# 空间向量-期中必做题

1 如图1，在边长为2的正方形$ABCD$中，$P$为$CD$中点，分别将$\triangle PAD$，$\triangle PBC$沿$PA$，$PB$所在直线折叠，使点$C$与点$D$重合于点$O$，如图2． 在三棱锥$P-OAB$中，$E$为$PB$的中点．

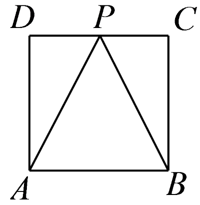


图1

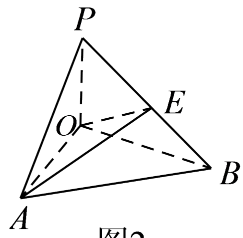


图2

（1）求证：$PO\perp AB$．

（2）求直线$PB$与平面$POA$所成角的正弦值．

（3）求二面角$P-AO-E$的大小．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

（3）$\dfrac{\pi}{3}$．

解析 （1）在正方形$ABCD$中，$P$为$CD$中点，

$PD\perp AD, PC\perp BC$，

所以在三棱锥$P-OAB$中，$PO\perp OA$，$PO\perp OB$．

因为$OA\cap OB=O$，所以$PO\perp$平面$OAB$．

因为$AB\subset$平面$OAB$,所以$PO\perp AB$．

（2）取$AB$中点$F$，连接$OF$，取$AO$中点$M$，连接$BM$．

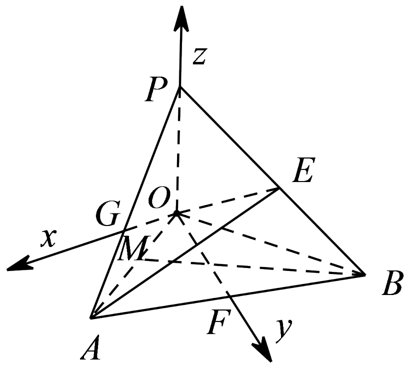
过点$O$作$AB$的平行线$OG$．

因为$PO\perp$平面$OAB$，所以$PO\perp OF$，$PO\perp OG$．

因为$OAOB$，$F$为$AB$的中点，

所以$OF\perp AB$． 所以$OF\perp OG$．

如图所示，建立空间直角坐标系$O-xyz$．




$A\left(1,\sqrt{3},0\right)$，$B\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$P\left(0,0,1\right)$，$M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$．

因为$BO=BA$，$M$为$OA$的中点，所以$BM\perp OA$．

因为$PO\perp$平面$OAB$，$PO\subset$平面$POA$，所以平面$POA\perp$平面$OAB$．

因为平面$POA\cap$平面$OABOA$，$BM\subset$平面$OAB$，

所以$BM\perp$平面$POA$．

因为$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$．所以平面$POA$的法向量$\vec{m}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$．

$\overrightarrow{BP}=\left(1,-\sqrt{3},1\right)$．

设直线$BP$与平面$POA$所成角为$\alpha$，

则$\sin\alpha=\left|\cos<\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}>\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}\right|}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{BP}\right|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

所以直线$BP$与平面$POA$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$．

（3）由（2）知$E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\left(1,\sqrt{3},0\right)$．

设平面$OAE$的法向量为$\vec{n}$，则有

$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{OE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ -x+\sqrt{3}y+z=0\end{cases}$，

令$y=-1$，则$x=\sqrt{3}$，$z=2\sqrt{3}$．即$\vec{n}=\left(\sqrt{3},-1,2\sqrt{3}\right)$．

所以$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{2\times4}=\dfrac{1}{2}$．

由题知二面角$P-AO-E$为锐角，所以它的大小为$\frac{\pi}{3}$．

考点

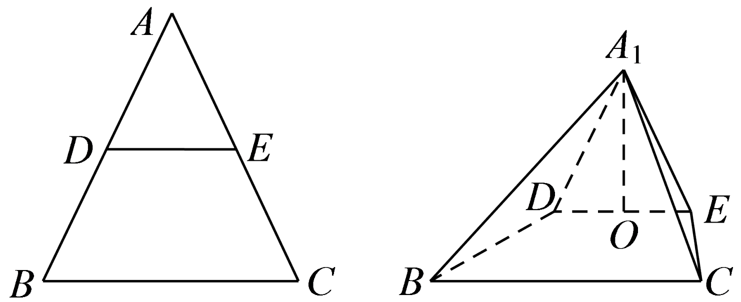
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的垂直
  - 空间向量

空间直角坐标系

空间向量及其运算

空间向量的应用

2 如图1，在$\triangle ABC$中，$D$，$E$分别为$AB$，$AC$的中点，$O$为$DE$的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$．将$\triangle ADE$沿$DE$折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，如图2．




（1）求证：$A_1O\perp BD$．

（2）求直线$A_1C$和平面$A_1BD$所成角的正弦值．

（3）线段$A_1C$上是否存在点$F$，使得直线$DF$和$BC$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$？若存在，求出$\frac{A_1F}{A_1C}$的值；若不存在，说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

（3）存在，且$\frac{A_1F}{A_1C}=\frac{1}{3}$．

解析 （1）$\because$ 在$\triangle ABC$中，$D$，$E$分别为$AB$，$AC$的中点，$\therefore DE//BC$，$AD=AE$．

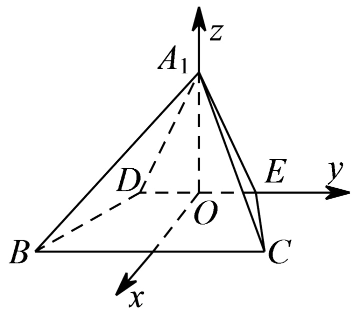
$\therefore A_1D=A_1E$，又$O$为$DE$的中点，

$\therefore A_1O\perp DE$．$\because$ 平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，且$A_1O\subset$平面$A_1DE$，$\therefore A_1O\perp$平面$BCED$，$\therefore A_1O\perp BD$．

（2）取$BC$的中点$G$，连接$OG$，$\therefore OE\perp OG$．

由（1）得 $A_1O\perp OE$，$A_1O\perp OG$．

如图建立空间直角坐标系$O-xyz$．




由题意得，$A_1(0,0,2)$，$B(2,-2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,-1,0)$．

$\therefore \overrightarrow{A_1B}=(2,-2,-2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$．

设平面$A_1BD$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x-2y-2z=0,\\ -y-2z=0.\end{cases}$

令$x=1$，则$y=2$，$z=-1$，$\therefore \vec{n}=(1,2,-1)$．

设直线$A_1C$和平面$A_1BD$所成的角为$\theta$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

$\therefore$直线$A_1C$和平面$A_1BD$所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

（3）线段$A_1C$上存在点$F$适合题意．

设$\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，其中$\lambda\in[0,\ 1]$．

设 $F(x_1,\ y_1,\ z_1)$，则有$(x_1,\ y_1,\ z_1-2)=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

$\therefore x_1=2\lambda,\ y_1=2\lambda,\ z_1=2-2\lambda$，从而 $F(2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-2\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{DF}=(2\lambda,2\lambda+1,2-2\lambda)$，又$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，

$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{DF},\overrightarrow{BC}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{4|2\lambda+1|}{4\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}$．

令 $\dfrac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

整理得 $3\lambda^2-7\lambda+2=0$．

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，舍去$\lambda=2$．

$\therefore$线段$A_1C$上存在点$F$适合题意，且$\dfrac{A_1F}{A_1C}=\dfrac{1}{3}$．

考点 —立体几何与空间向量

　　—立体几何初步

　　　└空间中的垂直

空间向量

空间向量的应用

3 如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=2,BC=4$，$E$为$AD$的中点，$O$为$BE$的中点．将$\triangle ABE$沿$BE$折起到$A'BE$，使得平面$A'BE\perp$平面$BCDE$（如图2）．

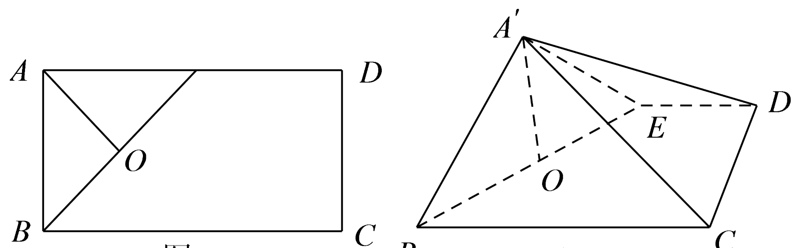


图1　图2

（1）求证:$A'O\perp CD$．

（2）求直线$A'C$与平面$A'DE$所成角的正弦值．

（3）在线段$A'C$上是否存在点$P$，使得$OP//$平面$A'DE$?若存在，求出$\dfrac{A'P}{A'C}$的值．若不存在，请说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$．

（3）存在，$\dfrac{1}{2}$．

解析 （1）如图，在矩形$ABCD$中，

$\because AB=2,BC=4$，$E$为$AD$中点，

$\therefore AB=AE=2$，

$\because O$为$BE$的中点，

$\therefore AO\perp BE$，

由题意可知，$A'O\perp BE$，

平面$A'BE\perp$平面$BCDE$，

$\because$平面$A'BE\cap$平面$BCDE=BE$，$A'O\subset$平面$A'BE$，

$\therefore A'O\perp$平面$BCDE$，

$\because CD\subset$平面$BCDE$，

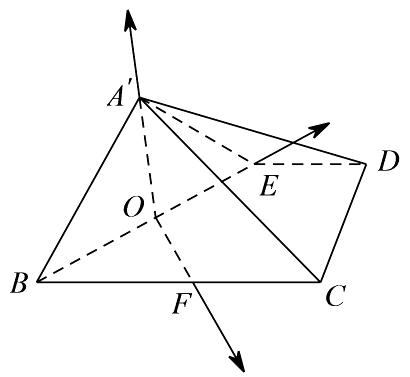
$\therefore A'O\perp CD$．

（2）取$BC$中点为$F$，连结$OF$，

由矩形$ABCD$性质，$AB=2, BC=4$，可知$OF\perp BE$，

由（1）可知，$A'O\perp BE, A'O\perp OF$，

以$O$为原点，$OA'$为$z$轴，$OF$为$x$轴，$OE$为$y$轴建立坐标系，




在$\mathrm{Rt}\triangle BAE$中，由$AB=2, AE=2$，则$BE=2\sqrt{2}, OA=\sqrt{2}$，

所以$A'(0,0,\sqrt{2}), E(0,\sqrt{2},0), F(\sqrt{2},0,0)$，

$B(0,-\sqrt{2},0), C(2\sqrt{2},\sqrt{2},0), D(\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{A'C}=(2\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{ED}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{A'E}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

设平面$A'DE$的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A'E}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，$\begin{cases}\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$，令$y=z=1$，则$x=-1$，

所以$\vec{m}=(-1,1,1)$，

设直线$A'C$与平面$A'DE$所成角为$\theta$，

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{A'C},\vec{m}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{A'C}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{A'C}\right|\cdot|\vec{m}|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}，$$

所以直线$A'C$与平面$A'DE$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$．

（3）假设在线段$A'C$上存在点$P$，满足$OP//$平面$A'DE$，

设$\overrightarrow{A'P}=\lambda\overrightarrow{A'C}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

由$\overrightarrow{A'C}=(2\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$，所以$\overrightarrow{A'P}=(2\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,-\sqrt{2}\lambda)$，

$P(2\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{OP}=(2\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$，

若$OP//$平面$A'DE$，则$\vec{m}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，

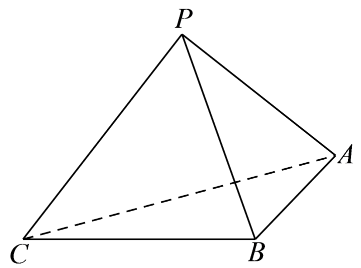
所以$-2\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$，

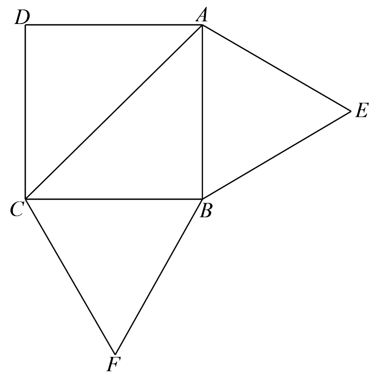
所以$\frac{A'P}{A'C}=\frac{1}{2}$．

考点 —立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直
- 空间向量
  - 空间直角坐标系
  - 空间向量及其运算
  - 空间向量的应用

4 已知三棱锥$P-ABC$（如图1）的平面展开图（如图2）中，四边形$ABCD$为边长为$\sqrt{2}$的正方形，$\triangle ABE$和$\triangle BCF$均为正三角形．在三棱锥$P-ABC$中：




（图1）

（图2）

（1）证明：平面$PAC\perp$平面$ABC$．

（2）求二面角$A-PC-B$的余弦值．

（3）若点$M$在棱$PC$上，满足$\dfrac{CM}{CP}=\lambda$，$\lambda=\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，点$N$在棱$BP$上，且$BM\perp AN$，$\dfrac{BN}{BP}$的取值范围．

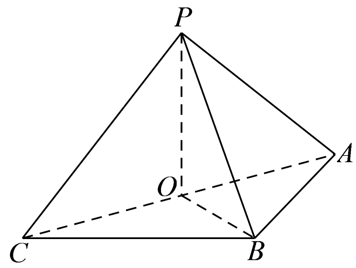
答案　（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（3）$\frac{BN}{BP} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right]$

解析　（1）方法1：

设$AC$的中点为$O$，连接$BO$，$PO$．




由题意$PA=PB=PC=\sqrt{2}$，$PO=1$，$AO=BO=CO=1$，

因为在$\triangle PAC$中，$PA=PC$，$O$为$AC$的中点，

所以$PO\perp AC$，

因为在$\triangle POB$中，$PO=1$，$OB=1$，$PB=\sqrt{2}$，

所以$PO\perp OB$，

因为$AC\cap OB=O$，$AC$，$OB\subset$平面$ABC$

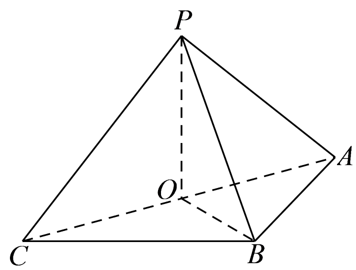
所以$PO\perp$平面$ABC$，

因为$PO\subset$平面$PAC$，

所以平面$PAC\perp$平面$ABC$．

方法2：

设$AC$的中点为$O$，连接$BO$，$PO$．




因为在$\triangle PAC$中，$PA=PC$，$O$为$AC$的中点，

所以$PO\perp AC$，

因为$PA=PB=PC$，$PO=PO=PO$，$AO=BO=CO$，

所以$\triangle POA\cong\triangle POB\cong\triangle POC$．

所以$\angle POA=\angle POB=\angle POC=90^{\circ}$，

所以$PO\perp OB$，

因为$AC\cap OB=O$，$AC$，$OB\subset$平面$ABC$，

所以$PO\perp$平面$ABC$，

因为$PO\subset$平面$PAC$，

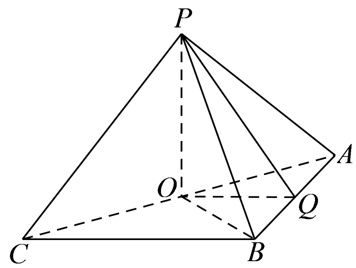
所以平面$PAC\perp$平面$ABC$．

方法3：

设$AC$的中点为$O$，连接$PO$，因为在$\triangle PAC$中，$PA=PC$，

所以$PO\perp AC$．

设$AB$的中点$Q$，连接$PQ$，$OQ$及$OB$．




因为在$\triangle OAB$中，$OA=OB$，$Q$为$AB$的中点，

所以$OQ\perp AB$．

因为在$\triangle PAB$中，$PA=PB$，$Q$为$AB$的中点，

所以$PQ\perp AB$．

因为$PQ\cap OQ=Q$，$PQ$，$OQ\subset$平面$OPQ$，

所以$AB\perp$平面$OPQ$，

因为$OP\subset$平面$OPQ$，

所以$OP\perp AB$．

因为$AB\cap AC=A$，$AB$，$AC\subset$平面$ABC$，

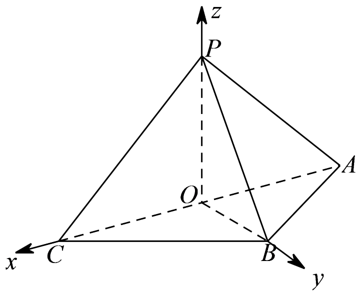
所以$PO\perp$平面$ABC$，

因为$PO\subset$平面$PAC$．

所以平面$PAC\perp$平面$ABC$．

（2）由$PO\perp$平面$ABC$，$OB\perp AC$，

如图建立空间直角坐标系，




则$O(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$A(-1,0,0)$，$P(0,0,1)$，

由$OB\perp$平面$APC$，故平面$APC$的法向量为$\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$，

由$\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,0,-1)$，

设平面$PBC$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则

由$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ n\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，得：$\begin{cases}x-y=0\\ x-z=0\end{cases}$

令$x=1$，得$y=1$，$z=1$，即$\vec{n}=(1,1,1)$．

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{OB}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

由二面角$A-PC-B$是锐二面角，

所以二面角$A-PC-B$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（3）设$\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BP}$，$0\leqslant\mu\leqslant1$，则

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=(1,-1,0)+\lambda(-1,0,1)=(1-\lambda,-1,\lambda)$，

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BP}=(1,1,0)+\mu(0,-1,1)=(1,1-\mu,\mu)$，

令$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，

得$(1-\lambda)\cdot1+(-1)\cdot(1-\mu)+\lambda\cdot\mu=0$，

即$\mu=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}=1-\dfrac{1}{1+\lambda}$，$\mu$是关于$\lambda$的单调递增函数，

当$\lambda\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$时，$\mu\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{5}\right]$，

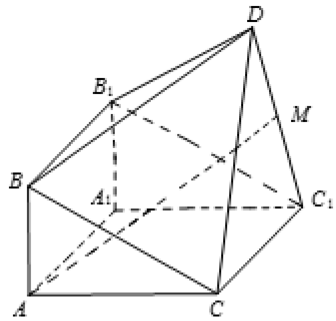
所以$\dfrac{BN}{BP}\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{5}\right]$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直
  - 空间向量

空间直角坐标系
空间向量及其运算
空间向量的应用

5 如图，由直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$和四棱锥$D-BB_1CC_1$构成的几何体中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=1$，$BC=BB_1=2$，$C_1D=CD=\sqrt{5}$，平面$CC_1D\perp$平面$ACC_1A_1$．




（1）求证：$AC\perp DC_1$．

（2）若$M$为$DC_1$的中点，求证：$AM//$平面$DBB_1$．

（3）在线段$BC$上是否存在点$P$，使直线$DP$与平面$BB_1D$所成的角为$\frac{\pi}{3}$？若存在，求$\frac{BP}{BC}$的值，若不存在，说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）不存在．

解析 （1）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面$ABC$，

故$AC\perp CC_1$，

由平面$CC_1D\perp$平面$ACC_1A_1$且平面$CC_1D\cap$平面$ACC_1A_1=CC_1$

所以$AC\perp$平面$CC_1D$，

又$C_1D\subset$平面$CC_1D$，

所以$AC\perp DC_1$．

（2）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面$ABC$，

所以$AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，

又$\angle BAC=90^\circ$，

所以，如图建立空间直角坐标系$A-xyz$，

依据已知条件可得次$A(0,0,0)$，

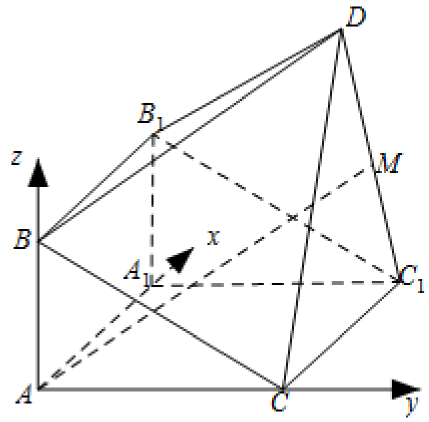
$C(0,\sqrt{3},0)$，$C_1(2,\sqrt{3},0)$，$B(0,0,1)$，

$B_1(2,0,1)$，$D(1,\sqrt{3},2)$，

所以$\overrightarrow{BB_1}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BD}=(1,\sqrt{3},1)$，

设平面$DBB_1$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$即$\begin{cases}2x=0,\\ x+\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$




令$y=1$，则$z=-\sqrt{3}$，$x=0$，于是

$\vec{n}=(0,1,-\sqrt{3})$，

因为$M$为$DC_1$中点，所以$M(\frac{3}{2},\sqrt{3},1)$，所以$\overrightarrow{AM}=(\frac{3}{2},\sqrt{3},1)$，

由$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=(\frac{3}{2},\sqrt{3},1)\cdot(0,1,-\sqrt{3})=0$可得$\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$，

所以$AM$与平面$DBB_1$所成的角为$0°$，

即$AM//$平面$DBB_1$．

（3）由（2）可知平面$BB_1D$的法向量为$\vec{n}=(0,1,-\sqrt{3})$．

设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in[0,1]$，

则$P(0,\sqrt{3}\lambda,-\lambda)$，$\overrightarrow{DP}=(-1,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-1-\lambda)$

若直线$DP$与平面$DBB_1$成角为$\frac{\pi}{3}$，则

$$\left|\cos\left\langle n,\overrightarrow{DP}\right\rangle\right|=\frac{\left|n\cdot\overrightarrow{DP}\right|}{|n|\cdot\left|\overrightarrow{DP}\right|}=\frac{|2\sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{4\lambda^2-4\lambda+5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}，$$

解得$\lambda=\frac{5}{4}\notin[0,1]$，

故不存在这样的点．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算
    - 空间向量的应用

6 如图1，四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD$，面$ABCD$是直角梯形，$M$为侧棱$PD$上一点．该四棱锥的俯视图和侧（左）视图如图2所示．

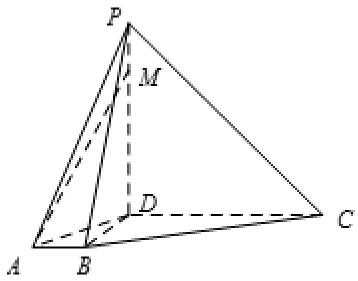



图1

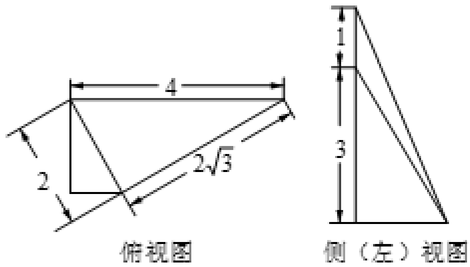



图2

（1）证明：$BC\perp$平面$PBD$．

（2）证明：$AM//$平面$PBC$．

（3）线段$CD$上是否存在点$N$，使$AM$与$BN$所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，找到所有符合要求的点$N$，并求$CN$的长；若不存在，说明理由．

答案 （1）证明见解析

（2）证明见解析

（3）$AM$与$BN$所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

解析 （1）【方法一】

（Ⅰ）证明：由俯视图可得，$BD^2+BC^2=CD^2$，

所以$BC\perp BD$．

又因为$PD\perp$平面$ABCD$，

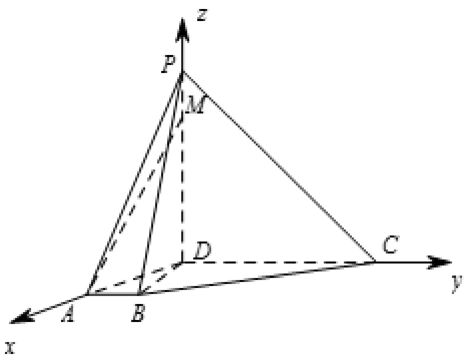
所以$BC\perp PD$，

所以$BC\perp$平面$PBD$．

【方法二】

（Ⅰ）证明：因为$PD\perp$平面$ABCD$，$DA\perp DC$，建立如图所示

的空间直角坐标系$D-xyz$．




在$\triangle BCD$中，易得$\angle CDB=60^{\circ}$，所以 $\angle ADB=30^{\circ}$，

因为$BD=2$，所以$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$．

由俯视图和左视图可得：

$D(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),B(\sqrt{3},1,0),C(0,4,0),M(0,0,3),P(0,0,4)$．

所以$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},1,0)$．

因为$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+3\cdot1+0\cdot0=0$，所以$BC\perp BD$．

又因为$PD\perp$平面$ABCD$，所以$BC\perp PD$，

所以$BC\perp$平面$PBD$．

（2）

【方法一】

证明：取$PC$上一点$Q$，使$PQ:PC=1:4$，连结$MQ$，$BQ$．

由左视图知$PM:PD=1:4$，所以$MQ//CD$，$MQ=\dfrac{1}{4}CD$．

在$\triangle BCD$中，易得$\angle CDB=60^{\circ}$，所以$\angle ADB=30^{\circ}$．

又$BD=2$，所以$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$．

又因为$AB//CD$，$AB=\dfrac{1}{4}CD$，所以 $AB//MQ$，$AB=MQ$．

所以四边形$ABQM$为平行四边形，所以$AM//BQ$．

因为$AM\not\subset$平面$PBC$，$BQ\subset$平面$PBC$，

所以直线$AM//$平面$PBC$．

【方法二】

证明：设平面$PBC$的法向量为$n=(x,y,z)$，则有$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BC}=0.\end{cases}$

因为$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,4,-4)$，

所以$\begin{cases}4y-4z=0,\\ -\sqrt{3}x+3y=0.\end{cases}$ 取$y=1$，得$n=(\sqrt{3},1,1)$．

因为$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{3},0,3)$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot n=\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0+1\cdot 3=0$．

因为$AM\not\subset$平面$PBC$，

所以直线$AM//$平面$PBC$．

（3）线段$CD$上存在点$N$，使$AM$与$BN$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$．

证明如下：10分

因为$PD\perp$平面$ABCD$，$DA\perp DC$，建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$．

所以$D(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),B(\sqrt{3},1,0),C(0,4,0),M(0,0,3)$．

设$D(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),B(\sqrt{3},1,0),C(0,4,0),M(0,0,3)$，其中$N(0,t,0)$．

所以$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{3},0,3)$，$\overrightarrow{BN}=(-\sqrt{3},t-1,0)$．

要使$AM$与$BN$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，则有$\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}|}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

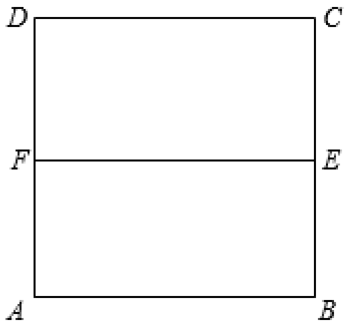
所以$\frac{|3|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+(t-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，解得$t=0$或$2$，均适合$N(0,t,0)$．

故点$N$位于$D$点处，此时$CN=4$；或$CD$中点处，此时$CN=2$，

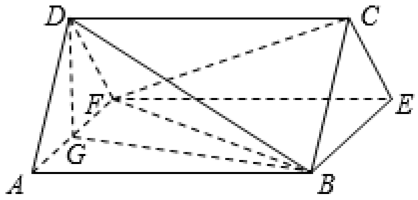
有$AM$与$BN$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$．

考点 —立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直
- 空间向量
  - 空间向量及其运算
  - 空间向量的应用

7 如图，正方形$ABCD$的边长为4，$E$，$F$分别为$BC$，$DA$的中点．将正方形$ABCD$沿着线段$EF$折起，使得$\angle DFA=60^\circ$．设$G$为$AF$的中点．




$\Rightarrow$




（1）求证：$DG \perp EF$；

（2）求直线$GA$与平面$BCF$所成角的正弦值；

（3）设$P$，$Q$分别为线段$DG$，$CF$上一点，且$PQ//$平面$ABEF$，求线段$PQ$长度的最小值．

答案 （1）证明见解析

（2）$\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$．

（3）$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$．

解析 （1）因为正方形$ABCD$中，$E$，$F$分别为$BC$，$DA$的中点，

所以$EF \perp FD$，$EF \perp FA$，

又因为$FD \cap FA = F$，

所以$EF \perp$平面$DFA$．

又因为$DG \subset$平面$DFA$，

所以$DG \perp EF$．

（2）因为$\angle DFA = 60^\circ$，$DF = FA$，$AG = GF$，

所以$\triangle DFA$为等边三角形，且$DG \perp FA$．

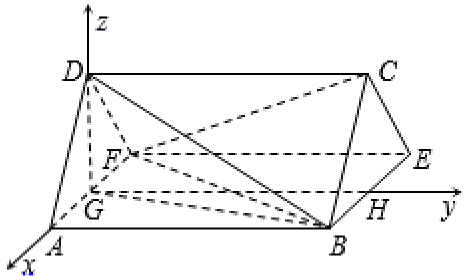
又因为$DG \perp EF$，$EF \cap FA = F$，

所以$DG \perp$平面$ABEF$．

设$BE$的中点为$H$，连接$GH$，则$GA$，$GH$，$GD$两两垂直，

故以$GA$，$GH$，$GD$分别为$x$轴、$y$轴和$z$轴，

如图建立空间直角坐标系，




则$G(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,4,0)$，

$C(0,4,\sqrt{3})$，$F(-1,0,0)$，

所以$\overrightarrow{GA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BF}=(-2,-4,0)$．

设平面$BCF$的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，得$\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0\\-2x-4y=0\end{cases}$，

令$z=2$，得$\vec{m}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},2)$．

设直线$GA$与平面$BCF$所成角为$\alpha$，

则$\sin\alpha=|\cos<\vec{m},\overrightarrow{GA}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{GA}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{GA}|}=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$．

即直线$GA$与平面$BCF$所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$．

（3）由题意，可设$P(0,0,k)(0\leqslant k\leqslant\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FQ}=\lambda\overrightarrow{FC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

由$\overrightarrow{FC}=(1,4,\sqrt{3})$，得$\overrightarrow{FQ}=(\lambda,4\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

所以$Q(\lambda-1,4\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{PQ}=(\lambda-1,4\lambda,\sqrt{3}\lambda-k)$．

由（Ⅱ），得$\overrightarrow{GD}=(0,0,\sqrt{3})$为平面$ABEF$的法向量．

因为$PQ//$平面$ABEF$，

所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{GD}=0$，即$\sqrt{3}\lambda-k=0$．

所以$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+(4\lambda)^2+(\sqrt{3}\lambda-k)^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+(4\lambda)^2}=\sqrt{17\lambda^2-2\lambda+1}$

，

又因为$17\lambda^2-2\lambda+1=17(\lambda-\dfrac{1}{17})^2+\dfrac{16}{17}$，

所以当$\lambda=\dfrac{1}{17}$时，$|\overrightarrow{PQ}|_{\min}=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$．

所以当$\lambda=\dfrac{1}{17}$，$k=\dfrac{\sqrt{3}}{17}$时，线段$PQ$长度有最小值$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$．

考点

一立体几何与空间向量

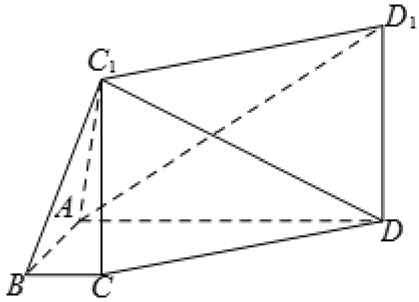
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的垂直
- 空间向量

空间直角坐标系

空间向量及其运算

空间向量的应用

8 如图，四边形为梯形$ABCD$，$AD//BC$，$\angle BAD=90^{\circ}$，四边形$CC_1D_1D$为矩形，已知$AB\perp BC_1$，$AD=4$，$AB=2$，$BC=1$．




（1）求证：$BC_1//$平面$ADD_1$；

（2）若$DD_1=2$，求平面$AC_1D_1$与平面$ADD_1$所成的锐二面角的余弦值；

（3）设$P$为线段$C_1D$上的一个动点（端点除外），判断直线$BC_1$与直线$CP$能否垂直？并说明理由．

答案 （1）证明见解析；

（2）$\frac{3\sqrt{29}}{29}$

（3）结论：直线$BC_1$与$CP$不可能垂直．

解析 （1）证明：由为$CC_1D_1D$矩形，得$CC_1//DD_1$，

又因为$DD_1\subset$平面$ADD_1$，$CC_1\not\subset$平面$ADD_1$，

所以$CC_1//$平面$ADD_1$，

同理$BC//$平面$ADD_1$，

又因为$BC\cap CC_1=C$，

所以平面$BCC_1//$平面$ADD_1$，

又因为$BC_1\subset$平面$BCC_1$，

所以$BC_1//$平面$ADD_1$．

（2）由平面$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle BAD=90^{\circ}$，得$AB\perp BC$．

又因为$AB\perp BC_1$，$BC\cap BC_1=B$，

所以$AB\perp$平面$BCC_1$

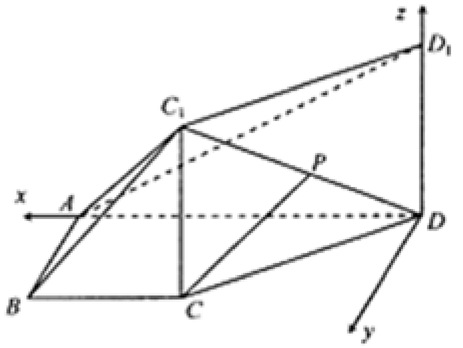
所以$AB\perp CC_1$，

又因为四边形$CC_1D_1D$为矩形，且底面$ABCD$中$AB$与$CD$相交一点，

所以$CC_1\perp$平面$ABCD$，

因为$CC_1//DD_1$

所以$DD_1\perp$平面$ABCD$




过$D$在底面$ABCD$中作$DM\perp AD$，所以$DA,DM,DD_1$两两垂直，以分$DA,DM,DD_1$别为$x$轴，$y$轴和$z$轴，如图建立空间直角坐标系，

则$D(0,0,0)$,$A(4,0,0)$,$B(4,2,0)$,$C(3,2,0)$,$C_1(3,2,2)$,$D_1(0,0,2)$,

所以$\overrightarrow{AC_1}=(-1,2,2)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-4,0,2)$

设平面$AC_1D_1$的一个法向量为$\mathbf{m}=(x,y,z)$

由$\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$，$\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，得$\begin{cases}-x+2y+2z=0,\\-4x+2z=0,\end{cases}$

令$x=2$，得$\mathbf{m}=(2,-3,4)$

易得平面$ADD_1$的法向量$\mathbf{n}=(0,1,0)$．

所以$\cos<\mathbf{m},\mathbf{n}>=\dfrac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|}=-\dfrac{3\sqrt{29}}{29}$．

即平面$AC_1D_1$与平面$ADD_1$所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{29}}{29}$

（3）设$DD_1=m(m>0)$，$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}(\lambda\in(0,1))$．

由$B(4,2,0)$，$C(3,2,0)$，$C_1(3,2,m)$，$D(0,0,0)$

得$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,m)$，$\overrightarrow{DC_1}=(3,2,m)$，$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}=(3\lambda,2\lambda,\lambda m)$，

$\overrightarrow{CD}=(-3,-2,0)$，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP}=(3\lambda-3,2\lambda-2,\lambda m)$，

若$BC_1\perp CP$，则$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CP}=-(3\lambda-3)+\lambda m^2=0$，即$(m^2-3)\lambda=-3$.

因为$\lambda\neq 0$

所以$m^2=-\dfrac{3}{\lambda}+3>0$，解得$\lambda>1$，这与$0<\lambda<1$矛盾．

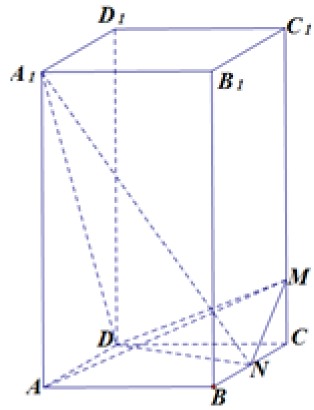
所以直线$BC_1$与$CP$不可能垂直．

考点 一立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

- 空间向量
  - 空间向量及其运算
  - 空间向量的应用

9 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2, AB=1$，点$N$是$BC$的中点，点$M$在$CC_1$上，设二面角$A_1-DN-M$的大小为$\theta$．




（1）当$\theta=90^0$时，求$AM$的长；

（2）当$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$时，求$CM$的长．

答案 （1）$AM=\dfrac{\sqrt{51}}{5}$

（2）$CM=\dfrac{1}{2}$.

解析 （1）以$D$为原点，$DA$为$x$轴正半轴，$DC$为$y$轴正半轴，$DD_1$为$z$轴正半轴，建立空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，$A_1(1,0,2)$，$N\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$，$C(0,1,0)$，设$M(0,1,z)$,

面$MDN$的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,2), \overrightarrow{DN}=(\dfrac{1}{2},1,0), \overrightarrow{DM}=(0,1,z)$

设面$A_1DN$的法向量为$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$，则

$\overrightarrow{DA_1}\cdot\vec{n}=0, \overrightarrow{DN}\cdot\vec{n}=0, \therefore \begin{cases} x_0+2z_0=0 \\ \frac{1}{2}x_0+y_0=0 \end{cases}$

取$x_0=2, y_0=-1, z_0=-1$,即$\vec{n}=(2,-1,-1)$

(1)由题意：$\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{n_1}=0, \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{n_1}=0, \vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}=,0 \therefore \begin{cases} \frac{1}{2}x_1+y_1=0 \\ y_1+zz_1=0 \\ 2x_1-y_1-z_1=0 \end{cases}$

取$x_1=2, y_1=-1, z_1=5, z=\dfrac{1}{5}$;

$\therefore AM=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(0-\dfrac{1}{5})^2}=\dfrac{\sqrt{51}}{5}$

（2）由题意：$\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\dfrac{\left|\vec{n}\overrightarrow{n_1}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,即

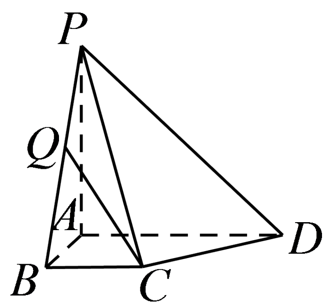
$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1+y_1=0\\ y_1+zz_1=0\\ 3{x_1}^2-4x_1y_1-4x_1z_1+2y_1z_1=0\end{cases}$$

取$x_1=2,y_1=-1,z_1=2,z=\dfrac{1}{2}$;$\therefore CM=\dfrac{1}{2}$.

考点

- 立体几何与空间向量
  - 空间向量
    - 空间向量的应用

10 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，已知$PA\perp$平面$ABCD$，且四边形$ABCD$为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$PA=AD=2$，$AB=BC=1$．




（1）求平面$PAB$与平面$PCD$所成二面角的余弦值．

（2）点$Q$是线段$BP$上的动点，当直线$CQ$与$DP$所成角最小时，求线段$BQ$的长．

答案 （1）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（2）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

解析 （1）以$A$为坐标原点，$AD$、$AB$、$AP$分别为$x$，$y$，$z$轴，建立空间直角坐标系，

$A(0,0,0)$，$\overrightarrow{AP}(0,0,2)$，

$P(0,0,2)$，$\overrightarrow{AB}(0,1,0)$，

$B(0,1,0)$，$\overrightarrow{CD}(1,-1,0)$，

$C(1,1,0)$，$\overrightarrow{PC}(1,1,-2)$，

$D(2,0,0)$，$\overrightarrow{PD}(2,0,-2)$，

由图知平面$PAB$的一个法向量$\vec{n}(1,0,0)$，

设平面$PCD$的一个法向量$\vec{m}(x,y,z)$，

$\begin{cases}x-y=0\\2x-2z=0\end{cases}$，$\vec{m}(1,1,1)$，

$\cos<\vec{m}\cdot\vec{n}>=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所示二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（2）设$Q(0,y,z)$，

$\because Q$在线段$BP$上，

直线$BP$上点坐标满足$y=1-\dfrac{1}{2}z$，

$\because \overrightarrow{DP}(-2,0,2)$，

$\overrightarrow{CQ}(-1,y-1,z)$，

$\cos<\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CQ}>=\dfrac{|2+2z|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+(y-1)^2+z^2}}(z>0)$

$=\dfrac{1+z}{\sqrt{2}\times\sqrt{1^2+\frac{z^2}{4}+z^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{z^2+2z+1}{2+\frac{5}{2}z^2}}$，

设$\dfrac{z^2+2z+1}{2+\frac{5}{2}z^2}=t(t\geqslant 0)$，

整理得：

$\left(1-\dfrac{5}{2}t\right)z^2+2z+(1-2t)=0$，

$\Delta=4-4\left(1-\dfrac{5}{2}t\right)(1-2t)\geqslant 0$，

解得$0\leqslant t\leqslant\dfrac{9}{10}$，

$\therefore$当$DP$与$CQ$夹角最小时，

$\cos<\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CQ}>=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

此时解得$z=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore Q$点坐标为$\left(0,\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，

$\because B(0,1,0)$，

$BQ$长度为$\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

考点

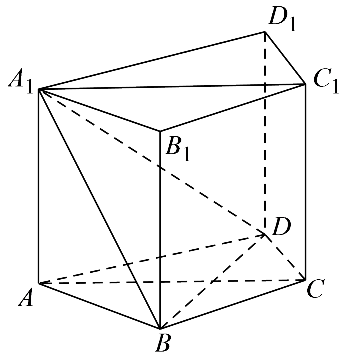
—立体几何与空间向量

—空间向量

└空间直角坐标系

└空间向量的应用

11 如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=BD$，$BC=CD$．




（1）求证：平面$ACC_1A_1\perp$平面$A_1BD$．

（2）当$BC\perp CD$时，直线$BC$与平面$A_1BD$所成的角能否为$45^\circ$？并说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）不能，理由见解析．

解析 （1）证明：$\because AB=BD$，$BC=CD$，$AC=AC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$．

$\therefore \angle BAC=\angle DAC$，即$AC$平方$\angle BAD$．

$\because AB=BD$，$\angle BAD=60^\circ$，

$\therefore \triangle ABD$是等边三角形，

$\therefore AC\perp BD$．

$\because AA_1\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

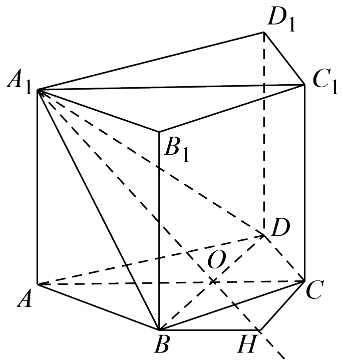
$\therefore AA_1\perp BD$，

又$AC\subset$平面$ACC_1A_1$，$AA_1\subset$平面$ACC_1A_1$，$AA_1\cap AC=A$，

$\therefore BD\perp$平面$ACC_1A_1$，又$BD\subset$平面$A_1BD$，

$\therefore$平面$ACC_1A_1\perp$平面$A_1BD$．

（2）设$AC\cap BD=O$，过$C$作$CH\perp A_1O$交$A_1O$的延长线于$H$，连结$BH$．




$\because$平面$ACC_1A_1\perp$平面$A_1BD$，

平面$ACC_1A_1\cap$平面$A_1BD=A_1O$，$CH\perp A_1O$，$CH\subset$平面$ACC_1A_1$，

$\therefore CH\perp$平面$A_1BD$，即$\angle CBH$是直线$BC$与平面$A_1BD$所成的角．

设$AA_1=h$，$AB=2$，则$AO=\sqrt{3}$，$OC=OB=1$，$BC=\sqrt{2}$，

$\therefore A_1O=\sqrt{h^2+3}$．

$\because\angle A_1AO=\angle CHO=90^\circ$，$\angle AOA_1=\angle COH$，

$\therefore\triangle A_1AO\backsim\triangle CHO$，

$\therefore\dfrac{CH}{AA_1}=\dfrac{CO}{A_1O}=\dfrac{1}{\sqrt{h^2+3}}$．

解得$CH=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}}$．

$\because\angle CBH=45^\circ$，$\angle CHB=90^\circ$，$BC=\sqrt{2}$，

$\therefore CH=1$．

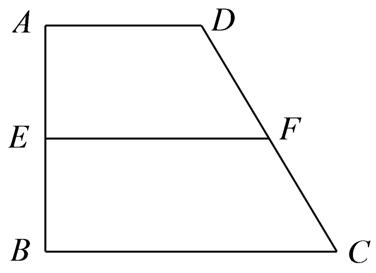
$\therefore\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}}=1$，方程无解．

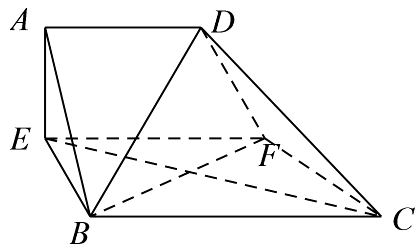
$\therefore$直线$BC$与平面$A_1BD$所成的角不能为$45^\circ$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的垂直

12 如图在直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB\perp BC$，且$BC=2AD=4$，$E,F$分别为线段$AB,DC$的中点，沿$EF$把$AEFD$折起，使$AE\perp CF$，得到如下的立体图形．




（1）证明：平面$AEFD\perp$平面$EBCF$．

（2）若$BD\perp EC$，求二面角$F-BD-C$的余弦值．

答案　（1）证明见解析．

（2）$\frac{2}{3}$．

解析　（1）由题可得，$EF//AD$，则$AE\perp EF$，

又$AE\perp CF$，且$EF\cap CF=F$，所以$AE\perp$平面$EBCF$．

因为$AE\subset$平面$AEFD$，所以平面$AEFD\perp$平面$EBCF$．

（2）方法一、过点$D$作$DG//AE$交$EF$于点$G$，

连结$BG$，则$DG\perp$平面$EBCF$，$DG\perp EC$．

又$BD\perp EC$，$BD\cap DG=D$，

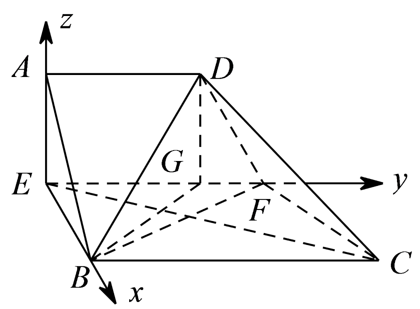
所以$EC\perp$平面$BDG$，$EC\perp BG$．

易证$\triangle EGB\sim\triangle BEC$，则$\frac{EG}{EB}=\frac{EB}{BC}$，

得$EB=2\sqrt{2}$．

以$E$为坐标原点，$EB$方向为$x$轴正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系$E-xyz$．




则$F(0,3,0)$，$D\left(0,2,2\sqrt{2}\right)$，

$C\left(2\sqrt{2},4,0\right)$，$A\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$，$B=\left(2\sqrt{2},0,0\right)$．

故$\overrightarrow{BD}=\left(-2\sqrt{2},2,2\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{FD}=\left(0,-1,2\sqrt{2}\right)$，

$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-2\sqrt{2},-2,-2\sqrt{2}\right)$．

设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面$FBD$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=2\sqrt{2}x+2y+2\sqrt{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FD}=-y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令$z=1$，的$\vec{n}=\left(3,2\sqrt{2},1\right)$．

设$\vec{m}=(a,b,c)$是平面$BCD$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=4b=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-2\sqrt{2}a-2b+2\sqrt{2}c=0\end{cases}$，

令$a=1$，的$\vec{m}=(1,0,1)$．

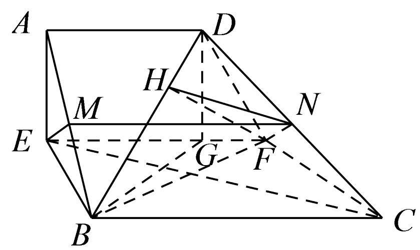
因为$\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\,|\vec{m}|}=\dfrac{4}{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}$，

所以二面角$F-BD-C$的余弦值为$\dfrac{2}{3}$．

方法二、依题意可得$EF\perp$平面$AEB$，$BC//EF$．

即$BC\perp$平面$AEB$，所以平面$ABCD\perp$平面$AEB$．

取$AB$的中点$M$，$CD$的中点$N$，连结$EM,MN,FN$，




因为$AE=BE$，所以$EM\perp AB$．

又平面$AEF\cap$平面$ABCD=AB$，所以$EM\perp$平面$ABCD$．

因为$MN//BC$，且$MN=3$，$EF//BC$，所以$EF=3$．

所以$MN\underline{\underline{//}}EF$，即四边形$EMNF$是平行四边形．

所以$EM//FN$．从而$FN\perp$平面$ABCD$．所以$FN\perp BD$．

作$NH\perp BD$交$BD$于点$H$，连结$FH$，

因为$FN\perp BD$，$NH\perp BD$，所以$BD\perp$平面$NFH$．

所以$BD\perp HF$，所以$\angle FHN$是二面角$F-BD-C$的平面角．

过点$D$做$DG//AE$交$EF$于点$G$，

连结$BG$，则$DG\perp$平面$EBCF$，$DG\perp EC$．

又$BD\perp EC$，$BD\cap DG=D$，

所以$EC \perp$平面$BDG$，$EC \perp BG$．

易证$\triangle EGB \sim \triangle BEC$，则$\dfrac{EG}{EB} = \dfrac{EB}{BC}$，得$EB = 2\sqrt{2}$．

易得$FD = 3$，$DC = 2\sqrt{5}$，

$FN = EM = 2$，$BD = 2\sqrt{5}$．

在$\triangle BDC$中，$\cos \angle BDC = \dfrac{BD^2 + DC^2 - BC^2}{2BD \cdot DC} = \dfrac{3}{5}$，

则$\sin \angle BDC = \dfrac{4}{5}$．

由$\sin \angle BDC = \dfrac{4}{5} = \dfrac{NH}{DN}$，得$NH = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$．

所以$\tan \angle FHN = \dfrac{2}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$．则$\cos \angle FHN = \dfrac{2}{3}$．

所以二面角$F - BD - C$的余弦值为$\dfrac{2}{3}$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算
    - 空间向量的应用

13 如图1，在边长为$2\sqrt{3}$的正方形$ABCD$中，$E,O$分别为$AD,BC$的中点，沿$EO$将矩形$ABOE$折起使得$\angle BOC = 120^\circ$，如图2所示，点$G$在$BC$上，$BG = 2GC$，$M,N$分别为$AB,EG$中点．

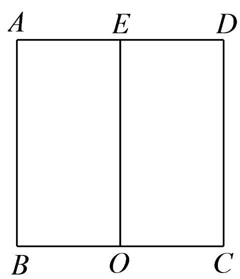


图1

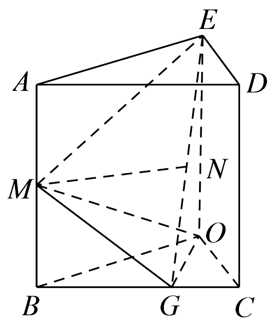


图2

（1）求证：$MN//$平面$OBC$．

（2）求二面角$G-ME-B$的余弦值．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\frac{\sqrt{42}}{7}$．

解析 （1）法一：如图13取$OG$中点$F$，连结$BF,FN$，

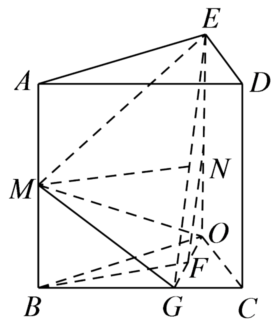


图13

则中位线$FN//\frac{1}{2}OE$且$FN=\frac{1}{2}OE$，

又$BM//OE$且$BM=\frac{1}{2}OE,$

所以$FN//BM$且$FN=BM$，

所以四边形$BFNM$是平行四边形，

所以$MN//BF$，

又$MN\not\subset$平面$OBC$，$BF\subset$平面$OBC$，所以$MN//$平面$OBC$．

法二：如图14，延长$EM,OB$交于点$Q$，连结$GQ$，

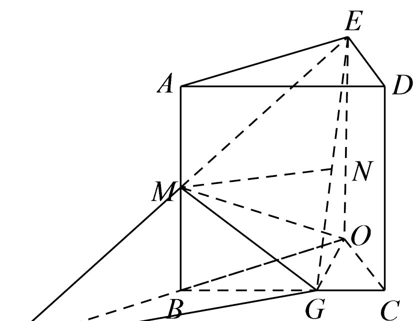


图14

因为$BM//OE$且$BM=\frac{1}{2}OE$，所以$\frac{QM}{QE}=\frac{BM}{OE}=\frac{1}{2}$，

$M$为$EQ$中点，所以中位线$MN//QG,$

又$MN\not\subset$平面$OBC$，$QG\subset$面$OBC$，所以$MN//$平面$OBC$．

（2）法一：如图14，因为$OB=OC=\sqrt{3}$，$\angle BOC=120^\circ$，

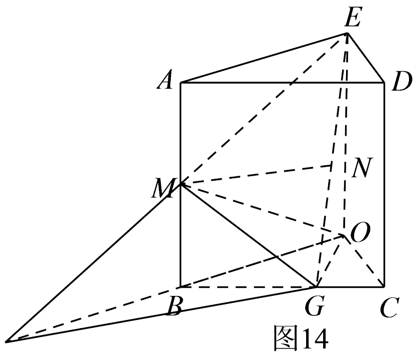


图14

所以$BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB\times OC\times\cos 120^\circ}=3$，

又$BG=2GC$．所以$BG=\dfrac{2}{3}BC=2,GC=1$，

$OG=\sqrt{CG^2+OC^2-2\times CG\times OC\cos 30^\circ}=1$，

$\therefore OB^2+OG^2=BG^2$，$\therefore\angle BOG=90^\circ$，$OG\perp OB$，

又$\because OE\perp OB$，$OE\perp OC$，$OB\cap OC=O$，

$\therefore OE\perp$平面$OBC$，$OG\subset$面$OBC$，$\therefore OE\perp OG$,

又$OB\cap OE=O$，所以$OG\perp$平面$OBE$，$QE\subset$面$OBE$, $OG\perp QE$，

又$M$为$EQ$中点，所以$OQ=OE=2\sqrt{3}$，所以$OM\perp QE$，$OM\cap OG=O$，

所以$QE\perp$平面$OMG$，$QE\perp MG$，$\angle OMG$为二面角$G-ME-B$的平面角．

所以$\mathrm{Rt}\triangle MOG$中，$OM=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$，

$MG=\sqrt{(\sqrt{6})^2+1^2}=\sqrt{7}$，

$\cos\angle OMG=\dfrac{OM}{MG}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

$\therefore$二面角$G-ME-B$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

法二：如图15，$\because OB=OC=\sqrt{3}$，$\angle BOC=120^\circ$，

$\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB\times OC\times\cos 120^\circ}=3$，又$BG=2GC$，

$\therefore BG=\dfrac{2}{3}BC=2,GC=1$，

$\therefore OG=\sqrt{CG^2+OC^2-2\times CG\times OC\cos 30^\circ}=1$，

$\therefore OB^2+OG^2=BG^2$，

$\therefore\angle BOG=90^\circ$，$OG\perp OB$，

又$\because OE\perp OB$，$OE\perp OC$，$OB\cap OC=O$，

$\therefore OE\perp$平面$OBC$，$OG\subset$面$OBC$，

$\therefore OE\perp OG$，又$OB\cap OE=O$，

所以$OG\perp$平面$OBE$，$OE\subset$面$OBE$，$\therefore OG\perp OE$．

建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，

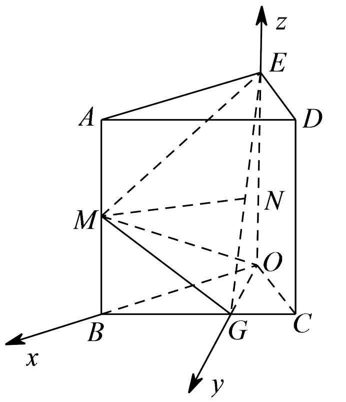


图15

则$M\left(\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$，$G(0,1,0)$，$E\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{MG}=\left(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{ME}=\left(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$，

而$\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$是平面$BOE$的一个法向量，

设平面$MGE$的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{MG}=-\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{ME}=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令$z=1$，则$x=1,y=2\sqrt{3}$，

面$MGE$的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=\left(1,2\sqrt{3},1\right)$，

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\times\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

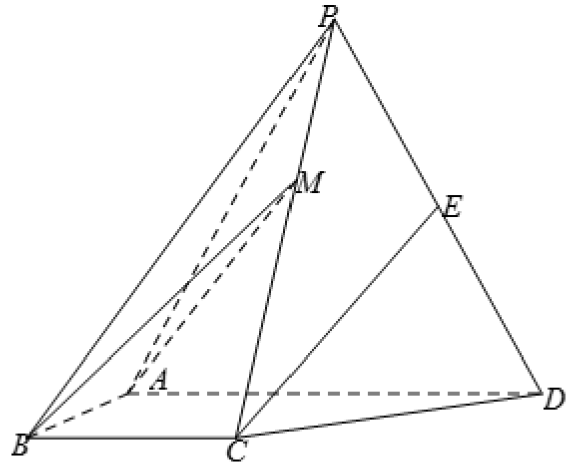
所以，二面角$G-ME-B$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算
    - 空间向量的应用

如图，四棱锥$P-ABCD$中，侧面$PAD$为等边三角形且垂直于底面三角形$BCD$，

$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$ ，$E$是$PD$的中点．



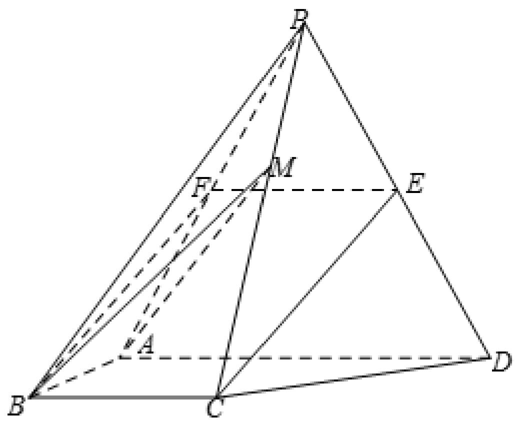

（1）证明：直线$CE//$平面$PAB$．

（2）点$M$在棱$PC$上，且直线$BM$与底面$ABCD$所成锐角为$45^\circ$，求二面角$M-AB-D$的余弦值．

答案 （1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{10}}{5}$

解析 （1）取$PA$中点$F$，连接$BF$，$EF$，




因为$E$，$F$分别为$PD$，$PA$中点，

所以$EF\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}AD$，

因为$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，所以

$BC//AD$，

所以$BC\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}AD$，

所以$BC\underline{\underline{//}}EF$，

所以四边形$BCEF$为平行四边形，

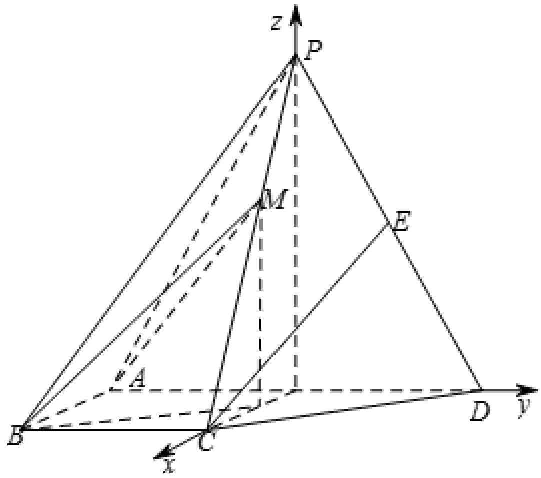
所以$CE//BF$，

因为$BF\subset$平面$PAB$，$CE\not\subset$平面$PAB$，

所以$CE//$平面$PAB$．

（2）不妨设$AD=2$，取$AD$中点为$O$，连接$OC$，易知$OC$，$OD$，$OP$两两垂直，

故建立如图所示的空间直角坐标系；




则$O(0,0,0)$，$A(0,-1,0)$，$B(1,-1,0)$，$C(1,0,0)$，$D(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

则$\overrightarrow{PC}=(1,0,-\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{PB}=(1,-1,-\sqrt{3})$，

$M$为$PC$上一点，

不妨设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=(\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，

则$M$的坐标为$(\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3})$，

点$M$在$ABCD$上投影$M'$的坐标为$(\lambda,0,0)$，

由题意有$BM'=MM'$，即$\sqrt{(\lambda-1)^2+1}=-\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}$，

解得$\lambda=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\lambda=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）．

所以$M(1-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$\overrightarrow{BM}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{6}}{2})$，易得$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，

设平面$MAB$的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+y+\frac{\sqrt{6}}{2}z=0\end{cases}$，

令$y=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则$x=0$，$z=-1$，

所以$\vec{m}=(0,\frac{\sqrt{6}}{2},-1)$，

同理易得平面$ABCD$的法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$，

则$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}=\frac{|-1|}{|\sqrt{0+\frac{6}{4}+1}|\cdot|\sqrt{1}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$．

由图可知，二面角$M-AB-D$为锐角，

所以二面角$M-AB-D$的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$．

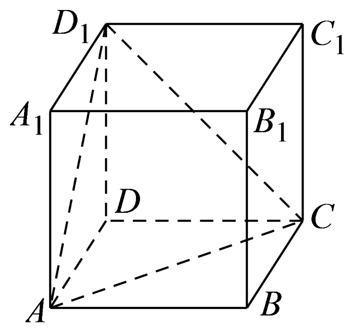
考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
  - 空间向量

└空间直角坐标系

└空间向量及其运算

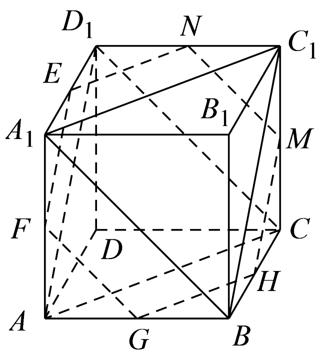
15 在如图所示的棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，作与平面$ACD_1$平行的截面，则截得的三角形中，面积最大的值是 ______ ；截得的平面图形中，面积最大的值是 ______ .




答案 1．$2\sqrt{3}$

2．$3\sqrt{3}$

解析 如图所示，截得的三角形中$\triangle A_1BC_1$的面积最大，




为边长为$2\sqrt{2}$的等边三角形，面积为$2\sqrt{3}$，

截得的平面图形中，正六边形$EFGHMN$的面积最大，

如图所示$E,F,G,H,M,N$分别为各边中点，边长为$\sqrt{2}$，面积为$3\sqrt{3}$．

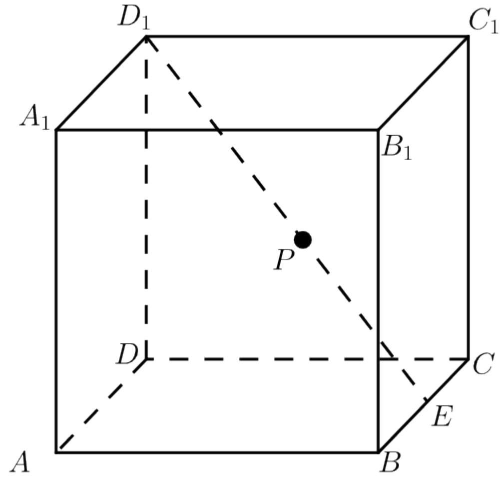
故答案为$2\sqrt{3}$；$3\sqrt{3}$．

考点 一立体几何与空间向量

├立体几何初步

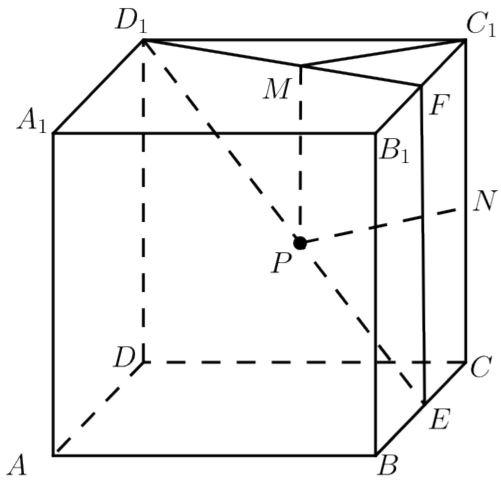
└空间几何体

16 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$E$为$BC$的中点，点$P$在线段$D_1E$上．点$P$到直线$CC_1$的距离的最小值为 ______ ．




答案 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 如图所示，取$B_1C_1$的中点$F$，连接$EF$ ，$ED_1$




$\because EF//CC_1$ ，$CC_1\perp$底面$ABCD$，

$\therefore$四边形$EFC_1C$是矩形．

$\therefore CC_1//EF$，又$EF\subset$平面$D_1EF$，$CC_1\not\subset$平面$D_1EF$

$\therefore CC_1//$平面$D_1EF$．

$\therefore$直线$C_1C$上任一点到平面$D_1EF$的距离是两条异面直线$D_1E$与$CC_1$的距离．过点$C_1$作$C_1M\perp D_1F$

$\because$平面$D_1EF\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$．

$\therefore C_1M\perp$平面$D_1EF$．过点$M$ 作$MP//EF$交$D_1E$于点$P$，则$MP//C_1C$．

取$C_1N=MP$，连接$PN$，则四边形$MPNC_1$是矩形．

可得$NP\perp$平面$D_1EF$

在$\mathrm{Rt}\triangle D_1C_1F$中，$C_1M\cdot D_1F=D_1C_1\cdot C_1F$得$C_1M=\dfrac{2\times 1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

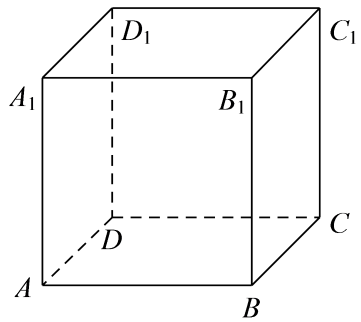
$\therefore$点$P$到直线$CC_1$的距离的最小值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

考点

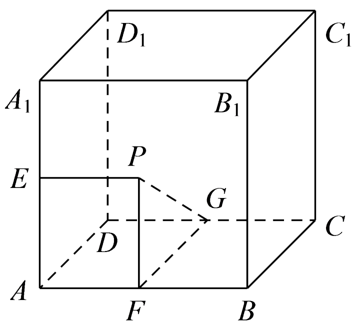
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间向量
    - 空间向量的应用

17 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点$P$在侧面$A_1ABB_1$上．若点$P$到直线$AA_1$和$CD$的距离相等，则$A_1P$的最小值是______．




答案 $\sqrt{3}$

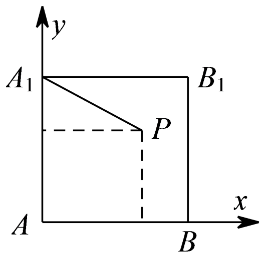
解析




在侧面$A_1ABB_1$中，$PG=PE$．

由勾股定理知，$PG^2-PF^2=PE^2-PF^2=FG^2=1$．

考虑平面$ABB_1A_1$，建立平面直角坐标系$xAy$如右图所示．




设点$P(x,y)$，则$P$点轨迹为$x^2-y^2=1\,(1\leqslant x\leqslant 2,y\geqslant 0)$．

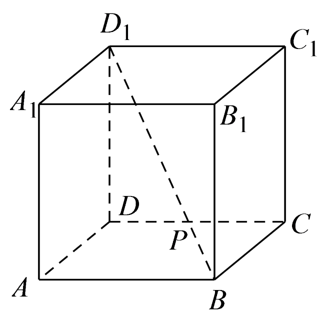
而$A(0,2)$，则$A_1P=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{y^2+1+(y-2)^2}$

$=\sqrt{2y^2-4y+5}=\sqrt{2(y-1)^2+3}\geqslant\sqrt{3}$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间中的垂直
- 解析几何
  - 双曲线
    - 双曲线的定义、图形及标准方程
    - 双曲线的性质

18 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$P$为对角线$BD_1$的三等分点，$P$到各顶点的距离的不同取值有（　）．

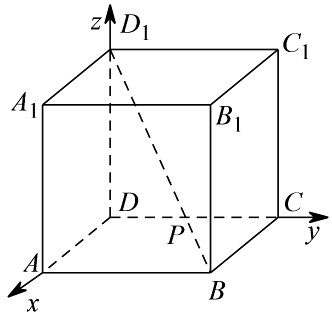



A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

答案　B

解析

如图所示，建立空间直角坐标系，设正方体的棱长为3，则$D(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$，$A_1(3,0,3)$，$B_1(3,3,3)$，$C_1(0,3,3)$，$D_1(0,0,3)$，$\overrightarrow{BD}(-3,-3,3)$，设$P(x,y,z)$，




$\because \overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$，即$(x-3,y-3,z)=\dfrac{1}{3}(-3,-3,3)$，得$x=2$，$y=2$，$z=1$，即$P(2,2,1)$，

$\therefore PA=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$，$PB=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$，

$PD=\sqrt{4+4+1}=3$，

$PA_1=\sqrt{1+4+4}=3$，$PB_1=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$，$PC_1=\sqrt{4+1+4}=3$，

$PD_1=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$，

$\therefore$点$P$到各顶点的距离的不同取值有$\sqrt{6}$，$\sqrt{3}$，$3$，$2\sqrt{3}$共4个．

故选B．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系

19 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$P$是正方体棱上一点（不包括棱的端点），$|PA|+|PC_1|=m$，

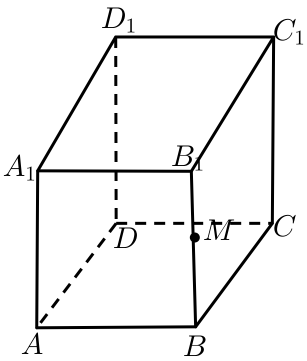
（1）若$m=2$，则满足条件的点$P$的个数为______．

（2）若满足$|PA|+|PC_1|=m$的点$P$的个数为6，则$m$的取值范围是______．

答案 （1）6

（2）$(\sqrt{3},\sqrt{5})$

解析 （1）如下图所示，




$AB, AA_1, AD$，以及$C_1B$，$C_1C$，$C_1D_1$棱上面的点到$A$，$C_1$距离的情况是一致的，

范围在$(\sqrt{3}, \sqrt{2}+1)$之间，

而另外六条棱上的点情况是一致的，以$BB_1$为例，

当$P$点在$M$位置时，值最小是$\sqrt{5}$．

当$m=2$时，满足条件的在$AB, AA_1, AD$，$C_1B$，$C_1C$，$C_1D_1$棱上各有一点；

（2）如果满足条件的点个数为6，那么$m$的取值范围是$(\sqrt{3}, \sqrt{5})$．

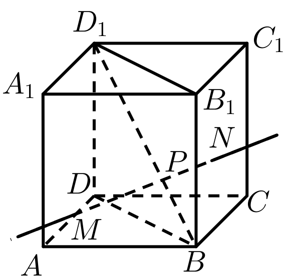
故答案为6，$(\sqrt{3}, \sqrt{5})$．

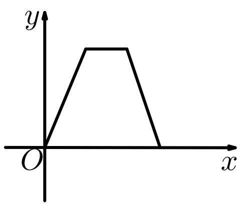
考点

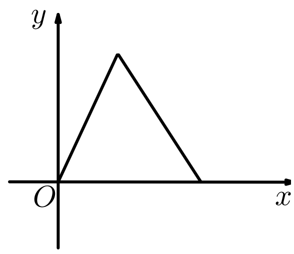
一立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系

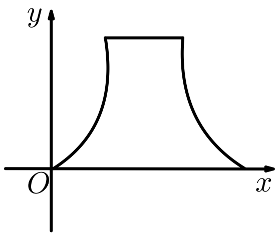
20 如图，动点$P$在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线$BD_1$上．过点$P$作垂直于平面$BB_1D_1D$的直线，与正方体表面相交于$M$，$N$．设$BP=x$，$MN=y$，则函数$y=f(x)$的图象大致是（　）．



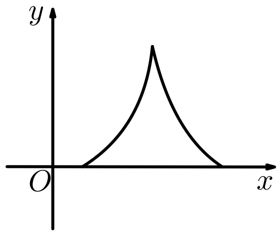

A. 


B. 

C.



D.



答案 B

解析 设正方体的棱长为1，显然，当$P$移动到对角线$BD_1$的中点$O$时，函数

$y=MN=AC=\sqrt{2}$，

取得唯一最大值，所以排除$A$、$C$；当$P$在$BO$上时，分别过$M$、$N$、$P$作底面的垂线，垂足分别为$M_1$、$N_1$、$P_1$，

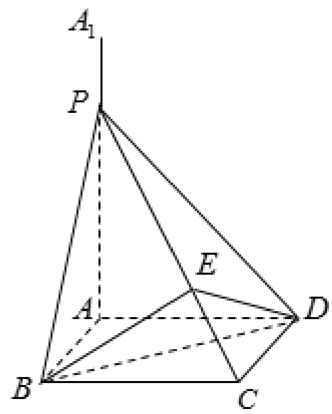
则$y=MN=M_1N_1=2BP_1=2x\cos\angle D_1BD=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}x$是一次函数，所以排除$D$．

故选B．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 函数的概念与表示
    - 图象
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体

21 已知四边形$ABCD$是边长为1的正方形，且$A_1A\perp$平面$ABCD$，$P$为$A_1A$上动点，过$BD$且垂直于$PC$的平面交$PC$于$E$，那么异面直线$PC$与$BD$所成的角的度数为______，当三棱锥$E-BCD$的体积取得最大值时，四棱锥$P-ABCD$的高$PA$的长为______．




答案 1．$\sqrt{2}$

2．$90^\circ$

解析 略

考点 
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系

22 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$E$，$F$分别为棱$DD_1$，$AB$上的点．已知下列判断：

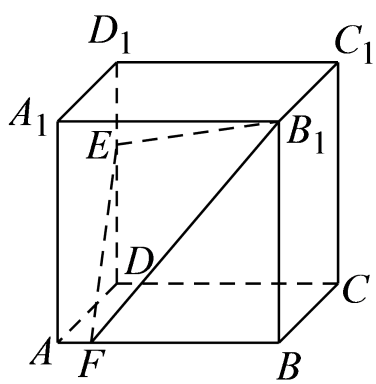
①$A_1C\perp$平面$B_1EF$；

②$\triangle B_1EF$在侧面$BCC_1B_1$上的正投影是面积为定值的三角形；

③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面$B_1EF$平行的直线；

④平面$B_1EF$与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点$E$的位置有关，与点$F$的位置无关．

其中正确判断的个数有（　）．




A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

答案 B

解析 对于①$A_1C\perp$平面$B_1EF$，不一定成立，因为$A_1C\perp$平面$AC_1D$，而两个平面面$B_1EF$与面$AC_1D$不一定平行；

对于②$\triangle B_1EF$在侧面$BCC_1B_1$上的正投影是面积为定值的三角形，此是一个正确的结论，因为其投影三角形的一边是棱$BB_1$，而$E$点在面上的投影到此棱$BB_1$的距离是定值，故正确；

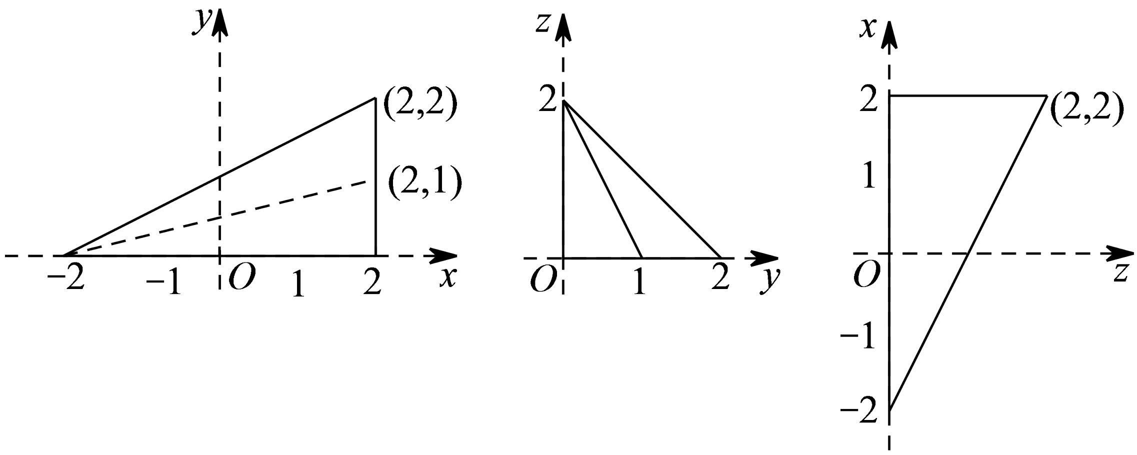
对于③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面$B_1EF$平行的直线，此两平面相交，一个面内平行于两个平面的交线一定平行于另一个平面，此结论正确；

对于④平面$B_1EF$与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点$E$的位置有关，与点$F$的位置无关，此结论不对，与两者都有关系，可代入几个特殊点进行验证，如$F$与$A$重合，$E$与$D$重合时的二面角与$F$与$B$重合，$E$与$D$重合时的情况就不一样，故此命题不正确．

考点

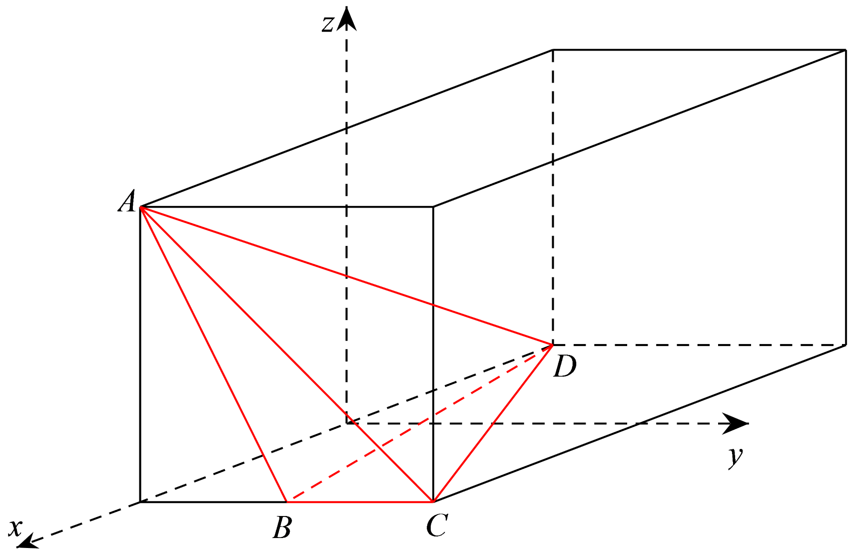
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

23 在空间直角坐标系$O-xyz$中，四面体$A-BCD$在$xOy$，$yOz$，$zOx$坐标平面上的一组正投影图像如图所示（坐标轴用细虚线表示）．该四面体的体积是______．




答案 $\frac{4}{3}$

解析 该几何体还原如图所示，




易得体积为$V=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times1\times2)\times4=\frac{4}{3}$．

考点 
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体体积和表面积的计算
    - 三视图

24 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=AA_1=1$，点$M$为$AB_1$的中点，点$P$为对角线$AC_1$上的动点，点$Q$为底面$ABCD$上的动点，（点$PQ$可以重合），则$MP+PQ$的最小值为（

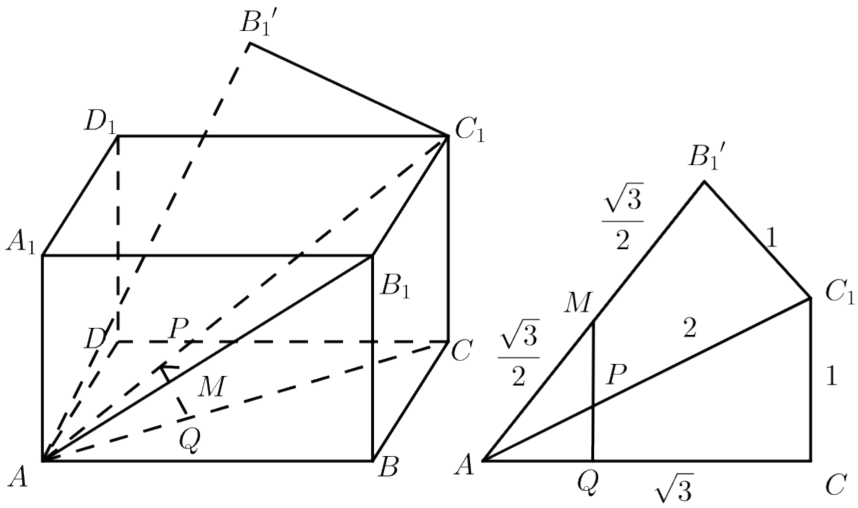
）．

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $1$

答案　C

解析　对角线$AC_1$上的动点$P$到底面$ABCD$上的$Q$点的最小值为点$P$在底面$ABCD$上的投影，即直线$AC$上，所以选择确定点$Q$，点$B_1$沿着线$AC_1$旋转，使得$ACC_1B_1$在一个平面上，过$AB_1$的中点$M$做$AC$的垂线，垂足为$Q$，$MQ$与$AC_1$的交点为$P$，线段$MQ$的长度为我们求的最小值．由题意长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=\sqrt{2},BC=AA_1=1$可得$\angle B_1AC_1=\angle CAC_1=\frac{\pi}{6}$，则$\angle MAC_1=\frac{\pi}{3}$，另外$AB_1=\sqrt{3}$，则$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$．

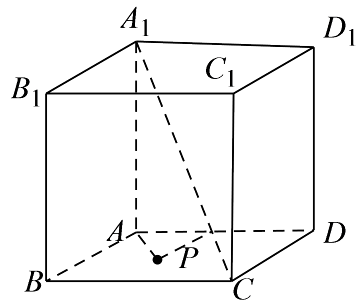
故答案为$C$．




考点

- 三角函数与解三角形
  - 解三角形
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系

25　如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$P$为底面$ABCD$上的动点，$PE\perp A_1C$于$E$，且$PA=PE$，则点$P$的轨迹是（　　）．




A. 线段　　B. 圆弧　　C. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

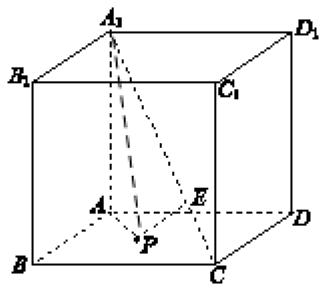
答案　A

解析　（解法一）由于$\triangle A_1AP \cong \triangle A_1EP$，

所以$AE=1$，因此$E$为$A_1C$上的定点．又$PA=PE$，

所以点$P$一定在线段$AE$的垂直平分面与底面$ABCD$的交线上，

因此点$P$的轨迹是线段．




（解法二）设正方形的边长为1，点$P$到$AB$和$AD$的距离分别为$x$和$y$．

由于$\triangle A_1AP \cong \triangle A_1EP$，

所以在$Rt\Delta EPC$中，$\angle CEP=90^o$，$CE=\sqrt{3}-1$，$PE=\sqrt{x^2+y^2}$，

$PC=\sqrt{(1-x)^2+(1-y^2)}$．

由$PC^2=CE^2+PE^2$可得$x+y=\sqrt{3}-1$．

考点　立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系

26　已知正方体$ABCD-A'B'C'D'$，记过点$A$与三条直线$AB$，$AD$，$AA'$所成角都相等的直线条数为$m$，过点$A$与三个平面$AC$，$AB'$，$AD'$所成角都相等的直线的条数为$n$，则下面结论正确的是（　）．

A. $m=1$，$n=1$　　B. $m=4$，$n=1$　　C. $m=3$，$n=4$　　D. $m=4$，$n=4$

答案 D

解析 以$A$为原点，$AB$，$AD$，$AA'$所在直线分别为$x$，$y$，$z$轴建立如图所示空间直角坐标系，

如图所示，则$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AA'}=(0,0,1)$，

设过点$A$与三条直线$AB$，$AD$，$AA'$所成角都相等的直线的方向向量$\vec{v}=(x,y,z)$，

根据题意则有$|x|=|y|=|z|$，

因此方向向量可以为$\vec{v}_1=(1,1,1)$，$\vec{v}_2=(-1,1,1)$，$\vec{v}_3=(1,-1,1)$，$\vec{v}_4=(1,1,-1)$，故

$m=4$；

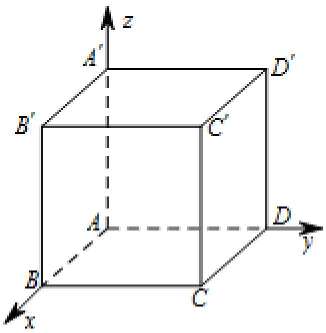
又因为平面$AC$，$AB'$，$AD'$的法向量分别为$(0,0,1)$，$(0,1,0)$，$(1,0,0)$，

设过点$A$与三个平面$AC$，$AB'$，$AD'$所成角都相等的直线的方向向量$\vec{p}=(x',y',z')$，

则有$|x'|=|y'|=|z'|$，$\vec{p}=(1,1,1)$，$\vec{p}_2=(-1,1,1)$，$\vec{p}_3=(1,-1,1)$，$p_4=(1,1,-1)$，故

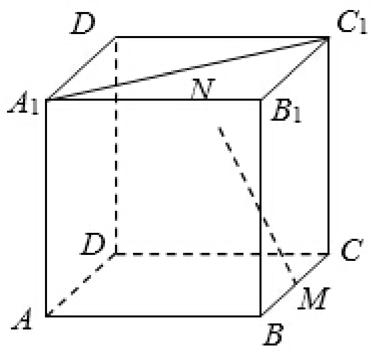
$n=4$

故答案选D．




考点
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间向量
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量及其运算
    - 空间向量的应用

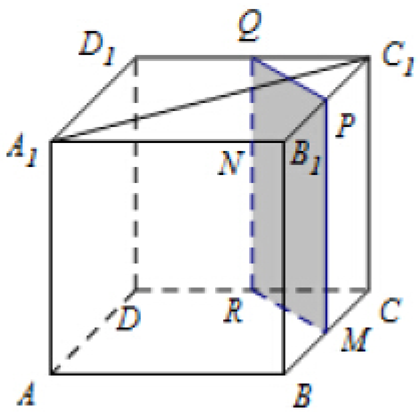
如图，在正方体中$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$M$为$BC$的中点，点$N$在四边形$CDD_1C_1$及其内部运动．若$MN\perp A_1C_1$，则$N$点的轨迹为（　）．




A. 线段　　B. 圆的一部分　　C. 椭圆的一部分　　D. 双曲线的一部分

答案　A

解析　取棱$B_1C_1,C_1D_1$的中点$P,Q$，连接$MP,PQ$．设面$MPQ$与棱$CD$交于点$R$（$R$为棱$CD$的中点）．如图所示：

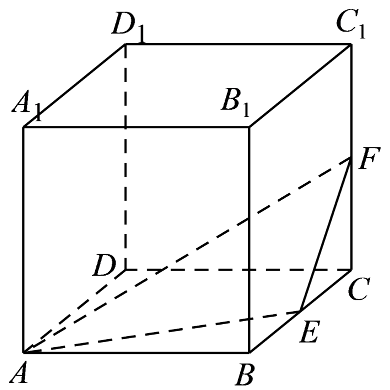



因为$MP\perp A_1C_1,PQ\perp A_1C_1$，所以$A_1C_1\perp$面$MPQ$．

所以当点$N$在线段$QR$上运动时，满足$MN\perp A_1C_1$．故选A．

考点
- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

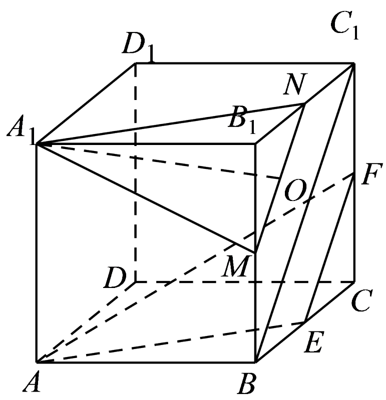
28 如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$E,F$分别是棱$BC,CC_1$的中点，$P$是侧面$BCC_1B_1$内一点，若$A_1P//$平面$AEF$, 则线段$A_1P$长度的取值范围是（　）.




A. $[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　B. $[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　C. $[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

答案　B

解析　取$B_1C_1$的中点$M$,$BB_1$的中点$N$,




连结$A_1M,A_1N,MN$，可以证明平面$A_1MN//$平面$AEF$，

所以点$P$位于线段$MN$上，把三角形$A_1MN$拿到平面上，

则有$A_1M=A_1N=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$MN=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以当点$P$位于$MN$时，$A_1P$最大，

当$P$位于中点$O$时，$A_1P$最小，

此时$A_1O=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以$A_1O\leqslant A_1P\leqslant A_1M$，即$\frac{3\sqrt{2}}{4}\leqslant A_1P\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，

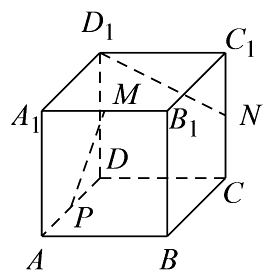
所以线段$A_1P$长度的取值范围是$[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$.

故答案为$B$．

考点

一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行

29 如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$M$、$N$分别为$A_1B_1$，$CC_1$的中点，$P$为$AD$上一动点，记$\alpha$为异面直线$PM$与$D_1N$所成的角，则$\sin\alpha$的值为（　）．




A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1$

答案　D

解析　如图，分别以$DA$，$DC$，$DD_1$所在直线为$x$轴，$y$轴，$z$轴建立如图所示空间直角坐标系，

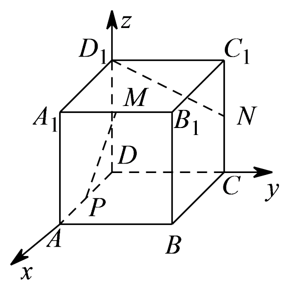
设正方体边长为1，则$P(x,0,0)$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$，$M=\left\{1,\frac{1}{2},1\right\}$，$D(0,0,1)$，$N\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$．

$\therefore\overrightarrow{PM}=\left(1-x,\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{D_1N}=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{D_1N}=0$，$PM\perp D_1N$，

$\therefore\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=1$．

故选D．




考点

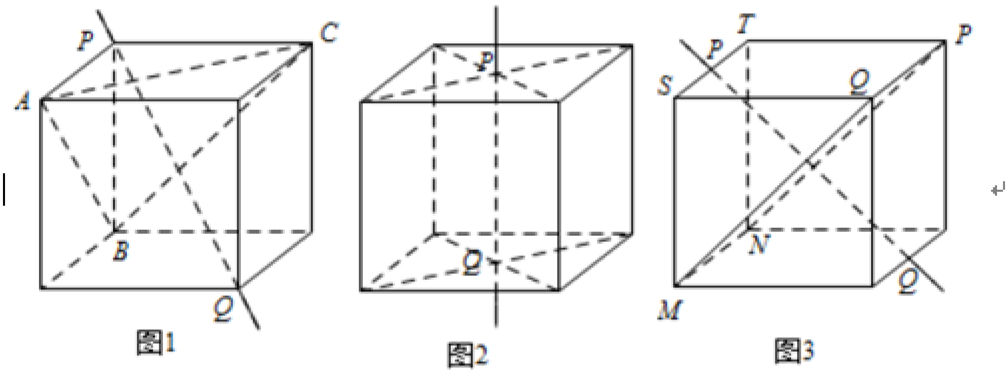
一立体几何与空间向量
- 空间向量
  - 空间直角坐标系

└空间向量及其运算

30 设P，Q为一个正方体表面上的两点，已知此正方体绕着直线PQ旋转$\theta(0<\theta<2\pi)$后能与自身重合，那么符合条件的直线PQ有 ______ 条．

答案 13

解析 由题意，符合条件的直线$PQ$必过正方体的中心，否则正方体的中心绕$PQ$旋转$\theta(0<\theta<2\pi)$后不能回到原位置，得到的新正方体必定与原正方体不重合．



满足题意的直线$PQ$共有三种情况：

如图1．当$PQ$是正方体的体对角线时，正方体绕$PQ$旋转$\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$时，能与原图重合，这样的$PQ$有4条．

如图2．当$PQ$穿过正方体对面中心时，正方体绕$PQ$旋转$\frac{\pi}{2}$、$\pi$或$\frac{3\pi}{2}$时，能与原图重合，这样的$PQ$有3条．

如图3．当$PQ$穿过正方体对棱中点时，正方体绕$PQ$旋转$\pi$时，能与原图重合，这样的$PQ$有6条．

综上，符合条件的直线$PQ$有13条．

考点 
一立体几何与空间向量
　├立体几何初步
　│　├空间几何体
　│　└点、直线、平面间的位置关系