

顺德区 2021 届高三第三次教学质量检测

数 学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(1-3i)z=2+i$, 则 $|z| =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2. 设集合 $A=\{x|-1<2-x<3\}$, $B=\{x|x^2-5x+4>0\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbb{R}}B) =$

- A. $[1,4)$ B. $(1,4)$ C. $[1,3)$ D. $(-1,3)$

3. 已知 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\cos(\frac{7\pi}{6}-\alpha) =$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{34}}{6}$ D. $-\frac{\sqrt{34}}{6}$

4. 某地积极响应党中央的号召,开展扶贫活动,扶贫第 x 年该地区贫困户年人均收入 y 的部分数据如下表:

年份	2015	2016	2017	2018	2019
年份编号 x	1	2	3	4	5
年人均收入 y (万元)	0.5	0.6	1	1.4	m

根据表中所给数据,求得 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.32x+0.08$, 则 2019 年该地区贫困户的实际年人均收入为

- A. 1.65 万元 B. 1.68 万元 C. 1.7 万元 D. 1.8 万元

5. 已知直线 l 经过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个虚轴端点以及一个焦点,且点 $O(0,0)$ 为坐标原点)到直线 l 的距离为 $\frac{c}{2}$, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. 已知圆 $C:x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 上存在两点 P,Q 关于直线 $l:ax-by+2=0(ab>0)$ 对称, 则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是

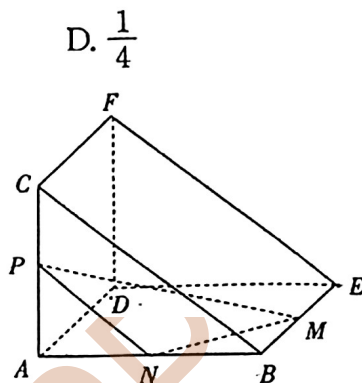
- A. 1 B. 8 C. 2 D. 4

7. “六艺”源于中国周朝的贵族教育体系,具体包括“礼、乐、射、御、书、数”.为弘扬中国传统文化,某校在周末学生业余兴趣活动中开展了“六艺”知识竞赛活动,现有六位同学,每位同学准备了“六艺”中的一类相关知识,且各不相同,每位同学随机从这六类知识中抽取不同的一项参加回答,则恰有三位同学抽到自己准备的知识的概率为

A. $\frac{1}{18}$ B. $\frac{2}{15}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 已知三棱柱 $ABC-DEF$, DA, DE, DF 两两互相垂直,且 $DA=DE=DF$, M, N 分别是 BE, AB 边的中点, P 是线段 CA 上任意一点,过三点 P, M, N 的平面与三棱柱 $ABC-DEF$ 的截面有以下几种可能:①三角形;②四边形;③五边形;④六边形.其中所有可能的编号是

A. ①②
B. ③④
C. ①②③
D. ②③④



二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 使“ $\log_2(2x-3) < 2$ ”成立的一个充分不必要条件是

A. $x > \frac{3}{2}$ B. $x < \frac{3}{2}$ 或 $x > 3$
C. $2 < x < 3$ D. $3 < x < \frac{7}{2}$

10. 设函数 $f(x) = e^x x^2 - b$, 则

A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
B. 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 取得极小值
C. 当 $f(x) = 0$ 只有一个零点时, b 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{e^2}, +\infty)$
D. 当 $b = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 0$ 有三个零点

11. 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x (ab \neq 0)$, 则以下说法正确的为

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
B. $f(x)$ 可能为偶函数
C. 若 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 时取得极值, 则函数 $g(x) = f(x + \frac{3\pi}{4})$ 是奇函数
D. 若 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 则 $a = b$

12. 数学中有许多形状优美、寓意独特的几何体,“等腰四面体”就是其中之一,所谓等腰四面体,就是指三组对棱分别相等的四面体.关于“等腰四面体”,以下结论正确的是

A. “等腰四面体”每个顶点出发的三条棱一定可以构成三角形
B. “等腰四面体”的四个面均为全等的锐角三角形
C. 三组对棱长度分别为 5, 6, 7 的“等腰四面体”的体积为 $2\sqrt{95}$
D. 三组对棱长度分别为 a, b, c 的“等腰四面体”的外接球直径为 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. $(x^2 - \frac{2}{x})^n$ 的展开式中,第 5 项为常数项,则 $n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 已知 $|a| = 1, |b| = \sqrt{3}$,若 $(a+b) \perp (2a-b)$,则向量 a, b 的夹角的余弦值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 若函数 $f(x) = \cos x - \frac{9}{2\pi^2}x^2$ 的定义域为 $[-\pi, \pi]$,则不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 已知直线 $l: 2x + y - 2 = 0$ 过抛物线 $C: y^2 = mx$ 的焦点 F ,且与 y 轴交于点 P , M 是抛物线 C 上一点, O 为坐标原点, FM 的中点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = \lambda (\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|} + \frac{\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PO}|})$, 则 $\angle PMF = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, 点 M 的坐标为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$. (本题第一空 3 分,第二空 2 分)

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $2a_2$ 是 a_3 和 $4a_1$ 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) $\underline{\hspace{2cm}}$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

请在①已知数列 $\{b_n\}$ 为递增的等差数列, 其中 $b_3 = 5$, 且 b_1, b_2, b_5 成等比数列, ②数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_7 = 13$, 且 $b_{n+2} + b_n = 2b_{n+1}$, ③等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, b_3 + b_5 = 14, S_9 = 81$ 这三个条件中任选一个, 补充在上面的横线上, 并完成解答.

注: 如果选择多个条件解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c \sin A = \sqrt{3}a(1 - \cos C)$.

(1) 求 C ;

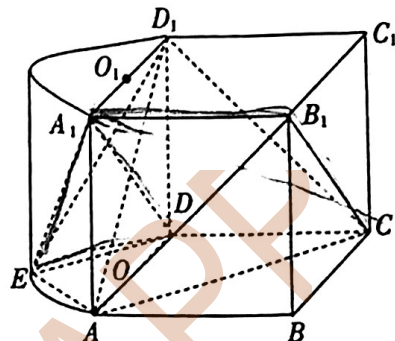
(2) 若 $AB = \sqrt{3}, \sin A = \frac{\sqrt{5}}{4}$, 延长 AC 至 D , 使 $CD = \sqrt{5}$, 求 BD 的长.

分

图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,以 A_1D_1DA 为轴截面有一半圆柱 OO_1 ,点 E 为圆弧 $\widehat{AD_1}$ 的中点.

(1)证明:平面 $A_1ED \parallel$ 平面 AB_1C .

(2)求二面角 $E-AD_1-C$ 的正弦值.



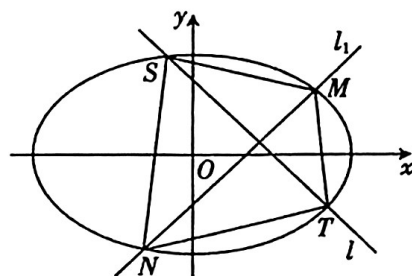
12 分)

已知 A, B 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, P 是椭圆 C 上一点(异于 A, B), 满足

$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -\frac{4}{9}$, 且 $a=6$. 斜率为 -1 的直线 l 交椭圆 C 于 S, T 两点, 且 $|ST|=4$.

(1)求椭圆 C 的方程及离心率;

(2)如图,设直线 $l_1: y=x+m$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点,求四边形 $MSNT$ 面积的最大值.



(12 分)

在某疫苗Ⅱ期临床研究中,按照研究方案要求,每位志愿者要在一次接种后的第 7 天、第 14 天和第 30 天各完成一次研究访视. 每次访视,调查该志愿者是否有不良反应,若有,则记录本次访视有不良反应. 若在这三次访视中,有不良反应的访视不超过 1 次,则该药物得 6 分,否则得 2 分. 假设三次访视中,每次是否有不良反应相互独立,且每次有不良反应的概率均为 $\frac{1}{2}$.

(1)求某志愿者在一次接种后有不良反应的访视次数 X 的分布列和期望.

(2)若参与实验的志愿者有 K 名,在一次接种实验中该药物获得的总分数不低于 $4K$,即可认为该疫苗通过Ⅱ期实验. 现有 8 名志愿者参与接种实验,则该疫苗通过Ⅱ期实验的概率是多少?

2. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x$.

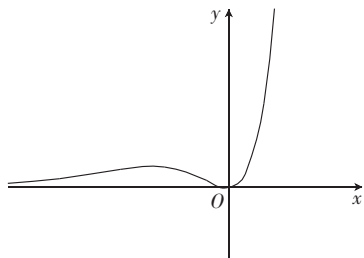
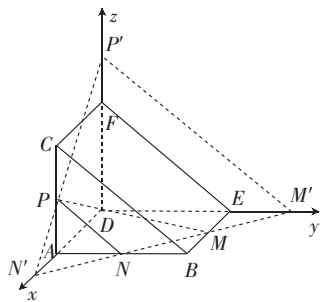
(1)若函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1] (t > 0)$ 上有极值,求 t 的取值范围及该极值;

(2)求使 $n(x-1) < f(x) + x + 1$ 对任意 $x > 1$ 恒成立的自然数 n 的取值集合.

顺德区 2021 届高三第三次教学质量检测

数学参考答案

1. B 设 $z=a+bi$, 则 $(1-3i)z=a+3b+(b-3a)i=2+i$, 可得 $a+3b=2, b-3a=1$, 所以 $a=-\frac{1}{10}, b=\frac{7}{10}$, 则 $z=-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i, |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 另解: 对 $(1-3i)z=2+i$ 两边同时取模可得 $|1-3i||z|=|2+i|$, 其中 $|1-3i|=\sqrt{10}, |2+i|=\sqrt{5}$, 则 $|z|=\frac{|2+i|}{|1-3i|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. C 因为 $A=\{x|-1<x<3\}, \complement_{\mathbb{R}}B=\{x|1\leq x\leq 4\}$, 所以 $A\cap(\complement_{\mathbb{R}}B)=\{x|1\leq x<3\}$.
3. B 因为 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{6}$,
故 $\cos(\frac{7\pi}{6}-\alpha)=\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha-\frac{\pi}{3})=-\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{6}$.
4. C 由 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$, 代入 $\hat{y}=0.32x+0.08$, 可得 $\bar{y}=1.04$, 即 $\frac{0.5+0.6+1+1.4+m}{5}=1.04$,
故 $m=1.7$.
5. D 根据对称性, 不妨设直线 l 经过双曲线的虚轴上端点 $(0, b)$ 以及右焦点 $(c, 0)$, 则直线 l 的方程为 $bx+cy=bc$. 点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{c}{2}$, 化简可得 $c^2=3b^2=3(c^2-a^2)$, 故 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
6. D 圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=9$, 圆心为 $(-1, 2)$. 由题意知直线 l 过圆心, 所以 $-a-2b+2=0$,
即 $a+2b=2$. 因为 $ab>0$, 所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(a+2b)=\frac{1}{2}(4+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a})\geq\frac{1}{2}(4+4)=4$, 当 $\frac{a}{b}=\frac{4b}{a}$,
即 $a=2b=1$ 时取等.
7. A 六位同学抽取题目的方式有 A_6^6 种, 恰有三位同学抽到自己准备的知识, 说明还有三位没有抽到自己准备的知识. 不妨设 A, B, C 三位同学没有抽到自己准备的知识, 利用列举法可知此时有两种方式. 故可知恰有三位同学抽到自己准备的知识的方式有 $C_6^3\times 2$ 种. 所得概率为 $\frac{C_6^3\times 2}{A_6^6}=\frac{1}{18}$.
8. C 以点 D 为原点, DA 为 x 轴, DE 为 y 轴, DF 为 z 轴. 延长 MN 分别交 x 轴, y 轴于点 N', M' . 连接 $N'P$ 交 z 轴于点 P' , 则过 P, M, N 三点的平面与过点 N', M', P' 的平面相同. 当点 P 与点 A 重合时, 截面为四边形; 当 $0<PA<\frac{1}{2}AC$ 时, 截面为五边形; $\frac{1}{2}AC\leq PA<AC$ 时, 截面为四边形; 当点 P 与点 C 重合时, 截面为三角形. 而该三棱柱只有五个面, 截面与每个面相交最多产生五条交线, 故截面形状最多为五边形, 即不可能为六边形.
9. CD 由 $\log_2(2x-3)<2=\log_2 4$, 解得 $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$, 故选 C, D.
10. AD 令 $f'(x)=e^x\cdot x\cdot(x+2)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=-2$. 当 $x\in(0, +\infty)\cup(-\infty, -2)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty), (-\infty, -2)$ 上单调递增; 当 $x\in(-2, 0)$ 时, $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上单调递减. 故 A 正确, B 错误. 画出函数 $g(x)=e^x\cdot x^2$ 的大致图象, 且结合 $g(-2)=\frac{4}{e^2}$, 可知 C 错误, D 正确.
11. AC 因为 $f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ ($\tan\varphi=\frac{b}{a}$), 所



以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 故 A 正确; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x) = f(-x)$, 即 $a \sin x + b \cos x = -a \sin x + b \cos x$, 即 $2a \sin x = 0$ 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 得 $a = 0$, 与 $ab \neq 0$ 矛盾, 故 B 不正确; 若 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 时取得极值, 由 $f(0) = f(\frac{\pi}{2})$, 得 $b = a$. 因为 $f(x) = a \sin x + a \cos x = \sqrt{2} a \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 所以 $g(x) = f(x + \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} a \sin(x + \pi) = -\sqrt{2} a \sin x$, 则 $g(x)$ 是奇函数, 故 C 正确; 若 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的对称中心, 则 $f(\frac{\pi}{4}) = 0$, 即 $a + b = 0$, 故 D 不正确.

12. ABC 如图, 将“等腰四面体”补成一个长方体.

设此“等腰四面体”的对棱长分别为 a, b, c ,

与之对应的长方体的长宽高分别为 x, y, z ,

$$\text{则} \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 = b^2, \\ x^2 + z^2 = c^2, \end{cases} \text{得} \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \\ y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \\ z^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \end{cases}$$

结合图形, 容易判断出 AB 都是正确的;

对于 C, 由 $a = 5, b = 6, c = 7$, 得 $x = \sqrt{19}, y = \sqrt{6}, z = \sqrt{30}$,

因为“等腰四面体”的体积是对应长方体的体积减去四个小三棱锥的体积,

所以“等腰四面体”的体积为 $xyz - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} xyz = \frac{1}{3} xyz = 2\sqrt{95}$, 故 C 正确;

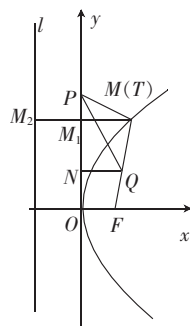
对于 D, 三组对棱长度分别为 a, b, c 的“等腰四面体”的外接球直径为 $2R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 故 D 不正确.

13. 6 通项公式 $T_{r+1} = C_n^r (x^2)^{n-r} \cdot (-2x^{-1})^r = (-2)^r C_n^r x^{2n-3r}$, 因为 $T_5 = 2^4 C_n^4 x^{2n-12}$ 为常数项, 所以 $n = 6$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 因为 $(a+b) \perp (2a-b)$, 所以 $(a+b) \cdot (2a-b) = 2a^2 - b^2 + a \cdot b = 0$. 因为 $|a| = 1, |b| = \sqrt{3}$, 所以 $a \cdot b = 1$, 故 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ 因为 $f(x)$ 是偶函数, 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = 0$, 所以 $f(x) > 0$ 等价于 $f(x) > f(\frac{\pi}{3})$, 故不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

16. $90^\circ; (1, 2)$ 由题意知 $F(1, 0), P(0, 2)$. 因为 $\overrightarrow{PQ} = \lambda(\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|} + \frac{\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PO}|})$, 所以 PQ 平分 $\angle OPM$. 作 $QN \perp y$ 轴于点 N , 作 $MM_1 \perp y$ 轴于点 M_1 , 交 C 的准线 l 于点 M_2 , 则 $2|QN| = |MM_1| + |OF| = |MM_2| = |MF|$, 故 $|QN| = \frac{1}{2}|MF| = |QM|$. 过点 Q 作 $QT \perp MP$ 于点 T , 由 PQ 是 $\angle OPM$ 的角平分线, 则 $|QN| = |QT| = |QM|$, 由垂线段的唯一性知 T, M 重合, 可得 $\angle PMF = 90^\circ$, 则 M 在以线段 PF 为直径的圆上. 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $(x_0 - \frac{1}{2})^2 + (y_0 - 1)^2 = \frac{5}{4}$, 将 $x_0 = \frac{y_0^2}{4}$ 代入得 $y_0(y_0^3 + 12y_0 - 32) = 0$, 易知 $y_0 \neq 0$, 所以 $y_0^3 + 12y_0 - 32 = (y_0 - 2)(y_0^2 + 2y_0 + 16) = 0$, 得 $y_0 = 2$, 所以 $x_0 = 1$. 故 M 的坐标为 $(1, 2)$.



17. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = a_1 q = q, a_3 = a_1 q^2 = q^2$ 1 分

因为 $2a_2$ 是 a_3 和 $4a_1$ 的等差中项,

所以 $4a_2 = a_3 + 4a_1$, 即 $4q = q^2 + 4$, 解得 $q = 2$, 3 分

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$ 5 分

(2) 若选①: 设 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

则 $\begin{cases} b_1 b_5 = b_2^2, \\ b_3 = 5, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b_1(b_1 + 4d) = (b_1 + d)^2, \\ b_1 + 2d = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases}$ 8 分

故 $b_n = 2n - 1$ 9 分

若选②: 因为 $b_{n+2} + b_n = 2b_{n+1}$, 所以 $\{b_n\}$ 为等差数列. 6 分

因为 $b_1 = 1, b_7 = 13$, 所以公差 $d = \frac{13-1}{7-1} = 2$ 8 分

故 $b_n = 2n - 1$ 9 分

若选③: 设 $\{b_n\}$ 的公差为 d .

因为 $b_3 + b_5 = 14, S_9 = 81$, 所以 $b_4 = 7, b_5 = 9$, 即 $\begin{cases} b_1 + 3d = 7, \\ b_1 + 4d = 9, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases}$ 8 分

故 $b_n = 2n - 1$ 9 分

$T_n = \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{(1+2n-1)n}{2} = 2^n + n^2 - 1$ 10 分

18. 解: (1) 由正弦定理及 $c \sin A = \sqrt{3}a(1 - \cos C)$,

得 $\sin A \sin C = \sqrt{3} \sin A - \sqrt{3} \sin A \cos C$ 2 分

因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin C = \sqrt{3}(1 - \cos C)$, 3 分

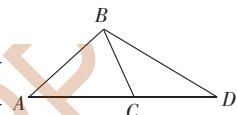
所以 $\sin C + \sqrt{3} \cos C = 2 \sin(C + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, 所以 $\sin(C + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} < C + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin A}$, 8 分

即 $BC = \frac{AB \sin A}{\sin \angle ACB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 9 分

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理, 得 $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD} = \frac{\sqrt{35}}{2}$ 12 分



19. (1) 证明: 因为点 E 是圆弧 AD 的中点,

所以 $\triangle AED$ 为等腰直角三角形, $\angle ADE = 45^\circ$ 1 分

因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,

所以 $\angle DAC = 45^\circ$, 所以 $AC \parallel ED$ 3 分

因为 $B_1C \parallel A_1D, AC \cap B_1C = C, ED \cap A_1D = D$,

所以平面 $A_1ED \parallel$ 平面 AB_1C 5 分

(2) 解: 不妨设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4.

如图, 以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $D - xyz$,

则 $E(2, -2, 0), A(4, 0, 0), D_1(0, 0, 4), C(0, 4, 0)$, 7 分

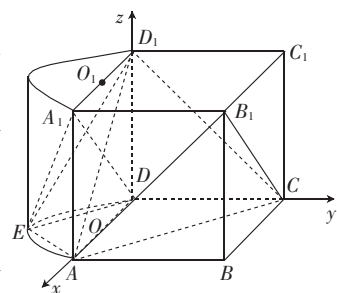
又 $\overrightarrow{EA} = (2, 2, 0), \overrightarrow{ED_1} = (-2, 2, 4)$.

设平面 EAD_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{EA} \cdot \mathbf{m} = 2x + 2y = 0, \\ \overrightarrow{ED_1} \cdot \mathbf{m} = -2x + 2y + 4z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, -1, 1)$ 9 分

易知平面 AD_1C 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 10 分

因为 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{3}$, 所以二面角 $E - AD_1 - C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 12 分



20. 解: (1) 方法一: 设点 P 为 (x, y) , 点 A, B 分别为 $(-6, 0), (6, 0)$.

因为 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y}{x+6} \cdot \frac{y}{x-6} = -\frac{4}{9}$, 所以 $4x^2 + 9y^2 = 144$ 2 分

因为 P 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 即 $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{36}$, 代入上式即可得 $\frac{b^2}{4} = 4$.

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 4 分

离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 5 分

方法二: 设点 P 为 (x, y) , 点 A, B 为 $(-6, 0), (6, 0)$.

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y}{x+6} \cdot \frac{y}{x-6} = -\frac{4}{9},$$

即 $4x^2 + 9y^2 = 144$ 3 分

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 4 分

离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 5 分

(2) 因为 $l \perp l_1$, 所以四边形 $MSNT$ 的面积 $S_{MSNT} = \frac{1}{2} |ST| \cdot |MN|$ 6 分

由题意得 $|ST| = 4$, 则 $S_{MSNT} = 2 |MN|$.

即当 $|MN|$ 取到最大值时, S_{MSNT} 取到最大值. 7 分

联立直线 l_1 与椭圆 C 的方程, 可得 $13x^2 + 18mx + 9m^2 - 144 = 0$.

由 $\Delta > 0$, 可得 $m^2 < 52$.

设点 M, N 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{18m}{13}, x_1 x_2 = \frac{9m^2 - 144}{13}$, 9 分

所以 $|MN| = \sqrt{2 \left[\left(-\frac{18m}{13}\right)^2 - 4 \times \frac{9m^2 - 144}{13} \right]} = \frac{12\sqrt{2} \sqrt{-m^2 + 52}}{13}$ 10 分

显然当 $m = 0$ 时, $|MN|$ 取到最大值, 最大值为 $\frac{24\sqrt{26}}{13}$ 11 分

故 S_{MSNT} 的最大值为 $\frac{48\sqrt{26}}{13}$ 12 分

21. 解: (1) 由题意知 $X \sim B(3, \frac{1}{2})$,

$$\text{则 } P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}, P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \text{ 4 分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ 5 分}$$

(2) 当 $K = 8$ 时, $4K = 32$. 设该药物获得 6 分的次数为 x , 则获得 2 分的次数为 $8 - x$. 根据每次实验的相互独立性可知通过次数 $x \sim B(8, \frac{1}{2})$ 7 分

由 $6x + 2(8 - x) \geq 32$, 可得 $x \geq 4$ 8 分

由第(1)问可知, 该药物获得 6 分的概率 $P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$, 9 分

则当 $x = 4, 5, 6, 7, 8$ 时, 该疫苗通过 II 期实验.

设该疫苗通过 II 期实验的概率为 P ,

$$\text{则 } P = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) + P(x=8).$$

$$\text{因为 } P(x=4) = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{C_8^4}{2^8} = \frac{70}{2^8}; P(x=5) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{C_8^5}{2^8} = \frac{56}{2^8};$$

$$P(x=6) = C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{C_8^6}{2^8} = \frac{28}{2^8}; P(x=7) = C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{C_8^7}{2^8} = \frac{8}{2^8};$$

$$P(x=8) = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{C_8^1}{2^8} = \frac{1}{2^8}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } P = \frac{70+56+28+8+1}{2^8} = \frac{163}{256}.$$

$$\text{故该疫苗通过 II 期实验的概率为 } \frac{163}{256}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (1) } f'(x) = \ln x + 1, \text{ 由 } f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < \frac{1}{e}; \text{ 由 } f'(x) > 0, \text{ 得 } x > \frac{1}{e}.$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } (0, \frac{1}{e}) \text{ 上单调递减, 在 } (\frac{1}{e}, +\infty) \text{ 上单调递增.} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 在 } [t, t+1] (t > 0) \text{ 上有极值, 所以 } \begin{cases} t < \frac{1}{e}, \\ t+1 > \frac{1}{e}, \\ t > 0, \end{cases} \text{ 得 } 0 < t < \frac{1}{e}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$f(x)_{\text{极小值}} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } n(x-1) < f(x) + x + 1 \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{所以 } n < \frac{x \ln x + x + 1}{x-1} \text{ 对任意 } x > 1 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x + x \ln x + 1}{x-1}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{(\ln x + 2)(x-1) - (x + x \ln x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 3}{(x-1)^2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } u(x) = x - \ln x - 3, \text{ 则 } u'(x) = 1 - \frac{1}{x},$$

$$\text{因为 } x > 1, \text{ 所以 } u'(x) > 0, \text{ 所以 } u(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上为增函数.} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } u(4) = 1 - \ln 4 < 0, u(5) = 2 - \ln 5 > 0,$$

$$\text{所以存在 } x_0 \in (4, 5), \text{ 使 } u(x_0) = x_0 - \ln x_0 - 3 = 0,$$

$$\text{当 } x \in (1, x_0) \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 函数 } y = g(x) \text{ 单调递减;}$$

$$\text{当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } g'(x) > 0, \text{ 函数 } y = g(x) \text{ 单调递增.} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 + x_0 \ln x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0 + x_0(x_0 - 3) + 1}{x_0 - 1} = x_0 - 1, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } n < x_0 - 1 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{因为 } x_0 \in (4, 5), \text{ 所以 } x_0 - 1 \in (3, 4), \text{ 则 } n \leq 3, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故自然数 } n \text{ 的取值集合为 } \{0, 1, 2, 3\}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$