1$. $\therefore$ 当 $x > 0$ 时 , $(x-2)e^x + x + 2 > 0$, 命题得证 .(3) 证明 : $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2}$, $x \in (0, 2)$.

$$g'(x) = \frac{(e^x - a)x^2 - 2x(e^x - ax - a)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2e^x - ax^2 - 2xe^x + 2ax^2 + 2ax}{x^4}$$



$$= \frac{(x^2 - 2x)e^x + ax^2 + 2ax}{x^4} = \frac{(x-2)e^x + a(x+2)}{x^3}.$$

$$\text{令 } h(x) = (x-2)e^x + a(x+2), \quad x \in (0, 2),$$

$$\text{令 } h(x) = 0 \text{ 得: } \frac{x-2}{x+2} \cdot e^x = -a.$$

由(1)(2)可知: $f(x) = \frac{x-2}{x+2} \cdot e^x$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增,

$$\therefore f(0) < f(x) < f(2), \text{ 即 } -1 < f(x) < 0,$$

$$\therefore 0 < a < 1, \exists x_0 \in (0, 2), \text{ 有 } h(x_0) = 0,$$

而 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $x \in (x_0, 2)$ 时, $h(x) > 0$,

$\therefore x = x_0$ 是 $g(x)$ 的极小值,

$\therefore$ 当 $a \in (0, 1)$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上存在极小值.

考点

一 函数与导数

— 函数与方程

└ 零点存在性定理

— 导数及其应用

└ 导数与零点

└ 导数与恒成立

└ 利用导数研究函数的单调性

└ 利用导数求函数的极值与最值

└ 利用导数证明不等式

27 已知函数 $f(x) = (x-a)\sin x + \cos x$,

(1) 当 $a = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程.

(2) 当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的值域.

(3) 当 $a > \frac{\pi}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的单调区间.

答案

(1) $y = \frac{\pi}{2}.$

(2) $[-1, 1].$

(3) 当 $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{\pi}{2}, a)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和 (a, π) ,

当 $a \geq \pi$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{\pi}{2})$.

解析

(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x \sin x + \cos x$,



则 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y = \frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{\pi}{2},$$

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x - \frac{\pi}{2} < 0, \cos x > 0, f'(x) < 0$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $x - \frac{\pi}{2} > 0, \cos x < 0, f'(x) < 0$,

$\therefore$ 在 $x \in [0, \pi]$ 时, $f'(x) < 0, \therefore f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减,

又 $\because f(0) = 1, f(\pi) = -1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$.

(3) 由题意可知, $f'(x) = (x - a) \cos x$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = a$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$.

① 当 $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ 时,

若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x - a < 0, \cos x > 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

若 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, a\right)$ 时, $x - a < 0, \cos x < 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

若 $x \in (a, \pi)$ 时, $x - a > 0, \cos x > 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

② 当 $a \geq \pi$ 时,

若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x - a < 0, \cos x > 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

若 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, a\right)$ 时, $x - a < 0, \cos x < 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

综上所述,

当 $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 (a, π) ,

当 $a \geq \pi$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

考点

函数与导数

— 函数与方程

— 零点存在性定理

— 导数及其应用

— 利用导数研究函数的单调性

— 利用导数求函数的极值与最值

— 三角函数与解三角形

— 三角函数



| 正弦函数的图象与性质

28 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (a+1)x + (1-a)\ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=3$ 时, 求曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 若曲线 $C: y=f(x)$ 上的点 (x, y) 都在不等式组 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \\ y \leq x + \frac{3}{2} \end{cases}$ 所表示的平面区域内,

试求 a 的取值范围.

答案 (1) $2x - 2y + 5 = 0$.

(2) $1 \leq a \leq 2$.

解析 (1) 当 $a=3$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2\ln x$, $x > 0$.

$$f'(x) = -x + 4 - \frac{2}{x}.$$

$$\text{则 } f'(1) = -1 + 4 - 2 = 1, \text{ 而 } f(1) = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}.$$

所以曲线 C 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - \frac{7}{2} = x - 1$, 即 $2x - 2y + 5 = 0$.

(2) 依题意当 $x \in [1, 2]$ 时, 曲线 C 上的点 (x, y)

都在不等式组 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \\ y \leq x + \frac{3}{2} \end{cases}$ 所表示的平面区域内,

等价于当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $x \leq f(x) \leq x + \frac{3}{2}$ 恒成立.

$$\text{设 } g(x) = f(x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + ax + (1-a)\ln x, x \in [1, 2].$$

$$\text{所以 } g'(x) = -x + a + \frac{1-a}{x} = \frac{-x^2 + ax + (1-a)}{x} = \frac{-(x-1)(x-(a-1))}{x}.$$

(1) 当 $a-1 \leq 1$, 即 $a \leq 2$ 时, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 为单调减函数,

所以 $g(2) \leq g(x) \leq g(1)$.

$$\text{依题意应有 } \begin{cases} g(1) = a - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \\ g(2) = -2 + 2a + (1-a)\ln 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 1 \end{cases}, \text{ 所以 } 1 \leq a \leq 2.$$

(2) 若 $1 < a-1 < 2$, 即 $2 < a < 3$ 时,

当 $x \in [1, a-1)$, $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 为单调增函数,

当 $x \in (a-1, 2]$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为单调减函数.

由于 $g(1) > \frac{3}{2}$, 所以不合题意.

(3) 当 $a-1 \geq 2$, 即 $a \geq 3$ 时, 注意到 $g(1) = a - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}$, 显然不合题意.



综上所述, $1 \leq a \leq 2$.

考点

函数与导数

导数及其应用

导数与分类讨论

导数与恒成立

导数概念及其几何意义

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

不等式与线性规划

简单的线性规划

简单的线性规划问题

29 已知函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$, $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切, 求 a, b 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 求 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最大值;

(3) 若不等式 $f(x) \geq x$ 对所有的 $b \in (-\infty, 0]$, $x \in (e, e^2]$ 都成立, 求 a 的取值范围.

答案

$$(1) \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(2) -\frac{1}{2}.$$

$$(3) \left[\frac{e^2}{2}, +\infty \right).$$

解析

$$(1) f'(x) = \frac{a}{x} - 2bx.$$

由函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切, 得 $\begin{cases} f'(1) = 0, \\ f(1) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} a - 2b = 0, \\ -b = -\frac{1}{2}. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{此时 } f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}.$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$.

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, e)$ 上单调递减,



所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的最大值为 $f(1) = -\frac{1}{2}$.

(3) 若不等式 $f(x) \geq x$ 对所有的 $b \in (-\infty, 0]$, $x \in (e, e^2]$ 都成立,

即 $a \ln x - bx^2 \geq x$ 对所有的 $b \in (-\infty, 0]$, $x \in (e, e^2]$ 都成立,

即 $a \ln x - x \geq bx^2$ 对所有的 $b \in (-\infty, 0]$, $x \in (e, e^2]$ 都成立,

即 $a \ln x - x \geq 0$ 对 $x \in (e, e^2]$ 恒成立

即 $a \geq \frac{x}{\ln x}$ 对 $x \in (e, e^2]$ 恒成立,

即 a 大于或等于 $\frac{x}{\ln x}$ 在区间 $(e, e^2]$ 的最大值.

令 $h(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $h'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 当 $x \in (e, e^2]$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x \in (e, e^2]$ 的最大值为 $h(e^2) = \frac{e^2}{2}$, 即 $a \geq \frac{e^2}{2}$.

所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{e^2}{2}, +\infty\right)$.

考点 一 函数与导数

导数及其应用

导数概念及其几何意义

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

30 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数, 求 a 的取值范围;

(2) 设 $m, n \in \mathbf{R}^+$, 且 $m \neq n$, 求证: $\frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$.

答案 (1) a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

(2) 证明过程见解析

解析

$$(1) f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a(x+1) - a(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 2ax}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + (2-2a)x + 1}{x(x+1)^2}.$$

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数, 所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $x^2 + (2-2a)x + 1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由 $x^2 + (2-2a)x + 1 \geq 0$,

得 $2a - 2 \leq x + \frac{1}{x}$. 设 $g(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

$$g(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$



所以当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有最小值 2 .

由 $2a - 2 \leq 2$ 解得 $a \leq 2$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

(2) 不妨设 $m > n > 0$, 则 $\frac{m}{n} > 1$.

要证 $\frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$, 只需证 $\frac{\frac{m}{n} - 1}{\ln \frac{m}{n}} < \frac{\frac{m}{n} + 1}{2}$,

即证 $\ln \frac{m}{n} > \frac{2(\frac{m}{n} - 1)}{\frac{m}{n} + 1}$. 只需证 $\ln \frac{m}{n} - \frac{2(\frac{m}{n} - 1)}{\frac{m}{n} + 1} > 0$.

设 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, 由 (I) 知 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调增函数, 又 $\frac{m}{n} > 1$

,
所以 $h(\frac{m}{n}) > h(1) = 0$, 即 $\ln \frac{m}{n} - \frac{2(\frac{m}{n} - 1)}{\frac{m}{n} + 1} > 0$ 成立 .

所以 $\frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$.

考点

一 函数与导数

— 导数及其应用

- 利用导数研究函数的单调性
- 利用导数求函数的极值与最值
- 利用导数证明不等式