

数 学

时量:120 分钟

满分:150 分

得分 _____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(0, 2)$ B. $(1, 2)$ C. $(1, 3)$ D. $(2, 3)$

2. 若 $\frac{a-i}{3+2i}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

3. 平面向量 $a = (1, 2)$, $|b| = 3$, $a \cdot b = -6$, 则向量 a, b 夹角的余弦值为

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

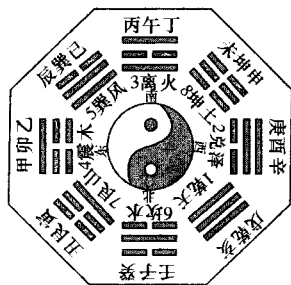
4. 《易经》是中国文化中的精髓, 右图是易经八卦

图(含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦), 每一卦

由三根线组成(——表示一根阳线, ---表示一根阴线), 从八卦中任取一卦, 这一卦的三

根线中恰有 1 根阳线和 2 根阴线的概率为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$



5. 已知两个变量具备线性相关性, 现通过最小二乘法求回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x$

+ $\hat{a}$, 将已知数据代入公式 $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2$ 计算后得到的代数式为:

$3a^2 + 13b^2 + 12ab - 2b + 3$, 使上述代数式取值最小的 a, b 的值即为回归方程的系数, 则回归直线方程为

- A. $\hat{y} = -x + 2$ B. $\hat{y} = -x - 2$
C. $\hat{y} = x + 2$ D. $\hat{y} = x - 2$

6. 某单位有 6 名员工, 2020 年国庆节期间, 决定从 6 人中留 2 人值班, 另外 4 人分别去张家界、南岳衡山、凤凰古城、岳阳楼旅游, 要求每个景点有 1 人游览, 每个人只游览一个景点, 且这 6 个人中甲、乙不去衡山, 则不同的选择方案共有

- A. 120 种 B. 180 种 C. 240 种 D. 320 种

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 命题 $p: S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 命题 $q: \{a_n\}$ 为等差数列, 则 p 是 q 成立的

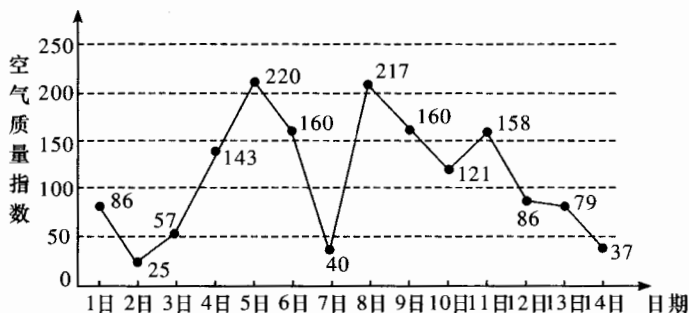
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 A, B 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点, P 为椭圆 C 上一动点, PA, PB 与直线 $x=3$ 交于 M, N 两点, $\triangle PMN$ 与 $\triangle PAB$ 的外接圆的周长分别为 L_1, L_2 , 则 $\frac{L_1}{L_2}$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.)

9. 空气质量指数大小分为五级, 指数越大, 说明污染的情况越严重, 对人体危害越大. 指数范围在: $[0, 50]$, $[51, 100]$, $[101, 200]$, $[201, 300]$, $[301, 500]$ 分别对应“优”、“良”“轻(中)度污染”、“中度(重)污染”、“重污染”五个等级. 下面是某市连续 14 天的空气质量指数趋势图, 下列说法正确的有



- A. 这 14 天中有 4 天空气质量指数为“良”
B. 这 14 天中空气质量指数的中位数是 103
C. 从 2 日到 5 日空气质量越来越差
D. 连续三天中空气质量指数方差最小的是 9 日到 11 日

10. 设动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上(含内部), 且 $\overrightarrow{D_1P} = \lambda \overrightarrow{D_1B}$, 当 $\angle APC$ 为锐角时, 实数 λ 可能的取值是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 下列说法正确的是

- A. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$
B. 存在 $\triangle ABC$ 满足 $\cos A + \cos B \leq 0$
C. 若 $\sin A < \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形
D. 若 $C > \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin C > \sin^2 A + \sin^2 B$

12. 已知 $a > 0$, $m(x) = e^{x-2} - e^{2-x}$, $f(x) = am(x) - \sin \pi x$, 若 $f(x)$ 存在唯一零点, 下列说法正确的有

- A. $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增
B. $m(x)$ 图象关于点 $(2, 0)$ 中心对称
C. 任取不相等的实数 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 均有 $\frac{m(x_1) + m(x_2)}{2} < m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$
D. $a \geq \frac{\pi}{2}$

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ 2^{-x} + 2, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

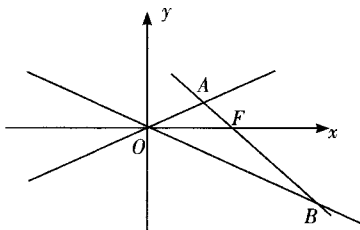
14. 某圆锥母线长为 4, 其侧面展开图为半圆面, 则该圆锥高为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 100π , $PB \perp$ 平面 ABC , $PB = 8$, $\angle BAC = 120^\circ$, 则三棱锥体积的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 如图, 已知 F 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 过点 F 的直线交两渐近线于 A, B 两点, 若 $\angle OAB = 120^\circ$,

$\triangle OAB$ 内切圆的半径 $r = \frac{\sqrt{3}a-b}{5}$, 则双

曲线的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.(本题满分 10 分)

在① $S_n + S_{n-2} = 2(S_{n-1} + 1)$; ② $S_{n+1} + 2 = S_{n+2} - a_{n+1}$; ③ $\frac{S_n}{n} = a_{n+1} - (n +$

1)这三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,并解答该问题.

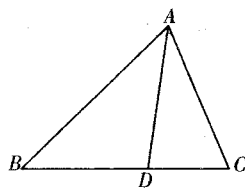
问题:已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, _____, 若确定 $\{a_n\}$ 是等差数列,求 $\{a_n\}$ 的通项公式,否则,说明理由.

(注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分)

18. (本题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 15$, 点 D 在边 BC 上,

$CD = 1$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{26}$.

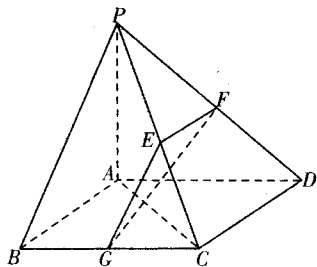


(1) 求 $\sin \angle BAD$;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本题满分 12 分)

四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD=120^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=2\sqrt{3}$, E, F 分别是 PC, PD 的中点.



(1) 已知 $\overrightarrow{BG} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 若平面 $EFG \parallel$ 平面 PAB , 求 λ 的值;

(2) 在(1)的条件下, 求平面 EFG 与平面 PCD 所成二面角的正弦值.

20. (本题满分 12 分)

已知 A, B 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, 过点 $M(2, 0)$

任作一条非水平直线交椭圆于 P, Q 两点, 若椭圆长轴长为 8, 且过点 $(3, \frac{3\sqrt{7}}{4})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 若是, 求出该

定值, 若不是, 请说明理由.

21. (本题满分 12 分)

有编号为 1, 2, 3 的三只小球, 和编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子, 将三个小球逐个随机的放入四个盒子中, 每只球的放置相互独立.

- (1) 求三只小球恰在两个盒子中的概率;
- (2) 求三只小球在三个不同的盒子, 且至少有两个球的编号与所在盒子编号不同的概率;
- (3) 记录至少有一只球的盒子, 以 X 表示这些盒子编号的最大值, 求 EX .

22. (本题满分 12 分)

已知 $f(x) = ae^{2x} + (2a-1)e^x - x$, a 为常数.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq (3a-1)\cos x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

数学参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	D	C	C	A

1. D 【解析】 $A = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$, 则 $A \cap B = (2, 3)$.

2. C 【解析】 $\frac{a-i}{3+2i} = \frac{(a-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(3a-2)-(2a+3)i}{13}$, 则 $\begin{cases} 3a-2=0, \\ -(2a+3) \neq 0, \end{cases}$ 所以 $a = \frac{2}{3}$.

3. B 【解析】 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{-6}{\sqrt{5} \times 3} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. C 【解析】 $p = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

5. D 【解析】 $3a^2 + 13b^2 + 12ab - 2b + 3 = 3(a+2b)^2 + (b-1)^2 + 2$,

当 $\begin{cases} a+2b=0, \\ b=1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=-2, \\ b=1 \end{cases}$ 时上式最小, 故 $\hat{y} = x - 2$.

6. C 【解析】方法 1: 以人为对象, 分类讨论: 甲不值班乙值班: $C_3^1 C_3^1 A_3^3 = 72$; 甲值班乙不值班: $C_3^1 C_3^1 A_3^3 = 72$; 甲乙都不值班: $C_3^2 C_2^1 A_3^3 = 72$; 甲乙都值班: $A_4^4 = 24$, 故 $N = 72 + 72 + 72 + 24 = 240$;

方法 2: 以地点为对象, 依次考虑各景点可能人数: $N = 4 \times 5 \times 4 \times 3 = 240$.

7. C 【解析】若 p 成立, 则 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 则 $S_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$,

两式相减得: $a_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2} - \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 即 $(n-1)a_{n+1} - na_n + a_1 = 0$,

于是: $na_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_1 = 0$, 再将以上两式相减得: $na_{n+2} - 2na_{n+1} + na_n = 0$,

即 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故命题 q 成立; 而 q 成立, p 显然成立.

8. A 【解析】容易知道 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{4}$, 设 $l_{PA}: y = k(x+2)$, $l_{PB}: y = -\frac{1}{4k}(x-2)$, 令 $x=3$ 得 $y_M = 5k$, $y_N =$

$-\frac{1}{4k}$, 不妨设 $k > 0$, 则 $MN = 5k + \frac{1}{4k}$, 设 $\triangle PMN$ 和 $\triangle PAB$ 外接圆的半径分别为 r_1, r_2 , 由正弦定理得: $2r_1 =$

$\frac{MN}{\sin \angle MPN}$, $2r_2 = \frac{AB}{\sin \angle APB}$, 又 $\angle MPN + \angle APB = 180^\circ$, 所以: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{MN}{AB} = \frac{5k + \frac{1}{4k}}{4} \geq \frac{2\sqrt{5k \cdot \frac{1}{4k}}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	ACD	CD	ACD	ABD

9. ACD 【解析】14 天中有: 1 日, 3 日, 12 日, 13 日空气质量指数为良, 共 4 天, 故 A 对;

14 天中的中位数为: $\frac{86+121}{2} = 103.5$, 故 B 错;

从 2 日到 5 日空气质量指数越来越高, 故空气质量越来越差, 故 C 对; D 答案显然成立.

10. CD 【解析】设 $AP=x, D_1P=t$, 设正方体的棱长为 1, 则 $AC=\sqrt{2}$, 在 $\triangle APC$ 中, 由余弦定理得

$$\cos \angle APC = \frac{x^2 + x^2 - 2}{2x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \text{ 若 } \angle APC \text{ 为锐角, 则 } \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0, \text{ 则 } x^2 > 1,$$

在 $\triangle AD_1P$ 中, $AD_1=\sqrt{2}, \cos \angle AD_1P = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 于是由余弦定理得

$$x^2 = 2 + t^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 于是 } 2 + t^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} > 1, \text{ 即 } 3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 > 0,$$

解之得: $t > \sqrt{3}$ 或 $t < \frac{\sqrt{3}}{3}$, 由 $D_1B=\sqrt{3}$, 故 $\lambda > 1$ (舍) 或 $0 < \lambda < \frac{1}{3}$.

11. ACD 【解析】对于 A 选项, 若 $A > B$ 则 $a > b$, 则 $2R\sin A > 2R\sin B$, 即 $\sin A > \sin B$, 故 A 选项正确;

对于 B 选项, 由 $A+B < \pi$, 则 $A < \pi - B$, 于是 $\cos A > -\cos B$, 即 $\cos A + \cos B > 0$, 故 B 选项错误;

对于 C 选项, 由 $\sin A < \cos B$ 得 $\cos(\frac{\pi}{2} - A) < \cos B$, 此时: 若 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{2} - A > B$, 则 $A+B < \frac{\pi}{2}$, 于是 $C > \frac{\pi}{2}$; 若 $A > \frac{\pi}{2}$, 则 $\cos(A - \frac{\pi}{2}) < \cos B$, 则 $A - \frac{\pi}{2} > B$, 于是 $A > \frac{\pi}{2} + B$, 故 C 选项正确;

对于 D 选项, 由 $C > \frac{\pi}{2}$, 则 $A+B < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < A < \frac{\pi}{2} - B < \frac{\pi}{2}$, 于是 $\sin A < \sin(\frac{\pi}{2} - B)$,

即 $0 < \sin A < \cos B$, 同理 $0 < \sin B < \cos A$,

此时 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B > \sin A \cdot \sin A + \sin B \cdot \sin B = \sin^2 A + \sin^2 B$. 所以 D 选项正确.

12. ABD 【解析】由 $m'(x) = e^{x-2} + e^{2-x} > 0$ 知 $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增, 故 A 选项正确;

$m(x) + m(4-x) = e^{x-2} - e^{2-x} + e^{2-x} - e^{x-2} = 0$, 故 $m(x)$ 图象关于点 $(2, 0)$ 中心对称, 故 B 选项正确;

由 $m''(x) = e^{x-2} - e^{2-x}$, 当 $x > 2$ 时, $m''(x) > 0$, $m'(x)$ 递增, $m(x)$ 图象下凸, 此时 $\frac{m(x_1) + m(x_2)}{2} >$

$m(\frac{x_1 + x_2}{2})$, 故 C 选项错误;

对于 D 选项:

解法 1: $f(x) = a(e^{x-2} - e^{2-x}) - \sin \pi x$, 注意到 $f(2-x) = -f(2+x)$, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 中心对称, 而 $f(2) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点等价于 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 无零点,

$$f'(x) = a(e^{x-2} + e^{2-x}) - \pi \cos \pi x,$$

当 $a \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 因为 $e^{x-2} + e^{2-x} \geq 2$, 则 $f'(x) \geq 2a - \pi \cos \pi x \geq 2a - \pi \geq 0$,

于是 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 递增, 于是当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f(x) > f(2) = 0$, 满足题意;

当 $a < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(2) = 2a - \pi < 0$, 由连续函数的性质可知, 一定存在 $x_0 > 2$, 使得 $x \in (2, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 在 $(2, x_0)$ 单调递减, 于是 $x \in (2, x_0)$ 时 $f(x) < f(2) = 0$,

而 $a < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{a} > 2$, $\frac{a^2}{\pi} < \frac{\pi}{4}$, $2 + \ln \frac{\pi}{a} > 2$,

$$f(2 + \ln \frac{\pi}{a}) = a(e^{\ln \frac{\pi}{a}} - e^{-\ln \frac{\pi}{a}}) - \sin(2\pi + \pi \ln \frac{\pi}{a}) = a(\frac{\pi}{a} - \frac{a}{\pi}) - \sin(\pi \ln \frac{\pi}{a})$$

$$\geq \pi - \frac{a^2}{\pi} - 1 > \pi - \frac{\pi}{4} - 1 > 0,$$

由零点存在定理, 在区间 $(2, 2 + \ln \frac{\pi}{a})$ 上 $f(x)$ 一定还存在零点, 与已知矛盾.

故 $a \geq \frac{\pi}{2}$.

解法 2: 若 $f(x)$ 存在唯一零点, 则 $a(e^{x-2} - e^{2-x}) = \sin \pi x$ 只有一个解, 即 $g(x) = a(e^{x-2} - e^{2-x})$ 与 $h(x) = \sin \pi x$ 只有一个交点, $g'(x) = a(e^{x-2} + e^{2-x})$, $h'(x) = \pi \cos \pi x$, 由 $g(2) = h(2) = 0$, $g(x)$, $h(x)$ 的图象均关于点 $(2, 0)$ 中心对称, 在 $x=2$ 的右侧附近, $g(x)$ 为下凸函数, $h(x)$ 为上凸函数, 要 $x > 2$ 时图象无交点, 当且仅当 $g'(2) \geq h'(2)$ 成立, 于是 $2a \geq \pi$, 即 $a \geq \frac{\pi}{2}$, 故 D 选项正确.

三、填空题

13.4 **【解析】** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$, $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(-1) = 2^{-(-1)} + 2 = 4$.

14. $2\sqrt{3}$ **【解析】** 圆锥底面半径 $r=2$, $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

15. $6\sqrt{3}$ **【解析】** 设 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 a, b, c , $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin 120^\circ \cdot 8 = \frac{2\sqrt{3}}{3} bc$, 设球的半径为 R , 由 $4\pi R^2 = 100\pi$ 得 $R^2 = 25$, 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r , 由正弦定理得 $2r = \frac{a}{\sin 120^\circ}$, 即 $r = \frac{\sqrt{3}}{3} a$, $R^2 = 4^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right)^2 = 25$, 所以 $a = 3\sqrt{3}$, $27 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ$, 即 $27 = b^2 + c^2 + bc \geq 2bc + bc = 3bc$, 故 $bc \leq 9$, $V = \frac{2\sqrt{3}}{3} bc \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 9 = 6\sqrt{3}$, 当且仅当 $b=c=3$ 时取等号.

16. $\frac{\sqrt{19}}{4}$ **【解析】** 由焦点 F 到渐近线的距离为 b , $\angle OAB = 120^\circ$ 知 $AF = \frac{2\sqrt{3}}{3} b$,

在 $\triangle OAF$ 中, 由余弦定理得 $OF^2 = OA^2 + AF^2 - 2 \cdot OA \cdot AF \cdot \cos 120^\circ$,

即 $c^2 = OA^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} b\right)^2 - 2 \cdot OA \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} b \cdot \cos 120^\circ$, 解之得: $OA = a - \frac{\sqrt{3}}{3} b$.

设 $\triangle OAB$ 内心为 M , 作 $MN \perp OA$ 于 N , 显然 $\angle MAO = 60^\circ$, $MN = r = \frac{\sqrt{3}a - b}{5}$,

则 $AN = \frac{\sqrt{3}}{3} MN = \frac{3a - \sqrt{3}b}{15}$, 则 $ON = OA - AN = a - \frac{\sqrt{3}}{3} b - \frac{3a - \sqrt{3}b}{15} = \frac{12a - 4\sqrt{3}b}{15}$,

$\tan \angle MON = \frac{MN}{ON} = \frac{\frac{\sqrt{3}a - b}{5}}{\frac{12a - 4\sqrt{3}b}{15}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 即 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{4}$.

四、解答题

17. **【解析】** 若选①, 由 $S_n + S_{n-2} = 2(S_{n-1} + 1)$ 成立, 则必须 $n \geq 3$, 2 分
 此时 $S_n - S_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2} + 2$, 即 $a_n = a_{n-1} + 2 (n \geq 3)$, 5 分
 这只能说明数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项开始构成等差数列, 8 分
 数列通项公式无法确定. 10 分
 若选②, 由 $S_{n+1} + 2 = S_{n+2} - a_{n+1}$, 得 $S_{n+2} - S_{n+1} - a_{n+1} = 2$, 即 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2$, 2 分
 即 $a_{n+1} - a_n = 2 (n \geq 2)$, 5 分
 这只能说明数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项开始构成等差数列, 8 分
 数列通项公式无法确定. 10 分
 若选③, 由 $\frac{S_n}{n} = a_{n+1} - (n+1)$ 得 $S_n = na_{n+1} - n(n+1)$,

于是 $S_{n+1} = (n+1)a_{n+2} - (n+1)(n+2)$, 两式相减得: $(n+1)a_{n+1} = (n+1)a_{n+2} - 2(n+1)$, 2 分
 即 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2$, 5 分
 对 $S_n = na_{n+1} - n(n+1)$, 令 $n=1$ 得 $a_2 = a_1 + 2$, 7 分
 故数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 8 分
 即 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ 10 分

18. 【解析】(1) 由 $\cos \angle ADC = \frac{1}{26}$, 知 $\sin \angle ADC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{26}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{26}$, 2 分

则 $\sin \angle BAD = \sin(\angle ADC - 60^\circ) = \sin \angle ADC \cdot \cos 60^\circ - \cos \angle ADC \cdot \sin 60^\circ$ 3 分

$= \frac{15\sqrt{3}}{26} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{26} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{26}$ 5 分

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得: $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 即 $\frac{BD}{\frac{7\sqrt{3}}{26}} = \frac{15}{\frac{15\sqrt{3}}{26}}$, 7 分

即 $BD=7$, 8 分

所以 $BC=7+1=8$,

于是 $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABD$ 10 分

$= \frac{1}{2} \times 15 \times 8 \times \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$ 12 分

19. 【解析】(1) 若平面 $EFG \parallel$ 平面 PAB , 平面 $PAB \cap$ 平面 $PBC = PB$, 平面 $EFG \cap$ 平面 $PBC = EG$,

由面面平行的性质定理可知: $PB \parallel EG$, 2 分

于是 $\frac{CG}{GB} = \frac{CE}{EP}$, 由 E 为 PC 的中点知: G 为 BC 的中点, 故 $\vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{BC}$,

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$ 4 分

(2) 由平面 $EFG \parallel$ 平面 PAB 知, 平面 EFG 与平面 PCD 所成二面角即为平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角. 连接 BD , 交 AC 于点 O , 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 则 $AC \perp BD$, 以点 O 为坐标原点, 以 OB, OC 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, 过点 O 与底面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 6 分

则 $A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-\sqrt{3}, 0, 0), P(0, -1, 2\sqrt{3})$,

于是 $\vec{AP} = (0, 0, 2\sqrt{3}), \vec{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0), \vec{CP} = (0, -2, 2\sqrt{3}), \vec{CD} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$, 设平面 PAB 的法向量为

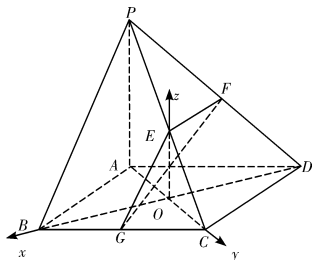
$$\mathbf{n}_1 = (x, y, z), \text{ 由 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AP} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2\sqrt{3}z = 0, \\ \sqrt{3}x + y = 0, \end{cases}$$

取 $x=1$, 则 $y=-\sqrt{3}, z=0$, 于是 $\mathbf{n}_1 = (1, -\sqrt{3}, 0)$ 8 分

同理可求得平面 PCD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (-1, \sqrt{3}, 1)$, 9 分

则 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-1-3}{\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+1}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 11 分

所以二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分



20. 【解析】由题意知: $\begin{cases} 2a=8, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{63}{16b^2} = 1, \end{cases}$ 2分

解之得: $\begin{cases} a=4, \\ b=3, \end{cases}$ 故椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 4分

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 设直线 PQ 的方程为: $x = \lambda y + 2$, 5分

由 $\begin{cases} x = \lambda y + 2, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$ 得 $(9\lambda^2 + 16)y^2 + 36\lambda y - 108 = 0$, 显然 $\Delta > 0$, 6分

于是: $y_1 + y_2 = \frac{-36\lambda}{9\lambda^2 + 16}, y_1 y_2 = \frac{-108}{9\lambda^2 + 16}$, 7分

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1}{x_1 + 4} \cdot \frac{x_2 - 4}{y_2} = \frac{y_1(\lambda y_2 - 2)}{(\lambda y_1 + 6)y_2} = \frac{\lambda y_1 y_2 - 2y_1}{\lambda y_1 y_2 + 6y_2}$ 8分

$= \frac{\lambda y_1 y_2 - 2(y_1 + y_2) + 2y_2}{\lambda y_1 y_2 + 6y_2}$

$= \frac{\lambda \cdot \frac{-108}{9\lambda^2 + 16} - 2 \cdot \frac{-36\lambda}{9\lambda^2 + 16} + 2y_2}{\lambda \cdot \frac{-108}{9\lambda^2 + 16} + 6y_2} = \frac{-36\lambda + 2y_2(9\lambda^2 + 16)}{-108\lambda + 6y_2(9\lambda^2 + 16)} = \frac{1}{3}$ 12分

21. 【解析】(1) 设“三只小球恰在两个盒子中”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{C_3^1 A_1^2}{4^3} = \frac{9}{16}$ 3分

(2) 设“恰有两个球的编号与盒子编号不同”为事件 B , “三个球的编号与盒子的编号不同”为事件 C , 则“至少有两个球的编号与所在盒子编号不同”为事件: $B+C$,

$P(B) = \frac{C_3^1(1+2)}{4^3} = \frac{9}{64}$, 4分

$P(C) = \frac{2 + C_3^2 \times 3}{4^3} = \frac{11}{64}$, 5分

B 与 C 互斥,
故 $P(B+C) = P(B) + P(C) = \frac{9}{64} + \frac{11}{64} = \frac{5}{16}$ 6分

(3) $X = 1, 2, 3, 4$ 7分

$P(X=1) = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; 8分

$P(X=2) = \frac{2^3 - 1}{4^3} = \frac{7}{64}$; 9分

$P(X=3) = \frac{3^3 - 2^3}{4^3} = \frac{19}{64}$; 10分

$P(X=4) = \frac{4^3 - 3^3}{4^3} = \frac{37}{64}$; 11分

故 $E(X) = 1 \times \frac{1}{64} + 2 \times \frac{7}{64} + 3 \times \frac{19}{64} + 4 \times \frac{37}{64} = \frac{55}{16}$ 12分

22. 【解析】(1) $f'(x) = (2ae^x - 1)(e^x + 1)$, 2分

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; 3分

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得, $x > \ln \frac{1}{2a}$; 由 $f'(x) < 0$ 得, $x < \ln \frac{1}{2a}$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{2a})$ 递减, 在 $(\ln \frac{1}{2a}, +\infty)$ 递增. 4 分

(2) 由 $f(\frac{\pi}{2}) \geq 0$ 得, $ae^{\pi} + (2a-1)e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \geq 0, a(e^{\pi} + 2e^{\frac{\pi}{2}}) \geq e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}, \therefore a > 0$ 5 分

① 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 由(1)知, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x) \geq f(0) = 3a-1 \geq (3a-1)\cos x, \dots\dots\dots$ 6 分

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $g(x) = f(x) - (3a-1)\cos x$,

则 $g'(x) = 2ae^{2x} + (2a-1)e^x - 1 + (3a-1)\sin x \geq f'(x) - |3a-1|$,
 $g'(0) = 4a-2 < 0, g(0) = 0$,

当 $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) \geq f'(x) - |3a-1| = 2ae^{2x} + (2a-1)e^x - 3a$,

由 $2ae^{2x} + (2a-1)e^x - 3a = 0$ 得, $x = \ln\left(\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right) > 0$,

$\therefore x \geq \ln \frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}$ 时, $g'(x) \geq g'\left(\ln \frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right) \geq 0$,

从而, 由零点存在定理知, 存在 $x_0 \in \left(0, \ln \frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right]$, 使得 $g'(x_0) = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 此时, $g(x) \leq g(0) = 0$, 不合题意. 9 分

当 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 时, $g'(x) \geq f'(x) - |3a-1| = 2ae^{2x} + (2a-1)e^x + 3a-2$,

由 $2ae^{2x} + (2a-1)e^x + 3a-2 = 0$ 得, $x = \ln\left(\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right) > 0$,

$\therefore x \geq \ln \frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}$ 时, $g'(x) \geq g'\left(\ln \frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right) \geq 0$,

从而, 由零点存在定理知, 存在 $x_1 \in \left(0, \ln \frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right]$, 使得 $g'(x_1) = 0$,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $g'(x) < 0$, 此时, $g(x) \leq g(0) = 0$, 不合题意. 11 分

综上, $a \geq \frac{1}{2}$ 12 分

