

2021 年名校联盟优质校高三大联考试卷

数 学

本试卷共 4 页，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 14 < 0\}$, $B = \{x | 5x - 10 < 0\}$, 则 $A \cup B =$ C
 A. $\{x | -2 < x < 7\}$ B. $\{x | 2 < x < 7\}$ C. $\{x | x < 7\}$ D. $\{x | x > -2\}$
2. 若 $iz = -3 + 2i$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于 C
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

- ③ 已知 α 是第四象限的角, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ B

- A. $-\frac{24}{7}$ B. $\frac{24}{7}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $-\frac{24}{25}$

4. 一些二次曲面常常用于现代建筑的设计中. 常用的二次曲面有球面、椭球面、单叶双曲面和双曲抛物面. 比如, 中心在原点的椭球面的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$), 中国国家大剧院就用到了椭球面的形状 (如图 1). 若某建筑准备采用半椭球面设计 (如图 2), 半椭球面方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ($z \geq 0$), 该建筑设计图纸的比例 (长度比) 为 1:50 (单位: m), 则该建筑的占地面积为

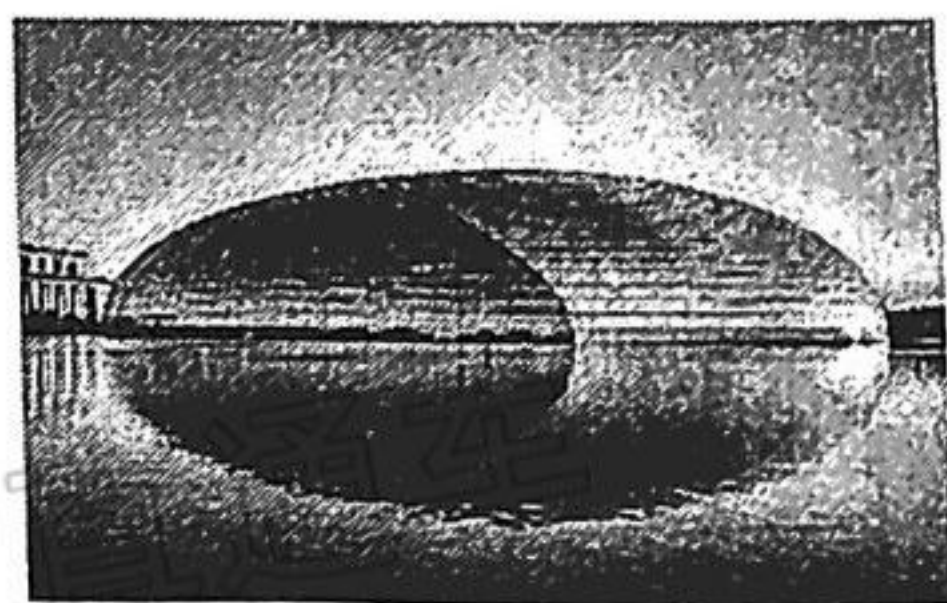


图1

- A. $4000\pi \text{ m}^2$
 C. $8000\pi \text{ m}^2$

- B. $6000\pi \text{ m}^2$
 D. $10000\pi \text{ m}^2$

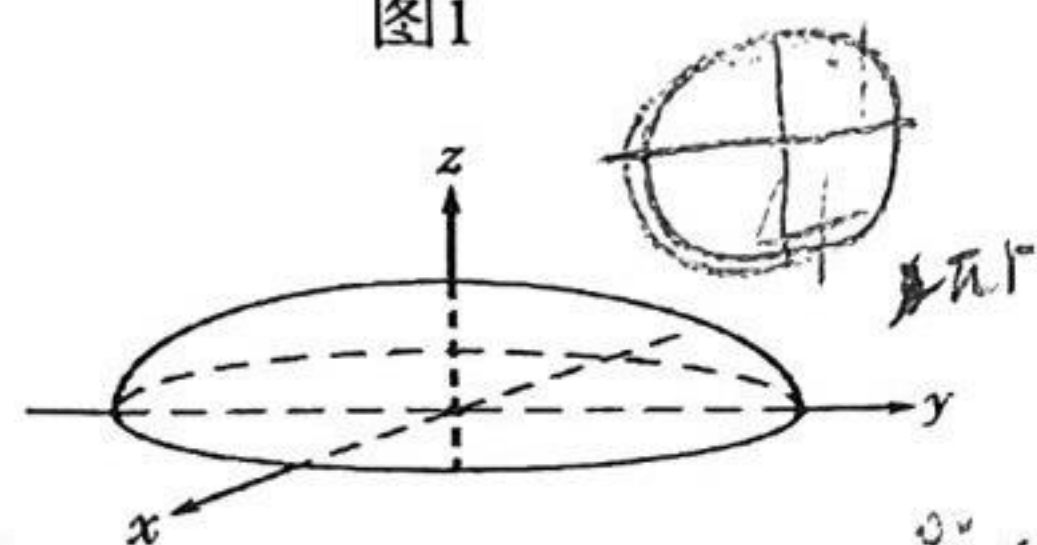


图2

5. 若 $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b < 1$, 则下列各式中一定成立的是 C

- A. $\ln(a-b) > 0$
 C. $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$

- B. $2^{b-a} > 1$

- D. $\log_c a > \log_c b$ ($c > 0$ 且 $c \neq 1$)

6. 已知 a, b 是平面向量, 满足 $|a|=2, |b| \leq 1$, 且 $|3b-2a| \leq 2$, 记 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta$ 的最小值是 $\frac{3}{8}$.

A. $\frac{11}{16}$

B. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

D. $\frac{3\sqrt{15}}{16}$

7. 投壶是从先秦延续至清末的中国传统礼仪和宴饮游戏, 晋代在广泛开展投壶活动中, 对投壶的壶也有所改进, 即在壶口两旁增添两耳. 因此在投壶的花式上就多了许多名目, 如“贯耳 (投入壶耳)”. 每一局投壶, 每一位参赛者各有四支箭, 投入壶口一次得1分, 投入壶耳一次得2分. 现有甲、乙两人进行投壶比赛 (两人投中壶口、壶耳是相互独立的), 甲四支箭已投完, 共得3分, 乙投完



$\frac{10}{16} + \frac{3}{16}$

$\frac{1}{4} + \frac{12}{16} + \frac{1}{16}$

2支箭, 目前只得1分, 乙投中壶口的概率为 $\frac{1}{3}$, 投中壶耳的概率为 $\frac{1}{5}$. 四支箭投完, 以得分多者赢. 请问乙赢得这局比赛的概率为

A. $\frac{13}{75}$

B. $\frac{3}{75}$

C. $\frac{8}{15}$

D. $\frac{8}{75}$

8. 已知定义 $\mathbf{R}$ 在上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x) = f(-x) - 2\sin x$. 且当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) + \cos x > 0$, 则不等式 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > f(x) + \sin x - \cos x$ 的解集为

A. $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$

C. $\left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right)$

D. $\left(-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 已知直线 $y=x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 无公共点, 则双曲线离心率可能为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}$

10. 下列说法正确的是

A. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^2 + y^2 \geq 2$ ” 是 “ $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$ ” 的必要不充分条件

B. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 是 “ $\cos \alpha = 0$ ” 的充要条件

C. “ $x \neq 3$ ” 是 “ $|x| \neq 3$ ” 成立的充分条件

D. 设 $\theta \in \mathbf{R}$, 则 “ $\left|\theta - \frac{\pi}{12}\right| < \frac{\pi}{12}$ ” 是 “ $\sin \theta < \frac{1}{2}$ ” 的充分而不必要条件

11. 已知函数 $f(x) = |1 - 2\sin 2x|$, 下列结论正确的是

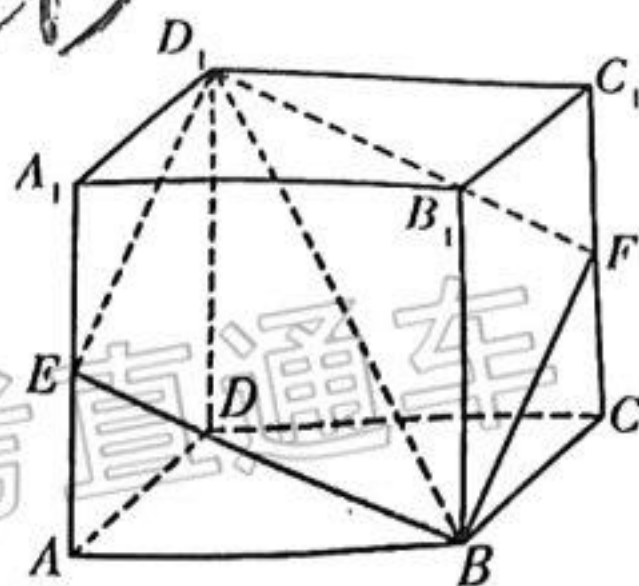
A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称

C. 函数 $y = f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增

D. 方程 $f(x) = 1$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有7个不同的实根

12. 如图所示, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 过对角线 BD_1 的一个平面交棱 AA_1 于点 E , 交棱 CC_1 于点 F , 得四边形 BFD_1E , 在以下结论中, 正确的是



- A. 四边形 BFD_1E 有可能是梯形
B. 四边形 BFD_1E 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形
C. 四边形 BFD_1E 有可能垂直于平面 BB_1D_1D
D. 四边形 BFD_1E 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 其中第 16 题有两空, 第一空得 3 分, 第二空得 2 分, 共 20 分。

13. 春节文艺汇演中需要将 A, B, C, D, E, F 六个节目进行排序, 若 A, B 两个节目必须相邻, 且都不能排在 3 号位置, 则不同的排序方式有 144 种. (用数字作答)

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $S_n = n^2 a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 .

15. 若函数 $f(x)$ 称为“准奇函数”, 则必存在常数 a, b , 使得对定义域内的任意 x 值, 均有 $f(x) + f(2a - x) = 2b$, 请写出一个 $a = 2, b = 2$ 的“准奇函数” (填写解析式): $y = x^2$.

16. 已知不过原点的动直线 l 交抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 且 $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|$, 若 $\triangle OAB$ 的面积的最小值为 64, 则
(1) $p =$ 4; (2) 直线 l 过定点, 该定点的坐标为 $(-8, 0)$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = a_3 - b_3$, $a_3 = S_3 + b_2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

18. (12 分)

在① $\tan B = 2 \tan C$, ② $3b^2 - a^2 = 12$, ③ $b \cos C = 2c \cos B$ 三个条件中任选一个, 补充在下面问题中的横线上, 并解决该问题.

问题: 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 及其对边 a, b, c , 若 $c = 2$, 且满足 , 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值. (注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.)

19. (12 分)

2020 年 5 月 28 日, 十三届全国人大三次会议表决通过了《中华人民共和国民法典》, 自 2021 年 1 月 1 日起施行. 《中华人民共和国民法典》被称为“社会生活的百科全书”, 是新中国第一部以法典命名的法律, 在法律体系中居于基础性地位, 也是市场经济的基本法. 为了增强学生的法律意识, 了解法律知识, 某校组织全校学生进行学习《中华人民共和国民法典》知识竞赛, 从中随机抽取 100 名学生的成绩 (单位: 分) 统

计得到如下表格：

成绩 性别	[0,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
男	5	14	16	13	4
女	3	11	13	15	6

规定成绩在 $[90, 100]$ 内的学生获优秀奖。

(1) 根据以上成绩统计，判断是否有 90% 的把握认为该校学生在知识竞赛中获优秀奖与性别有关？

(2) 在抽取的 100 名学生中，若从获优秀奖的学生中随机抽取 3 人进行座谈，记 X 为抽到获优秀奖的女生人数，求 X 的分布列和数学期望。

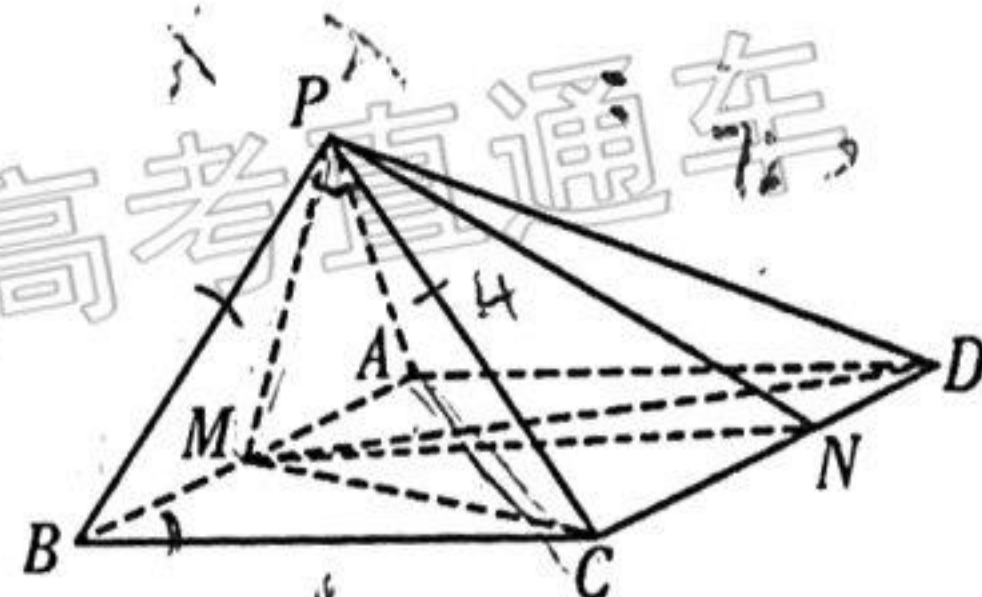
附：

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.01	0.001
k	2.706	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形， $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ， $PB = 2\sqrt{3}$ ， $PC = 4$ ，点 M 是 AB 的中点。



(1) 求证： $CM \perp$ 平面 PAB ；

(2) 线段 CD 上是否存在一点 N ，使得直线 PN 与平面 PMD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ，若存在，求出 $\frac{CN}{ND}$ 的值，若不存在，请说明理由。

21. (12 分)

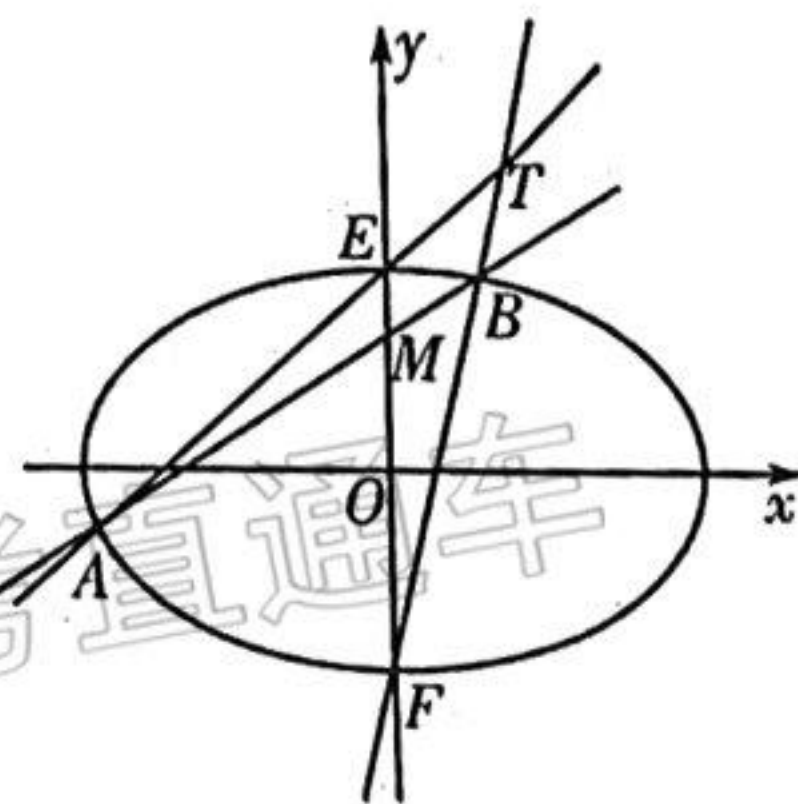
椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，

点 $P(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4})$ 在 C 上。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设 E, F 为短轴端点，过点 $M(0, 1)$ 作直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (异于 E, F)，直线 AE, BF 交于点 T 。

求证：点 T 恒在一定直线上。



22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + x^3 + mx + 2$ 。

(1) 若 x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线，试求实数 m 的值；

(2) 已知 $g(x) = f(x) - e^x$ ，若对任意实数 x ，均有 $g(e^{x+1}) \geq g(x)$ ，求 m 的取值范围。