导数-期中必做题

1 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}-x^{2}+ax$，曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与$x$轴平行．

（1）求a的值．

（2）若$g(x)=\mathrm{e}^{x}-2x-1$，求函数$g(x)$的最小值．

（3）求证：存在$c<0$，当$x>c$时，$f(x)>0$．

2 已知函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{ax^{2}+x+1}$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）若$a=0$，求函数$f(x)$的定义域和极值；

（2）当$a=1$时，试确定函数$g(x)=f(x)-1$的零点个数，并证明．

3 已知函数$f(x)=\dfrac{2}{x}+a\ln x-2(a>0)$．

（1）若曲线$y=f(x)$在点$P(1,f(1))$处的切线与直线$y=x+2$垂直，求函数$y=f(x)$的单调区间．

（2）若对于$\forall x\in(0,+\infty)$都有$f(x)>2(a-1)$成立，试求a的取值范围．

（3）记$g(x)=f(x)+x-b(b\in\mathbf{R})$，当$a=1$时，函数$g(x)$在区间$[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}]$上有两个零点，求实数$b$的取值范围．

4 已知函数$f(x)=x(\ln x-1)+\ln x+1$

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若不等式$x^{2}+x(m-f'(x))+1\geqslant 0$成立，求实数$m$的取值范围．

5 已知$f(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^{x}+a\ln(x+2)}{x+2}$在$(-1,f(-1))$处的切线方程为$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1$．

（1）求$y=f(x)$的解析式．

（2）设$h(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x+2}\ x>-2)$，求$h(x)$零点的个数．

（3）求证：$y=f(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增．

6 已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x+a}$．

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的单调递增区间．

（2）当$a>0$时，若函数$f(x)$的最大值为$\frac{1}{e^2}$，求a的值．

7 已知函数$f(x)=\frac{1}{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$．

（1）当$a=-1$时．

① 求$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程．

② 设$g(x)=xf(x)-1$，求函数$g(x)$的极值．

（2）若函数$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$有两个的零点，求实数$a$的取值范围．

8 已知函数$f(x)=x-a\ln x$，$g(x)=-\frac{1+a}{x}(a>0)$．

（1）若$a=1$，求函数$f(x)$的极值；

（2）设函数$h(x)=f(x)-g(x)$，求函数$h(x)$的单调区间；

（3）若存在$x_0\in[1,e]$，使得$f(x_0)<g(x_0)$成立，求a的取值范围．

9 已知函数$f(x)=e^x-a(x+1)$．

（1）若曲线$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线斜率为0，求a的值．

（2）若$f(x)\geqslant 0$恒成立，求a的取值范围．

（3）证明：当$a=0$时，曲线$y=f(x)\ (x>0)$总在曲线$y=2+\ln x$的上方．

10 已知函数$f(x)=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）若曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线与直线$y=-\frac{x}{e}$垂直，求a的值．

（2）当$a\in(0,\ln 2)$时，证明：$f(x)$存在极小值．

11 已知函数$f(x)=e^x-a(\ln x+1)(a\in R)$．

（1）求函数$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若函数$y=f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上有极值，求$a$的取值范围．

12

已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}-ax$．

（1）当$a=2$时．

① 求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

② 求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若$1<a<2$，求证:$f(x)<-1$．

13 设$n\in\mathbf{N}^*$，函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$，函数$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$，$x\in(0,+\infty)$.

（1）当$n=1$时，写出函数$y=f(x)-1$零点个数，并说明理由；

（2）若曲线$y=f(x)$与曲线$y=g(x)$分别位于直线$l:y=1$的两侧，求n的所有可能取值.

14 设函数$f(x)=x^2+ax-\ln x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）若$a=1$，求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若函数$f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数，求实数a的取值范围．

（3）过坐标原点O作曲线$y=f(x)$的切线，证明：切点的横坐标为1．

15 已知函数$f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-mx$（$m\in\mathbf{R}$）．

（1）当$m=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递减，求m的取值范围．

（3）设$0<a<b$，求证：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$．

16 已知函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{x^2}{2}-(a+1)x$，$a\in R$．

（1）当$a=-1$时，求函数$f(x)$的最小值．

（2）当$a\leqslant 1$时，讨论函数$f(x)$的零点个数.

17 已知函数$f(x)=(x^2-a)e^x$，$a\in R$．

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若在区间$(1,2)$上存在不相等的实数m，n，使$f(m)=f(n)$成立，求a的取值范围．

（3）若函数$f(x)$有两个不同的极值点x_1，x_2，求证：$f(x_1)f(x_2) < 4e^{-2}$．

18 已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+\ln x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）若$f(x)$在$x=1$处取得极值，求a的值．

（2）若$f(x)$在区间$(1,2)$上单调递增, 求a的取值范围．

（3）讨论函数$g(x)=f'(x)-x$的零点个数．

19 已知函数$f(x)=\frac{a(x-1)}{x^2}$，其中$a>0$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若直线$x-y-1=0$是曲线$y=f(x)$的切线，求实数a的值．

（3）设$g(x)=x\ln x-x^2f(x)$，求$g(x)$在区间$[1,\mathrm{e}]$上的最大值．（其中e为自然对数的底数）

20 已知函数$f(x)=\ln x$．

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）求证：当$x>0$时，$f(x)\geqslant 1-\frac{1}{x}$．

（3）若$x-1>a\ln x$对任意$x>1$恒成立，求实数a的最大值．

21 已知函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+(a+1)x+(1-a)\ln x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）当$a=3$时，求曲线$C:y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）当$x\in[1,2]$时，若曲线$C:y=f(x)$上的点(x,y)都在不等式组$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\\ y\leqslant x+\frac{3}{2}\end{cases}$所表示的平面区域内，试求$a$的取值范围．

22 已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$（其中a,b为常数且$a\neq 0$）在$x=1$处取得极值．

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的单调区间．

（2）若$f(x)$在$(0,\mathrm{e}]$上的最大值为1，求a的值．

23

已知函数$f(x)=(x-a)\sin x+\cos x, x\in(0,\pi)$．

（1）当$a=\frac{\pi}{2}$时，求函数$f(x)$的值域．

（2）当$a>\frac{\pi}{2}$时，求函数$f(x)$的单调区间．

24 已知函数$f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x$．

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）当$a>0$时，函数$f(x)$在区间$[1,e]$上的最小值为-2，求a的取值范围．

（3）若对任意x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，且$f(x_1)+2x_1<f(x_2)+2x_2$恒成立，求a的取值范围．

25 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$．

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程．

（2）求函数$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值．

26 已知函数$f(x)=\begin{cases}x\ln x & x>a\\ -x^2+2x-3 & x\leqslant a\end{cases}$，其中$a\geqslant 0$．

（1）当$a=0$ 时，求函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）如果对于任意$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，求a的取值范围．

27 已知函数$f(x)=ax-\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^{ax}+3x$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）求$f(x)$的极值；

（2）若存在区间M，使$f(x)$和$g(x)$在区间M上具有相同的单调性，求a的取值范围．

28 已知函数$f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(a\neq 0)$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若$\{x\,|\,f(x)\leqslant 0\}=[b,c]$（其中$b<c$），求$a$的取值范围，并说明$[b,c]\subseteq(0,1)$.

29 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln x-a$．

（1）当$a=\mathrm{e}$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）证明：对于$\forall a\in(0,\mathrm{e})$，$f(x)$在区间$\left(\frac{a}{\mathrm{e}},1\right)$上有极小值，且极小值大于$0$．

30 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}+x^{2}-x$，$g(x)=x^{2}+ax+b$（$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$）．

（1）当$a=1$时，求函数$F(x)=f(x)-g(x)$的单调区间．

（2）若曲线$y=f(x)$在点$(0,1)$处的切线l与曲线$y=g(x)$切于点$(1,c)$，求a，b，c的值．

（3）若$f(x)\geqslant g(x)$恒成立，求$a+b$的最大值．