解析几何-期中必做题

1 已知椭圆$C: mx^2+3my^2=1\,(m>0)$的长轴长为$2\sqrt{6}$，O为坐标原点．

（1）求椭圆C的方程和离心率；

（2）设点$A\,(3,0)$，动点B在y轴上，动点P在椭圆C上，且P在y轴的右侧，若$|BA|=|BP|$，求四边形$OPAB$面积的最小值．

答案 （1）离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

（2）四边形$OPAB$面积的最小值为$3\sqrt{3}$．

解析 （1）由题意，椭圆$C:\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{3m}}=1$

所以$a^2=\dfrac{1}{m}$，$b^2=\dfrac{1}{3m}$，

故$2a=2\sqrt{\dfrac{1}{m}}=2\sqrt{6}$，解得$m=\dfrac{1}{6}$，

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

因为$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，

所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

（2）设线段AP的中点为D，

因为$|BA|=|BP|$，

所以$BD\perp AP$，

由题意，直线BD的斜率存在，设点$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，

则点D的坐标为$(\dfrac{x_0+3}{2},\dfrac{y_0}{2})$，

且直线AP的斜率$k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0-3}$．

所以直线BD的斜率为$-\dfrac{1}{k_{AP}}=\dfrac{3-x_0}{y_0}$，

所以直线BD的方程为：$y-\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{3-x_0}{y_0}(x-\dfrac{x_0+3}{2})$

令$x=0$，得$y=\dfrac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0}$，则$B(0,\dfrac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0})$，

由$\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，得$x_0^2=6-3y_0^2$．

化简，得$B(0,\dfrac{-2y_0^2-3}{2y_0})$．

所以四边形$OPAB$的面积

$$S_{OPAB}=S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times 3\times|y_0|+\frac{1}{2}\times 3\times\left|\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|=\frac{3}{2}(|y_0|+\left|\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|)$$

$$=\frac{3}{2}(2|y_0|+\frac{3}{2|y_0|})\geqslant\frac{3}{2}\times 2\sqrt{2|y_0|\times\frac{3}{2|y_0|}}=3\sqrt{3},$$

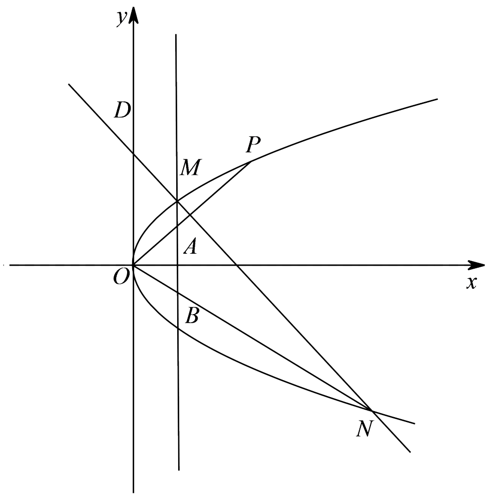
当且仅当$2y_0=\frac{3}{2y_0}$，即$y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$时等号成立．

所以四边形$OPAB$面积的最小值为$3\sqrt{3}$．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的性质
  - 直线与圆锥曲线
    - 弦长或面积问题
    - 中点弦问题

2 已知抛物线$C:y^2=2px$过点$P(1,1)$．过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$作直线$l$与抛物线$C$交于不同的两点$M$，$N$，过点$M$作$x$轴的垂线分别与直线$OP$，$ON$交于点$A$，$B$，其中$O$为原点．



（1）求抛物线C的方程，并求其焦点坐标和准线方程．

（2）求证：A为线段BM的中点．

答案 （1）抛物线方程为$y^2=x$，焦点坐标为$\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{1}{4}$．

（2）证明见解析

解析 （1）将$P(1,1)$代入抛物线方程得$p=\frac{1}{2}$.

抛物线方程为$y^2=x$，焦点坐标为$\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{1}{4}$.

（2）因为直线l与抛物线有两个交点，故直线l斜率存在且不为0，

设其方程为$y=kx+\frac{1}{2}$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} y^2=x \\ y=kx+\frac{1}{2} \end{cases}$，得$ky^2-y+\frac{1}{2}=0$.

$y_1+y_2=\frac{1}{k}$，$y_1y_2=\frac{1}{2k}$

直线OP，ON的方程分别为$y=x$和$y=\frac{y_2}{x_2}x$，

则A，B两点坐标分别为(x_1,x_1)，$(x_1,\frac{x_1y_2}{x_2})$.

故线段BM中点的坐标为$(x_1,\frac{y_1+\frac{x_1y_2}{x_2}}{2})$，

其中$\frac{y_1+\frac{x_1y_2}{x_2}}{2}=x_1\cdot\frac{\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}}{2}=x_1\cdot\frac{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}}{2}=x_1\cdot\frac{y_1+y_2}{2y_1y_2}=x_1\cdot\frac{\frac{1}{k}}{2\cdot\frac{1}{2k}}=x_1$.

故A为线段BM的中点 .

考点 一解析几何

- 抛物线
  - 抛物线的定义、图形及标准方程
  - 抛物线的性质
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系
  - 中点弦问题

3 已知椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0,-1)$，且离心率$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆M的方程；

（2）是否存在菱形$ABCD$，同时满足下列三个条件：

①点A在直线$y=2$上；

②点B，C，D在椭圆M上；

③直线BD的斜率等于1.

如果存在，求出A点坐标；如果不存在，说明理由.

答案 （1）椭圆M的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（2）不存在满足题意的菱形$ABCD$.

解析 （1）由题意得：$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2-b^2=c^2. \end{cases}$

解得：$\begin{cases} a^2=3, \\ b^2=1. \end{cases}$

所以 椭圆M的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（2）不存在满足题意的菱形$ABCD$，理由如下：

假设存在满足题意的菱形$ABCD$.

设直线BD的方程为$y=x+m$，$B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，线段BD的中点$Q(x_0,y_0)$，

点$A(t,2)$.

由$\begin{cases} x^2+3y^2=3, \\ y=x+m \end{cases}$得$4y^2-2my+m^2-3=0$. 由$\Delta=(2m)^2-16\left(m^2-3\right)>0$ ，

解得$-2<m<2$.

因为 $y_1+y_2=\frac{m}{2}$ ，

所以 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m}{4}$.

因为 四边形$ABCD$为菱形，

所以 Q是AC的中点.

所以 C点的纵坐标$y_C=2y_0-2=\frac{m}{2}-2<-1$.

因为 点C在椭圆M上，

所以 $y_C\geqslant-1$.这与$y_C<-1$矛盾.

所以 不存在满足题意的菱形$ABCD$.

考点 解析几何
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系
  - 中点弦问题

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，三点$P_1\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_3\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$中恰有二点在椭圆$C$上，且离心率为$e=\frac{1}{2}$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）设P为椭圆C上任一点，A_1,A_2为椭圆C的左右顶点，M为PA_2中点，求证：直线PA_2与直线OM它们的斜率之积为定值．

（3）若椭圆C的右焦点为F，过$B(4,0)$的直线l与椭圆C交于D,E，求证：直线FD与直线FE关于直线$x=1$对称．

答案　（1）$1\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）证明见解析．

（3）证明见解析．

解析　（1）由椭圆性质得：$P_1\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$P_3\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$在椭圆上，

由$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$①

$e=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{4}$②

得：$a^2=4,b^2=3,c^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）设$P(x_0,y_0)$为椭圆上任一点，

$PM=MA_2,A_1O=OA_2\Rightarrow OM//PA_1$，

$k_{PA_2}=\frac{y_0}{x_0-2},k_{OM}=k_{PA_1}=\frac{y_0}{x_0+2}$

得：$k_{PA_2}\cdot k_{OM}=\frac{y^2{}_0}{x^2{}_0-4}=-\frac{3}{4}$．

（3）设直线l：$y=k(x-4)$，

设$D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$，联立得：

$\begin{cases}y=k(x-4)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}\\ x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}\end{cases}$，

$k_{FD}+k_{FE}=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}$
$=\frac{k[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8]}{(x_1-1)(x_2-1)}$．

代入得，$k_{FD}+k_{FE}=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}$
$=\frac{k[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8]}{(x_1-1)(x_2-1)}=0$．

得：$k_{FD}=-k_{FE}\Rightarrow\angle A_1FD=\angle A_2FE$，

故直线直线FD与直线FE关于直线$x=1$对称．

考点

- 函数与导数
  - 二次函数
    - 一元二次方程
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率
    - 椭圆的性质
  - 直线与圆锥曲线
    - 定值问题

5 在平面直角坐标系中xOy中，动点E到定点$(1,0)$的距离与它到直线$x=-1$的距离相等．

（1）求动点E的轨迹C的方程．

（2）设动直线$l:y=kx+b$与曲线C相切于点P，与直线$x=-1$相交于点Q．

证明：以PQ为直径的圆恒过x轴上某定点．

答案 （1）$y^2=4x$．

（2）证明见解析．

解析 （1）设动点E的坐标为(x,y)．由抛物线定义知，动点E的轨迹为以$(1,0)$为焦点，

$x=-1$为准线抛物线．

所以动点E的轨迹C的方程为：$y^2=4x$．

（2）设直线l的方程为：$y=kx+b$．（显然$k\neq 0$）由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+b,\end{cases}$得$ky^2-4y+4b=0$

．因为直线l与抛物线相切，所以$\Delta=16-16kb=0$，$b=\dfrac{1}{k}$．所以直线l的方程

为$y=kx+\dfrac{1}{k}$．令$x=-1$，得$y=-k+\dfrac{1}{k}$，所以$Q(-1,-k+\dfrac{1}{k})$．

设切点坐标$P(x_0,y_0)$，则$k{y_0}^2-4y_0+\frac{4}{k}=0$，解得$P(\frac{1}{k^2},\frac{2}{k})$．

设$M(m,0)$，

则$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MP}=(\frac{1}{k^2}-m)(-1-m)+\frac{2}{k}(-k+\frac{1}{k})$

$=-\frac{1}{k^2}+m-\frac{m}{k^2}+m^2+\frac{2}{k^2}-2$．

$=-(m-1)(\frac{1}{k^2}-m-2)$．当$m=1$时，$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MP}=0$．

所以以PQ为直径的圆恒过x轴上定点$M(1,0)$．

考点 一解析几何
- 抛物线
  - 抛物线的定义、图形及标准方程
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系
  - 过定点问题

6 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0,-1)$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）过点$F(1,0)$作斜率为$k\,(k\neq 0)$的直线l，l与椭圆C交于M，N两点，若线段MN的垂直平分线交x轴于点P，求证：$\frac{|MN|}{|PF|}$为定值．

答案 （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）证明见解析．

解析 （1）根据题意$\begin{cases}b=1\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$解得：$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）设直线l的方程为$y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

由$\Delta>0$得$k\in\mathbf{R}$且$k\neq0$，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，线段MN中点$Q(x_0,y_0)$，

那么$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2}{2k^2+1},y_0=k(x_0-1)=\frac{-k}{2k^2+1}$，

设$P(p,0)$，根据题意$PQ\perp MN$，

所以$\dfrac{y_0}{x_0-p}=\dfrac{\frac{-k}{2k^2+1}}{\frac{2k^2}{2k^2+1}-p}=-\dfrac{1}{k}$，得$p=\dfrac{k^2}{2k^2+1}$，

所以$|PF|=1-\dfrac{k^2}{2k^2+1}=\dfrac{k^2+1}{2k^2+1}$，$|MN|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\dfrac{4k^2}{2k^2+1}\right)^2-\dfrac{4(2k^2-2)}{2k^2+1}\right]}=\dfrac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2k^2+1}$

所以$\dfrac{|MN|}{|PF|}=2\sqrt{2}$为定值．

考点

- 函数与导数
  - 二次函数
    - 一元二次方程
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
    - 直线的位置关系
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率
  - 直线与圆锥曲线
    - 弦长或面积问题
    - 定值问题

7 已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且点$T(2,1)$在椭圆上．设与$OT$平行的直线$l$与椭圆$C$相交于$P$，$Q$两点，直线$TP$，$TQ$分别与$x$轴正半轴交于$M$，$N$两点．

（1）求椭圆C的标准方程．

（2）判断$|OM|+|ON|$的值是否为定值，并证明你的结论．

答案

（1）$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）是定值，$|OM|+|ON|=4$

解析

（1）由题意$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，

解得：$a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$．

故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）假设直线TP或TQ的斜率不存在，

则P点或Q点的坐标为$(2,-1)$，

直线l的方程为$y+1=\frac{1}{2}(x-2)$，即$y=\frac{1}{2}x-2$．

联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=\frac{1}{2}x-2\end{cases}$，得$x^2-4x+4=0$，

此时，直线l与椭圆C相切，不合题意．

故直线TP和TQ的斜率存在．

方法1：

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则

直线TP：$y-1=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$，

直线TQ：$y-1=\frac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)$，

故$|OM|=2-\frac{x_1-2}{y_1-1}$，$|ON|=2-\frac{x_2-2}{y_2-1}$，

由直线OT：$y=\frac{1}{2}x$，设直线PQ：$y=\frac{1}{2}x+t$（$t\neq0$），

联立方程，$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=\frac{1}{2}x+t\end{cases}\Rightarrow x^2+2tx+2t^2-4=0$，

当$\Delta>0$时，$x_1+x_2=-2t$，$x_1x_2=2t^2-4$，

$|OM|+|ON|=4-(\frac{x_1-2}{y_1-1}+\frac{x_2-2}{y_2-1})$

$=4-(\frac{x_1-2}{\frac{1}{2}x_1+t-1}+\frac{x_2-2}{\frac{1}{2}x_2+t-1})$

$=4-\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{\frac{1}{4}x_1x_2+\frac{1}{2}(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2}$

$=4-\frac{2t^2-4+(t-2)(-2t)-4(t-1)}{\frac{1}{4}(2t^2-4)+\frac{1}{2}(t-1)\cdot(-2t)+(t-1)^2}$

$=4$．　　14分

方法2：

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线TP和TQ的斜率分别为k_1和k_2，

由直线OT：$y=\frac{1}{2}x$，设直线PQ：$y=\frac{1}{2}x+t$（$t\neq0$），

联立方程，$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=\frac{1}{2}x+t\end{cases}\Rightarrow x^2+2tx+2t^2-4=0$．

当$\Delta > 0$时，$x_1 + x_2 = -2t$，$x_1x_2 = 2t^2 - 4$．

$$k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}x_1 + t - 1}{x_1 - 2} + \frac{\frac{1}{2}x_2 + t - 1}{x_2 - 2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + (t-2)(x_1 + x_2) - 4(t-1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$$
$$= \frac{2t^2 - 4 + (t-2)(-2t) - 4(t-1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$$
$$= 0．$$

故直线TP和直线TQ的斜率和为零，

故$\angle TMN = \angle TNM$，

故$TM = TN$，

故T在线段MN的中垂线上，即MN的中点横坐标为2

故$|OM| + |ON| = 4$．

考点

- 解析几何
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系
    - 定值问题

8 已知椭圆$C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$A(2,0)$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）设M, N是椭圆C上不同于点A的两点，且直线AM, AN的斜率之积等于$-\dfrac{1}{4}$．试问直线MN是否过定点？若是，求出该点的坐标．若不是，请说明理由．

答案 （1）$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$．

（2）是，$(0,0)$．

解析 （1）由已知有$\begin{cases} a = 2 \\ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$，解得$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$，

椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$．

（2）若直线MN斜率存在，设直线MN方程为$y = kx + n$．

由$\begin{cases} y = kx + n \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$消去$y$，得$(1 + 4k^2)x^2 + 8knx + 4n^2 - 4 = 0$．

当$\Delta > 0$，设$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，

则$x_1+x_2=-\frac{8kn}{1+4k^2}$①，$x_1x_2=\frac{4n^2-4}{1+4k^2}$②．

由$k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{1}{4}$以及$y_1=kx_1+n$，$y_2=kx_2+n$整理，

得$(1+4k^2)x_1x_2+(4nk-2)(x_1+x_2)+(4+4n^2)=0$．

将①，②代入上式，整理，得$n^2+2kn=0$，解得$n=0$或$n=-2k$．

当$n=0$时，直线$y=kx+n$过$(0,0)$；当$n=-2k$时，直线$y=kx+n$过$(2,0)$（舍）．

若直线MN斜率不存在，则直线AM,AN斜率互为相反数．

不妨设$k_{AM}=-\frac{1}{2},k_{AN}=\frac{1}{2}$，于是直线$AM:y=-\frac{1}{2}(x-2)$与椭圆交于$M(0,1)$，

由对称性可知直线AN与椭圆交于$N(0,-1)$．

所以直线MN也过$(0,0)$．

综上，直线MN过定点$(0,0)$．

考点 解析几何
- 直线与方程
  - 直线的倾斜角与斜率
  - 直线的方程
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 椭圆的离心率
  - 椭圆的性质
- 直线与圆锥曲线
  - 过定点问题

9 已知圆$O:x^2+y^2=4$和椭圆$C:x^2+2y^2=4$，F是椭圆C的左焦点．

（1）求椭圆C的离心率和点F的坐标．

（2）点P在椭圆C上，过P作x轴的垂线，交圆O于点Q（P,Q不重合），l是过点Q的圆O的切线．圆F的圆心为点F，半径长为$|PF|$．试判断直线l与圆F的位置关系，并证明你的结论．

答案 （1）$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$F\left(-\sqrt{2},0\right)$．

（2）相切，证明见解析．

解析 （1）由题意，椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．所以 $a^2=4$，$b^2=2$，从而 $c^2=a^2-b^2=2$．因此 $a=2$，$c=\sqrt{2}$．故椭圆C的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．椭圆$C$的左焦点$F$的坐标为$(-\sqrt{2},0)$．

（2）直线l与圆F相切．证明如下：

设$P(x_0,y_0)$，其中$-2<x_0<2$，则$x_0^2+2y_0^2=4$，

依题意可设$Q(x_0,y_1)$，则$x_0^2+y_1^2=4$．

直线l的方程为 $y-y_1=-\frac{x_0}{y_1}(x-x_0)$，

整理为 $x_0x+y_1y-4=0$．

所以圆F的圆心F到直线l的距离 $d=\frac{|-\sqrt{2}x_0-4|}{\sqrt{x_0^2+y_1^2}}=|\frac{\sqrt{2}}{2}x_0+2|$．

因为 $|PF|^2=(x_0+\sqrt{2})^2+y_0^2=(x_0+\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}(4-x_0^2)=\frac{1}{2}x_0^2+2\sqrt{2}x_0+4$．

所以 $|PF|^2=d^2$，

即 $|PF|=d$，

所以 直线l与圆F相切．

考点

- 解析几何
  - 圆与方程
    - 直线与圆的位置关系
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率

10 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）过椭圆C的左焦点的直线l_1与椭圆C交于A,B两点，直线l_2过坐标原点且与直线l_1的斜率互为相反数．若直线l_2与椭圆交于E,F两点且均不与点A,B重合，设直线AE与x轴所成的锐角为θ_1，直线BF与x轴所成的锐角为θ_2，判断θ_1与θ_2的大小关系并加以证明．

答案 （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）$\theta_1=\theta_2$，证明见解析．

解析

（1）

由题可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ c=1\end{cases}$．

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）结论:$\theta_1=\theta_2$，理由如下:

由题知直线l_1斜率存在，

设$l_1:y=k(x+1),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

联立$\begin{cases}y=k(x+1)\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$，

消去y得$(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

由题易知$\Delta>0$恒成立，

由韦达定理得$x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

因为l_2与l_1斜率相反且过原点，

设$l_2:y=-kx$，$E(x_3,y_3),F(x_4,y_4)$，

联立$\begin{cases}y=-kx\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$

消去y得$(1+2k^2)x^2-2=0$，

由题易知$\Delta>0$恒成立，

由韦达定理得$x_3+x_4=0,x_3x_4=\frac{-2}{1+2k^2}$，

因为E,F两点不与A,B重合，

所以直线AE,BF存在斜率k_{AE},k_{BF}，

则$k_{AE}+k_{BF}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}+\frac{y_2-y_4}{x_2-x_4}$

$=\frac{k(x_1+1)+kx_3}{x_1-x_3}+\frac{k(x_2+1)-kx_3}{x_2+x_3}$

$=k\cdot\frac{(x_1+x_3+1)(x_2+x_3)+(x_2-x_3+1)(x_1-x_3)}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}$

$=k\cdot\frac{2x_1x_2+2x_3^2+x_1+x_2}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}$

$=k\cdot\frac{\frac{2(2k^2-2)}{1+2k^2}+\frac{2\times2}{1+2k^2}+\frac{-4k^2}{1+2k^2}}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}$

$=0$

所以直线AE,BF的倾斜角互补，

所以$\theta_1=\theta_2$．

考点

- 函数与导数
  - 二次函数
    - 一元二次方程
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率

11 已知圆M：$(x-\sqrt{2})^2+y^2=r^2$（$r>0$）．若椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右顶点为圆$M$的圆心，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）若存在直线l：$y=kx$，使得直线l与椭圆C分别交于A,B两点，与圆M分别交于G,H两点，点G在线段AB上，且$|AG|=|BH|$，求圆M半径r的取值范围．

答案 （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）$\sqrt{2}\leq r<\sqrt{3}$．

解析 （1）设椭圆的焦距为$2c$，

因为$a=\sqrt{2},\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$c=1$，所以$b=1$．

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由直线l与椭圆C交于两点A，B，则$\begin{cases} y=kx \\ x^2+2y^2-2=0 \end{cases}$

所以$(1+2k^2x^2-2=0$，则$x_1+x_2=0$，$x_1x_2=-\frac{2}{1+2k^2}$

所以$|AB|=\sqrt{(1+k^2)\frac{8}{1+2k^2}}=\sqrt{\frac{8(1+k^2)}{1+2k^2}}$

点$M(\sqrt{2},0)$到直线l的距离$d=\frac{|\sqrt{2}k|}{\sqrt{1+k^2}}$

则$|GH|=2\sqrt{r^2-\frac{2k^2}{1+k^2}}$

显然，若点H也在线段AB上，则由对称性可知，直线$y=kx$就是y轴，矛盾，

所以要使$|AG|=|BH|$，只要$|AB|=|GH|$

所以$\frac{8(1+k^2)}{1+2k^2}=4(r^2-\frac{2k^2}{1+2k^2})$

$r^2=\frac{2k^2}{1+k^2}+\frac{2(1+k^2)}{1+2k^2}=\frac{2(3k^4+3k^2+1)}{2k^4+3k^2+1}=2(1+\frac{k^4}{2k^4+3k^2+1})$

当$k=0$时，$r=\sqrt{2}$

当$k\neq0$时，$r^2=2(1+\frac{1}{\frac{1}{k^4}+\frac{3}{k^2}+2})<2(1+\frac{1}{2})=3$

又显然$r^2=2(1+\frac{1}{\frac{1}{k^4}+\frac{3}{k^2}+2})>2$,所以$\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$

综上，$\sqrt{2}\le r<\sqrt{3}$．

考点 —解析几何

- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 椭圆的离心率
- 直线与圆锥曲线
  - 弦长或面积问题

12 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$A(\sqrt{2},\ 1)$．直线$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$交椭圆$C$于$B$,$D$（不与点$A$重合）两点．

（1）求椭圆C的方程；

（2）$\triangle ABD$的面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由．

答案 （1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）见解析

解析 （1）$\because e=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{c}{a}$，$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$

$\therefore a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$

$\therefore\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）设$B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow x^2+\sqrt{2}mx+m^2-2=0\ \therefore\Delta=8-2\mathrm{m}^2>0\Rightarrow-2<m<2$

$x_1+x_2=-\sqrt{2}m$, ① $x_1x_2=m^2-2$ ②

$\because |BD|=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\,|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{8-2\mathrm{m}^2}$，

设d为点A到直线BD：$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$的距离，$\therefore d=\frac{|2m|}{\sqrt{6}}$

$\therefore S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}|BD|\,d=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(4-m^2)m^2}\leqslant\sqrt{2}$

当且仅当$m=\pm\sqrt{2}\in(-2,2)$时等号成立

$\therefore$当$m=\pm\sqrt{2}$时，ΔABD的面积最大，最大值为$\sqrt{2}$

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系
    - 弦长或面积问题

13 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆$C$ 与y轴交于A,B 两点，且$|AB|=2$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）设点P是椭圆C上的一个动点，且点P在 y轴的右侧．直线PA,PB与直线$x=4$分别交于M,N 两点．若以MN为直径的圆与x轴交于两点E,F ，求点P横坐标的取值范围及$|EF|$的最大值．

答案

（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）$\left(\frac{8}{5},2\right]$，$2$．

解析

（1）由题意可得，$b=1$， $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

得$\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{3}{4}$， 解$a^2=4$，

椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）设$P(x_0,y_0)(0<x_0\leqslant 2)$，$A(0,1)$，$B(0,-1)$，

所以$k_{PA}=\frac{y_0-1}{x_0}$，直线PA的方程为$y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，

同理：直线PB的方程为$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，

直线PA与直线$x=4$的交点为$M(4,\frac{4(y_0-1)}{x_0}+1)$，

直线PB与直线$x=4$的交点为$N(4,\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)$，线段$MN$的中点$(4,\dfrac{4y_0}{x_0})$，

所以圆的方程为$(x-4)^2+(y-\dfrac{4y_0}{x_0})^2=(1-\dfrac{4}{x_0})^2$，

令$y=0$，则$(x-4)^2+\dfrac{16y_0^2}{x_0^2}=(1-\dfrac{x_0}{4})^2$，

因为$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}$，

所以$(x-4)^2+\dfrac{8}{x_0}-5=0$，

因为这个圆与x轴相交，该方程有两个不同的实数解，

所以 $5-\dfrac{8}{x_0}>0$，解得$x_0\in(\dfrac{8}{5},2]$．

设交点坐标$(x_1,0),(x_2,0)$，则$|x_1-x_2|=2\sqrt{5-\dfrac{8}{x_0}}$（$\dfrac{8}{5}<x_0\leqslant 2$）

所以该圆被x轴截得的弦长为最大值为2．

方法二：设$P(x_0,y_0)(0<x_0\leqslant 2)$，$A(0,1)$，$B(0,-1)$，

所以$k_{PA}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，直线$PA$的方程为$y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，

同理：直线PB的方程为$y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$，

直线PA与直线$x=4$的交点为$M(4,\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1)$，

直线PB与直线$x=4$的交点为$N(4,\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)$，

若以MN为直径的圆与x轴相交，

则$[\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1]\times[\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1]<0$，

即$\dfrac{16(y_0^2-1)}{x_0^2}-\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1<0,$

即$\dfrac{16(y_0^2-1)}{x_0^2}+\dfrac{8}{x_0}-1<0.$

因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}$，

代入得到 $5-\dfrac{8}{x_0}>0$，解得$x_0\in(\dfrac{8}{5},2]$．

该圆的直径为$|\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1-(\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)|=|2-\dfrac{8}{x_0}|$，

圆心到x轴的距离为$\dfrac{1}{2}|\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1+(\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)|=|\dfrac{4y_0}{x_0}|$，

该圆在x轴上截得的弦长为$2\sqrt{(1-\dfrac{4}{x_0})^2-(\dfrac{4y_0}{x_0})^2}=2\sqrt{5-\dfrac{8}{x_0}},(\dfrac{8}{5}<x\leqslant 2)$；

所以该圆被x轴截得的弦长为最大值为2．

方法三：设$P(x_0,y_0)(0<x_0\leqslant 2)$，$A(0,1)$，$B(0,-1)$，

所以$k_{PA}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，直线$PA$的方程为$y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，

同理：直线PB的方程为$y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$，

直线PA与直线$x=4$的交点为$M(4,\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1)$，

直线PB与直线$x=4$的交点为$N(4,\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)$，

所以$|MN|=|\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1-(\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)|=|2-\dfrac{8}{x_0}|$，

圆心到x轴的距离为$\dfrac{1}{2}|\dfrac{4(y_0-1)}{x_0}+1+(\dfrac{4(y_0+1)}{x_0}-1)|=|\dfrac{4y_0}{x_0}|$，

若该圆与x轴相交，则$|1-\dfrac{4}{x_0}|>|\dfrac{4y_0}{x_0}|$，

即$(1-\dfrac{4}{x_0})^2-(\dfrac{4y_0}{x_0})^2>0$，

因为$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以$\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}$，

所以$5-\dfrac{8}{x_0}>0$，解得$x_0\in(\dfrac{8}{5},2]$

该圆在x轴上截得的弦长为$2\sqrt{(1-\dfrac{4}{x_0})^2-(\dfrac{4y_0}{x_0})^2}=2\sqrt{5-\dfrac{8}{x_0}}\leqslant 2\sqrt{5-\dfrac{8}{2}}=2$；

所以该圆被x轴截得的弦长为最大值为2．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的性质
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系
    - 弦长或面积问题

14 已知椭圆C的中心在原点O,焦点在x轴上，离心率为$\dfrac{1}{2}$，右焦点到到右顶点的距离为1．

（1）求椭圆C的标准方程．

（2）是否存在与椭圆C交于A,B两点的直线l：$y=kx+m(k\in\mathbf{R})$，使得$\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|$成立？若存在，求出实数$m$的取值范围，若不存在，请说明理由．

答案 （1）椭圆C的标准方程是$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）存在直线l，使得$\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|$成立；实数$m$的取值范围是$(-\infty,-\dfrac{2}{7}\sqrt{21}]\bigcup[\dfrac{2}{7}\sqrt{21},+\infty)$．

解析 （1）设椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，半焦距为$c$.

依题意$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，由右焦点到右顶点的距离为1，得$a-c=1$．解得$c=1$，$a=2$．

所以$b^2=a^2-c^2=3$．

所以椭圆C的标准方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）存在直线l，使得$\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|$成立.理由如下：

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$．

$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$，化简得$3+4k^2>m^2$．

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$．

若$\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|$成立，

即$\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|^2$，等价于$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$．所以$x_1x_2+y_1y_2=0$．

$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

$(1+k^2)\cdot\frac{4m^2-12}{3+4k^2}-km\cdot\frac{8km}{3+4k^2}+m^2=0,$

化简得，$7m^2=12+12k^2$．

将$k^2=\frac{7}{12}m^2-1$代入$3+4k^2>m^2$中，$3+4(\frac{7}{12}m^2-1)>m^2$，

解得，$m^2>\frac{3}{4}$．

又由$7m^2=12+12k^2\geq 12$，$m^2\geq\frac{12}{7}$，

从而$m^2\geq\frac{12}{7}$，$m\geq\frac{2}{7}\sqrt{21}$或$m\leq-\frac{2}{7}\sqrt{21}$．

所以实数m的取值范围是$(-\infty,-\frac{2}{7}\sqrt{21}]\bigcup[\frac{2}{7}\sqrt{21},+\infty)$．

考点 ─解析几何
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
- 直线与圆锥曲线
  - 向量点乘问题

15 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，其焦点为F,O为坐标原点，直线AB（不垂直于x轴）,过点F且抛物线C交于A,B两点，直线OA与OB的斜率之积为$-p$．

（1）求抛物线C的方程．

（2）若M为线段AB的中点，射线OM交抛物线C于点D，求证：$\frac{|OD|}{|OM|}>2$．

答案 （1）$C:y^2=8x.$

（2）$\frac{|OD|}{|OM|}>2.$

解析 （1）因为直线AB过点F且与抛物线C交于两A,B点，$F(\frac{p}{2},0)$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AB（不垂直于x轴）的方程可设为

$y=k(x-\frac{p}{2})(k\neq 0)$.

所以$y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2(p>0)$.

因为直线OA与OB的斜率之积为$-p$.

所以$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-p$.

所以$(\frac{y_1y_2}{x_1x_2})^2=p^2$，得$x_1x_2=4$.

由$\begin{cases}y=k(x-\frac{p}{2})\\y^2=2px\end{cases}$，消$y$得$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{k^2p^2}{4}=0$.

其中$\Delta=(k^2p+2p)^2-k^2p^2k^2>0$.

所以$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$x_1+x_2=\frac{k^2p+2p}{k^2}$.

所以$p=4$，抛物线$C:y^2=8x$.

（2）设$M(x_0,y_0)$，$D(x_3,y_3)$，因为M为线段AB的中点，

所以$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{k^2p+2p}{2k^2}=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$，$y_0=k(x_0-2)=\frac{4}{k}$

所以直线OD的斜率为$k_{OD}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{2k}{k^2+2}$.

直线OD的方程为$y=k_{OD}x=\frac{2k}{k^2+2}x$代入抛物线$C:y^2=8x$的方程，

得$x_3=\frac{2(k^2+2)^2}{k^2}$.

所以$\frac{x_3}{x_0}=k^2+2$.

因为$k^2>0$

所以$\frac{|OD|}{|OM|}=\frac{x_3}{x_0}=k^2+2>2$.

考点
- 解析几何
  - 抛物线
    - 抛物线的定义、图形及标准方程

直线与圆锥曲线

- 中点弦问题
- 向量点乘问题

16 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为$F$，点$B(0,1)$在椭圆$C$上．

（1）求椭圆C的方程．

（2）过点F的直线交椭圆C于M，N两点，交直线$x=2$于点P，设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$，

求证：$\lambda+\mu$为定值．

答案 （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）证明过程见解析．

解析 （1）$\because$点$B(0,1)$在椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上，

$\therefore\frac{1}{b^2}=1$，即$b=1$．

又$\because$椭圆C的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由$a^2=b^2+c^2$，得$a=\sqrt{2}$，

$\therefore$椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）由已知得$F(1,0)$，直线MN的斜率存在．

设直线MN的方程为$y=k(x-1)$，

$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$P(2,k)$．

由$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$，

得$\lambda=\frac{2-x_1}{x_1-1}$，$\mu=\frac{2-x_2}{x_2-1}$，

$\therefore\lambda+\mu=\frac{2-x_1}{x_1-1}+\frac{2-x_2}{x_2-1}=\frac{3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$，

联立$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

$\because 3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4=3\times\frac{4k^2}{1+2k^2}-2\times\frac{2k^2-2}{1+2k^2}-4$

$=\frac{12k^2-4k^2+4-4-8k^2}{1+2k^2}$

$=0$．

$\therefore \lambda+\mu=0$为定值．

考点

—解析几何
- 直线与方程
  - 直线的倾斜角与斜率
  - 直线的方程
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 椭圆的离心率
  - 椭圆的性质
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系
  - 向量共线问题
  - 定值问题

17 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，四边形$ABCD$的各顶点均在椭圆$E$上，且对角线$AC$，$BD$均过坐标原点$O$，点$D(2,1)$，$AC$、$BD$的斜率之积为$-\frac{1}{4}$．

（1）求椭圆E的方程．

（2）过D作直线l平行于AC．若直线l'平行于BD，且与椭圆E交于不同的两点M，N，与直线l交于点P．

①证明：直线l与椭圆E有且只有一个公共点．

②证明：存在常数λ，使得$|PD|^2=\lambda|PM|\cdot|PN|$，并求出$\lambda$的值．

答案

（1）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）证明见解析，$\lambda=1$．

解析

（1）由题意$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2,\\ c^2=6.\end{cases}$．

故椭圆E的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$．

（2）（1）由题意$k_{AC}\cdot k_{BD}=-\frac{1}{4}$，因为$k_{BD}=k_{OD}=\frac{1}{2}$，得$k_{AC}=-\frac{1}{2}$，

则直线l的方程为$y=-\frac{1}{2}x+2$，联立得$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+2,\\x^2+4y^2=8.\end{cases}$

代入化简得$x^2-4x+4=0$．

因为判别式$\Delta=0$，即直线l与椭圆E有且只有一个公共点．

（2）设直线l'的方程为$y=\frac{1}{2}x+m(m\neq 0)$，

联立方程组$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+m,\\y=-\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2-m\\y=1+\frac{m}{2}\end{cases}$，

故点P坐标为$\left(2-m,1+\frac{m}{2}\right)$，$|PD|^2=\frac{5m^2}{4}$．

联立方程组$\begin{cases}x^2+4y^2=8\\y=\frac{1}{2}x+m\end{cases}$，代入化简得$x^2+2mx+2m^2-4=0$．

设点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

因为判别式$\Delta=4(-m^2+4)>0$，得$-2<m<2$．

又$x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-4$，

所以$|PM|=\sqrt{(2-m-x_1)^2+\left(1+\frac{m}{2}-y_1\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|2-m-x_1|$．

同理，$|PN|=\frac{\sqrt{5}}{2}|2-m-x_2|$，

故$|PM||PN|=\frac{5}{4}|2-m-x_1||2-m-x_2|$，

$=\frac{5}{4}|(2-m)^2-(2-m)(x_1+x_2)+x_1x_2|=\frac{5m^2}{4}$，

因为$|PD|^2=\lambda|PM|\cdot|PN|$，解得$\lambda=1$．

故存在常数λ，使得$|PD|^2=\lambda|PM|\cdot|PN|$．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的性质

18 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过左焦点$F(-\sqrt{3},0)$且斜率为$k$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点，线段$AB$的中点为$M$，直线$l$：$x+4ky=0$交椭圆$E$于$C$，$D$两点．

（1）求椭圆E的方程．

（2）求证：点M在直线l上．

（3）是否存在实数k，使得三角形BDM的面积是三角形ACM的3倍？若存在，求出k的值；若不存在，说明理由．

答案 （1）椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）证明见解析．

（3）存在，$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$．

解析 （1）题意可知$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=\sqrt{3}$，于是$a=2,b=1$．

所以，椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

$\begin{cases} y=k(x+\sqrt{3}) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$即$(4k^2+1)x^2+8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$．

所以，$x_1+x_2=\frac{-8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$，$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$，$y_0=k(x_0+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}$

，

于是$M(\frac{-4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1},\frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1})$．

因为$\frac{-4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}+4k\cdot\frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}=0$，所以$M$在直线$l$上．

（3）由（2）知点A到直线CD的距离与点B到直线CD的距离相等，

若$\triangle BDM$的面积是$\triangle ACM$面积的3倍，

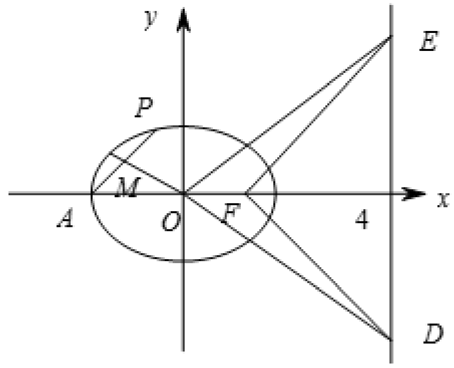
则$|DM|=3|CM|$，因为$|OD|=|OC|$，于是M为OC中点，；

设点C的坐标为(x_3,y_3)，则$y_0=\frac{y_3}{2}$．因为$\begin{cases} x=-4ky \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，解得$y_3=\pm\frac{1}{\sqrt{4k^2+1}}$．

于是$\frac{1}{2\sqrt{4k^2+1}}=\frac{\sqrt{3}|k|}{4k^2+1}$，解得$k^2=\frac{1}{8}$，所以$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$．

考点 ─解析几何
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 椭圆的性质
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系

19 如图，已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，$F$为椭圆$C$的右焦点．$A\,(-a,0)$，$|AF|=3$．



（1）求椭圆C的方程．

（2）设O为原点，P为椭圆上一点，AP的中点为M．直线OM与直线$x=4$交于点D，过O且平行于AP的直线与直线$x=4$交于点E．求证：$\angle ODF=\angle OEF$．

答案 （1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）证明见解析．

解析 （1）设椭圆C的半焦距为c．依题意，得

$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a+c=3$．

解得$a=2$，$c=1$．

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$椭圆C的方程是$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）解法一：由（Ⅰ）得$A(-2,0)$．设AP的中点$M(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$．

设直线AP的方程为：$y=k(x+2)(k\neq0)$，将其带入椭圆方程，整理得

$\left(4k^2+3\right)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

$\therefore -2+x_1=\dfrac{-16k^2}{4k^2+3}$．

$\therefore x_0=\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}$，$y_0=k(x_0+2)=\dfrac{6k}{4k^2+3}$，

即$M\left(\dfrac{-8k^2}{4k^2+3},\dfrac{6k}{4k^2+3}\right)$．

$\therefore$直线OM斜率是$\dfrac{\frac{6k}{4k^2+3}}{\frac{-8k^2}{4k^2+3}}=-\dfrac{3}{4k}$，

$\therefore$直线OM的方程是$y=-\dfrac{3}{4k}x$．令$x=4$，得$D(4,-\dfrac{3}{k})$．

直线OE的方程是$y=kx$．令$x=4$，得$E(4,4k)$．

由$F(1.0)$，得直线EF的斜率是$\dfrac{4k}{4-1}=\dfrac{4k}{3}$，$\therefore EF\perp OM$，记垂足为$H$；

$\because$直线DF的斜率是$\frac{-\frac{3}{k}}{4-1}=-\frac{1}{k}$，$\therefore DF\perp OE$，记垂足为$G$．

在$Rt\triangle EHO$和$Rt\triangle DGO$中，$\angle ODF$和$\angle OEF$都与$\angle EOD$互余，

$\therefore\angle ODF=\angle OEF$．

解法二：由（Ⅰ）得$A(-2,0)$．设$P(x_1,y_1)(x_1\neq\pm2)$，其中$3{x_1}^2+4{y_1}^2-12=0$．

$\because AP$的中点为M，$\therefore M\left(\frac{x_1-2}{2},\frac{y_1}{2}\right)$．

$\therefore$直线OM的斜率是$k_{OM}=\frac{y_1}{x_1-2}$，

$\therefore$直线OM的方程是$y=\frac{y_1}{x_1-2}x$．令$x=4$，得$D\left(4,\frac{4y_1}{x_1-2}\right)$．

直线OE的方程是$y=\frac{y_1}{x_1+2}x$．令$x=4$，得$E(4,\frac{4y_1}{x_1+2})$．

由$F(1,0)$，得直线EF的斜率是$k_{EF}=\frac{4y_1}{3(x_1+2)}$，

$\because k_{EF}\cdot k_{OM}=\frac{4y_1}{3(x_1+2)}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{4y_1^2}{3({x_1}^2-4)}=-1$，

$\therefore EF\perp OM$，记垂足为H；

同理可得$k_{DF}\cdot k_{OE}=\frac{4y_1}{3(x_1-2)}\cdot\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{4y_1^2}{3({x_1}^2-4)}=-1$，

$\therefore DF\perp OE$，记垂足为G．

在$Rt\triangle EHO$和$Rt\triangle DGO$中，$\angle ODF$和$\angle OEF$都与$\angle EOD$互余，

$\therefore\angle ODF=\angle OEF$．

解法三：（此解析由高原提供）

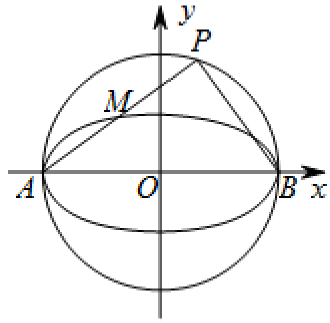
设椭圆右顶点为A'，P点坐标为(x_0,y_0)，则

$k_{PA}\cdot k_{OM}=k_{PA}\cdot k_{PA'}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{{y_0}^2}{{x_0}^2-4}=-\frac{3}{4}$．

故$k_{OD}\cdot k_{EF}=k_{OM}\cdot\frac{4}{3}k_{OE}=k_{OM}\cdot\frac{4}{3}k_{PA}=-1$，所以$OD\perp EF$，同理$OE\perp DF$，因此$\angle ODF=\angle OEF$．

考点
- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系

20 已知椭圆C的中心在原点，焦点在x轴上，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$．且经过点$(0,1)$，C与x轴交于A，B两点，以AB为直径的圆记为C_1，P是C_1上的异于A，B的点．



（1）求椭圆C的方程．

（2）若PA与椭圆C交于点M，且满足$|PB|=2|OM|$，求点P的坐标．

答案 （1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）$P\left(\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right)$

解析 （1）由已知得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ b=1\end{cases}$，解得$a=2$，

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）法一：

$\because$点P在曲线C_1上，$\therefore PA\perp PB$，

又$\because |PB|=2|OM|$，且O为AB的中点，

$\therefore OM$为的$\triangle ABP$中位线，且$OM\perp AP$，

否则$|PB|<2|OM|$，与$|PB|=2|OM|$矛盾，

设点M的坐标为(s,t)．

$\because$点M在曲线C上，

$\therefore s^2+4t^2-4=0$①，

$\because OM\perp AM$，

$\therefore (s+1)^2+t^2=1$②，

由②得：$t^2=1-(s+1)^2$，代入①整理得：$3s^2+8s+4=0$，

解得：$s=-\dfrac{2}{3}$或$s=-2$（舍），$\therefore t=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

设点P的坐标为(x_0,y_0)，

则$\dfrac{-2+x_0}{2}=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{y_0}{2}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore x_0=\dfrac{2}{3}$，$y_0=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore$点P的坐标为$\left(-\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$．

法二：$\because$点P在曲线C_1上，$\therefore PA\perp PB$，

又$\because |PB| = 2|OM|$，且O为AB的中点，

$\therefore OM$为的$\triangle ABP$中位线，且$OM\perp AP$，

否则$|PB| < 2|OM|$，与$|PB| = 2|OM|$矛盾，

由（Ⅰ）知，$A(-2,0)$，设直线$AP: y = k(x+2)$，

$\begin{cases} y = k(x+2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$，得$(1+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$，

$\Delta = 16 > 0$，设$M(x_m, y_m)$，

由韦达定理可知，$x_m - 2 = -\dfrac{16k^2}{1+4k^2}$，$x_m = \dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}$，

$y_m = k(x_m+2) = \dfrac{4k}{1+4k^2}$，

由$OM\perp AP$，得$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{OM}$，

$\because \overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{4}{1+4k^2}, \dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$，$\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}, \dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OM} = \dfrac{4}{1+4k^2}\times\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2} + \dfrac{4k}{1+4k^2}\times\dfrac{4k}{1+4k^2} = 0$，

即$8 - 16k^2 = 0$，$\therefore k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$M\left(-\dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)$，

设$P(x_p, y_p)$，$\because$点M是A，P的中点，

$\therefore \begin{cases} -\frac{2}{3} = \frac{-2+x_p}{2} \\ \pm\frac{2}{3} = \frac{y_p}{2} \end{cases}$，得$\begin{cases} x_p = -\frac{2}{3} \\ y_p = \pm\frac{4}{3}\sqrt{2} \end{cases}$，故$P\left(\dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right)$．

考点　解析几何
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 椭圆的离心率
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系
  - 向量共线问题

21 已知椭圆$C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$经过点$(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）直线$y = k(x-1)\ (k\neq 0)$与椭圆C交于A, B两点，点M是椭圆C的右顶点．直线AM与直线BM分别与y轴交于点P, Q，试问以线段PQ为直径的圆是否过x轴上的定点？若是，求出定点坐标；若不是，说明理由．

答案 （1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）以线段PQ为直径的圆过x轴上的定点

$(\pm\sqrt{3},0)$．

解析 （1）由题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$,解得$a=2$，$b=1$

所以椭圆C的方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）以线段PQ为直径的圆过x轴上的定点．

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$

得$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$．

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$．

又因为点M是椭圆C的右顶点，所以点$M(2,0)$．

由题意可知直线AM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，故点$P(0,-\frac{2y_1}{x_1-2})$．

直线BM的方程为$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，故点$Q(0,-\frac{2y_2}{x_2-2})$．

若以线段PQ为直径的圆过x轴上的定点$N(x_0,0)$，则等价于$\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{QN}=0$恒成立．

又因为$\overrightarrow{PN}=(x_0,\frac{2y_1}{x_1-2})$，$\overrightarrow{QN}=(x_0,\frac{2y_2}{x_2-2})$，

所以$\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{QN}={x_0}^2+\frac{2y_1}{x_1-2}\cdot\frac{2y_2}{x_2-2}={x_0}^2+\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$恒成立．

又因为$(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$

$$=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}-2\frac{8k^2}{1+4k^2}+4$$

$$=\frac{4k^2}{1+4k^2},$$

$y_1y_2=k(x_1-1)k(x_2-1)=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]$

$=k^2(\frac{4k^2-4}{1+4k^2}-\frac{8k^2}{1+4k^2}+1)$

$=\frac{-3k^2}{1+4k^2}$，

所以${x_0}^2+\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}={x_0}^2+\frac{\frac{-12k^2}{1+4k^2}}{\frac{4k^2}{1+4k^2}}={x_0}^2-3=0$．

解得$x_0=\pm\sqrt{3}$．

故以线段PQ为直径的圆过x轴上的定点$(\pm\sqrt{3},0)$．

考点 一解析几何

- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系
  - 向量点乘问题
  - 过定点问题

22 已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点$(m,0)$作圆$x^2+y^2=1$的切线l交椭圆G于A，B两点．

（1）求椭圆G的焦点坐标和离心率；

（2）将$|AB|$表示为m的函数，并求$|AB|$的最大值．

答案 （1）焦点坐标为$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$，

离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（2）2．

解析 （1）由已知得$a=2$，$b=1$，

所以$c=\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{3}$．

所以椭圆G的焦点坐标为$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$，

离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（2）由题意知，$|m|\geqslant 1$．

当$m=1$时，切线l的方程$x=1$，点A、B的坐标分别为$(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

此时$|AB|=\sqrt{3}$

当$m=-1$时，同理可得$|AB|=\sqrt{3}$

当$|m|>1$时，设切线l的方程为$y=k(x-m)$，

由$\begin{cases}y=k(x-m)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，

得$(1+4k^2)x^2-8k^2mx+4k^2m^2-4=0$

设A、B两点的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，

则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2m}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2m^2-4}{1+4k^2}$

又由l与圆$x^2+y^2=1$相切，得$\dfrac{|km|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即$m^2k^2=k^2+1$．

所以$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(1+k^2)[\frac{64k^4m^2}{(1+4k^2)^2}-\frac{4(4k^2m^2-4)}{1+4k^2}]}$

$=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}$．

由于当$m=\pm3$时，$|AB|=\sqrt{3}$，

所以$|AB|=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}$，$m\in(-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty)$．

因为$|AB|=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}=\frac{4\sqrt{3}}{|m|+\frac{3}{|m|}}\leqslant2$，

且当$m=\pm\sqrt{3}$时，$|AB|=2$，所以$|AB|$的最大值为2．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率
  - 直线与圆锥曲线
    - 弦长或面积问题

23 已知A,B是椭圆$C:2x^2+3y^2=9$上两点，点M的坐标为$(1,0)$．

（1）当A,B两点关于x轴对称，且$\triangle MAB$为等边三角形时，求AB的长；

（2）当A,B两点不关于x轴对称时，证明：$\triangle MAB$不可能为等边三角形．

答案 （1）当$x_0=2$时，$|AB|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；当$x_0=-\frac{4}{3}$时，$|AB|=\frac{14\sqrt{3}}{9}$．

（2）证明见解析．

解析 （1）设$A(x_0,y_0)$，$B(x_0,-y_0)$，

因为ΔABM为等边三角形，所以$|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{3}|x_0-1|$．

又点$A(x_0,y_0)$在椭圆上，

所以$\begin{cases}|y_0|=\frac{\sqrt{3}}{3}|x_0-1|,\\2{x_0}^2+3{y_0}^2=9,\end{cases}$消去$y_0$，

得到$3{x_0}^2-2x_0-8=0$，解得$x_0=2$或$x_0=-\frac{4}{3}$，

当$x_0=2$时，$|AB|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

当$x_0=-\frac{4}{3}$时，$|AB|=\frac{14\sqrt{3}}{9}$．

{说明：若少一种情况扣2分}

（2）法1：根据题意可知，直线AB斜率存在．

设直线AB：$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB中点为$N(x_0,y_0)$，

联立$\begin{cases}2x^2+3y^2=9,\\ y=kx+m\end{cases}$消去$y$得$(2+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-9=0$，

由$\Delta>0$得到$2m^2-9k^2-6<0$ ①

所以$x_1+x_2=-\dfrac{6km}{2+3k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{4m}{2+3k^2}$，

所以$N(-\dfrac{3km}{2+3k^2},\dfrac{2m}{2+3k^2})$，又$M(1,0)$

如果ΔABM为等边三角形，则有$MN\perp AB$，

所以$k_{MN}\times k=-1$，即$\dfrac{\frac{2m}{2+3k^2}}{-\frac{3km}{2+3k^2}-1}\times k=-1$，

化简$3k^2+2+km=0$，②

由②得$m=-\dfrac{3k^2+2}{k}$，代入①得$2\dfrac{(3k^2+2)^2}{k^2}-3(3k^2+2)<0$，

化简得$3k^2+4<0$，不成立，

{此步化简成$\dfrac{9k^4+18k^2+8}{k^2}<0$或$9k^4+18k^2+8<0$或$(3k^2+2)(3k^2+4)<0$都给分}

故ΔABM不能为等边三角形．

法2：设$A(x_1,y_1)$，则$2{x_1}^2+3{y_1}^2=9$，且$x_1\in[-3,3]$，

所以$|MA|=\sqrt{(x_1-1)^2+{y_1}^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3-\dfrac{2}{3}{x_1}^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}(x_1-3)^2+1}$，

设$B(x_2,y_2)$，同理可得$|MB|=\sqrt{\dfrac{1}{3}(x_2-3)^2+1}$，且$x_2\in[-3,3]$

因为$y=\dfrac{1}{3}(x-3)^2+1$在$[-3,3]$上单调

所以，有$x_1=x_2\Leftrightarrow|MA|=|MB|$，

因为A,B不关于x轴对称，所以$x_1\neq x_2$．

所以$|MA|\neq|MB|$，

所以ΔABM不可能为等边三角形．

考点

- 解析几何
  - 圆与方程
  - 曲线与方程
- 直线与圆锥曲线

│ └直线与圆锥曲线的位置关系

24 已知椭圆$W:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，直线l与W相交于M,N两点，l与x轴、y轴分别相交于C、D两点，O为坐标原点．

（1）若直线l的方程为$x+2y-1=0$，求$\triangle OCD$外接圆的方程；

（2）判断是否存在直线l，使得C,D是线段MN的两个三等分点，若存在，求出直线l的方程；若不存在，说明理由．

答案 （1）ΔOCD外接圆的方程为$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{4})^2=\frac{5}{16}$．

（2）存在直线l，使得C,D是线段MN的两个三等分点，此时直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$，或$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$．

解析 （1）因为直线l的方程为$x+2y-1=0$，

所以与x轴的交点$C(1,0)$，与y轴的交点$D(0,\frac{1}{2})$．

则线段CD的中点$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，$|CD|=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

即ΔOCD外接圆的圆心为$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，半径为$\frac{1}{2}|CD|=\frac{\sqrt{5}}{4}$，

所以ΔOCD外接圆的方程为$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{4})^2=\frac{5}{16}$．

（2）结论：存在直线l，使得C,D是线段MN的两个三等分点．

理由如下：

由题意，设直线l的方程为 $y=kx+m(km\neq0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$C(-\frac{m}{k},0)$，$D(0,m)$，

由方程组$\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

所以 $\Delta=16k^2-8m^2+8>0$，（*）

由韦达定理，得$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$．

由C,D是线段MN的两个三等分点，得线段MN的中点与线段CD的中点重合．

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}=0-\frac{m}{k}$，

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．

由C,D是线段MN的两个三等分点，得$|MN|=3|CD|$．所以

$\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=3\sqrt{(\frac{m}{k})^2+m^2}$，

即 $|x_1-x_2|=\sqrt{(\frac{-4km}{1+2k^2})^2-4\times\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}=3|\frac{m}{k}|$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

验证知（*）成立． 所以存在直线l，使得C,D是线段MN的两个三等分点，此时直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$，或$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 直线与圆锥曲线
    - 弦长或面积问题

25 已知椭圆$C:3x^2+4y^2=12$.

（1）求椭圆C的离心率；

（2）设椭圆C上在第二象限的点P的横坐标为-1，过点P的直线l_1,l_2与椭圆C的另一交点分别为A,B．且l_1,l_2的斜率互为相反数，A,B两点关于坐标原点O的对称点分别为M,N，求四边形$ABMN$的面积的最大值．

答案 （1）$\frac{1}{2}$.

（2）$4\sqrt{3}$

解析 （1）由题意，椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$

所以$a^2=4,b^2=3$，从而$c^2=a^2-b^2=1.$

因此，$a=2,c=1.$

故椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}.$

（2）由题意可知，点P的坐标为$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.

设l_1的方程为$y=k(x+1)+\frac{3}{2}$．则l_2的方程为$y=-k(x+1)+\frac{3}{2}.$

由$\begin{cases} y=k(x+1)+\frac{3}{2} \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，得$(4k^2+3)x^2+(8k^2+12k)x+4k^2+12k-3=0.$

由于$x=-1$是此方程的一个解．

所以此方程的另一解$x_A=-\dfrac{4k^2+12k-3}{4k^2+3}$

同理$x_B=-\dfrac{4k^2-12k-3}{4k^2+3}$

故直线AB的斜率为$k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-k(x_B+1)+\frac{3}{2}-k(x_A+1)-\frac{3}{2}}{x_B-x_A}$

$=\dfrac{-k(\frac{-8k^2+6}{4k^2+3}+2)}{\frac{24k}{4k^2+3}}=-\dfrac{1}{2}.$

设直线AB的方程为$y=-\dfrac{1}{2}x+m.$

由$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+m \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，得$x^2-mx+m^2-3=0$

所以$|AB|=\sqrt{1+(-\dfrac{1}{2})^2}\sqrt{m^2-4(m^2-3)}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4-m^2}$

又原点O到直线AB的距离为$d=\dfrac{2|m|}{\sqrt{5}}.$

所以$\triangle OAB$的面积$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4-m^2}\cdot\dfrac{2|m|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{m^2(4-m^2)}$

$\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{m^2+(4-m^2)}{2}=\sqrt{3}.$

当且仅当$m^2=4-m^2$，即$m^2=2,m=\pm2$时．

$\triangle OAB$的面积达到最大．且最大值为$\sqrt{3}$．

由题意可知，四边形$ABMN$为平行四边形，

所以，四边形$ABMN$的面积$S=4S_{\triangle OAB}\leqslant4\sqrt{3}$，

故四边形$ABMN$面积的最大值为$4\sqrt{3}$．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率
  - 直线与圆锥曲线
    - 弦长或面积问题

26 已知椭圆C的中心在原点O，焦点在x轴上，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且椭圆C上的点到两个焦点的距离之和4．

（1）求椭圆C的方程．

（2）设A为椭圆C的左顶点，过点A的直线l与椭圆交于点M，与y轴交于点N，过原点与l平行的直线与椭圆交于点P．证明：$|AM|\cdot|AN|=2|OP|^2$．

答案 （1）椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）答案见解析．

解析 （1）由题意有$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$2a=4$，

所以$a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）显然，直线l的斜率存在，设直线l的方程为：$y=k(x+2)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，

显然$\Delta>0$，$x_A\cdot x_M=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，

因为$x_A=-2$，

所以$x_M=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，

设直线OA的方程为$l_{OA}:y=kx$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2=4$，

所以$x_p=\pm\sqrt{\frac{4}{1+4k^2}}$，

要证$|AM|\cdot|AN|=2|OP|^2$成立，

只要证$\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_M|\cdot\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_N|=2(1+k^2)|x_O-x_P|^2$，

即$2(2+x_M)=2{x_P}^2$，

左边$=4+2x_M=4+\frac{4-16k^2}{1+4k^2}=\frac{8}{1+4k^2}$，

右边$=2{x_P}^2=\frac{8}{1+4k^2}$，

左边=右边，

所以原结论成立．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 直线与圆锥曲线

└弦长或面积问题

27 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(1,0)$，且点$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$在椭圆$C$上．

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）已知动直线l过点F，且与椭圆C交于A,B两点．试问x轴上是否存在定点Q，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\frac{7}{16}$恒成立？若存在，求出点$Q$的坐标；如果不存在，请说明理由．

答案 （1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）存在点$Q\left(\frac{5}{4},0\right)$，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\frac{7}{16}$恒成立．

解析 （1）由题意知：$c=1$. 根据椭圆的定义得：$2a=\sqrt{(-1-1)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，即

$a=\sqrt{2}$．

所以 $b^2=2-1=1$．

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）假设在x轴上存在点$Q(m,0)$，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\frac{7}{16}$恒成立．

当直线l的斜率为0时，$A(\sqrt{2},0),B(-\sqrt{2},0)$．则 $(\sqrt{2}-m,0)\cdot(-\sqrt{2}-m,0)=-\frac{7}{16}$

．解得$m=\pm\frac{5}{4}$．

当直线l的斜率不存在时，$A(1,\frac{\sqrt{2}}{2}),B(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$．由于

$(1+\frac{5}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(1+\frac{5}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2})\neq-\frac{7}{16}$，

所以$m\neq-\frac{5}{4}$．

下面证明$m=\frac{5}{4}$时，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\frac{7}{16}$恒成立．显然 直线$l$的斜率为0时，

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\frac{7}{16}$．

当直线l的斜率不为0时，设直线l的方程为：$x=ty+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x=ty+1\end{cases}$．

可得：$(t^2+2)y^2+2ty-1=0$．显然$\Delta>0$．

$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+2},\\ y_1y_2=-\frac{1}{t^2+2}.\end{cases}$

因为 $x_1=ty_1+1$，$x_2=ty_2+1$，

所以 $(x_1-\frac{5}{4},y_1)\cdot(x_2-\frac{5}{4},y_2)=(ty_1-\frac{1}{4})(ty_2-\frac{1}{4})+y_1y_2$

$=(t^2+1)y_1y_2-\frac{1}{4}t(y_1+y_2)+\frac{1}{16}$

$=-(t^2+1)\frac{1}{t^2+2}-\frac{1}{4}t\frac{2t}{t^2+2}+\frac{1}{16}$

$=\frac{-2t^2-2+t^2}{2\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{16}=-\frac{7}{16}$．

综上所述：在x轴上存在点$Q\left(\frac{5}{4},0\right)$，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\frac{7}{16}$恒成立．

考点

- 解析几何
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
  - 直线与圆锥曲线
    - 向量点乘问题
    - 定值问题

28 已知椭圆E的右焦点与抛物线$y^2=4x$的焦点重合，点$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$在椭圆$E$上．

（1）求椭圆E的方程．

（2）设$P(-4,0)$，直线$y=kx+1$与椭圆E交于A，B两点，若直线PA，PB均与圆$x^2+y^2=r^2$（$r>0$）相切，求k的值．

答案

（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）$k=1$．

解析

（1）因为抛物线$y^2=4x$的焦点坐标为$(1,0)$，所以$c=1$,

所以$2a=\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=4$，

即$a=2$．因为$b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为直线PA，PB与圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$相切，

所以$k_{AP}+k_{BP}=0$，

即$\frac{y_1}{x_1+4}+\frac{y_2}{x_2+4}=0$，

通分得$\frac{y_1(x_2+4)+y_2(x_1+4)}{(x_1+4)(x_2+4)}=0$，

所以$(kx_1+1)(x_2+4)+(kx_2+1)(x_1+4)=0$，

整理，得$2kx_1x_2+(4k+1)(x_1+x_2)+8=0$．①

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{8}{3+4k^2}$，

代入①，得 $k=1$．

考点

—解析几何
- 椭圆
  - 椭圆的定义、图形及标准方程
- 抛物线
  - 抛物线的定义、图形及标准方程
- 直线与圆锥曲线
  - 直线与圆锥曲线的位置关系

29 已知椭圆C：$x^2+4y^2=4$．

（1）求椭圆C的离心率．

（2）椭圆C的长轴的两个端点分别为A，B，点P在直线$x=1$上运动，直线PA，PB分别与椭圆C相交于M，N两个不同的点，求证：直线MN与x轴的交点为定点．

答案 （1）$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（2）证明过程见解析．

解析 （1）椭圆C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$中，$a^2=4$，$b^2=1$，

$c^2=a^2-b^2=3$．

所以$a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$．

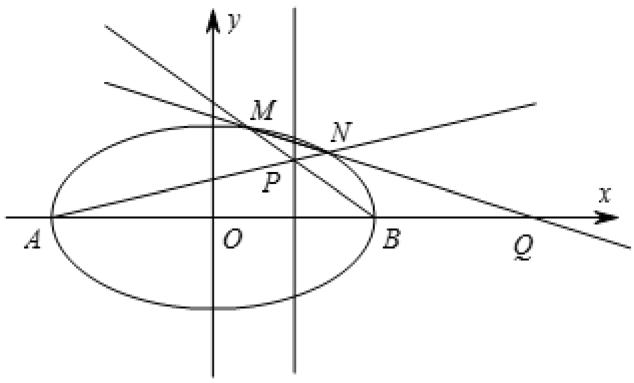
所以椭圆C的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（2）因为点P在直线$x=1$上，

所以可设$P(1,m)$．$m\neq 0$，$m\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

所以不妨设$A(-2,0)$，

$k_{AP}=\dfrac{m}{1-(-2)}=\dfrac{m}{3}$．



直线k_{AP}的方程为$y=\frac{m}{3}(x+2)$，

带入$x^2+4y^2=4$，

得$(4m^2+9)x^2+16m^2x+4(4m^2-9)=0$．

所以$-2+x_N=-\frac{16m^2}{4m^2+9}$，

则$x_N=\frac{-16m^2}{4m^2+9}+2=\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}$．

同理求得$x_M=\frac{8m^2-2}{4m^2+1}$．

法一：$k_{MN}=\frac{\frac{m}{3}(\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}+2)+m(\frac{8m^2-2}{4m^2+1}-2)}{\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}-\frac{8m^2-2}{4m^2+1}}$，

直线MN的方程为$y-\frac{m}{3}(\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}+2)=k_{MN}(x-\frac{-8m^2+18}{4m^2+9})$．

整理得$y=k_{MN}(x-4)$．

当$x=4$时，$y=0$，

所以直线MN与x轴的交点为定点$Q(4,0)$．

法二：令$m=0$，得直线MN为x轴，

当$m=1$时，解得$N(\frac{10}{13},\frac{12}{13})$，$M(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$，

直线MN方程为$y=-\frac{2}{7}x+\frac{8}{7}$，

两直线交点坐标为$(4,0)$，

下面证明直线MN与x轴的交点为定点$Q(4,0)$．

因为$k_{QN}=\frac{y_P}{\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}-4}=\frac{\frac{m}{3}(\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}+2)}{\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}-4}$，$k_{QM}=\frac{y_Q}{\frac{8m^2-2}{4m^2+1}-4}=\frac{-m(\frac{8m^2-2}{4m^2+1}-2)}{\frac{8m^2-2}{4m^2+1}-4}$

，

所以$k_{QN}-k_{QM}=\frac{\frac{m}{3}(\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}+2)}{\frac{-8m^2+18}{4m^2+9}-4}-\frac{-m(\frac{8m^2-2}{4m^2+1}-2)}{\frac{8m^2-2}{4m^2+1}-4}$

$=\frac{12m}{-24m^2+9}+\frac{-4m}{-8m^2-6}=\frac{0}{(-24m^2+9)(-8m^2-6)}=0$．

所以$k_{QN}=k_{QM}$，

所以直线MN与x轴的交点为定点$Q(4,0)$．

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
    - 直线的位置关系

椭圆
椭圆的定义、图形及标准方程
椭圆的离心率
椭圆的性质
直线与圆锥曲线
直线与圆锥曲线的位置关系
过定点问题

30 已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0,1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

（1）求椭圆E的方程．

（2）设直线l：$y=\frac{1}{2}x+m$与椭圆E交于A、C两点，以AC为对角线作正方形$ABCD$，记直线l与x轴的交点为N，问B、N两点间距离是否为定值？如果是，求出定值；如果不是，请说明理由．

答案 （1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）B、N两点间距离为定值$\frac{\sqrt{10}}{2}$．

解析 （1）设椭圆的半焦距为c．

因为点$(0,1)$在椭圆E上，所以$b=1$．

故$a^2-c^2=1$．

又因为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．所以$c=\sqrt{3}$，$a=2$．

所以椭圆E的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）设$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，线段AC中点为$M(x_0,y_0)$．

联立$y=\frac{1}{2}x+m$和$x^2+4y^2-4=0$，得：$x^2+2mx+2m^2-2=0$．

$\Delta=(2m)^2-4(2m^2-2)=8-4m^2>0$，可得$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$．

所以$x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-2$．

所以AC中点为$M\left(-m,\frac{1}{2}m\right)$．

弦长$|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right.}=\sqrt{10-5m^2}$，

又直线l与x轴的交点$N(-2m,0)$，

所以$|MN|=\sqrt{(-m+2m)^2+(\frac{1}{2}m)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}m^2}$．

所以$|BN|^2=|BM|^2+|MN|^2=\frac{1}{4}|AC|^2+|MN|^2=\frac{5}{2}$.

所以B、N两点间距离为定值$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 平面直角坐标系
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的离心率
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系
    - 弦长或面积问题
    - 定值问题