导数-期中必做题

1 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-x^2+ax$，曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与x轴平行．

（1）求a的值．

（2）若$g(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$，求函数$g(x)$的最小值．

（3）求证：存在$c<0$，当$x>c$时，$f(x)>0$．

答案 （1）$a=-1$

（2）$1-2\ln 2$

（3）证明见解析

解析 （1）$f'(x)=\mathrm{e}^x-2x+a$，

由已知可得$f'(0)=0$，所以$1+a=0$，得$a=-1$．

（2）$g'(x)=\mathrm{e}^x-2$，令$g'(x)=0$，得$x=\ln 2$，

所以x，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以$g(x)$的最小值为$g(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2-1=1-2\ln 2$．

（3）证明：显然$g(x)=f'(x)$且$g(0)=0$，

由（Ⅱ）知，$g(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

又$g(\ln 2)<0$，$g(2)=\mathrm{e}^2-5>0$，

由零点存在定理，存在唯一实数$x_0\in(\ln 2,+\infty)$，满足$g(x_0)=0$，

即$\mathrm{e}^{x_0}-2x_0-1=0$，$\mathrm{e}^{x_0}=2x_0+1$，

综上，$g(x)=f'(x)$存在两个零点，分别为0，x_0．

所以$x<0$时，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增；

$0<x<x_0$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减；

$x>x_0$时，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

所以$f(0)$是极大值，$f(x_0)$是极小值，

$f(x_0)=e^{x_0}-x_0^2-x_0=2x_0+1-x_0^2-x_0=-x_0^2+x_0+1=-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，

因为$g(1)=e-3<0$，$g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}-4>0$，

所以$x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$f(x_0)>0$，

因此$x\geqslant 0$时，$f(x)>0$．

因为$f(0)=1$且$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，

所以一定存在$c<0$满足$f(c)>0$，

所以存在$c<0$，当$x>c$时，$f(x)>0$．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数与零点
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

2 已知函数$f(x)=\frac{2}{x}+a\ln x-2(a>0)$．

（1）若曲线$y=f(x)$在点$P(1,f(1))$处的切线与直线$y=x+2$垂直，求函数$y=f(x)$的单调区间．

（2）若对于$\forall x\in(0,+\infty)$都有$f(x)>2(a-1)$成立，试求a的取值范围．

（3）记$g(x)=f(x)+x-b(b\in\mathbf{R})$，当$a=1$时，函数$g(x)$在区间$[e^{-1},e]$上有两个零点，求实数$b$的取值范围．

答案 （1）增区间为$(2,+\infty)$，减区间为$(0,2)$．

（2）$\left(0,\frac{2}{e}\right)$．

（3）$\left(1,\frac{2}{e}+e-1\right]$．

解析 （1）直线$y=x+2$斜率为1，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$\because f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}$，

易知$f'(1)=-\frac{2}{1^2}+\frac{a}{1}=-1$，

$\therefore a=1$，

$\therefore f(x)=\frac{2}{x}+\ln x-2$，$f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$，

当$x>2$时，$f'(x)>0$，此时$f(x)$为增函数，

当$0<x<2$时，$f'(x)<0$，此时$f(x)$为减函数，

$\therefore f(x)$的单调增区间为$(2,+\infty)$，单调减区间为$(0,2)$．

（2）$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-2}{x^2}$，

$\because x>\frac{2}{a}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

$0<x<\frac{2}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{2}{a}\right)$，

$\because$对于$\forall x\in(0,+\infty)$都有$f(x)>2(a-1)$成立，

$\therefore f\left(\frac{2}{a}\right)>2(a-1)$即可，

则$\frac{2}{\frac{2}{a}}+a\ln\frac{2}{a}-2>2(a-1)$，

由$a\ln\frac{2}{a}>a$解得$0<a<\frac{2}{\mathrm{e}}$，

$\therefore a$的取值范围为$\left(0,\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$．

（3）依题得$g(x)=\frac{2}{x}+\ln x+x-2-b$，

则$g'(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2}$，

当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数，

当$x>1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数，

又$\because g(x)$在区间$[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}]$上有两个零点，

$\therefore\begin{cases}g(\mathrm{e}^{-1})\geqslant 0\\ g(\mathrm{e})\geqslant 0\\ g(1)<0\end{cases}$，

解得$1<b\leqslant\frac{2}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}-1$，

$\therefore b$的取值范围为$\left(1,\frac{2}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}-1\right]$．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 单调性
  - 导数及其应用

- 导数概念及其几何意义
- 导数的运算
- 利用导数研究函数的单调性
- 利用导数求函数的极值与最值

3 已知函数$f\left(x\right)=x\left(\ln x-1\right)+\ln x+1$

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若不等式$x^2+x(m-f'(x))+1\geqslant 0$成立，求实数$m$的取值范围．

答案 （1）$y=x-1$．

（2）$[-1,+\infty)$．

解析 （1）$f(1)=0$，

$f'(x)=lnx-1+1+\dfrac{1}{x}$，

$=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

$k=f'(1)=1$，

切线方程为$y=x-1$．

（2）$x^2+x(m-f'(x))+1\geqslant 0$，

即$x^2+x\left(m-\ln x-\dfrac{1}{x}\right)+1\geqslant 0$，

$x^2+mx-x\ln x\geqslant 0$，

$x>0$，

$\therefore x+\ln-\ln x\geqslant 0$，

$m\geqslant \ln x-x$，

令$g(x)=lnx-x$，

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

在$x\in(0,1)$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

$x\in(1,+\infty)$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

$g(x)_{\max}=g(1)=-1$．

$\therefore m\geqslant -1$，

$\therefore m\in[-1,+\infty)$．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

4 已知函数$f(x)=\dfrac{e^x}{ax^2+x+1}$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）若$a=0$，求函数$f(x)$的定义域和极值；

（2）当$a=1$时，试确定函数$g(x)=f(x)-1$的零点个数，并证明．

答案

（1）函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$，且$x\neq-1\}$，函数$f(x)$有极小值$f(0)=1$．

（2）函数$g(x)$存在两个零点，证明见解析．

解析

（1）函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$，且$x\neq-1\}$．

$f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$．

令$f'(x)=0$，得$x=0$，

当x变化时，$f(x)$和$f'(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘		↗

故$f(x)$的单调减区间为$(-\infty,\ -1)$，$(-1,0)$；单调增区间为$(0,\ +\infty)$．

所以当$x=0$时，函数$f(x)$有极小值$f(0)=1$．

（2）结论：函数$g(x)$存在两个零点．

证明过程如下：

由题意，函数$g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+x+1}-1$， 因为 $x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$，

所以函数$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$．

求导，得$g'(x)=\dfrac{e^x(x^2+x+1)-e^x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{e^x x(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$，

令$g'(x)=0$，得$x_1=0$，$x_2=1$，

当x变化时，$g(x)$和$g'(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

因为函数$g(x)$在$(-\infty,\ 0)$单调递增，且$g(0)=0$，

故函数$g(x)$的单调减区间为$(0,1)$；单调增区间为$(-\infty,\ 0)$，$(1,\ +\infty)$．当$x=0$时，函数$g(x)$有极大值$g(0)=0$；当$x=1$时，函数$g(x)$有极小值$g(1)=\frac{\mathrm{e}}{3}-1$．

所以对于任意$x\in(-\infty,\ 0)$，$g(x)\neq 0$．

因为函数$g(x)$在$(0,1)$单调递减，且$g(0)=0$，

所以对于任意$x\in(0,1)$，$g(x)\neq 0$．

因为函数$g(x)$在$(1,\ +\infty)$单调递增，且$g(1)=\frac{\mathrm{e}}{3}-1<0$，$g(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{7}-1>0$，

所以函数$g(x)$在$(1,\ +\infty)$上仅存在一个x_0，使得函数$g(x_0)=0$，

故函数$g(x)$存在两个零点（即0和x_0）．

考点

- 函数与导数
  - 函数与方程
    - 函数的零点
  - 导数及其应用
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

5 已知$f(x)=\frac{b\mathrm{e}^x+a\ln(x+2)}{x+2}$在$(-1,f(-1))$处的切线方程为$y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}+1$．

（1）求$y=f(x)$的解析式．

（2）设$h(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{x+2}\ x>-2)$，求$h(x)$零点的个数．

（3）求证：$y=f(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增．

答案 （1）$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\ln(x+2)}{x+2}$．

（2）一个．

（3）证明见解析．

解析

(1) $f(x)=\dfrac{be^{x}+a\ln(x+2)}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{be^{x}(x+1)+a-a\ln(x+2)}{(x+2)^{2}}$,

$f'(-1)=a=1$, $f(-1)=be^{-1}=\dfrac{1}{e}\Rightarrow b=1$,

所以$f(x)=\dfrac{e^{x}+\ln(x+2)}{x+2}$.

(2) $h(x)=(x+2)e^{x}-\dfrac{1}{x+2}\ x>-2)\Rightarrow h'(x)=(x+3)e^{x}+\dfrac{1}{(x+2)^{2}}>0$,

$h(x)$在$(-1,0)$上递增，$h(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0,\quad h(0)=2-\dfrac{1}{2}>0$,

存在一个零点x_0，且$-1<x_0<0$.

(3) 由(1)得，$f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{x}+1-\ln(x+2)}{(x+2)^{2}}$,

设$g(x)=(x+1)e^{x}+1-\ln(x+2)$,

$g'(x)=(x+2)e^{x}-\dfrac{1}{(x+2)}$,

由(2)可知，存在一个零点x_0，且$-1<x_0<0$,

$g'(x_0)=0$，$g'(x)$在$(-2,x_0)$上递减，在$(x_0,+\infty)$上递增，

$\because x_0+1>0,1<x_0+2<2\Rightarrow\ln(x_0+2)<1\Rightarrow 1-\ln(x_0+2)>0$,

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}+1-\ln(x_0+2)$,

$g(x)_{\min}=g(x_0)>0$，$g(x)\geqslant g(x)_{\min}=g(x_0)>0$,

得$f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{x}+1-\ln(x+2)}{(x+2)^{2}}>0$，$y=f(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增.

考点

- 函数与导数
  - 函数与方程
    - 零点存在性定理
    - 函数的零点
  - 导数及其应用
    - 导数与零点
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程

6 已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x+a}$．

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的单调递增区间．

（2）当$a>0$时，若函数$f(x)$的最大值为$\dfrac{1}{e^2}$，求a的值．

答案 （1）$(0,e)$

（2）$a=e^2$

解析 （1）当$a=0$时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$．

故$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．

令$f'(x)>0$，得$0<x<e$．

故$f(x)$的单调递增区间为$(0,e)$．

（2）方法1：$f'(x)=\dfrac{\frac{x+a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}=\dfrac{1+\frac{a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}$．

令$g(x)=1+\dfrac{a}{x}-\ln x$．

则$g'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+a}{x^2}<0$．

由$g(e)=\dfrac{a}{e}>0$，$g(e^{a+1})=1+\dfrac{a}{e^{a+1}}-(1+a)=a\cdot(\dfrac{1}{e^{a+1}}-1)<0$．

故存在$x_0\in(e,e^{a+1})$，$g(x_0)=0$．

故当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)>0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g(x)<0$．

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

故$f(x_0)=\dfrac{1}{e^2}$．

故$\begin{cases}1+\frac{a}{x_0}-\ln x_0=0\\ \frac{\ln x_0}{x_0+a}=\frac{1}{e^2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=e^2\\ a=e^2\end{cases}$，

故a的值为e^2．

方法2：$f(x)$的最大值为$\dfrac{1}{e^2}$的充要条件为

对任意的$x\in(0,+\infty)$，$\dfrac{\ln x}{x+a}\leqslant\dfrac{1}{e^2}$且存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$\dfrac{\ln x_0}{x_0+a}=\dfrac{1}{e^2}$，

等价于对任意的$x\in(0,+\infty)$，$a\geqslant e^2\ln x-x$且存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得

$a\geqslant e^2\ln x_0-x_0$，

等价于$g(x)=e^2\ln x-x$的最大值为a．

$\because g'(x)=\dfrac{e^2}{x}-1$，

令$g'(x)=0$，得$x=\mathrm{e}^2$．

x	$(0,\mathrm{e}^2)$	e^2	$(\mathrm{e}^2,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

故$g(x)$的最大值为$g(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2\ln\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2$，即$a=\mathrm{e}^2$．

方法三：

$\dfrac{\ln x}{x+a}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，

即$\mathrm{e}^2\ln x-x\leqslant a$，

即$g(x)=\mathrm{e}^2\ln x-x$的最大值为a，

$g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{x}-1$，

令$g'(x)\geqslant 0$得$0<x\leqslant\mathrm{e}^2$，

令$g'(x)\leqslant 0$得$x\geqslant\mathrm{e}^2$，

所以$g(x)$在$(0,\mathrm{e}^2)$上单调递增，$(\mathrm{e}^2,+\infty)$上单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e}^2)=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2$，

即$a=\mathrm{e}^2$．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数与分类讨论
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

7 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$．

（1）当$a=-1$时．

① 求$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程．

② 设$g(x)=xf(x)-1$，求函数$g(x)$的极值．

（2）若函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$有两个的零点，求实数$a$的取值范围．

答案 （1）① $y=1$．

② 极小值为$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极大值．

（2）$\left[-\frac{e^2}{2},-e\right)$．

解析 （1）① $a=-1$，$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$，

$f(1)=1$，$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$．

$\therefore k=f'(1)=0$．

故所求切线方程为：$y=1$．

② $g(x)=x\ln x$，函数定义域为：$\{x|x>0\}$，

$g'(x)=\ln x+1$，$x_0=\frac{1}{e}$，

x	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

故$g(x)$的极小值为$-\frac{1}{e}$，无极大值．

（2）令$f(x)=\frac{1}{x}-a\ln x=0$，

解得：$\frac{1}{a}=x\ln x$（显然$a\neq0$），

问题等价于函数$y=\frac{1}{a}$与函数$y=x\ln x$的图像有两个不同交点．

由（2）可知：$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e^2}$，$g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，

$\begin{cases}\frac{1}{a}>-\frac{1}{e}\\ \frac{1}{a}\leqslant-\frac{2}{e^2}\end{cases}$，

解得：$-\frac{e^2}{2}\leqslant a<-e$，

故实数a的取值范围是$\left[-\frac{e^2}{2},-e\right)$．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 定义域
    - 最值
  - 函数与方程
    - 函数图象的交点
    - 函数的零点
  - 导数及其应用
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

解析几何

直线与方程

直线的方程

8 已知函数$f(x)=x-a\ln x$，$g(x)=-\dfrac{1+a}{x}(a>0)$．

（1）若$a=1$，求函数$f(x)$的极值；

（2）设函数$h(x)=f(x)-g(x)$，求函数$h(x)$的单调区间；

（3）若存在$x_0\in[1,\mathrm{e}]$，使得$f(x_0)<g(x_0)$成立，求a的取值范围．

答案 （1）极小值为$f(1)=1-\ln 1=1$

（2）$h(x)$的递减区间为$(0,1+a)$；递增区间为$(1+a,+\infty)$

（3）$\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$

解析 （1）$f(x)=x-a\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$．

当$a=1$时，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$．

由$f'(x)=0$，解得$x=1$．当$0<x<1$时，$f'(x)<0,f(x)$单调递减；

当$x>1$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增；

所以当$x=1$时，函数$f(x)$取得极小值，极小值为$f(1)=1-\ln 1=1$；

（2）$h(x)=f(x)-g(x)=x-a\ln x+\dfrac{1+a}{x}$，其定义域为$(0,+\infty)$．

又$h'(x)=\dfrac{x^2-ax-(1+a)}{x^2}=\dfrac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2}$．

由$a>0$可得$1+a>0$，在$x\in(0,1+a)$上$h'(x)<0$，在$x\in(1+a,+\infty)$上$h'(x)>0$

，

所以$h(x)$的递减区间为$(0,1+a)$；递增区间为$(1+a,+\infty)$．

（3）若在$[1,\mathrm{e}]$上存在一点x_0，使得$f(x_0)<g(x_0)$成立，

即在$[1,\mathrm{e}]$上存在一点x_0，使得$h(x_0)<0$．即$h(x)$在$[1，\mathrm{e}]$上的最小值小于零．

①当$1+a\geqslant \mathrm{e}$，即$a\geqslant \mathrm{e}-1$时，由（Ⅱ）可知$h(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上单调递减．

故$h(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上的最小值为$h(\mathrm{e})$，

由$h(\mathrm{e})=\mathrm{e}+\dfrac{1+a}{\mathrm{e}}-a<0$，可得$a>\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}-1}$．

因为$\frac{e^2+1}{e-1}>e-1$．所以$a>\frac{e^2+1}{e-1}$；

②当$1<1+a<e$，即$0<a<e-1$时，

由（Ⅱ）可知$h(x)$在$(1,1+a)$上单调递减，在$(1+a,e)$上单调递增．

$h(x)$在$[1,e]$上最小值为$h(1+a)=2+a-a\ln(1+a)$．

因为$0<\ln(1+a)<1$，所以$0<a\ln(1+a)<a$．

$\therefore 2+a-a\ln(1+a)>2$，即$h(1+a)>2$不满足题意，舍去．

综上所述：$a\in\left(\frac{e^2+1}{e-1},+\infty\right)$．

考点

—函数与导数
 —导数及其应用
  —利用导数研究函数的单调性
  —利用导数求函数的极值与最值
  —利用导数证明不等式

9 已知函数$f(x)=e^x-a(x+1)$．

（1）若曲线$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线斜率为0，求a的值．

（2）若$f(x)\geqslant 0$恒成立，求a的取值范围．

（3）证明：当$a=0$时，曲线$y=f(x)\ (x>0)$总在曲线$y=2+\ln x$的上方．

答案

（1）1．

（2）$[0,1]$．

（3）证明见解析．

解析

（1）函数$f(x)=e^x-a(x+1)$的定义域为$\mathbf{R}$．

因为$f(x)=e^x-a(x+1)$，所以$f'(x)=e^x-a$．

由$f'(0)=1-a=0$得$a=1$．

（2）$f'(x)=e^x-a(x\in\mathbf{R})$．

①当$a>0$时，令$f'(x)=0$得$x=\ln a$．

$x<\ln a$时，$f'(x)<0$；$x>\ln a$时，$f'(x)>0$．

$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增．

所以当$x=\ln a$时，$f(x)$有最小值$f(\ln a)=a-a(1+\ln a)=-a\ln a$．

“$f(x)\geqslant 0$恒成立”等价于“$f(x)$最小值大于等于0”，即$-a\ln a\geqslant 0$．

因为$a>0$，所以$0<a\leqslant 1$．

②当$a=0$时，$f(x)=e^x>0$符合题意；

③当$a<0$时，取$x_0=-1+\dfrac{1}{a}$，

则$f(x_0)=e^{-1+\frac{1}{a}}-a\left(-1+\dfrac{1}{a}+1\right)=e^{-1+\frac{1}{a}}-1<0$，不符合题意．

综上，若$f(x)\geqslant 0$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则a的取值范围为$[0,1]$．

（3）当$a=0$时，令$h(x)=f(x)-(2+\ln x)=\mathrm{e}^x-\ln x-2(x>0)$，

可求$h'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$．因为$h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$h'(1)=\mathrm{e}-1>0$，

且$h'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以在$(0,+\infty)$上存在唯一的x_0，使得$h'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，

即$\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，且$\dfrac{1}{2}<x_0<1$．

当x变化时，$h(x)$与$h'(x)$在$(0,+\infty)$上的情况如下：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小	↗

则当$x=x_0$时，$h(x)$存在最小值$h(x_0)$，

且$h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-2=\dfrac{1}{x_0}+x_0-2$．

因为$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，所以$h(x_0)=\dfrac{1}{x_0}+x_0-2>2\sqrt{\dfrac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$．

所以当$a=0$时，$f(x)>2+\ln x(x>0)$，

所以当$a=0$时，曲线$y=f(x)$ $(x>0)$总在曲线$y=2+\ln x$的上方．

考点 —函数与导数

—导数及其应用

—导数与分类讨论

—导数与恒成立

—导数概念及其几何意义

—导数的运算

—利用导数研究函数的单调性

│ └利用导数求函数的极值与最值

10 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）若曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线与直线$y=-\frac{x}{\mathrm{e}}$垂直，求a的值．

（2）当$a\in(0,\ln 2)$时，证明：$f(x)$存在极小值．

答案 （1）$a=0$．

（2）证明见解析．

解析 （1）$f(x)$的导函数为$f'(x)=\mathrm{e}^{x}\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)+\mathrm{e}^{x}\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}})$

$=\mathrm{e}^{x}\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^{2}}+\ln x)$．依题意，有 $f'(1)=\mathrm{e}\cdot(a+1)=\mathrm{e}$，

解得 $a=0$．

（2）由$f'(x)=\mathrm{e}^{x}\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^{2}}+\ln x)$及$\mathrm{e}^{x}>0$知，$f'(x)$与$a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^{2}}+\ln x$同号．

令 $g(x)=a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^{2}}+\ln x$，

则 $g'(x)=\frac{x^{2}-2x+2}{x^{3}}=\frac{(x-1)^{2}+1}{x^{3}}$．

所以 对任意$x\in(0,+\infty)$，有$g'(x)>0$，故$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增．

因为 $a\in(0,\ln 2)$，所以 $g(1)=a+1>0$，$g(\frac{1}{2})=a+\ln\frac{1}{2}<0$，

故 存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g(x_0)=0$．

$f(x)$与$f'(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$上的情况如下：

x	$(\frac{1}{2},\ x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↓	极小值	↑

所以 $f(x)$在区间$(\frac{1}{2},\ x_0)$上单调递减，在区间$(x_0,1)$上单调递增．

所以 $f(x)$存在极小值$f(x_0)$．

考点 ─函数与导数

├导数及其应用

│ ├导数与零点

│ └导数概念及其几何意义

11 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-a(\ln x+1)(a\in R)$．

（1）求函数$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若函数$y=f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上有极值，求$a$的取值范围．

答案 （1）$y=(\mathrm{e}-a)x$．

（2）$\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2},\mathrm{e}\right)$．

解析 （1）因为$f(1)=\mathrm{e}-a$，$f'(1)=\mathrm{e}-a$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-(\mathrm{e}-a)=(\mathrm{e}-a)(x-1)$，

即$y=(\mathrm{e}-a)x$．

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}$，

①当$a\leqslant 0$时，对于任意$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，都有$f'(x)>0$，

所以函数$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上为增函数，没有极值，不合题意．

②当$a>0$时，令$g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}$，则$g'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{a}{x^2}>0$．

所以$g(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，即$f'(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，

所以函数$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上有极值，等价于$\begin{cases}f'(1)>0\\ f'\left(\frac{1}{2}\right)<0\end{cases}$

所以$\begin{cases}\mathrm{e}-a>0,\\ \sqrt{\mathrm{e}}-2a<0.\end{cases}$ 所以$\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}<a<\mathrm{e}$．

所以a的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2},\mathrm{e}\right)$．

考点
- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程

12 已知函数$f(x)=\frac{\ln x-1}{x}-ax$．

（1）当$a=2$时．

① 求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

② 求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若$1<a<2$，求证:$f(x)<-1$．

答案 （1）① $y=-3$．

② 答案见解析．

（2）证明见解析．

解析 （1）① 当$a=2$时，$f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}-2x$，定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}-2=\dfrac{2-\ln x-2x^2}{x^2}$，

$f(1)=-1-2=-3$，

$f'(1)=2-2=0$，

所以切点坐标为$(1,-3)$，切线斜率为0，

所以切线方程为$y=-3$．

② 令$g(x)=2-\ln x-2x^2$，$g'(x)=-\dfrac{1}{x}-4x<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且$g(1)=0$，

所以当$x\in(0,1)$时，$g(x)>0$即$f'(x)>0$，

所以当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$即$f'(x)<0$，

综上所述，$f(x)$的单调递增区间是$(0,1)$，单调递减区间是$(1,+\infty)$．

（2）方法一:

$f(x)<-1$，即$\dfrac{\ln x-1}{x}-ax<-1$，

设$h(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}-ax+1(x>0)$，

$h'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}-a=\dfrac{-ax^2-\ln x+2}{x^2}$，

设$\varphi(x)=-ax^2-\ln x+2$，

$\varphi'(x)=-2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2ax^2-1}{x}<0$，

所以$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$小于零恒成立，

即$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

因为$1<a<2$，

所以$h'(1)=2-a>0$，$h'(e^2)=-a<0$，

所以在$(1,\mathrm{e}^2)$上必存在一个x_0使得：

$h'(x_0)=\dfrac{-ax_0^2-\ln x_0+2}{x_0^2}=0$，

即$\ln x_0=-ax_0^2+2$，

所以当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

所以$h(x)_{\max}=h(x_0)=\dfrac{\ln x_0-1}{x_0}-ax_0+1$，

因为$\ln x_0=-ax_0^2+2$，

所以$h(x_0)=\dfrac{-2ax_0^2+x_0+1}{x_0}$，

令$h(x_0)=0$得$x_0=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8a}}{4a}$，

因为$1<a<2$，所以$\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}<0$，$\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}<1$，

因为$x_0\in(1,\mathrm{e}^2)$，所以$h(x_0)<0$恒成立，

即$h(x)<0$恒成立，

综上所述，当$1<a<2$时，$f(x)<-1$．

方法二:

$f(x)$定义域$(0,+\infty)$，

为了证明$f(x)<-1$，即$\dfrac{\ln x-1}{x}-ax<-1$，

只需证明$\ln x-1-ax^2<-x$，即$\ln x<ax^2-x+1$，

令$m(x)=\ln x-x+1(x>0)$，

则$m'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，

令$m'(x)>0$，得$0<x<1$，

令$m'(x)<0$，得$x>1$，

所以$m(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$m(x)_{\max}=m(1)=0$，

即$\ln x-x+1\leqslant 0$，则$\ln x\leqslant x-1$，

令$n(x)=ax^2-2x+2$，

因为$1<a<2$，所以$\Delta=4-8a<0$，

所以$n(x)>0$恒成立，

即$ax^2-2x+2>0$，

所以$ax^2-x+1>x-1$，

综上所述，$\ln x < ax^2 - x + 1$，

即当$1 < a < 2$时，$f(x) < -1$.

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数与零点
    - 导数与恒成立
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程

13 设$n \in \mathbf{N}^*$，函数$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$，函数$g(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$，$x \in (0, +\infty)$.

（1）当$n = 1$时，写出函数$y = f(x) - 1$零点个数，并说明理由；

（2）若曲线$y = f(x)$与曲线$y = g(x)$分别位于直线$l: y = 1$的两侧，求n的所有可能取值.

答案 （1）函数$y = f(x) - 1$不存在零点

（2）$\{1, 2\}$

解析 （1）结论：函数$y = f(x) - 1$不存在零点.

当$n = 1$时，$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$，求导得$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$，

令$f'(x) = 0$，解得$x = e$.

当x变化时，$f'(x)$与$f(x)$的变化如下表所示：

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

所以函数$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，

则当$x=\mathrm{e}$时，函数$f(x)$有最大值$f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

所以函数$y=f(x)-1$的最大值为$f(\mathrm{e})-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1<0$，

所以函数$y=f(x)-1$不存在零点.

（2）由函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$求导，得 $f'(x)=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$， 令$f'(x)=0$，解得$x=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

当x变化时，$f'(x)$与$f(x)$的变化如下表所示：

x	$(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$	$(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

所以函数$f(x)$在$(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})$上单调递增，在$(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}},+\infty)$上单调递减，

则当$x=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$时，函数$f(x)$有最大值$f(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})=\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$；

由函数$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$，$x\in(0,+\infty)$求导，得 $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-n)}{x^{n+1}}$，

令 $g'(x)=0$，解得$x=n$. 当x变化时，$g'(x)$与$g(x)$的变化如下表所示：

x	$(0,n)$	n	$(n,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

所以函数$g(x)$在$(0,n)$上单调递减，在$(n,+\infty)$上单调递增，

则当$x=n$时，函数$g(x)$有最小值$g(n)=(\dfrac{\mathrm{e}}{n})^n$.

因为$\forall n\in N^*$，函数$f(x)$有最大值$f(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})=\dfrac{1}{n\mathrm{e}}<1$，

所以曲线$y=\dfrac{\ln x}{x^n}$在直线$l$$y=1$的下方，而曲线$y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$在直线$l$$y=1$的上方，

所以$(\dfrac{\mathrm{e}}{n})^n>1$，

解得$n<\mathrm{e}$. 所以n的取值集合为$\{1,2\}$.

考点 —函数与导数

- 函数与方程
  - 函数的零点

└导数及其应用

14 设函数$f(x)=x^2+ax-\ln x\,(a\in\mathbf{R})$．

（1）若$a=1$，求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若函数$f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数，求实数a的取值范围．

（3）过坐标原点O作曲线$y=f(x)$的切线，证明：切点的横坐标为1．

答案 （1）$f(x)$的减区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，增区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$．

（2）$a\leqslant -1$．

（3）证明过程见解析．

解析 （1）$a=1$时，$f(x)=x^2+ax-\ln x\,(x>0)$，

$\therefore f\prime(x)=2x+1-\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x+1)}{x}$，

$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f'(x)<0$，$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，

$f(x)$的减区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，增区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$．

（2）$f\prime(x)=2x+a-\frac{1}{x}$，

$\because f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数，

$\therefore f\prime(x)\leqslant 0$对任意$x\in(0,1]$恒成立，

即$2x+a-\frac{1}{x}\leqslant 0$对任意$x\in(0,1]$恒成立，

$\therefore a\leqslant\frac{1}{x}-2x$对任意$x\in(0,1]$恒成立，

令$g(x)=\frac{1}{x}-2x$，

$\therefore a\leqslant g(x)_{\min}$，

易知$g(x)$在$(0,1]$单调递减，

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=-1$．

$\therefore a\leqslant -1$．

（3）设切点为$M(t,f(t))$，$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x}$，

切线的斜率$k=2t+a-\frac{1}{t}$，又切线过原点$k=\frac{f(t)}{t}$，

$\frac{f(t)}{t}=2t+a-\frac{1}{t}$，即：$t^2+at-\ln t=2t^2+at-1$，

$\therefore t^2-1+\ln t=0$，

存在性：$t=1$满足方程$t^2-1+\ln t=0$，

$\therefore t=1$是方程$t^2-1+\ln t=0$的根．

再证唯一性：设$\varphi(t)=t^2-1+\ln t$，$\varphi'(t)=2t+\dfrac{1}{t}>0$，

φt在$(0,+\infty)$单调递增，且$\varphi(1)=0$，

$\therefore$方程$t^2-1+\ln t=0$有唯一解．

考点 一函数与导数
- 函数
  - 值域
  - 最值
  - 单调性
- 函数与方程
  - 函数的零点
- 导数及其应用
  - 导数概念及其几何意义
  - 导数的运算
  - 利用导数研究函数的单调性
  - 利用导数求函数的极值与最值

15 已知函数$f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-mx$（$m\in\mathbf{R}$）．

（1）当$m=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）若$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递减，求m的取值范围．

（3）设$0<a<b$，求证：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$．

答案 （1）曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$2x-y=0$．

（2）m的取值范围为$[1,+\infty)$．

（3）证明见解析．

解析 （1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$．

当$m=-1$时，$f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}+x$，

所以$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+1$．

因为$f(1)=2$且$f'(1)=2$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$2x-y=0$．

（2）若函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递减，

则$f'(x)\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立．

即$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-m\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立．

即$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\leqslant m$在$(0,+\infty)$上恒成立．

设$g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}(x>0)$，

则$m\geqslant [g(x)]_{\max}$．

因为$g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+1(x>0)$，

所以当$x=1$时，$g(x)$有最大值1．

所以m的取值范围为$[1,+\infty)$．

（3）因为$0<a<b$，不等式$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$等价于$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$．

即$\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$，令$\sqrt{\frac{b}{a}}=t(t>1)$，原不等式转化为$2\ln t<t-\frac{1}{t}$．

令$h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$，

由（2）知$f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$在$(1,+\infty)$上单调递减．

所以，当$t>1$时，$h(t)<h(1)=0$．

即当$t>1$时，$2\ln t+\frac{1}{t}-t<0$成立．

所以，当时$0<a<b$，不等式$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$成立．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数与恒成立
    - 导数概念及其几何意义
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数证明不等式

16 已知函数$f(x)=a\ln x+\frac{x^2}{2}-(a+1)x$，$a\in R$．

（1）当$a=-1$时，求函数$f(x)$的最小值．

（2）当$a\leqslant 1$时，讨论函数$f(x)$的零点个数.

答案 （1）最小值$f(1)=\frac{1}{2}$.

（2）$0\leqslant a\leqslant 1$或$a=-\frac{1}{2}$时$f(x)$有一个零点；

$a<-\frac{1}{2}$时，$f(x)$无零点；

$-\frac{1}{2}<a<0$时，$f(x)$有两个零点.

解析 （1）函数$f(x)$的定义域为$\{x\,|x>0\}$.

当$a=-1$时，$f(x)=-\ln x+\frac{x^2}{2}$.

$f'(x)=-\frac{1}{x}+x=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

由$\frac{(x+1)(x-1)}{x}>0(x>0)$解得$x>1$；由$\frac{(x+1)(x-1)}{x}<0(x>0)$解得$0<x<1$.

所以$f(x)$在区间$(0,1)$单调递减, 在区间$(1,+\infty)$单调递增.

所以$x=1$时,函数$f(x)$取得最小值$f(1)=\frac{1}{2}$.

（2）$f'(x)=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$,$x>0$.

（1）当$a\leqslant 0$时，

$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;

$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数.

所以$f(x)$在$x=1$时取得最小值$f(1)=-a-\frac{1}{2}$.

（ i ）当$a=0$时，$f(x)=\frac{x^2}{2}-x$，由于$x>0$，令$f(x)=0$，$x=2$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上有一个零点；

（ ii ）当$a=-\frac{1}{2}$时，即$f(1)=0$时，$f(x)$有一个零点；

（ iii ）当$a<-\frac{1}{2}$时，即$f(1)>0$时，$f(x)$无零点.

（ iv ）当$-\frac{1}{2}<a<0$时，即$f(1)<0$时，

当$-\frac{1}{2}<a<0$时，$0<\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}<1$，$0<a+1<1$，

所以 $0<(a+1)e^{\frac{1}{a}}<1$，

所以$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}\right)=1+\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}}{2}-(a+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}>\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}}{2}>0$，

因为$-\frac{1}{2}<a<0$，易得$a(3-a)>-2$，$(a+1)\mathrm{e}^{3-a}<\mathrm{e}^{3-a}<\mathrm{e}^4$，

所以$f(\mathrm{e}^{3-a})=a(3-a)+\frac{(\mathrm{e}^{3-a})^2}{2}-(a+1)\mathrm{e}^{3-a}>\frac{e^{6-2a}}{2}-2-\mathrm{e}^4>\mathrm{e}^6-2-\mathrm{e}^4>0$，

所以$f(x)$有两个零点.

（2）当$0<a<1$时，

$x\in(0,a)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$为增函数;

$x\in(a,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数.

所以$f(x)$在$x=a$处取极大值，$f(x)$在$x=1$处取极小值.

$f(a)=a\ln a+\frac{1}{2}a^2-(a+1)a=a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a$.

当$0<a<1$时，$f(a)<0$,即在$x\in(0,1)$时，$f(x)<0$.

而$f(x)$在$x\in(1,+\infty)$时为增函数，且$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

所以此时$f(x)$有一个零点.

（3）当$a=1$时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)$为增函数.

且$x\to0$（从右侧趋近0）时，$f(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$.

所以$f(x)$有一个零点.

综上所述，$0\leqslant a\leqslant1$或$a=-\frac{1}{2}$时$f(x)$有一个零点；$a<-\frac{1}{2}$时，$f(x)$无零点；

$-\frac{1}{2}<a<0$

$f(x)$有两个零点.

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数概念及其几何意义
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

17 已知函数$f(x)=(x^2-a)e^x$，$a\in R$.

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的单调区间 .

（2）若在区间$(1,2)$上存在不相等的实数m，n，使$f(m)=f(n)$成立，求a的取值范围 .

（3）若函数$f(x)$有两个不同的极值点x_1，x_2，求证：$f(x_1)f(x_2)<4e^{-2}$.

答案 （1）$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-2),(0,+\infty)$，

单调减区间为$(-2，0)$.

（2）$3<a<8$.

（3）见解析

解析 （1）当$a=0$时，$f(x)=x^2e^x$，$f'(x)=e^x\left(x^2+2x\right)$．

由$e^x\left(x^2+2x\right)=0$，解得$x=0$，$x=-2$．

当$x\in(-\infty,-2)$时，$f'(x)0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(-2,0)$时，$f'(x)0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)0$，$f(x)$单调递增．

所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-2),(0,+\infty)$，

单调减区间为$(-2,0)$．

（2）依题意即求使函数$f(x)=e^x\left(x^2-a\right)$在$(1,2)$上不为单调函数的$a$的取值范围．

$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-a\right)$，设$g(x)=x^2+2x-a$，

则$g(1)=3-a$，$g(2)=8-a$．

因为$g(x)$在$(1,2)$上为增函数．

当$\begin{cases}g(1)=3-a<0\\g(2)=8-a>0\end{cases}$，

即当$3<a<8$时，函数$g(x)$在$(1,2)$上有且只有一个零点，设为x_0，

当$x\in(1,x_0)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

当$x\in(x_0,2)$时，$g(x)>0$，

即$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，满足在$(1,2)$上不为单调函数．

当$a\leqslant 3$时，$g(1)\geqslant 0$，$g(2)>0$，

所以在$(1,2)$上$g(x)>0$成立（因$g(x)$在$(1,2)$上为增函数），

所以在$(1,2)$上$f'(x)>0$成立，即$f(x)$在$(1,2)$上为增函数，不合题意．

同理$a\geqslant 8$时，可判断$f(x)$在$(1,2)$为减函数，不合题意．

综上$3<a<8$．

（3）$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-a\right)$．

因为函数$f(x)$有两个不同的零点，即$f'(x)$有两个不同的零点，即方程

$x^2+2x-a=0$的判别式$\Delta=4+4a>0$，解得$a>-1$．

由$x^2+2x-a=0$，解得$x_1=-1-\sqrt{a+1}$，$x_2=-1-\sqrt{a+1}$．

此时$x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-a$．

随着x变化，$f(x)$和$f'(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+

$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以x_1是$f(x)$的极大值点，x_2是$f(x)$的极小值点，所以$f(x_1)$是极大值，$f(x_2)$是极小值，

所以$f(x_1)f(x_2)=e^{x_1}\left(x_1{}^2-a\right)\times e^{x_2}\left(x_2{}^2-a\right)$

$=e^{x_1+x_2}\left[x_1{}^2x_2{}^2-a\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)+a^2\right]$

$=e^{x_1+x_2}\left[x_1{}^2x_2{}^2-\left[a(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+a^2\right]$

$=e^{-2}\left[a^2-a(4+2a)+a^2\right]$

$=-4ae^{-2}$

因为$a>-1$，所以$-4ae^{-2}<4e^{-2}$ ，

所以$f(x_1)f(x_2)<4e^{-2}$.

考点

—函数与导数

—导数及其应用

—导数概念及其几何意义

—利用导数研究函数的单调性

—利用导数求函数的极值与最值

—利用导数证明不等式

18 已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）若$f(x)$在$x=1$处取得极值，求a的值 .

（2）若$f(x)$在区间$(1,2)$上单调递增, 求a的取值范围 .

（3）讨论函数$g(x)=f'(x)-x$的零点个数 .

答案

（1）$a=2$.

（2）$a\leqslant 2$.

（3）答案见解析 .

解析

（1）因为$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-a}{x^2}$ ，

由已知$f(x)$在$x=1$处取得极值， 所以$f'(1)=0$.

解得$a=2$，经检验$a=2$时，$f(x)$在$x=1$处取得极小值，所以$a=2$.

（2）由（Ⅰ）知，$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-a}{x^2}$，$x>0$．

因为$f(x)$在区间$(1,2)$上单调递增， 所以$f'(x)\geqslant 0$在区间$(1,2)$上恒成立．

即$a\leqslant x^2+x$在区间$(1,2)$上恒成立. 所以$a\leqslant 2$．

（3）因为$g(x)=f'(x)-x$， 所以$g(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}-x$，$x>0.$

令$g(x)=0$得$a=-x^3+x^2+x$， 令$h(x)=-x^3+x^2+x$，$x>0.$

$h'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1).$

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,1)$上单调递增， $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，

$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

所以$h(x)_{\max}=h(1)=1.$ 综上：当$a>1$时，函数$g(x)$无零点，

当$a=1$或$a\leqslant 0$时，函数$g(x)$有一个零点，

当$0<a<1$时，函数$g(x)$有两个零点.．

考点

—函数与导数

—导数及其应用

—利用导数研究函数的单调性

—利用导数求函数的极值与最值

19 已知函数$f(x)=\frac{a(x-1)}{x^2}$，其中$a>0$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若直线$x-y-1=0$是曲线$y=f(x)$的切线，求实数a的值．

（3）设$g(x)=x\ln x-x^2f(x)$，求$g(x)$在区间$[1,\mathrm{e}]$上的最大值．（其中e为自然对数的底数）

答案 （1）$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$，单调递增区间是$(0,2)$．

（2）1．

（3）0．

解析 （1）$f'(x)=\frac{a(2-x)}{x^3}$，（$x\neq 0$），

在区间$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$上，$f'(x)<0$；在区间$(0,2)$上，$f'(x)>0$．

所以，$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$，单调递增区间是$(0,2)$．

(2) 设切点坐标为(x_0,y_0)，则$\begin{cases} y_0=\frac{a(x_0-1)}{{x_0}^2} \\ x_0-y_0-1=0 \\ \frac{a(2-x_0)}{{x_0}^3}=1 \end{cases}$

解得$x_0=1$，$a=1$．

(3) $g(x)=x\ln x-a(x-1)$，

则$g'(x)=\ln x+1-a$，

令$g'(x)=0$，

得$x=\mathrm{e}^{a-1}$，

$\therefore$在区间$(0,\mathrm{e}^{a-1})$上，$g(x)$为减函数，

在区间$(\mathrm{e}^{a-1},+\infty)$上，$g(x)$为增函数．

当$\mathrm{e}^{a-1}\leqslant 1$，

即$0<a\leqslant 1$时，在区间$[1,\mathrm{e}]$上，$g(x)$为递增函数，

$\therefore g(x)$的最大值为$g(\mathrm{e})=\mathrm{e}+a-a\mathrm{e}$，

当$\mathrm{e}^{a-1}\geqslant \mathrm{e}$，

即$a\geqslant 2$时，在区间$[1,\mathrm{e}]$上，$g(x)$为减函数，

$\therefore g(x)$的最大值为$g(1)=0$，

当$1<\mathrm{e}^{a-1}<\mathrm{e}$，

即$1<a<2$时，$g(x)$的最大值为$g(\mathrm{e})$和$g(1)$中较大者，

$g(\mathrm{e})-g(1)=a+\mathrm{e}-a\mathrm{e}>0$，

解得$a<\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，

$\therefore 1<a<\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$时，$g(x)$的最大值为$g(\mathrm{e})=\mathrm{e}+a-a\mathrm{e}$，

$\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\leqslant a<2$时，$g(x)$的最大值为$g(1)=0$．

综上所述，当$0<a<\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$时，$g(x)$的最大值为$g(\mathrm{e})=\mathrm{e}+a-a\mathrm{e}$，

当$a\geqslant\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$时，$g(x)$的最大值为$g(1)=0$．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数概念及其几何意义
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

20 已知函数$f(x)=\ln x$．

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）求证：当$x>0$时，$f(x)\geqslant 1-\frac{1}{x}$．

（3）若$x-1>a\ln x$对任意$x>1$恒成立，求实数a的最大值．

答案 （1）$y=x-1$．

（2）证明过程见解析．

（3）1．

解析 （1）$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，

又$f(1)=0$，所以切线方程为$y=x-1$．

（2）（2）由题意知$x>0$，令$g(x)=f(x)-(1-\frac{1}{x})=lnx-1+\frac{1}{x}$．

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

令$g'(x)=\frac{x-1}{x^2}=0$，解得$x=1$．

易知当$x>1$时，$g'(x)>0$，易知当$0<x<1$时，$g'(x)<0$．

即$g(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(1)=0$，$g(x)\geqslant g(1)=0$

即$g(x)=f(x)-(1-\frac{1}{x})\geqslant 0$，即$f(x)\geqslant(1-\frac{1}{x})$．

（3）设$h(x)=x-1-a\ln x(x\geqslant 1)$，

依题意，对于任意$x>1$，$h(x)>0$恒成立．

$h'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，

$a\leqslant 1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$[1,+\infty)$上单调增，

当$x>1$时，$h(x)>h(1)=0$，满足题意．

$a>1$时，随x变化，$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

$h(x)$在$(1,a)$上单调递减，所以$g(a)<g(1)=0$

即当$a>1$时，总存在$g(a)<g(1)=0$

即当$a>1$时，总存在$g(a)<0$，不合题意．

综上所述，实数a的最大值为1 .

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 值域
    - 最值
    - 单调性
  - 导数及其应用
    - 导数与分类讨论
    - 导数与恒成立
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值
    - 利用导数证明不等式
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程

21 已知函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+(a+1)x+(1-a)\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当$a=3$时，求曲线$C:y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）当$x\in[1,2]$时，若曲线$C:y=f(x)$上的点(x,y)都在不等式组$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\\ y\leqslant x+\frac{3}{2}\end{cases}$所表示的平面区域内，试求$a$的取值范围 .

答案

（1）$2x-2y+5=0$.

（2）$1\leqslant a\leqslant 2$.

解析

（1）当$a=3$时，$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-2\ln x$，$x>0$.

$f'(x)=-x+4-\frac{2}{x}$.

则$f'(1)=-1+4-2=1$，而$f(1)=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$.

所以曲线C在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-\frac{7}{2}=x-1$，即$2x-2y+5=0$．

（2）依题意当$x\in[1,2]$时，曲线C上的点(x,y)

都在不等式组$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\\ y\leqslant x+\frac{3}{2}\end{cases}$所表示的平面区域内，

等价于当$1\leqslant x\leqslant 2$时，$x\leqslant f(x)\leqslant x+\frac{3}{2}$恒成立．

设$g(x)=f(x)-x=-\frac{1}{2}x^2+ax+1-a)\ln x$，$x\in[1,2]$．

所以$g'(x)=-x+a+\frac{1-a}{x}=\frac{-x^2+ax+(1-a)}{x}=\frac{-(x-1)(x-(a-1))}{x}$．

（1）当$a-1\leqslant 1$，即$a\leqslant 2$时，当$x\in[1,2]$时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$为单调减函数，

所以$g(2)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$．

依题意应有$\begin{cases}g(1)=a-\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}\\ g(2)=-2+2a+(1-a)ln2\geqslant 0\end{cases}$

解得$\begin{cases}a\leqslant 2\\ a\geqslant 1\end{cases}$，所以$1\leqslant a\leqslant 2$．

（2）若$1<a-1<2$，即$2<a<3$时，

当$x\in[1,a-1)$，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$为单调增函数，

当$x\in(a-1,2]$，$g'(x)<0$，$g(x)$为单调减函数．

由于$g(1)>\frac{3}{2}$，所以不合题意．

（3）当$a-1\geqslant 2$，即$a\geqslant 3$时，注意到$g(1)=a-\frac{1}{2}\geqslant\frac{5}{2}$，显然不合题意．

综上所述，$1\leqslant a\leqslant 2$．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 导数与分类讨论
    - 导数与恒成立
    - 导数概念及其几何意义
    - 导数的运算
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值
- 不等式与线性规划
  - 简单的线性规划
    - 简单的线性规划问题

已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$（其中a,b为常数且$a\neq 0$）在$x=1$处取得极值．

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的单调区间．

（2）若$f(x)$在$(0,\mathrm{e}]$上的最大值为1，求a的值．

答案　（1）$f(x)$的单调递增区间为$(0,\frac{1}{2}),(1,+\infty)$，单调递减区间为$(\frac{1}{2},1)$

（2）$a=\frac{1}{\mathrm{e}-2}$或$a=-2$．

解析　（1）$\because f(x)=\ln x+ax^2+bx$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+b$，

因为函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$在$x=1$处取得极值，

$f'(1)=1+2a+b=0$，当$a=1$时，$b=-3$，$f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}$，

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$和$(1,+\infty)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{2},1\right)$，

所以$f(x)$的极大值点为$\frac{1}{2}$，$f(x)$的极小值点为1．

（2）因为$f'(x)=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\frac{(2ax-1)(x-1)}{x}(x>0)$，

令$f'(x)=0$，得$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2a}$，

因为$f(x)$在$x=1$处取得极值，所以$x_2=\frac{1}{2a}\neq x_1=1$．

（ⅰ）当$\frac{1}{2a}<0$，即$a<0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,\mathrm{e}]$上单调递减，

所以$f(x)$在区间$(0,\mathrm{e}]$上的最大值为$f(1)$，由$f(1)=1$，解得$a=-2$．

（ⅱ）当$a>0$时，$x_2=\frac{1}{2a}>0$，

①当$\frac{1}{2a}<1$，即$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上单调递增，$\left(\frac{1}{2a},1\right)$上单调递减，

$(1,\mathrm{e}]$上单调递增，

所以最大值1可能在$x=\frac{1}{2a}$或$x=\mathrm{e}$处取得．

而$f\left(\frac{1}{2a}\right)=\ln\frac{1}{2a}+a\left(\frac{1}{2a}\right)^2-(2a+1)\frac{1}{2a}=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}-1<0$，

所以$f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}+a\mathrm{e}^2-(2a+1)\mathrm{e}=1$，解得$a=\frac{1}{\mathrm{e}-2}$，满足$a>\frac{1}{2}$．

②当$1<\frac{1}{2a}<\mathrm{e}$时，即$\frac{1}{2\mathrm{e}}<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，$\left(1,\frac{1}{2a}\right)$上单调递减，

$\left(\frac{1}{2a},\mathrm{e}\right]$上单调递增．

所以最大值1可能在$x=1$或$x=\mathrm{e}$处取得．

而$f(1)=\ln 1+a-(2a+1)<0$，

所以$f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}+a\mathrm{e}^2-(2a+1)\mathrm{e}=1$，解得$a=\frac{1}{\mathrm{e}-2}>\frac{1}{2}$，与$\frac{1}{2\mathrm{e}}<a<\frac{1}{2}$矛盾．

③当$x_2=\dfrac{1}{2a}\geqslant \mathrm{e}$即$0<a\leqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$时，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在$(1,\mathrm{e})$上单调递减，

所以最大值1可能在$x=1$处取得，而$f(1)=\ln 1+a-(2a+1)<0$，矛盾．

综上所述$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}-2}$或$a=-2$．

考点

—函数与导数
- 导数及其应用
  - 利用导数研究函数的单调性
  - 利用导数求函数的极值与最值

23 已知函数$f(x)=(x-a)\sin x+\cos x, x\in(0,\pi)$．

（1）当$a=\dfrac{\pi}{2}$时，求函数$f(x)$的值域．

（2）当$a>\dfrac{\pi}{2}$时，求函数$f(x)$的单调区间．

答案

（1）$(-1,1)$．

（2）当$\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$时，函数$f(x)$的单调增区间为$(\dfrac{\pi}{2},a)$，单调减区间为$(0,\dfrac{\pi}{2})$和(a,π)；

当$a\geq\pi$时，函数$f(x)$的单调增区间为$(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，单调减区间为$(0,\dfrac{\pi}{2})$．

解析

（1）当$a=\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)=(x-\dfrac{\pi}{2})\sin x+\cos x$，$x\in(0,\pi)$，

$f'(x)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x$，令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{\pi}{2}$，

当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$x-\dfrac{\pi}{2}<0$，$\cos x>0$，$f'(x)<0$，

当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，$x-\dfrac{\pi}{2}>0$，$\cos x<0$，$f'(x)<0$，

$\therefore$ 在$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(0,\pi)$上单调递减，

又$\because f(0)=1$，$f(\pi)=-1$，

$\therefore$ 函数$f(x)$的值域为$(-1,1)$．

（2）$f'(x)=(x-a)\cos x$，令$f'(x)=0$，则$x=a$或$x=\dfrac{\pi}{2}$，

①当$\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$时，

若$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$x-a<0$，$\cos x>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

若$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},a\right)$时，$x-a<0$，$\cos x<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

若$x\in(a,\pi)$时，$x-a>0$，$\cos x>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

②当$a \geqslant \pi$时，

若$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时，$x - a < 0$，$\cos x > 0$，$f'(x) < 0$，$f(x)$单调递减，

若$x \in \left(\frac{\pi}{2}, a\right)$时，$x - a < 0$，$\cos x < 0$，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调递增，

综上所述，

当$\frac{\pi}{2} < a < \pi$时，$f(x)$的单调递增区间是$\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$，单调递减区间为$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$和$(a, \pi)$

，

当$a \geqslant \pi$时，$f(x)$的单调递增区间是$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，单调递减区间为$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$．

考点

- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

24 已知函数$f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$．

（1）当$a = 1$时，求曲线$y = f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程．

（2）当$a > 0$时，函数$f(x)$在区间$[1, e]$上的最小值为-2，求a的取值范围．

（3）若对任意x_1，$x_2 \in (0, +\infty)$，$x_1 < x_2$，且$f(x_1) + 2x_1 < f(x_2) + 2x_2$恒成立，求$a$的取值范围．

答案

（1）$y = -2$．

（2）$a \geqslant 1$．

（3）$0 \leqslant a \leqslant 8$．

解析

（1）当$a = 1$时，$f(x) = x^2 - 3x + \ln x$，$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$，

$\because f'(1) = 0$，$f(1) = -2$，

$\therefore$切线方程为$y = -2$．

（2）函数$f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$的定义域为$(0, +\infty)$，

当$a > 0$时，$f'(x) = 2ax - (a+2) + \frac{1}{x}(x > 0)$，

令$f'(x) = 0$，即$f'(x) = \frac{2ax^2 - (a+2)x + 1}{x}$，

$\therefore x = \frac{1}{2}$或$x = \frac{1}{a}$．

当$0<\frac{1}{a}\leqslant 1$，即$a\geqslant 1$时，$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，

$\therefore f(x)$在$[1,e]$上的最小值是$f(1)=-2$；

当$1<\frac{1}{a}<\mathrm{e}$，即$\frac{1}{\mathrm{e}}<a<1$时，

$f(x)$在$[1,e]$上的最小值是$f\left(\frac{1}{a}\right)<f(1)=-2$，不合题意；

当$\frac{1}{a}\geqslant\mathrm{e}$，即$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$f(x)$在$[1,e]$上单调递减，

$\therefore f(x)$在$[1,e]$上的最小值是$f(\mathrm{e})<f(1)=-2$，不合题意．

综上可得$a\geqslant 1$．

（3）设$g(x)=f(x)+2x$，则$g(x)=ax^2-ax+\ln x$，

对任意x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，且$f(x_1)+2x_1<f(x_2)+2x_2$恒成立，

等价于$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增．

而$g'(x)=2ax-a+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-ax+1}{x}$，

当$a=0$时，$g'(x)=\frac{1}{x}$，此时$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a\neq 0$时，只需$g'(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$恒成立，

$\because x\in(0,+\infty)$，只要$2ax^2-ax+1\geqslant 0$，则需要$a\geqslant 0$，

对于函数$y=2ax^2-ax+1$，过定点$(0,1)$，

对称轴$x=\frac{1}{4}$，只需$\Delta=a^2-8a\leqslant 0$，即$0<a<8$．

综上可得$0\leqslant a\leqslant 8$．

考点

- 函数与导数
  - 函数
    - 值域
    - 最值
    - 单调性
  - 二次函数
    - 二次函数的概念、图象和性质
    - 二次函数与分类讨论
  - 导数及其应用
    - 导数与分类讨论
    - 导数与恒成立
    - 导数概念及其几何意义

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

解析几何

直线与方程

直线的倾斜角与斜率

直线的方程

25 已知函数$f(x)=e^x\cos x-x$．

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程．

（2）求函数$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值．

答案 （1）$y=1$

（2）最大值为1，最小值为$-\frac{\pi}{2}$

解析 （1）$\because f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-1$，

$\therefore k=f'(0)=e^0\cos 0-e^0\sin 0-1=1-0-1=0$，

又$\because f(0)=e^0\cos 0-0=1$，

$\therefore$曲线$f(x)$在点$(0,1)$的切线方程为$y=1$．

（2）由（1）可知$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-1$，

令$g(x)=f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-1$，

则$g'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\cos x-e^x\sin x=-2e^x\sin x$，

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore\sin x\geqslant 0$，$e^x>0$，

$\therefore g'(x)\leqslant 0$，

$\therefore g(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$单调递减，即$f'(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$单调递减，

又$\because f'(0)=0$，$\therefore f'(x)\leqslant f'(0)=0$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(0)=1-0=1$，$f(x)_{\min}=f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$．

考点 函数与导数

导数及其应用

导数概念及其几何意义

导数的运算

利用导数研究函数的单调性

利用导数求函数的极值与最值

26 已知函数$f(x)=\begin{cases} x\ln x & x>a \\ -x^2+2x-3 & x\leqslant a \end{cases}$，其中$a\geqslant 0$．

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）如果对于任意$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，求a的取值范围．

答案 （1）切线方程为$y=x-1$．

（2）a的取值范围为$[\frac{1}{e},1]$．

解析 （1）由题意，得$f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$，其中$x>0$，

所以$f'(1)=1$，

又因为$f(1)=0$，所以函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=x-1$．

（2）先考察函数$g(x)=-x^2+2x-3$，$x\in R$的图象，配方得$g(x)=-(x-1)^2-2$，

所以函数$g(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减，且$g(x)_{\max}=g(1)=-2$

．

因为对于任意$x_1,x_2\in R$，且$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$成立，所以$a\leq 1$．

以下考察函数$h(x)=x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$的图象，则$h'(x)=\ln x+1$，令

$h'(x)=\ln x+1=0$，解得$x=\frac{1}{e}$．

随着x变化时，$h(x)$和$h'(x)$的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗

即函数$h(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增，且

$h(x)_{\min}=h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$．

因为对于任意$x_1,x_2\in R$，且$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$成立，所以$a\geq\frac{1}{e}$．

因为$-\frac{1}{e}>-2$（即$h(x)_{\min}>g(x)_{\max}$），所以a的取值范围为$[\frac{1}{e},1]$．

考点

一函数与导数

—导数及其应用

—导数概念及其几何意义

—利用导数研究函数的单调性

—利用导数求函数的极值与最值

27 已知函数$f(x)=ax-\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^{ax}+3x$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）求$f(x)$的极值；

（2）若存在区间M，使$f(x)$和$g(x)$在区间M上具有相同的单调性，求a的取值范围．

答案 （1）当$a\leq 0$时，$f(x)$没有极大值，也没有极小值；

当$a>0$时，$f(x)$的极小值为$f(\frac{1}{a})=1+\ln a$；没有极大值．

（2）a的取值范围是$(-\infty,-3)\bigcup(0,+\infty)$．

解析 （1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$．

①当$a\leq 0$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减．

从而$f(x)$没有极大值，也没有极小值．

②当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{a}$．

$f(x)$和$f'(x)$的情况如下：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

故$f(x)$的单调减区间为$(0,\frac{1}{a})$；单调增区间为$(\frac{1}{a},+\infty)$．

从而$f(x)$的极小值为$f(\frac{1}{a})=1+\ln a$；没有极大值．

（2）$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$g'(x)=a\mathrm{e}^{ax}+3$．

③当$a>0$时，显然$g'(x)>0$，从而$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增．

由（Ⅰ）得，此时$f(x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增，符合题意．

④当$a=0$时，$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，不合题意．

⑤当$a<0$时，令$g'(x)=0$，得$x_0=\frac{1}{a}\ln(-\frac{3}{a})$．

$g(x)$和$g'(x)$的情况如下表：

x	$(-\infty,\ x_0)$	x_0	$(x_0,\ +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

当$-3\leq a<0$时，$x_0\leq 0$，此时$g(x)$在$(x_0,\ +\infty)$上单调递增，由于$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递减，不合题意．

当$a<-3$时，$x_0>0$，此时$g(x)$在$(-\infty, x_0\ )$上单调递减，由于$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递减，符合题意．

综上，a的取值范围是$(-\infty,-3)\bigcup(0,+\infty)$．

考点

一函数与导数

├导数及其应用

│├利用导数研究函数的单调性

│└利用导数求函数的极值与最值

28 已知函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}(a\neq 0)$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若$\{x\,|\,f(x)\leqslant 0\}=[b,c]$（其中$b<c$），求$a$的取值范围，并说明$[b,c]\subseteq(0,1)$.

答案

（1）当$a<0$时，函数$f(x)$的单调递减区间是$(0,+\infty)$.

当$a>0$时，$f(x)$的单调递减区间是$(0,\dfrac{1}{a})$，单调递增区间是$(\dfrac{1}{a},+\infty)$.

（2）$a>\mathrm{e}$

解析

（1）$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax-1}{x^2}(x>0)$.

（ⅰ）当$a<0$时，$f'(x)<0$，则函数$f(x)$的单调递减区间是$(0,+\infty)$.

（ⅱ）当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{a}$.

当x变化时，$f'(x),f(x)$的变化情况如下表

x	$(0,\dfrac{1}{a})$	$\dfrac{1}{a}$	$(\dfrac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$的单调递减区间是$(0,\dfrac{1}{a})$，单调递增区间是$(\dfrac{1}{a},+\infty)$.

（2）由（1）知：

当$a<0$时，函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内是减函数，

所以，函数$f(x)$至多存在一个零点，不符合题意.

当$a>0$时，因为 $f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$内是减函数，在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$内是增函数，

所以 要使$\{x\,|\,f(x)\leqslant 0\}=[b,c]$，必须$f(\dfrac{1}{a})<0$，即$a\ln\dfrac{1}{a}+a<0$.

所以 $a>\mathrm{e}$.

当$a>\mathrm{e}$时，$f(\dfrac{1}{a^2})=a\ln(\dfrac{1}{a^2})+a^2=-2a\ln a+a^2=a\cdot(a-2\ln a)$.

令$g(x)=x-2\ln x(x\geqslant\mathrm{e})$，则$g'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}(x\geqslant\mathrm{e})$.

当$x>\mathrm{e}$时，$g'(x)>0$，

所以，$g(x)$在$[\mathrm{e},+\infty)$上是增函数.

所以 当$a>\mathrm{e}$时，$g(a)=a-2\ln a>g(\mathrm{e})=\mathrm{e}-2>0$.

所以 $f(\dfrac{1}{a^2})>0$.

因为 $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{a}<1$，$f(\dfrac{1}{a})<0$，$f(1)=1>0$，

所以 $f(x)$在$(\dfrac{1}{a^2},\dfrac{1}{a})$内存在一个零点，不妨记为$b$，在$(\dfrac{1}{a},1)$内存在一个零点，不妨记为$c$.

因为 $f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$内是减函数，在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$内是增函数，

所以 $\{x\,|\,f(x)\leqslant 0\}=[b,c]$.

综上所述，a的取值范围是$(\mathrm{e},+\infty)$.

因为 $b\in(\dfrac{1}{a^2},\dfrac{1}{a})$，$c\in(\dfrac{1}{a},1)$，

所以 $[b,c]\subseteq(0,1)$.

考点
- 函数与导数
  - 导数及其应用
    - 利用导数研究函数的单调性
    - 利用导数求函数的极值与最值

29 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln x-a$．

（1）当$a=\mathrm{e}$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

（2）证明：对于$\forall a\in(0,\mathrm{e})$，$f(x)$在区间$\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1\right)$上有极小值，且极小值大于0．

答案　（1）$y=0$．

（2）证明见解析．

解析　（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

因为$a=\mathrm{e}$，所以$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}(\ln x+1)$，所以$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}}{x}$．

因为$f(1)=0$，$f'(1)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=0$．

（2）因为$0<a<\mathrm{e}$，所以$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{x}$在区间$(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1)$上是单调递增函数．

因为$f'(\dfrac{a}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{\frac{a}{\mathrm{e}}}-\mathrm{e}<0$，$f'(1)=\mathrm{e}-a>0$，

所以$\exists x_0\in(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1)$，使得$\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$．

所以$\forall x\in(\dfrac{a}{\mathrm{e}},x_0)$，$f'(x)<0$；$\forall x\in(x_0,1)$，$f'(x)>0$，

故$f(x)$在$(\dfrac{a}{\mathrm{e}},x_0)$上单调递减，在$(x_0,1)$上单调递增，

所以$f(x)$有极小值$f(x_0)$．

因为$\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，

所以$f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-a(\ln x_0+1)=a(\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0-1)$.

设$g(x)=a(\dfrac{1}{x}-\ln x-1)$，$x\in(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1)$，

则$g'(x)=a(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x})=-\dfrac{a(1+x)}{x^2}$，

所以$g'(x)<0$，

即$g(x)$在$(\dfrac{a}{\mathrm{e}},1)$上单调递减，所以$g(x)>g(1)=0$，

即$f(x_0)>0$，所以函数$f(x)$的极小值大于0．

考点　函数与导数

- 导数及其应用
  - 导数与零点
  - 导数与恒成立
  - 导数概念及其几何意义
  - 利用导数研究函数的单调性
  - 利用导数求函数的极值与最值

30　已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b$（$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$）．

（1）当$a=1$时，求函数$F(x)=f(x)-g(x)$的单调区间．

（2）若曲线$y=f(x)$在点$(0,1)$处的切线l与曲线$y=g(x)$切于点$(1,c)$，求a，b，c的值．

（3）若$f(x)\geqslant g(x)$恒成立，求$a+b$的最大值．

答案 （1）$F(x)$在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增；在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减．

（2）$a=-2$，$b=2$，$c=1$．

（3）$a+b$的最大值为$\mathrm{e}-1$．

解析 （1）$F(x)=\mathrm{e}^x-2x-b$，则$F'(x)=\mathrm{e}^x-2$．

令$F'(x)=\mathrm{e}^x-2>0$，得$x>\ln 2$，所以$F(x)$在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增．

令$F'(x)=\mathrm{e}^x-2<0$，得$x<\ln 2$，所以$F(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减．

（2）因为$f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$，所以$f'(0)=0$，所以l的方程为$y=1$．

依题意，$-\dfrac{a}{2}=1$，$c=1$．

于是l与抛物线$g(x)=x^2-2x+b$切于点$(1,1)$，

由$1^2-2+b=1$得$b=2$．

所以$a=-2$，$b=2$，$c=1$．

（3）设$h(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b$，则$h(x)\geqslant 0$恒成立．

易得$h'(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)$．

1）当$a+1\leqslant 0$时，

因为$h'(x)>0$，所以此时$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增．

①若$a+1=0$，则当$b\leqslant 0$时满足条件，此时$a+b\leqslant -1$；

②若$a+1<0$，取$x_0<0$且$x_0<\dfrac{1-b}{a+1}$，

此时$h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\dfrac{1-b}{a+1}-b=0$，所以$h(x)\geqslant 0$不恒成立，不满足条件；

2）当$a+1>0$时，

令$h'(x)=0$，得$x=\ln(a+1)$．由$h'(x)>0$，得$x>\ln(a+1)$；

由$h'(x)<0$，得$x<\ln(a+1)$．

所以$h(x)$在$(-\infty,\ln(a+1))$上单调递减，在$(\ln(a+1),+\infty)$上单调递增．

要使得“$h(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b\geqslant 0$恒成立”，必须有

“当$x=\ln(a+1)$时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geqslant 0$”成立．

所以$b\leqslant(a+1)-(a+1)\ln(a+1)$．则$a+b\leqslant 2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1$．

令$G(x)=2x-x\ln x-1$，$x>0$，则$G'(x)=1-lnx$．

令$G'(x)=0$，得$x=\mathrm{e}$．由$G'(x)>0$，得$0<x<\mathrm{e}$；

由$G'(x)<0$，得$x>\mathrm{e}$．所以$G(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，

所以，当$x=\mathrm{e}$时，$G(x)_{\max}=\mathrm{e}-1$．

从而，当$a=\mathrm{e}-1$，$b=0$时，$a+b$的最大值为$\mathrm{e}-1$．

综上，$a+b$的最大值为$\mathrm{e}-1$．

考点 —函数与导数
- 导数及其应用
  - 导数与恒成立
  - 导数概念及其几何意义
  - 利用导数研究函数的单调性