

2020—2021 学年上学期全国百强名校

“领军考试”高三数学(理数)答案与解析

1. 【答案】C

【命题意图】本题考查分段函数的求值问题.

【解析】 $f(27) = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_3 \frac{1}{27} = -3$, $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

2. 【答案】B

【命题意图】本题考查集合运算、对数函数的性质及对数不等式的解法.结合不等式考查集合运算历来就是高考查收集合的热点,故在此我们设置了通过对数函数的性质解对数不等式与集合的交集运算.

【解析】 $\because B = \left\{x \mid \log_2 x < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \mid \log_2 x < \log_2 \sqrt{2}\right\} = \left\{x \mid 0 < x < \sqrt{2}\right\}$, $\therefore A \cap B = \left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \sqrt{2}\right\}$.

3. 【答案】D

【命题意图】本题考查命题真假的判断.从历年高考考查简易逻辑题型来看,命题真假的判断居多,多以全称命题、特称命题、及其通过逻辑联结词联结而成的新命题呈现,真假命题判断的备考应主要从这几个角度出发进行准备.

【解析】对于 A,因为 $\Delta = 4^2 - 4 \times 6 = -8 < 0$,所以 $x^2 + 4x + 6 > 0$ 恒成立,故 A 假;对于 B,正切函数 $y = \tan x$ 的定义域

为 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$,所以 B 假;对于 C,函数 $y = \frac{1}{x}$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 、 $(0, +\infty)$,所以 C 假;D 显

然正确,综上应选 D.

4. 【答案】B

【命题意图】本题考查了函数图象的识别,函数的奇偶性.根据奇偶性的定义,利用排除法进行求解,即可得到答案.本题主要考查了函数的奇偶性,以及函数值的应用,其中解答中熟记函数的奇偶性的定义,得出函数的奇偶性的图像特征,再利用函数值排除是解答的关键,着重考查了推理与运算能力,属于基础题.

【解析】函数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{3x\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为 $(-5, 0) \cup (0, 5)$,故排除 A; 函数 $f(x)$ 为奇函数,图像关于原点对

称,故排除 D; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立,当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立,故排除 C.

5. 【答案】C

【命题意图】本小题主要考查正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义等基础知识,考查运算求解能力,考查数形结合思想.属于基础题.

【解析】 $\because P(X \leq 19.95) = P(X \geq 20.05) = \frac{1}{50}$, $\therefore P(19.95 \leq X \leq 20.05) = 1 - \frac{2}{50} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$,故这批钢管内径在 19.95mm 到 20.05mm 之间的钢管数约为 $10000 \times \frac{24}{25} = 9600$ 根.

6. 【答案】D

【命题意图】本题考查双曲线定义、数形结合思想的应用.解答这一类型问题应把握好以下两点:(1)对于圆锥曲线的定义不仅要熟记,还要深入理解细节部分:比如椭圆的定义中要求 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,双曲线的定义中要求 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$,抛物线上的点到焦点的距离与准线的距离相等的转化;(2)注意数形结合,画出合理草图.

【解析】由题意并结合双曲线的定义可得 $|PQ|+|PF_1|=|PQ|+(|PF_2|+2\sqrt{2})=|PQ|+|PF_2|+2\sqrt{2}\geq|QF_2|+2$

$\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$, 当且仅当 Q, P, F_2 三点共线时等号成立. 而直线 QF_2 的方程为 $y=-x+2$, 由

$$\begin{cases} y=-x+2 \\ x^2-y^2=2 \end{cases} \text{ 可得 } x=\frac{3}{2}, \text{ 所以 } y=\frac{1}{2}, \text{ 所以点 } P \text{ 的坐标为 } (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}).$$

7. 【答案】A

【命题意图】本题属于数学文化题, 主要考查阅读能力, 考查棱锥与棱台的性质以及棱台的体积公式, 意在考查灵活应用所学知识解决实际问题的能力, 属于中档题.

【解析】设 $BC=h$, 由“阳马”定义知: “阳马” $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times h\times 2\times 3=$

$2h$. 而“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=3\times\frac{1}{2}\times 2\times h=3h$, 故三棱锥 $B_1-A_1C_1B$ 的体积 $V_2=$

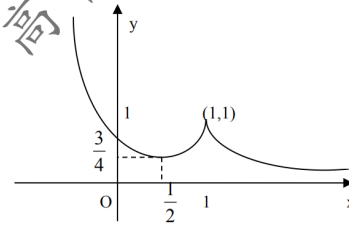
$3h-2h=h$, 于是“阳马” $B-A_1ACC_1$ 与三棱锥 $B_1-A_1C_1B$ 的体积之比, 即 $V_1: V_2=2: 1$.

8. 【答案】B

【命题意图】本题考查数形结合思想解决函数零点问题. 涉及到函数与方程相关知识, 二次函数、反比例函数的图像与性质. 数形结合思想是高考要重点考查的数学思想, 而函数与方程问题是最容易融入数形结合思想进行考查的知识内容之一, 特别是探究零点问题, 解答这类问题往往是把函数与方程相结合, 由方程分解出函数, 然后利用函数图像解决问题.

【解析】当 $x<1$ 时, $f(x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ 于是函数 $f(x)=$

$$\begin{cases} x^2-x+1, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases} \text{ 的图像如图所示,}$$



从图像中可以看出, 要使函数 $f(x)$ 与 $y=a$ 的图像有三个交点, 则须 $\frac{3}{4}<a<1$.

9. 【答案】B

【命题意图】本题考查分层抽样, 频率分布直方图及其古典概型. 统计是一门在实际生活中应用最为广泛的学科之一, 在高考中非常容易与实际问题相结合阐述应用类问题. 特别是把统计的其它知识、古典概型与频率分布直方图相交汇的题型更应值得我们重视.

【解析】从频率分布直方图中可知, 成绩在 $[70, 75)$ 的人数为 $0.04\times 5\times 10=2$ 人, 成绩在 $[75, 80)$ 的人数为 $0.06\times 5\times 10=3$ 人. 记成绩在 $[70, 75)$ 的人为 1, 2, 成绩在 $[75, 80)$ 的人为 a, b, c , 则所有基本事件有: $(1, 2),$

$(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (a, b), (a, c), (b, c)$, 共 10 个. 其中成绩在 $[75, 80]$ 间的学生恰好有一人的事件有: $(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)$, 共 6 个.

所以成绩在 $[75, 80]$ 间的学生恰好有一人的概率为 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

10. 【答案】A

【命题意图】本题考查等差数列的性质及运用. 数列的性质及其运用, 这是高考客观题考查数列问题的热点. 等差、等比数列的性质众多, 熟记这些性质是做好这类题型的前提.

【解析】 $a_m - \frac{1}{3}a_{m+2} = \frac{1}{3}(3a_m - a_{m+2}) = \frac{1}{3}(a_m + a_{m-2} + a_{m+2} - a_{m+2}) = \frac{1}{3}(a_m + a_{m-2})$

$= \frac{2}{3}a_{m-1} = 6, \therefore a_{m-1} = 9$, 而 $S_{2m-3} = 63$, $\therefore S_{2m-3} = \frac{(2m-3)(a_1 + a_{2m-3})}{2} = 63$, 可得

$(2m-3)a_{m-1} = (2m-3) \times 9 = 63$, 即 $2m-3 = 7$, 解得 $m = 5$.

11. 【答案】C

【命题意图】本小题主要考查对函数解析式的分析推理, 考查利用函数的单调性解不等式, 属于高档题.

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + x|x| + 2 = 3 - \frac{2}{3^x + 1} + x|x|$, $\therefore f(-x) = 3 - \frac{2}{3^{-x} + 1} - x|x|$

$= 3 - \frac{2 \cdot 3^x}{3^x + 1} - x|x|$, $\therefore f(x) + f(-x) = 4, \therefore f(a) + f(-a) = 4$, 而 $f(-a) + f(2a-3) > 4$, 即

$f(-a) + f(2a-3) > f(a) + f(-a)$, $\therefore f(2a-3) > f(a)$. 又通过函数 $y = x|x|$ 的图像可知其在 R 上单调

递增, $\therefore f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + x|x| = 1 - \frac{2}{3^x + 1} + x|x|$ 在 R 上单调递增, $\therefore 2a-3 > a$, 即 $a > 3$.

12. 【答案】B

【命题意图】本题考查利用导数确定函数的单调性、利用数形结合思想探究函数零点问题. 导数客观题的考查主要是以导数的几何意义、单调性、极值、最值为知识背景, 应当注意的是用导数解决函数问题一定要先确定函数的定义域, 否则结论很可能是错误的. 这是在导数问题上最容易出错的地方.

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 为定义在 R 上且图像是连续的偶函数, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 又 $\because$ 满足

$xf'(x) > 0$ (或 $xf'(x) < 0$) 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 恒成立, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上都单调. 由题意知 $g(x)$ 的

图像关于 $x = 4$ 轴对称, 在 $(-\infty, 4), (4, +\infty)$ 上都单调. 若 $g(x) = g\left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$,

则有 $x = 2 - \frac{1}{x+1}$ 或 $8 - x = 2 - \frac{1}{x+1}$, 当 $x = 2 - \frac{1}{x+1}$ 时, 变形可得 $x^2 - x - 1 = 0$, 有 2 个根,

且两根之和为 1; 当 $8 - x = 2 - \frac{1}{x+1}$ 时, 变形可得 $x^2 - 5x - 7 = 0$, 有 2 个根, 且两根之积为 5,

则满足方程 $g(x) = g\left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$ 的所有根之和 $1+5=6$.

13. 【答案】(2, 3)

【命题意图】本题考查运用命题的真假, 构建不等式求解参数的取值范围.

【解析】由已知 p 和 q 都是真命题, $\therefore \begin{cases} 0 < a < 3 \\ a > 2 \end{cases} \therefore 2 < a < 3$.

14. 【答案】相离

【命题意图】本题考查直线与圆的位置关系. 直线与圆的位置关系问题常用到的知识点是点到直线的距离公式, 点到直线的距离公式的运用又可以帮助我们建立方程求值, 该题就是这样一个解答思路.

【解析】将圆的方程化为标准方程得 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, $\therefore$ 圆心坐标为 $(-a, -b)$, 半径

$$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \text{ 又} \because \text{圆心到直线 } l: ax+by=0 \text{ 的距离 } d = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$\sqrt{a^2+b^2} > \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \text{ 故圆与直线的位置关系是相离.}$$

15. 【答案】-225

【命题意图】本题主要考查等差数列的通项公式、求和公式以及等差数列性质的应用. 熟记等差数列性质, 熟练运算是关键, 是中档题.

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d = \frac{a_6 - a_2}{6 - 2} = \frac{-19 + 27}{4} = 2$, $\therefore a_1 = -29$, $\therefore a_n = 2n - 31$. 令

$$\begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2n - 31 \leq 0 \\ 2(n+1) - 31 \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{29}{2} \leq n \leq \frac{31}{2}, \therefore n \in \mathbb{N}^+ \therefore n = 15, \text{ 即数列 } \{a_n\} \text{ 的前 15 项均为负}$$

值, $\therefore S_{15}$ 最小. $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的首项是 -29 , 公差为 2 , $\therefore S_{15} = \frac{15(-29 - 29 + 28)}{2} = -225$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$

的前 n 项和 S_n 的最小值为 -225 .

16. 【答案】 $y^2 = \frac{4\sqrt{66}}{11}x$

【命题意图】本题考查对抛物线方程的认识、理解及运算. 由于解题过程中要涉及到大量的运算, 所以在解题中要注意合理运用代换的方法以达到简化运算的目的, 考查转化和计算能力.

【解析】抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线 $x = -\frac{p}{2}$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得 $\frac{p^2}{8} + y^2 = 1$, 所以

$$y^2 = 1 - \frac{p^2}{8}, \text{ 即 } y = \pm \frac{\sqrt{16-2p^2}}{4}, \text{ 所以 } |AB| = \frac{\sqrt{16-2p^2}}{2}. \text{ 由于 } \triangle AFB \text{ 为等边三角形, 所以}$$

$$|FB| = |AB| = \frac{\sqrt{16-2p^2}}{2}, \text{ 且 } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{p}{|FB|}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2p}{\sqrt{16-2p^2}}, 16p^2 = 48 - 6p^2, p^2 =$$

$$\frac{24}{11}, \text{ 由于 } p > 0, \text{ 所以 } p = \frac{2\sqrt{66}}{11}, \text{ 故抛物线 } C \text{ 的方程为 } y^2 = \frac{4\sqrt{66}}{11}x.$$

17. 【命题意图】本题考查等差数列求通项公式, 裂项求和. 高考主观题考查数列问题一般规律是: 第二问考查数列求和, 而数列求和往往考查两种形式: 裂项求和与错位相减求和. 该题的求和就是裂项求和.

【解析】解: $\because a_1=1, a_3=a_2+2, \therefore q^2-q-2=0, \therefore q=2$ 或 $q=-1$,

$\because q>0, \therefore q=2$,

$$\therefore a_n=2^{n-1}. \text{ 又 } \because q=2, \therefore S_n=\frac{a_1 \times (1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1,$$

$$\text{又 } \because a_{n+1}=b_n S_{n+1} S_n,$$

$$\therefore S_{n+1}-S_n=b_n S_{n+1} S_n, \therefore b_n=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+1} S_n}, \text{ 即 } b_n=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}},$$

$$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

18. 【命题意图】本题主要考查函数性质与数形结合思想的应用, 函数零点问题, 利用函数与零点之间的关系转化为两个函数的图象的交点问题是解决本题的关键属于中档题.

$$\text{【解析】解: } \because f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1},$$

而 $y=2^x+1$ 为 R 上的增函数, 于是 $y=\frac{2}{2^x+1}$ 为 R 上的减函数,

故 $y=1-\frac{2}{2^x+1}$ 为 R 上的增函数.

(也可以用函数单调性的定义证明 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 为 R 上的增函数)

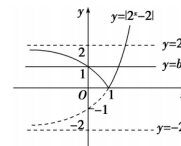
$$\text{令函数 } g(x)=f(2^x-2)+f(3-m)=0, \text{ 得 } f(2^x-2)=-f(3-m),$$

$$\text{由于函数 } f(x) \text{ 为 } R \text{ 上的奇函数, } \therefore f(2^x-2)=f(m-3)$$

$$\text{又 } \because f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1} \text{ 为 } R \text{ 上的增函数, } \therefore |2^x-2|=m-3,$$

$$\text{设 } b=m-3, \text{ 则方程 } |2^x-2|=m-3 \text{ 可转换为 } |2^x-2|=b$$

在同一平面直角坐标系中分别画出 $y=|2^x-2|$ 与 $y=b$ 的图象, 如图所示.



则当 $0 < b < 2$ 时, 两函数图象有两个交点, 即 $0 < m-3 < 2$, 于是 $3 < m < 5$ 时,

函数 $g(x) = f(2^x - 2) + f(3 - m)$ 有两个零点,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(3, 5)$.

19. 【命题意图】本题考查分层抽样, 古典概型, 离散型随机变量的数学期望. 高考对理科概率主观题的考查, 知识点一般集中于相互独立事件概率, 二项分布, 正态分布, 离散型随机变量的数学期望, 有时也会交汇统计知识, 特别要注意线性回归知识的融入交汇.

【解析】解: (1) 由题意知 2 月 11 日这一天新增的 25 人中有男性 15 人, 女性 10 人, 按性别分层抽取 5 名,

则男性被抽取的人数为 $15 \times \frac{5}{25} = 3$ 人, 女性被抽取的人数为 $10 \times \frac{5}{25} = 2$ 人,

记 3 名男性分别为 a, b, c , 2 名女性为 x, y , 则从这 5 人中抽取 2 人的情况有 (a, b)

$(a, c) (a, x) (a, y) (b, c) (b, x) (b, y) (c, x) (c, y) (x, y)$, 一共 10 种情况, 2 人中至少有 1 名女性的情况共有 7 种, 故所求概率为 $\frac{7}{10}$.

(2) X 所有可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$$P(x=0) = \frac{24}{48} \times \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(x=1) = \frac{24}{48} \times \frac{12}{48} + \frac{12}{48} \times \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{同理: } P(x=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{48},$$

$$P(x=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$P(x=4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{72},$$

$$P(x=5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$P(x=6) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{144},$$

$$\therefore E(X) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{11}{48} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{5}{72} \times 4 + \frac{1}{36} \times 5 + \frac{1}{144} \times 6 = \frac{5}{3}.$$

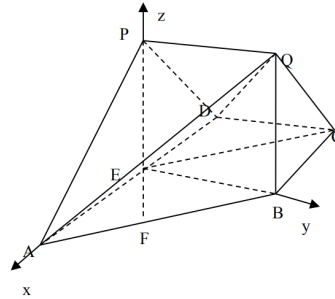
20. 【命题意图】本题主要考查面面垂直证明线面垂直、线面垂直证明线线垂直以及空间几何体中求解二面角. 解答空间几何体中垂直关系时, 一般要根据已知条件把空间中的线线、线面、面面之间垂直关系进行转化, 转化时要正确运用有关的定理, 找出足够的条件进行推理; 证明直线和平面垂直的常用方法有: (1) 利用判定定理; (2) 利用判定定理的推论; (3) 利用面面平行的性质; (4) 利用面面垂直的性质, 当两个平面垂直时, 在一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面.

考查二面角的余弦值的求法以及运算求解能力, 数形结合思想的应用, 是中档题.

【解析】解: $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形, $PA = PD$, E 为 AD 的中点, $\therefore$

$PE \perp AD$, 又 $DC \parallel BE$, $AD \perp CD$, $\therefore BE \perp AD$, $\therefore$ 令 EA 、 EB 、 EP 分别为 x 、 y 、 z 轴建立空

间直角坐标系 $E-xyz$, 如图所示,



则 $A(a, 0, 0)$ 、 $D(-a, 0, 0)$ 、 $B(0, a, 0)$ 、 $C(-a, a, 0)$ 、 $P(0, 0, a)$ 、 $Q(0, t, a)$ 。

$$(1) \overrightarrow{DQ} = (a, t, a), \overrightarrow{EC} = (-a, a, 0),$$

$$\because DQ \perp EC, \therefore \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \text{ 即 } -a^2 + at = 0,$$

$$\therefore t = a, \text{ 于是 } Q(0, a, a), \therefore \text{四边形 } PQBE \text{ 为矩形},$$

$$\text{故 } |PQ| = a.$$

$$(2) \text{ 设点 } F \text{ 为 } AB \text{ 中点, 连结 } EF, \because QB \perp \text{平面 } ABCD, \therefore QB \perp EF,$$

$$\text{而 } \triangle AEB \text{ 为等腰直角三角形, } \therefore EF \perp AB, \therefore EF \perp \text{平面 } ABQ, \therefore \overrightarrow{EF} \text{ 为平面 } ABQ \text{ 的一个法向量, 而}$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right).$$

$$\text{设 } \vec{n} = (x, y, z) \text{ 为平面 } ADQ \text{ 的一个法向量, 而 } \overrightarrow{DA} = (2a, 0, 0), \overrightarrow{DQ} = (a, a, a),$$

$$\text{又 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} 2ax = 0 \\ ax + ay + az = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = -1, \text{ 则 } y = 1, x = 0,$$

$$\therefore \vec{n} = (0, 1, -1).$$

$$\text{设二面角 } B-AQ-D \text{ 的平面角为 } \theta, \text{ 则}$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{二面角 } B-AQ-D \text{ 的平面角为 } \theta = 60^\circ$$

21. 【命题意图】本题考查椭圆方程的求解、直线与椭圆位置关系的应用——求解直线方程. 主观题中考查圆锥曲线题型主要是直线与圆锥曲线位置关系问题, 这是一般规律, 其特点是运算量大, 且逻辑思维要求高, 但并不是

没有规律可循, 解题的入手点应当是把直线方程与圆锥曲线方程联立方程组, 消去 y (或 x), 获取 x (或 y) 的一元二次方程, 然后通过韦达定理建立方程求值.

【解析】解: (1) 由题意可得 $|PF_1| = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$, 即 $b^2 = \frac{3}{2}a$, 而由椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 3

可得 $a+c=3$, 即 $a+\sqrt{a^2-b^2}=3$, $\therefore a^2 - \frac{3}{2}a = 9 - 6a + a^2$, 解得 $a=2$, $b^2=3$,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由点 $M(0, t)$ ($t > 0$) 可设直线 $l: y = kx + t$, 且 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立直线 l 和椭圆 C 方程组, 得 $\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 整理得:

$$(3+4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{3+4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4t^2 - 12}{3+4k^2}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + t)(kx_2 + t) = (1+k^2)x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = -3,$$

$$\text{于是有 } (1+k^2) \times \frac{4t^2 - 12}{3+4k^2} + kt \left(-\frac{8kt}{3+4k^2} \right) + t^2 = -3, \text{ 解得 } t = \pm \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 所以点 } M \left(0, \frac{\sqrt{21}}{7} \right).$$

设直线 l_1, l_2 的方程分别为 $y = kx + m$ 和 $y = kx - m$, 与椭圆联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 可得

$$(3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\text{于是 } \Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0, \text{ 解得 } m^2 = 4k^2 + 3,$$

$$\text{而直线 } l_1, l_2 \text{ 间的距离为 } d = \frac{2|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2\sqrt{\frac{m^2}{k^2 + 1}} = 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{95}}{5}, \text{ 解得 } k = \pm 2,$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } y = \pm 2x + \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

22. 【命题意图】本题考查利用导数确定函数单调性、及其函数单调性结合导数求解参数的取值范围. 导数综合题一般来说是高考试题中的压轴题, 也就是说是最难的一个题. 但是, 该题一般会设置 2-3 问, 且前两问难度都不会太大应试时不可放弃, 且前两问基本上考查的是常规问题, 即导数几何意义、单调性、极值或最值.

【解析】解: (1) 当 $b=0$, 函数 $g(x) = a(x-1)^2 + \ln x$, $\therefore g'(x) = 2a(x-1) + \frac{1}{x}$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递减,

$\therefore g'(x) = 2a(x-1) + \frac{1}{x} \leq 0$ 在区间 $[2, 3]$ 上恒成立,

即 $2a \leq \frac{1}{-x^2+x}$ 在区间 $[2, 3]$ 上恒成立, 只需 $2a$ 不大于 $\frac{1}{-x^2+x}$ 在 $[2, 3]$ 上的最小值即可.

$$\text{而 } \frac{1}{-x^2+x} = \frac{1}{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (2 \leq x \leq 3)$$

则当 $x=2$ 时, $-x^2+x$ 有最大值, 且最大值为 $-2^2+2=-2$,

$$\therefore \frac{1}{-x^2+x} \geq -\frac{1}{2}, \therefore 2a \leq -\frac{1}{2}, \text{ 即 } a \leq -\frac{1}{4}.$$

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{4}]$.

(2) 若 $b=a$, 则函数 $f(x) = e^{x-a} - \ln(x+a)$, 于是 $f'(x) = e^{x-a} - \frac{1}{x+a}$,

而 e^{x-a} 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\frac{1}{x+a}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f'(x) = e^{x-a} - \frac{1}{x+a}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又函数 $f(x)$ 区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 1, 说明存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$,

使得 $f'(x_0) = e^{x_0-a} - \frac{1}{x_0+a} = 0$, 即 $e^{x_0-a} = \frac{1}{x_0+a}$ (*),

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0-a} - \ln(x_0+a),$$

由 (*) 式得 $f(x)_{\min} = f(x_0) = \frac{1}{x_0+a} - \ln(x_0+a)$,

$\therefore \frac{1}{x_0+a} - \ln(x_0+a) = 1$, 显然 $x_0+a=1$ 是方程的解,

又 $\because$ 函数 $y = \frac{1}{x} - \ln x$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的减函数,

$\therefore$ 方程 $\frac{1}{x_0+a} - \ln(x_0+a) = 1$ 有且仅有唯一的解 $x_0+a=1$,

把 $x_0=1-a$ 代入 (*) 式得 $e^{1-2a}=1$,

$\therefore a = \frac{1}{2}$, 所求实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$.