

雅礼中学 2021 届高三月考试卷(五)

数 学

命题人:张博 审题人:陈朝阳

得分:_____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

第 I 卷

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | -5 < x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$
- A. $\{x | -5 < x < 4\}$ B. $\{x | -5 < x \leq -2\}$
C. $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x | 3 \leq x < 4\}$
2. 设 $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 3i$, 则 $z_1 + z_2$ 在复平面内对应的点位于
- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
3. 从 5 名同学中选若干名分别到图书馆、食堂做志愿者,若每个地方至少去 2 名,则不同的安排方法共有
- A. 20 种 B. 50 种 C. 80 种 D. 100 种
4. 党的十九大报告中指出:从 2020 年到 2035 年,在全面建成小康社会的基础上,再奋斗 15 年,基本实现社会主义现代化. 若到 2035 年底我国人口数量增长至 14.4 亿,由 2013 年到 2019 年的统计数据可得国内生产总值(GDP) y (单位:万亿元)关于年份代号 x 的回归方程为 $\hat{y} = 6.60x + 50.36$ ($x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$),由回归方程预测我国在 2035 年底人均国内生产总值(单位:万元)约为
- A. 14.04 万元 B. 202.16 万元 C. 13.58 万元 D. 14.50 万元
5. 随着网络技术的发达,电子支付变得愈发流行,若电子支付只包含微信支付和支付宝支付两种. 某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45,既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15,则不用现金支付的概率为
- A. 0.3 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.7

6. 牛顿冷却定律描述一个物体在常温环境下的温度变化: 如果物体的初始温度为 T_0 , 则经过一定时间 t 后的温度 T 将满足 $T - T_s = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}} \cdot (T_0 - T_s)$, 其中 T_s 是环境温度, h 称为半衰期. 现有一杯 85°C 的热茶, 放置在 25°C 的房间中, 如果热茶降温到 55°C , 需要 10 分钟, 则欲降温到 45°C , 大约需要多少分钟? ($\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$)
- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

7. 在直角三角形 ABC 中, $\angle A = 90^\circ, AB = 2, AC = 4, P$ 在 $\triangle ABC$ 斜边 BC 的中线 AD 上, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最大值为
- A. $\frac{25}{8}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{25}{2}$

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(2-x) + 4f(2)$, 若函数 $y = f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 且 $f(1) = 3$, 则 $f(2021) =$
- A. 6 B. 3 C. 0 D. -3

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 如果 a, b, c 满足 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 那么下列选项成立的是

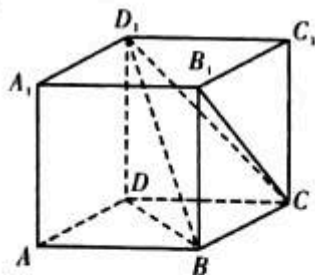
- A. $ab > ac$ B. $cb^2 < ab^2$
C. $c(b-a) > 0$ D. $ac(a-c) < 0$

10. 已知方程 $x^2 + y^2 + 3ax + ay + \frac{5}{2}a^2 + a - 1 = 0$, 若方程表示圆, 则 a 的值可能为

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 3

11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列结论正确的是

- A. 异面直线 BD_1 与 B_1C 所成的角大小为 90°
B. 四面体 D_1DBC 的每个面都是直角三角形
C. 二面角 $D_1 - BC - B_1$ 的大小为 30°



- D. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球上一点与外接球上一点的距离的

最小值为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

12. 在现代社会中,信号处理是非常关键的技术,我们通过每天都在使用的电话或者互联网就能感受得到.而信号处理背后的“功臣”就是正弦型函数.函数 $f(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$ 的图象就可以近似地模拟某种信号的波形,则

- A. 函数 $f(x)$ 为周期函数,且最小正周期为 π
 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2\pi, 0)$ 对称
 C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
 D. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 4

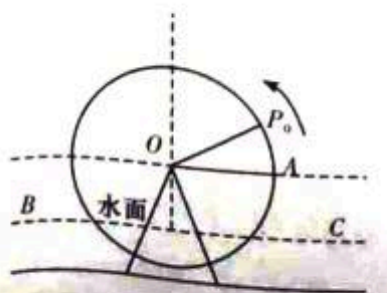
选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第 II 卷

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 $l: y = 2x + b$ 经过抛物线 C 的焦点, 且与 C 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 5$, 则 $p =$ _____.
14. 数列 $1, -2, 2, -3, 3, -3, 4, -4, 4, -4, 5, -5, 5, -5, 5, \dots$ 的项正负交替, 且项的绝对值为 1 的有 1 个, 2 的有 2 个, $\dots, n$ 的有 n 个, 则该数列第 2021 项是 _____.
15. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具, 因其经济又环保, 至今还在农业生产中得到使用, 如左下图. 假定在水流量稳定的情况下, 半径为 3 m 的筒车上的每一个盛水桶都按逆时针方向作角速度为 $\frac{\pi}{3}$ rad/min 的匀速圆周运动, 平面示意图如右下图, 已知筒车中心 O 到水面 BC 的距离为 2 m, 初始时刻其中一个盛水筒位于点 P_0 处, 且 $\angle P_0OA = \frac{\pi}{6}$ ($OA \parallel BC$), 则 8 min 后该盛水筒到水面的距离为 _____ m.



16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别为 BC, CC_1 的中点. 则平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 _____; 以点 E 为球心, $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 为半径的球面与对角面 ACC_1A_1 的交线长为 _____.

四、解答题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $\sin B + \sqrt{3} \cos B = 2$, ② $\cos 2B + \sqrt{3} \cos B - 2 = 0$, ③ $b^2 - a^2 = c^2 - \sqrt{3}ac$

这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并进行解答.

问题: 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 所对的角分别为 A, B, C , 若 $a = 4, c = \sqrt{3}b$, _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^n (a_n + a_{n+1})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 2020 项和 S_{2020} .

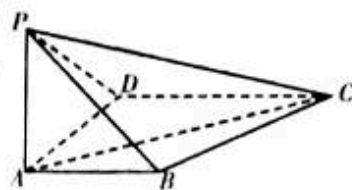
19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AB=1$, $BC=CD=2$, $AB \parallel CD$,

$$\angle ADC = \frac{\pi}{2}.$$

(1) 求证: $PD \perp AB$;

(2) 求直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

在 2019 年女排世界杯中,中国女子排球队以 11 连胜的优异战绩成功夺冠,为祖国母亲七十华诞献上了一份厚礼.排球比赛采用 5 局 3 胜制,前 4 局比赛采用 25 分制,每个队只有赢得至少 25 分,并同时超过对方 2 分时,才胜 1 局;在决胜局(第五局)采用 15 分制,每个队只有赢得至少 15 分,并领先对方 2 分为胜.在每局比赛中,发球方赢得此球后可得 1 分,并获得下一球的发球权,否则交换发球权,并且对方得 1 分.现有甲、乙两队进行排球比赛:

(1)若前三局比赛中甲已经赢两局,乙赢一局.接下来两队赢得每局比赛

的概率均为 $\frac{1}{2}$,求甲队最后赢得整场比赛的概率;

(2)若前四局比赛中甲、乙两队已经各赢两局比赛.在决胜局(第五局)

中,两队当前的得分为甲、乙各 14 分,且甲已获得下一发球权.若甲

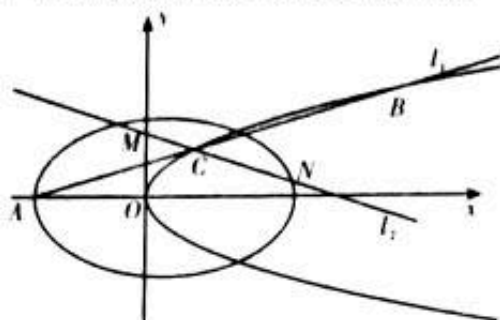
发球时甲赢 1 分的概率为 $\frac{2}{5}$,乙发球时甲赢 1 分的概率为 $\frac{3}{5}$,得分者

获得下一个球的发球权.设两队打了 $x(x \leq 6)$ 个球后甲赢得整场比赛,

求 x 的取值及相应的概率 $p(x)$.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 点 A 为椭圆 $C_1: x^2 + 2y^2 = 1$ 的左顶点, 过 A 的直线 l_1 交抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 于 B, C 两点, 点 C 是 AB 的中点.



- (1) 若点 A 在抛物线 C_2 的准线上, 求抛物线 C_2 的标准方程;
- (2) 若直线 l_2 过点 C , 且倾斜角和直线 l_1 的倾斜角互补, 交椭圆 C_1 于 M, N 两点.
 - (i) 证明: 点 C 的横坐标是定值, 并求出该定值;
 - (ii) 当 $\triangle BMN$ 的面积最大时, 求 p 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x + 2x - 1$ (其中常数 $e = 2.71828\cdots$, 是自然对数的底数)

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 对任意的 $a \geq 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq (x + ae)x$.