函数与导数-高考必做题

1 已知函数$f(x)=a\ln x-bx^2$图象上一点$P(2,f(2))$处的切线方程为$y=-3x+2\ln 2+2$.

（1）求a，b的值.

（2）若方程$f(x)+m=0$在$\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$内有两个不等实根，求实数$m$的取值范围（其中e为自然对数的底，$\mathrm{e}\approx 2.7$）.

（3）令$g(x)=f(x)-nx$，如果$g(x)$图象与x轴交于$A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<x_2$，AB中点为$C(x_0,0)$，求证：$g'(x_0)\neq 0$.

2 已知函数$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2ax^2-3x\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(3,f(3))$处的切线方程 .

（2）当$a>0$时，试讨论函数$y=f(x)$在区间$(-1,1)$内的极值点的个数 .

（3）对一切$x\in(0,+\infty)$，$af'(x)+4a^2x\geqslant \ln x-3a-1$恒成立，求实数$a$的取值范围 .

3 已知$\frac{1}{3}\leqslant k<1$，设$x_1,x_2\ (x_1<x_2)$是关于x的方程$|2^x-1|=k$的两个实数根，$x_3,x_4\ (x_3<x_4)$是方程$|2^x-1|=\frac{k}{2k+1}$的两个实数根，则$(x_4-x_3)+(x_2-x_1)$的最小值是 ______ .

4 设函数$f(x)=x^2-(a-2)x-a\ln x$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间 .

（2）若函数有两个零点，求满足条件的最小正整数a的值 .

（3）若方程$f(x)=c$有两个不相等的实数根x_1，x_2，求证：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$.

5 已知函数$f(x)=x^2+ax+1$，$g(x)=\mathrm{e}^x$（其中e为自然对数的底数）.

（1）若$a=1$，求函数$y=f(x)\cdot g(x)$在区间$[-2,0]$上的最大值 .

（2）若$a=-1$，关于x的方程$f(x)=k\cdot g(x)$有且仅有一个根，求实数k的取值范围 .

（3）若对任意的x_1，$x_2\in[0,2]$，$x_1\neq x_2$，不等式$|f(x_1)-f(x_2)|<|g(x_1)-g(x_2)|$均成立，求实数$a$的取值范围 .

6 已知函数$f(x)=(x-a)^2\ln x$，$a\in R$．

（1）若$a=3\sqrt{e}$，其中e为自然对数的底数，求函数$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$的单调区间．

（2）若函数$f(x)$既有极大值，又有极小值，求实数a的取值范围．

7 设函数$f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+\dfrac{1}{2}bx^2+cx(a，b，x\in\mathbf{R}，a\neq0)$的图象在点$(x,f(x))$处的切线的斜率为$k(x)$，且函数$g(x)=k(x)-\dfrac{1}{2}x$为偶函数．若函数$k(x)$满足下列条件：①$k(-1)=0$；②对一切实数$x$，不等式$k(x)\leqslant\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$恒成立．

（1）求函数$k(x)$的表达式．

（2）求证：$\dfrac{1}{k(1)}+\dfrac{1}{k(2)}+\cdots\dfrac{1}{k(n)}>\dfrac{2n}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$．

8 已知函数$f(x)=e^x-x^2+ax$，曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与x轴平行．

（1）求a的值．

（2）若$g(x)=e^x-2x-1$，求函数$g(x)$的最小值．

（3）求证：存在$c<0$，当$x>c$时，$f(x)>0$．

9 已知函数$f(x)=ax^2-(2a+1)x+\ln x,a\in\mathrm{R}$．

（1）当$a=1$时,求$f(x)$的单调区间和极值．

（2）若关于x的方程$f(x)=2ax^2-2(a+1)x$恰有两个不等的实根,求实数a的取值范围．

（3）设$g(x)=e^x-x-1$,若对任意的$x_1\in(0,+\infty),x_2\in\mathbf{R}$,不等式$f(x_1)\leqslant g(x_2)$恒成立,求实数$a$的取值范围．

10 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3, x\leqslant1\\ \ln x, x>1\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=kx-\dfrac{1}{2}$恰有四个不相等的实数根，则实数$k$的取值范围是（　）．

A. $\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{e}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{2},\sqrt{e}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right]$

11 已知函数$f(x)=ax^2+2x-\ln x(a\in\mathbf{R})$．

（1）若$a=4$，求函数$f(x)$的极值；

（2）若$f'(x)$在$(0,1)$有唯一的零点x_0，求a的取值范围；

（3）若$a\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，设$g(x)=a(1-x)^2-2x-1-\ln(1-x)$，求证：$g(x)$在$(0,1)$内有唯一的零点$x_1$，且对（2）中的$x_0$，满足$x_0+x_1>1$．

12 已知函数$f(x)=\frac{e^x}{ex}$（e为自然对数的底数）．

（1）求函数$f(x)$的单调区间．

（2）是否存在正实数x使得$f(1+x)=f(1-x)$？若存在，求出x的值；若不存在，请说明理由．

（3）若存在不等实数x_1，x_2，使得$f(x_1)=f(x_2)$，证明$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$．

13 设函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=(2-a)(x-1)-2f(x)$．

（1）当$a=1$时，求函数$g(x)$的单调区间．

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是函数$y=f(x)$图象上任意不同两点，线段AB中点为$C(x_0,y_0)$，直线AB的斜率为k．证明：$k>f(x_0)$．

（3）设$F(x)=|f(x)|+\frac{b}{x+1}(b>0)$，对任意$x_1$，$x_2\in(0,2]$，$x_1\neq x_2$，都有$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}<-1$，求实数$b$的取值范围．

14 已知函数$f(x)=\frac{\ln(x-a)}{x}$．

（1）若$a=-1$，证明：函数$f(x)$是$(0,+\infty)$上的减函数．

（2）若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$x-y=0$平行，求a的值．

（3）若$x>0$，证明：$\frac{\ln(x+1)}{x}>\frac{x}{e^{x-1}}$（其中$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数）．

15 已知函数$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，任取$t\in\mathbf{R}$，定义集合：$A_t=\{y|y=f(x)$，点$P(t,f(t))$，$Q(x,f(x))$满足$|PQ|\leqslant\sqrt{2}\}$．设M_t,m_t分别表示集合A_t中元素的最大值和最小值，记$h(t)=M_t-m_t$．则

（1）函数$h(t)$的最大值是 ______ ；

（2）函数$h(t)$的单调递增区间为 ______ ．

16

定义域为$\mathbf{R}$的偶函数$f(x)$满足对任意$x\in\mathbf{R}$，有$f(x+2)=f(x)-f(1)$，且当$x\in[2,3]$时，$f(x)=-2x^2+12x-18$，若函数$y=f(x)-\log_a(x+1)$在$(0,+\infty)$上至少有三个零点，则a的取值范围是（ ）.

A. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

17 已知函数$f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$，关于x的不等式$f^2(x)+af(x)>0$只有两个整数解，则实数a的取值范围是（ ）.

A. $\left(\frac{1}{3},\ln 2\right]$　　B. $\left(-\ln 2,-\frac{1}{3}\ln 6\right)$　　C. $\left(-\ln 2,-\frac{1}{3}\ln 6\right]$　　D. $\left(\frac{1}{3}\ln 6,\ln 2\right)$

18 对于定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$，若满足①$f(0)=0$；②当$x\in\mathbf{R}$，且$x\neq 0$时，都有$xf'(x)>0$；③当$x_1<0<x_2$，且$|x_1|=|x_2|$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$为“偏对称函数”．现给出四个函数：$f_1(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2$；$f_2(x)=\mathrm{e}^x-x-1$；$f_3(x)=\begin{cases}\ln(-x+1),x\leqslant 0\\ 2x,x>0\end{cases}$，$f_4(x)=\begin{cases}x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right),x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$，则其中是“偏对称函数”的函数个数为（ ）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

19 已知函数$f(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q}\\ 0,x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\end{cases}$，则：

（1）$f(f(x))=$______ .

（2）给出下列三个命题：①函数$f(x)$是偶函数；②存在$x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,3,)$，使得以点$(x_i,f(x_i))\ (i=1,2,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形；③存在$x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,3,4)$，使得以点$(x_i,f(x_i))\ (i=1,2,3,4)$为顶点的四边形为菱形．其中，所有真名题的序号是 ______ .

20 函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且满足$f(x)=\begin{cases}2x,x\in[0,1)\\ g(x),x\in(1,2]\end{cases}$，$f(x+2)=-f(x)$.

（1）函数$g(x)=$______ .

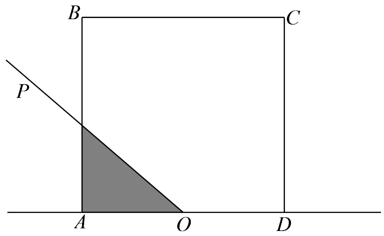
（2）曲线$y=f(x)$与$y=|\log_3|x||$的交点个数为 ______ .

21

设D是函数$y=f(x)$定义域内的一个区间，若存在$x_0\in D$，使$f(x_0)=-x_0$，则称x_0是$f(x)$的一个“次不动点”，也称$f(x)$在区间D上存在次不动点．若函数$f(x)=ax^2-3x-a+\frac{5}{2}$在区间$[1,4]$上存在次不动点，则实数$a$的取值范围是（　）．

A. $(-\infty,0)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

22 如图，正方形$ABCD$的边长为2，O为AD中点，射线OP从OA出发，绕着点O顺时针方向旋转至OD，在旋转的过程中，记$\angle AOP$为$x(x\in[0,\pi])$，OP所经过的在正方形$ABCD$内的区域（阴影部分）的面积$S=f(x)$，那么对于函数$f(x)$有以下三个结论：



①$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

②任意$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都有$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=4$；

③任意$x_1\ x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$且$x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$．

其中所有正确结论的序号是______．

23 对于实数a和b，定义运算“$*$”：$a*b=\begin{cases}a^2-ab, a\leqslant b,\\ b^2-ab, a>b.\end{cases}$设$f(x)=(2x-1)*(x-1)$，且关于$x$的方程$f(x)=m(m\in\mathbf{R})$恰有三个互不相等的实数根$x_1,x_2,x_3$，则$x_1x_2x_3$的取值范围是______．

24 已知函数$f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-mx$（$m\in\mathbf{R}$）．

（1）当$m=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递减，求m的取值范围．

（3）设$0<a<b$，求证：$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$．

25 已知函数$f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+2}(a\in\mathbf{R})$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间及最值．

（2）若对$\forall x>0$，$f(x)+g(x)>1$恒成立，求a的取值范围．

（3）求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<\ln(n+1)$，$(n\in\mathbf{N}*)$．

26 函数$f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$，函数$g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}$，

（1）求$f(x)$的单调区间．

（2）证明：当$x>0$时，有$(x-2)e^{x}+x+2>0$．

（3）证明：当$a\in(0,1)$时，函数$g(x)$在区间$(0,2)$上存在极小值．

27 已知函数$f(x)=(x-a)\sin x+\cos x$，

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$处的切线方程．

（2）当$a=\frac{\pi}{2}$时，求函数$f(x)$在$[0,\pi]$的值域．

（3）当$a>\frac{\pi}{2}$，求函数$f(x)$在$[0,\pi]$的单调区间．

28 已知函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^{2}+(a+1)x+(1-a)\ln x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）当$a=3$时，求曲线$C:y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）当$x\in[1,2]$时，若曲线$C:y=f(x)$上的点(x,y)都在不等式组$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\\ y\leqslant x+\frac{3}{2}\end{cases}$所表示的平面区域内，试求$a$的取值范围．

29 已知函数$f(x)=a\ln x-bx^{2}$，a，$b\in\mathbf{R}$．

（1）若$f(x)$在$x=1$处与直线$y=-\frac{1}{2}$相切，求a，b的值；

（2）在（1）的条件下，求$f(x)$在$\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$上的最大值；

（3）若不等式$f(x)\geqslant x$对所有的$b\in(-\infty,0]$，$x\in\left(\mathrm{e},\mathrm{e}^{2}\right]$都成立，求$a$的取值范围．

30 已知函数$f(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$．

（1）若函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调增函数，求a的取值范围；

（2）设m，$n\in\mathbf{R}^{+}$，且$m\neq n$，求证：$\frac{m-n}{\ln m-\ln n}<\frac{m+n}{2}$．