三角函数与解三角形-高考必做题

1 在斜三角形ABC中，$\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$．

（1）求C的值；

（2）若$A=15^\circ$，$AB=\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的周长．

答案 （1）$C=135^\circ$

（2）$\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

解析 （1）因为$\tan A+\tan B+\tan A\tan B=1$，

即$\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$，

因为在斜三角形ABC中，$1-\tan A\tan B\neq 0$，

所以$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$．

即$\tan(180^\circ-C)=1$，亦即$\tan C=-1$，

因为$0^\circ<C<180^\circ$，所以$C=135^\circ$．

（2）在$\triangle ABC$中，$A=15^\circ$，$C=135^\circ$，则$B=180^\circ-A-C=30^\circ$．

由正弦定理$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，得$\dfrac{BC}{\sin 15^\circ}=\dfrac{CA}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=2$．

故$BC=2\sin 15^\circ=2\sin(45^\circ-30^\circ)=2\left(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

，

$CA=2\sin 30^\circ=1$．

所以$\triangle ABC$的周长为$AB+BC+CA=\sqrt{2}+1+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$．

考点 —三角函数与解三角形

- 三角恒等变换
  - 和差角公式
- 解三角形
  - 正余弦定理

2 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a+b+c=8$．

(1) 若$a=2$，$b=\frac{5}{2}$，求$\cos C$的值；

(2) 若$\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C$，且$\triangle ABC$的面积$S=\frac{9}{2}\sin C$，求$a$和$b$的值．

答案 (1) $-\frac{1}{5}$．

(2) $a=3$，$b=3$．

解析 (1) 由题意可知：$c=8-(a+b)=\frac{7}{2}$．

由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2\times2\times\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$

(2) 由$\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C$可得：

$\sin A\cdot\frac{1+\cos B}{2}+\sin B\cdot\frac{1+\cos A}{2}=2\sin C$，

化简得$\sin A+\sin A\cos B+\sin B+\sin B\cos A=4\sin C$．

因为$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)=\sin C$，所以$\sin A+\sin B=3\sin C$．

由正弦定理可知：$a+b=3c$．又因$a+b+c=8$，故$a+b=6$．

由于$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{9}{2}\sin C$，所以$ab=9$，从而$a^2-6a+9=0$，解得$a=3$，$b=3$

．

考点 三角函数与解三角形

- 三角恒等变换
  - 简单的三角恒等变换
- 解三角形
  - 正余弦定理

3 $\triangle ABC$中，D是BC上的点，AD平分$\angle BAC$，$\triangle ABD$的面积是$\triangle ADC$面积的2倍．

(1) 求$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$．

(2) 若$AD=1$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求BD和AC的长．

答案 (1) $\frac{1}{2}$．

(2) $b=1$，故$AC=1$．

解析 (1) 由正弦定理得

$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，$\frac{AD}{\sin C}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$

因为$\triangle ABD$是$\triangle ADC$面积的2倍，

所以$BD=2DC$，

由于AD平分$\angle BAC$，

所以$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{1}{2}$．

（2）设$\angle ADB=\theta$，则$\angle ADC=\pi-\theta$，

由（Ⅰ）知$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$，

所以$c=2b$

由$CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$所以$BD=\sqrt{2}$

在$\triangle ACD$中，$b^2=1+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2-2\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi-\theta)$,

即$b^2=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\cos\theta$,

在$\triangle ABD$中，$c^2=1+2-2\times\sqrt{2}\cos\theta$,

即$c^2=3-2\sqrt{2}\cos\theta$,

解得$b=1$，故$AC=1$．

考点

一三角函数与解三角形

　├解三角形

　│　└正余弦定理

4 $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别别为a，b，c，已知$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$．

（1）求C．

（2）若$c=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$的周长．

答案 （1）$\dfrac{\pi}{3}$．

（2）$5+\sqrt{7}$．

解析 （1）$2\cos C\,(a\cos B+b\cos A)=c$

由正弦定理得：$2\cos C\,(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)=\sin C$

$2\cos C\cdot\sin(A+B)=\sin C$

$\because A+B+C=\pi$，$A,\ B,\ C\in(0,\pi)$

$\therefore\sin(A+B)=\sin C>0$

$\therefore 2\cos C = 1$，$\cos C = \dfrac{1}{2}$

$\because C \in (0, \pi)$

$\therefore C = \dfrac{\pi}{3}$．

（2）余弦定理得：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

$7 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \dfrac{1}{2}$

$(a+b)^2 - 3ab = 7$

$S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{4} ab = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ab = 6$

$\therefore (a+b)^2 - 18 = 7$，

$a + b = 5$，

$\therefore \triangle ABC$周长为$a + b + c = 5 + \sqrt{7}$.

考点

—三角函数与解三角形
- 解三角形
  - 面积公式
  - 解三角形的应用
  - 正余弦定理

5 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$\sin B\,(\tan A + \tan C) = \tan A \tan C$．

（1）求证：a，b，c成等比数列．

（2）若$a = 1$，$c = 2$，求$\triangle ABC$的面积S．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$．

解析 （1）在$\triangle ABC$中，由于$\sin B\,(\tan A + \tan C) = \tan A \tan C$，

所以$\sin B \left(\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin C}{\cos C} \right) = \dfrac{\sin A}{\cos A} \cdot \dfrac{\sin C}{\cos C}$，因此

$\sin B\,(\sin A \cos C + \cos A \sin C) = \sin A \sin C$，

所以$\sin B \sin(A + C) = \sin A \sin C$．又$A + B + C = \pi$，所以$\sin(A + C) = \sin B$，

因此$\sin^2 B = \sin A \sin C$．由正弦定理得$b^2 = ac$，即a，b，c成等比数列．

（2）因为$a=1$，$c=2$，所以$b=\sqrt{2}$，

由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1^2+2^2-2}{2\times1\times2}=\dfrac{3}{4}$，

因为$0<B<\pi$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

故$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$．

考点

- 三角函数与解三角形
  - 三角恒等变换
    - 简单的三角恒等变换
  - 解三角形
    - 正余弦定理
- 数列
  - 等比数列
    - 等比数列的概念和通项

6 在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$．

（1）求$\cos A$的值．

（2）求c的值．

答案 （1）$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）$c=5$

解析 （1）由条件在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$，

利用正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sin A\cos A}$．

解得$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

（2）由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$9=(2\sqrt{6})^2+c^2-2\times2\sqrt{6}\times c\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

即$c^2-8c+15=0$解方程求得$c=5$，或$c=3$．

当$c=3$时，此时$B=90^\circ$，$A=C=45^\circ$，$\triangle ABC$是等腰直角三角形，但此时不满足$a^2+b^2=c^2$，故舍去．

综上，$c=5$．

考点

- 三角函数与解三角形

—解三角形

　└正余弦定理

7 $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$．

（1）求$\cos B$．

（2）若$a+c=6$，$\triangle ABC$的面积为2，求b．

答案 （1）$\frac{15}{17}$

（2）2

解析 （1）由题意有，$\sin B=\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}=8\times\frac{1-\cos B}{2}=4(1-\cos B)$，

$\because\ \sin^2 B+\cos^2 B=1$，

$\therefore\ 16(1-\cos B)^2+\cos^2 B=1$，

即$(17\cos B-15)(\cos B-1)=0$，

$\therefore\ \cos B=\frac{15}{17}$或$\cos B=1$（舍去）．

（2）由（1）可知$\sin B=4(1-\cos B)=\frac{8}{17}$．

$\because S_{\triangle ABC}=2$，即$\frac{1}{2}ac\sin B=2$，

$\therefore\frac{1}{2}ac\cdot\frac{8}{17}=2$，则$ac=\frac{17}{2}$，

又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+c)^2-2ac-b^2}{2ac}=\frac{6^2-17-b^2}{17}=\frac{15}{17}$，

解得$b=2$．

考点 —三角函数与解三角形

　├三角函数

　│├同角三角函数基本关系式

　│└诱导公式

　├三角恒等变换

　│└二倍角公式

　└解三角形

　　├面积公式

　　└正余弦定理

8

在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$b+c=2a\cos B$．

（1）证明：$A=2B$．

（2）若△ABC的面积$S=\frac{a^2}{4}$，求角A的大小．

答案 （1）证明见解析

（2）$A=\frac{\pi}{2}$或$A=\frac{\pi}{4}$．

解析 （1）由正弦定理得$\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，

故$2\sin A\cos B=\sin B+\sin(A+B)=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

于是$\sin B=\sin(A-B)$．

又A，$B\in(0,\pi)$，故$0<A-B<\pi$，

所以$B=\pi-(A-B)$或$B=A-B$，

因此$A=\pi$（舍去）或$A=2B$，

所以，$A=2B$．

（2）由$S=\frac{a^2}{4}$得$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2}{4}$，故有

$\sin B\sin C=\frac{1}{2}\sin 2B=\sin B\cos B$，

因$\sin B\neq 0$，得$\sin C=\cos B$．

又B，$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{2}\pm B$．

当$B+C=\frac{\pi}{2}$时，$A=\frac{\pi}{2}$；

当$C-B=\frac{\pi}{2}$时，$A=\frac{\pi}{4}$．

综上，$A=\frac{\pi}{2}$或$A=\frac{\pi}{4}$．

考点

- 三角函数与解三角形
  - 解三角形
    - 面积公式
    - 正余弦定理

9 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c．已知$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$．

（1）求$\frac{\sin C}{\sin A}$的值；

（2）若$\cos B=\frac{1}{4},b=2$，求△ABC的面积S．

答案 （1）2．

（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$．

解析 （1）由正弦定理得，设$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，

则$\dfrac{2c-a}{b}=\dfrac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$．

即$(\cos A-2\cos C)\sin B=(2\sin C-\sin A)\cos B$，

化简可得$\sin(A+B)=2\sin(B+C)$．

又$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=2\sin A$．因此$\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$．

（2）由$\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$,得$c=2a$．

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$及$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$b=2$，

得$4=a^2+4a^2-4a^2\times\dfrac{1}{4}$．

解得$a=1$，从而$c=2$．

又因为$\cos B=\dfrac{1}{4}$，且$0<B<\pi$，

所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$．

因此$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$．

考点 三角函数与解三角形

- 解三角形
  - 正余弦定理

10 在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a，b，c．已知$\cos 2C=-\dfrac{1}{4}$．

（1）求$\sin C$的值；

（2）当$a=2$，$2\sin A=\sin C$时，求b及c的长．

答案 （1）$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$．

（2）$\begin{cases}b=\sqrt{6}\\c=4\end{cases}$或$\begin{cases}b=2\sqrt{6}\\c=4.\end{cases}$

解析 （1）因为$\cos 2C=1-2\sin^2 C=-\dfrac{1}{4}$，及$0<C<\pi$．所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$．

（2）当$a=2$，$2\sin A=\sin C$时，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$c=4$．

由$\cos 2C=2\cos^2 C-1=-\frac{1}{4}$，及$0<C<\pi$得$\cos C=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$．

由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得$b^2\pm\sqrt{6}b-12=0$，

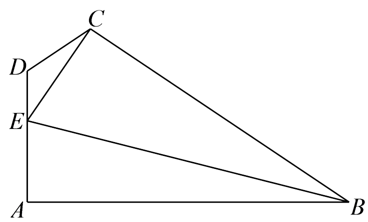
解得$b=\sqrt{6}$，$b=2\sqrt{6}$，

所以$\begin{cases}b=\sqrt{6}\\c=4\end{cases}$或$\begin{cases}b=2\sqrt{6}\\c=4.\end{cases}$

考点

- 三角函数与解三角形
  - 三角恒等变换
    - 和差角公式
    - 二倍角公式
  - 解三角形
    - 正余弦定理

11 如图，在平面四边形$ABCD$中，$DA\perp AB$，$DE=1$，$EC=\sqrt{7}$，$EA=2$，$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，$\angle BEC=\frac{\pi}{3}$．



（1）求$\sin\angle CED$的值；

（2）求BE的长．

答案 （1）$\sin\angle CED=\frac{\sqrt{21}}{7}$．

（2）$BE=4\sqrt{7}$．

解析 （1）在$\triangle CDE$中，由余弦定理得：$EC^2=CD^2+DE^2-2CD\cdot DE\cdot\cos\angle EDC$，

于是由题设知：$7=CD^2+1+CD$.即$CD^2+CD-6=0$，

解得$CD=2$，（$CD=-3$舍去）．

在$\triangle CDE$中，由正弦定理得：$\frac{EC}{\sin\angle EDC}=\frac{CD}{\sin\alpha}$

于是$\sin\alpha=\frac{CD\cdot\sin\frac{2}{3}\pi}{EC}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$．即$\sin\angle CED=\frac{\sqrt{21}}{7}$．

（2）由题设知$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，于是由（Ⅰ）知，$\cos\alpha=1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{21}{49}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

而$\angle AEB=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，所以

$$\cos\angle AEB=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$$
$$=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

在$\mathrm{Rt}\triangle EAB$中，$\cos\angle AEB=\frac{EA}{BE}=\frac{2}{BE}$，

故$BE=\frac{2}{\cos\angle AEB}=\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{14}}=4\sqrt{7}$．

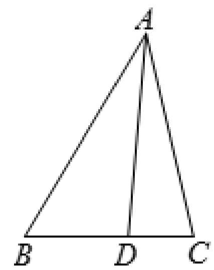
考点

—三角函数与解三角形

　├解三角形

　│　└正余弦定理

12 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=8$，点D在BC上，且$CD=2$，$\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$



（1）求$\sin\angle BAD$；

（2）求BD,AC的长．

答案

（1）$\sin\angle BAD=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

（2）$BD=3$，$AC=7$

解析

（1）$\because\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\therefore\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-\angle B)=\sin\angle ADC\cdot\cos\angle B-\cos\angle ADC\cdot\sin\angle B$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

（2）在$\triangle ABD$中，

$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，即：$\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{BD}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$

解得：$BD=3,AD=7$

在$\triangle ACD$中，

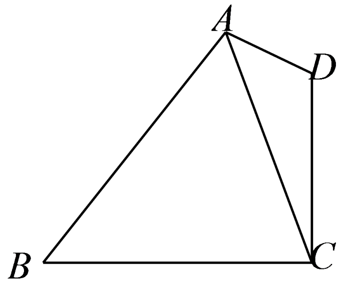
$$\begin{aligned}AC^2&=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC\\&=7^2+2^2-2\times7\times2\times\frac{1}{7}=49\end{aligned}$$

$\therefore AC=7$

考点

—三角函数与解三角形
- 三角函数
  - 同角三角函数基本关系式
- 三角恒等变换
  - 和差角公式
- 解三角形
  - 正余弦定理

13 如图,在平面四边形$ABCD$中，$AD=1$，$CD=2$，$AC=\sqrt{7}$．



（1）求$\cos\angle CAD$的值．

（2）若$\cos\angle BAD=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，$\sin\angle CBA=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$，求$BC$的长．

答案 （1）$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．

（2）3．

解析 （1）由$\triangle DAC$关于$\angle CAD$的余弦定理可得$\cos\angle CAD=\dfrac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD\cdot AC}$

$=\dfrac{1+7-4}{2\times1\times\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以$\cos\angle CAD=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．

（2）因为$\angle BAD$为四边形内角，所以$\sin\angle BAD>0$且$\sin\angle CAD>0$，

则由正余弦的关系可得$\sin\angle BAD=\sqrt{1-\cos^2\angle BAD}=\dfrac{\sqrt{189}}{14}$

且$\sin\angle CAD=\sqrt{1-\cos^2\angle CAD}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

再有正弦的和差角公式可得：

$\sin\angle BAC=\sin(\angle BAD-\angle CAD)=\sin\angle BAD\cos\angle CAD-\sin\angle CAD\cos\angle BAD$

$=\dfrac{\sqrt{189}}{14}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}-\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{14}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{14}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

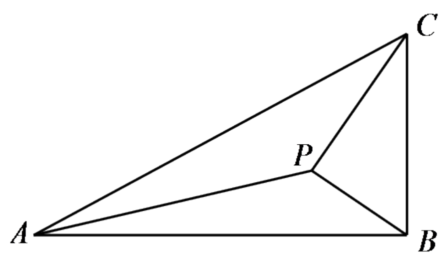
再由$\triangle ABC$的正弦定理可得$\dfrac{AC}{\sin\angle CBA}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以$BC=\dfrac{\sqrt{7}}{\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$．

考点

- 三角函数与解三角形
  - 三角函数
    - 同角三角函数基本关系式
  - 三角恒等变换
    - 和差角公式
  - 解三角形
    - 正余弦定理

14 如图，在ΔABC中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P为ΔABC内一点，$\angle BPC=90^\circ$．



（1）若$PB=\dfrac{1}{2}$，求PA．

（2）若$\angle APB=150^\circ$，求$\tan\angle PBA$．

答案

（1）$PA=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

解析

（1）由已知得，$\angle PBC=60^\circ$，$\therefore\angle PBA=30^\circ$，在$\Delta PAB$中，

由余弦定理得$PA^2=3+\dfrac{1}{4}-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\cos 30^\circ=\dfrac{7}{4}$，$\therefore PA=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$；

（2）设$\angle PBA=\alpha$，由已知得，$PB=\sin\alpha$，在ΔPAB中，

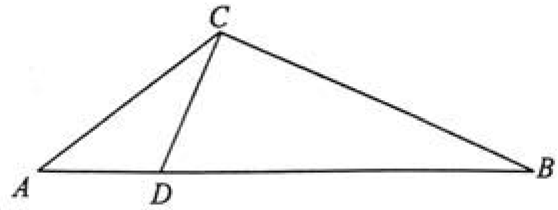
由正弦定理得，$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)}$，化简得，$\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin\alpha$，

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$\therefore \tan\angle PBA=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

考点

—三角函数与解三角形
- 三角函数
  - 同角三角函数基本关系式
- 解三角形
  - 正余弦定理

15 如图，在$\triangle ABC$中，点D在边 AB上，且$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{1}{3}$．记$\angle ACD=\alpha$ ，$\angle BCD=\beta$．



（1）求证:$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sin\beta}{3\sin\alpha}$ ；

（2）若$\alpha=\dfrac{\pi}{6},\beta=\dfrac{\pi}{2},AB=\sqrt{19}$，求$BC$的长．

答案

（1）证明见解析；

（2）$BC=3$．

解析

（1）在ΔACD中，由正弦定理，有$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\alpha}$

在ΔBCD中，由正弦定理，有$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{BD}{\sin\beta}$

因为$\angle ADC+\angle BDC=\pi$，

所以$\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$

因为$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{1}{3}$，

所以$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sin\beta}{3\sin\alpha}$．

（2）因为$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$，

由（Ⅰ）得$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{3\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{3}$，

设$AC=2k,BC=3k,k>0$，

由余弦定理$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$

代入得到$19=4k^2+9k^2-2\cdot 3k\cdot 2k\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}$，

解得$k=1$，所以$BC=3$．

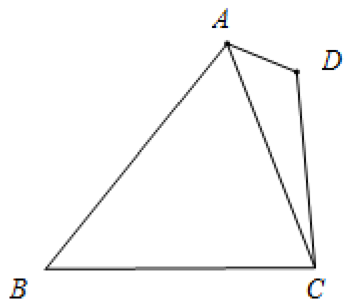
考点

—三角函数与解三角形

—解三角形

—正余弦定理

16 如图，在四边形$ABCD$中，$AB=4$，$AC=2\sqrt{3}$，$\cos\angle ACB=\dfrac{1}{3}$，$\angle D=2\angle B$.



（1）求$\sin\angle B$；

（2）若$AB=4AD$，求CD的长．

答案

（1）$\sin\angle B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）$CD=3$

解析

（1）$\because\cos\angle ACB=\dfrac{1}{3}$，$\angle ACB\in(0,\ \pi)$，

$\therefore\sin\angle ACB=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由正弦定理知，$\dfrac{AC}{\sin\angle B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，即$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\angle B}=\dfrac{4}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，解得$\sin\angle B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

（2）$\because AB=4$且$AB=4AD$，$\therefore AD=1$．

$\because\angle D=2\angle B$，$\therefore\cos\angle D=1-2\sin^2\angle B$，

即$\cos\angle D=1-2\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$，

由余弦定理知，$\cos\angle D=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\times CD}$，

即$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1+CD^2-AC^2}{2\times1\times CD}$，$3CD^2+2CD-33=0$，$(CD-3)(3CD+11)=0$，解得$CD=3$．

考点

—三角函数与解三角形

三角函数

└同角三角函数基本关系式

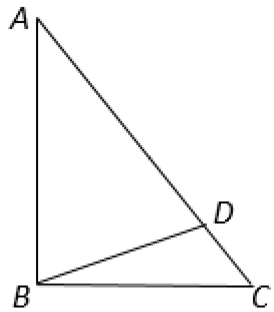
三角恒等变换

└二倍角公式

解三角形

└正余弦定理

17 如图，在ΔABC中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，且$AD=4DC$.



（1）求BD的长；

（2）求$\sin\angle CBD$的值.

答案 （1）$BD=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

（2）$\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{10}}{10}$

解析 （1）因为 $\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=4$，$BC=3$，

所以$\cos C=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{4}{5}$，$AC=5$，

又因为$AD=4DC$，所以$AD=4$，$DC=1$.

在ΔBCD中，由余弦定理，

得$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{3}{5}=\frac{32}{5}$，

所以 $BD=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

（2）在ΔBCD中，由正弦定理，得$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin C}$，

所以 $\frac{1}{\sin\angle CBD}=\frac{\frac{4\sqrt{10}}{5}}{\frac{4}{5}}$，

所以 $\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

考点 —三角函数与解三角形
└解三角形

18 已知函数$f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{6})+\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$，$g(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}$

（1）若α是第一象限角，且$f(\alpha)=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$，求$g(\alpha)$的值；

（2）求使$f(x)\geqslant g(x)$成立的x的取值集合．

答案 （1）$\dfrac{1}{5}$

（2）$[2k\pi,2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}],k\in Z$

解析 （1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}\sin x\Rightarrow f(\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}.$

$\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{4}{5},g(\alpha)=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$

（2）$f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow\sqrt{3}\sin x\geqslant 1-\cos x\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\geqslant\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{6}\in[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}]\Rightarrow x\in[2k\pi,2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}],k\in Z$

考点 —三角函数与解三角形
├三角函数
│└三角函数图象与性质

19 已知函数$f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$．

（1）求$f(x)$的定义域及最小正周期；

（2）求$f(x)$的单调递增区间．

答案 （1） 原函数的定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，最小正周期为$\pi$；

（2）原函数的单调递增区间为$[-\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\pi)k\in\mathbf{Z}$ ，$(k\pi,\dfrac{3\pi}{8}+k\pi]k\in\mathbf{Z}$．

解析 （1）$f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$

$=\dfrac{(\sin x-\cos x)2\sin x\cos x}{\sin x}$

$=2(\sin x-\cos x)\cos x=\sin 2x-1-\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})-1$，$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

所以原函数的定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，最小正周期为$\pi$；

（2）原函数的单调递增区间为$[-\frac{\pi}{8}+k\pi,k\pi)k\in\mathbf{Z}$ ，$(k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]k\in\mathbf{Z}$.

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 函数的概念与表示
- 三角函数与解三角形
  - 三角函数
    - 三角函数图象与性质
  - 三角恒等变换
    - 简单的三角恒等变换

20 已知函数$f(x)=(2\cos^2x-1)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$.

（1）求$f(x)$的最小正周期及最大值；

（2）若$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且$f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$\alpha$的值．

答案

（1）$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）$\alpha=\frac{9\pi}{16}$.

解析

（1）因为$f(x)=(2\cos^2x-1)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$

$=\cos 2x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$

$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\cos 4x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x+\frac{\pi}{4})$，

所以$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）因为$f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\sin(4\alpha+\frac{\pi}{4})=1$.

因为$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

所以$4\alpha+\frac{\pi}{4}\in(\frac{9\pi}{4},\frac{17\pi}{4})$.

所以$4\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$. 故$\alpha=\frac{9\pi}{16}$.

考点

- 三角函数与解三角形
  - 三角函数
    - 三角函数的定义

- 同角三角函数基本关系式
- 三角函数图象与性质
- 三角恒等变换
  - 和差角公式
  - 二倍角公式

21 已知函数$f(x)=(\sin 2x+\cos 2x)^2-2\sin^2 2x$．

（1）求$f(x)$的最小正周期．

（2）若函数$y=g(x)$的图象是由$y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，再向上平移1个单位长度得到的，当$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$时，求$y=g(x)$的最大值和最小值．

答案 （1）$\frac{\pi}{2}$

（2）$g(x)$最大值$\sqrt{2}+1$；$g(x)$ 最小值0．

解析 （1）因为$f(x)=(\sin 2x+\cos 2x)^2-2\sin^2 2x$

$=\sin 4x+\cos 4x$

$=\sqrt{2}\sin(4x+\frac{\pi}{4})$,

所以函数$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$．

（2）依题意，$y=g(x)=\sqrt{2}\sin[4(x-\frac{\pi}{8})+\frac{\pi}{4}]+1$

$=\sqrt{2}\sin(4x-\frac{\pi}{4})+1$．

因为$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，

所以$-\frac{\pi}{4}\leqslant 4x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$．

当$4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{3\pi}{16}$时，$g(x)$取最大值$\sqrt{2}+1$；

当$4x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即$x=0$时，$g(x)$ 取最小值0．

考点
- 三角函数与解三角形
  - 三角恒等变换
    - 二倍角公式
    - 简单的三角恒等变换

22

已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin\omega x+\sqrt{3}\cos^2\frac{\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\omega>0$．

（1）若$\omega=1$，求$f(x)$的单调递增区间；

（2）若$f(\frac{\pi}{3})=1$，求$f(x)$的最小正周期T的最大值．

答案 （1）$f(x)$的单调递增区间是$[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}],k\in Z$．

（2）T的最大值为4π．

解析 （1）当$\omega=1$时，$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{3})$．

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$．

解得$2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$．

所以$f(x)$的单调递增区间是$[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}],k\in Z$．

（2）由$f(x)=\frac{1}{2}\sin\omega x+\sqrt{3}\cos^2\frac{\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$．

因为$f(\frac{\pi}{3})=1$，所以$\sin(\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3})=1$．

则$\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in Z$． 解得$\omega=6n+\frac{1}{2}$．

又因为函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$，且$\omega>0$，

所以当$\omega=\frac{1}{2}$时，T的最大值为4π．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 周期性
- 三角函数与解三角形
  - 三角函数
    - 正弦函数的图象与性质
  - 三角恒等变换
    - 辅助角公式
    - 简单的三角恒等变换

23 已知函数$f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$，$x\in\mathbf{R}$．

（1）求$f(x)$的最小正周期和单调递减区间．

（2） 设$x=m\,(m\in\mathbf{R})$是函数$y=f(x)$图像的对称轴，求$\sin 4m$的值．

答案　（1）$f(x)$的最小正周期为π，单调递增区间为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2}{3}\pi+k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$．

（2）$\sin 4m=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

解析　（1）$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．

$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$，

$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．

$\therefore f(x)$的最小正周期为π，单调递增区间为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2}{3}\pi+k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$．

（2）$f(x)$的对称轴为$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{x}{2}+k\pi$，

即$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$．

$\therefore 4m=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$，

$\sin 4m=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

考点　三角函数与解三角形
- 三角函数
  - 正弦型函数的图象与性质
- 三角恒等变换
  - 辅助角公式
  - 简单的三角恒等变换

24　在$\triangle ABC$中，$\sin^2 A=\sin B\sin C$．

（1）若$\angle A=\frac{\pi}{3}$，求$\angle B$的大小；

（2）若$bc=1$,求$\triangle ABC$的面积的最大值．

答案　（1）$\angle B=\frac{\pi}{3}$．

（2）$\frac{\sqrt{3}}{4}$．

解析　（1）方法一：因为 $\sin^2 A=\sin B\sin C$,且$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $a^2=bc.$

又因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \angle A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}=b^2+c^2-bc.$

所以 $(b-c)^2=0.$

所以 $b=c.$

因为 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，

所以 ΔABC为等边三角形.

所以 $\angle B=\frac{\pi}{3}.$

方法二：因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B).$

因为 $\sin B\sin C=\sin^2 A$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\sin B\sin(\frac{\pi}{3}+B)=\sin^2\frac{\pi}{3}.$

所以 $\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)=\frac{3}{4}.$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B+\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos 2B}{2}=\frac{3}{4}.$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B-\frac{1}{2}\cos 2B=1.$

所以 $\sin(2B-\frac{\pi}{6})=1.$

因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $2B-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{11}{6}\pi).$

所以 $2B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$\angle B=\frac{\pi}{3}.$

（2）因为 $\sin^2 A=\sin B\sin C,bc=1$，且$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $a^2=bc=1.$

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-1}{2}\geqslant\frac{2bc-1}{2}=\frac{1}{2}$（当且仅当$b=c=1$时，等号成立）.

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A\in(0,\frac{\pi}{3}].$

所以 $\sin A\in(0,\frac{\sqrt{3}}{2}].$

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\sin A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}.$

所以 当$\triangle ABC$是边长为1的等边三角形时，其面积取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

考点

—三角函数与解三角形

—三角恒等变换

└和差角公式

二倍角公式

简单的三角恒等变换

解三角形

正余弦定理

不等式与线性规划

均值不等式

均值定理

25 在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，设S为△ABC的面积，满足$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2-c^2\right)$．

（1）求角C的大小；

（2）求$\sin A+\sin B$的最大值．

答案 （1）$\frac{\pi}{3}$

（2）$\sqrt{3}$

解析 （1）由余弦定理得$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$．

又$\because S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2-c^2\right),S=\frac{1}{2}ab\sin C\therefore\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ab\cos C$．

所以$\tan C=\sqrt{3}$．因为$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$．

（2）由已知$\sin A+\sin B=\sin A+\sin(\pi-C-A)=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$

$=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{3}$

当△ABC为正三角形时取等号，

所以$\sin A+\sin B$的最大值是$\sqrt{3}$．

考点 三角函数与解三角形

三角函数

三角函数图象与性质

26 在△ABC中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$．

（1）求$\angle B$的大小．

（2）求$\sqrt{2}\cos A+\cos C$的最大值．

答案 （1）$\frac{\pi}{4}$

（2）1

解析 （1）因为$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$，

所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$B=\frac{\pi}{4}$.

（2）在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，$\cos C=-\cos(A+B)=-\cos(A+\frac{\pi}{4})$，

所以$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A-\cos(A+\frac{\pi}{4})$，

$=\sqrt{2}\cos A-(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\sin(A+\frac{\pi}{4})$，

因为$A\in(0,\frac{3\pi}{4})$,

所以$A+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\pi)$，

所以当$A=\frac{\pi}{4}$时，$\sqrt{2}\cos A+\cos C$的最大值为1.

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 最值
- 三角函数与解三角形
  - 三角恒等变换
    - 简单的三角恒等变换
  - 解三角形
    - 正余弦定理

27 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对边分别为a，b，c，且满足$\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$．

（1）求角A的大小．

（2）若$a=2\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$面积的最大值．

答案 （1）$\angle A=\frac{\pi}{3}$．

（2）$5\sqrt{3}$．

解析 （1）$\because \dfrac{2c-b}{a}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$，

$\therefore (2c-b)\cdot\cos A=a\cdot\cos B$，

由正弦定理，得：

$(2\sin C-\sin B)\cdot\cos A=\sin A\cdot\cos B$，

整理得：$2\sin C\cdot\cos A-\sin B\cdot\cos A=\sin A\cdot\cos B$，

$\therefore 2\sin C\cdot\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，

在$\triangle ABC$中，$\sin C\neq 0$，

$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$．

（2）由余弦定理$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，$a=2\sqrt{5}$，

$\therefore b^2+c^2-20=bc\geqslant 2bc-20$，

$\therefore bc\leqslant 20$，当且仅当$b=c$时取“$=$”．

$\therefore$三角形的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A\leqslant 5\sqrt{3}$．

$\therefore$三角形面积的最大值为$5\sqrt{3}$．

考点
- 三角函数与解三角形
  - 解三角形
    - 面积公式
    - 解三角形的应用
    - 正余弦定理
- 不等式与线性规划
  - 均值不等式
    - 均值定理
    - 用均值不等式解决简单的最值问题

28 已知$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边长分别为a,b,c,且$a^2+b^2=ab+3,C=60^o$．

（1）求c的值．

（2）求$a+b$的取值范围．

答案 （1）$\sqrt{3}$

（2）$(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$．

解析 （1）$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=3$，

$\therefore c=\sqrt{3}$

（2）$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$，$a=2\sin A$，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$，$b=2\sin B$，

$\therefore a+b=2(\sin A+\sin B)=2\sqrt{3}\sin(A+30^\circ)$，

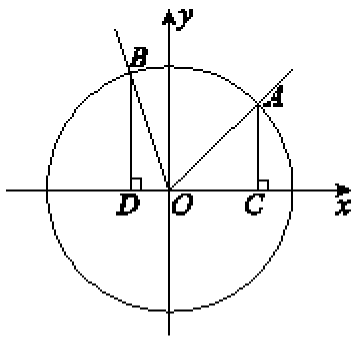
$\because 0^\circ<A<120^\circ$，$\therefore A+30^\circ\in(30^\circ,150^\circ)$，$\therefore \sin(A+30^\circ)\in(\dfrac{1}{2},1]$，

$\therefore a+b\in(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$．

考点 —三角函数与解三角形

- 三角函数
  - 三角函数图象与性质
- 三角恒等变换
  - 简单的三角恒等变换
- 解三角形
  - 正余弦定理

29 如图，在直角坐标系xOy中，角α的顶点是原点，始边与x轴正半轴重合，终边交单位圆于点A，且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$．将角$\alpha$的终边按逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{3}$，交单位圆于点$B$．记$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．



（1）若$x_1=\dfrac{1}{3}$，求x_2；

（2）分别过A,B作x轴的垂线，垂足依次为C,D．记$\triangle AOC$的面积为S_1，$\triangle BOD$的面积为S_2．

若$S_1=2S_2$，求角α的值．

答案 （1）$\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$．

（2）$\dfrac{\pi}{4}$．

解析　（1）由三角函数定义，得$x_1=\cos\alpha$，$x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$．

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

所以 $x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$．

（2）依题意得$y_1=\sin\alpha$，$y_2=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$．

所以 $S_1=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}\sin2\alpha$，

$S_2=\frac{1}{2}|x_2|y_2=\frac{1}{2}[-\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})]\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{4}\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$．

依题意得$\sin2\alpha=-2\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$，

整理得$\cos2\alpha=0$．

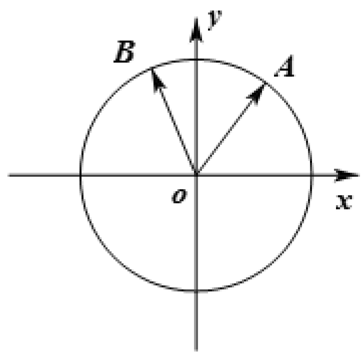
因为$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<2\alpha<\pi$，

所以$2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$．

考点　一三角函数与解三角形

- 三角函数
  - 三角函数图象与性质
- 解三角形
  - 正余弦定理

30 如图，在平面直角坐标系中，锐角α和钝角β的终边分别与单位圆交于A,B两点．



（1）如果A,B两点的纵坐标分别为$\frac{4}{5},\frac{12}{13}$，求$\cos\alpha$和$\sin\beta$的值；

（2）在（1）的条件下，求$\cos(\beta-\alpha)$的值；

（3）已知点$C(-1,\sqrt{3})$，求函数$f(\alpha)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$的值域．

答案　（1）$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$.

（2）$\cos(\beta-\alpha)=\frac{33}{65}$

（3）$\left(-1,\sqrt{3}\right)$.

解析

（1）由题意得$\sin\alpha=\frac{4}{5},\sin\beta=\frac{12}{13}$，

α为锐角，$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$

（2）因为β是钝角，所以$\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$，

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{33}{65}$

（3）$A\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right),f\left(\alpha\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 所以$f\left(\alpha\right)$的值域为

$\left(-1,\sqrt{3}\right)$.

考点

- 三角函数与解三角形
  - 三角函数
    - 三角函数的定义
    - 同角三角函数基本关系式
  - 三角恒等变换
    - 和差角公式
- 平面向量
  - 平面向量的数量积
    - 数量积
    - 数量积的坐标表示