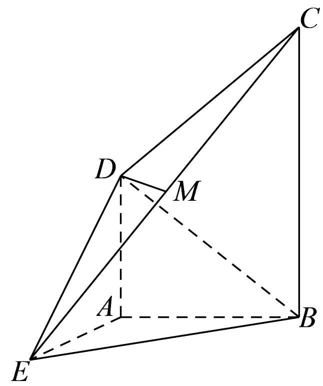
立体几何-期中必做题

1 如图，四棱锥$E-ABCD$中，$AD//BC$，$AD=AB=AE=\frac{1}{2}BC=1$，且$BC\perp$平面ABE，M为棱CE的中点．



（1）求证：$DM//$平面ABE．

（2）求证：平面$CDE\perp$平面CBE．

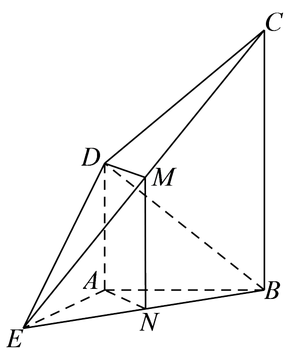
（3）当四面体$D-ABE$的体积最大时，判断直线AE与直线CD是否垂直，并说明理由．

答案 （1）证明见解析

（2）证明见解析

（3）垂直

解析 （1）取线段EB的中点N，连接MN，AN．



因为M为棱CE的中点，

所以在$\triangle CBE$中，$MN//BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$．

又$AD//BC$，$AD=\frac{1}{2}BC$，

所以$MN//AD$，$MN=AD$．

所以四边形$DMNA$是平行四边形，

所以$DM//AN$．

又$DM\not\subset$平面ABE，$AN\subset$平面ABE，

所以$DM//$平面ABE．

（2）因为$AE=AB$，N为EB中点，

所以$AN\perp BE$．

又$BC\perp$平面ABE，$AN\subset$平面ABE,

所以$BC\perp AN$．

又$BC\cap BE=B$，

所以$AN\perp$平面BCE．

又$DM//AN$，

所以$DM\perp$平面BCE．

因为$DM\subset$平面CDE，

所以平面$CDE\perp$平面CBE．

（3）$AE\perp CD$．

设$\angle EAB=\theta$，由$AD=AB=AE=1$，

则四面体$D-ABE$的体积$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AE\cdot AB\cdot\sin\theta\cdot AD=\frac{1}{6}\sin\theta$．

当$\theta=90^\circ$，即$AE\perp AB$时体积最大．

又$BC\perp$平面$ABE,AE\subset$平面ABE，

所以$AE\perp BC$．

因为$BC\cap AB=B$，

所以$AE\perp$平面ABC．

因为$CD\subset$平面$ABCD$，

所以$AE\perp CD$．

考点 一立体几何与空间向量

一立体几何初步

├点、直线、平面间的位置关系

└空间中的平行

2 如图1，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，D为AC中点，$AE\perp BD$于E（不同于点D），延长AE交BC于F，将$\triangle ABD$沿BD折起，得到三棱锥A_1-BCD，如图2所示．

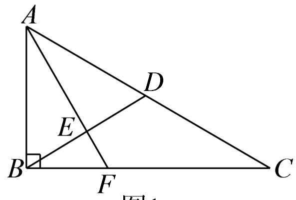


图1

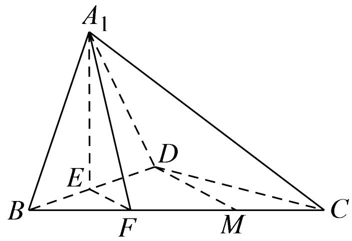


图2

（1）若M是FC的中点，求证：直线$DM//$平面A_1EF．

（2）求证：$BD\perp A_1F$．

（3）若平面$A_1BD\perp$平面BCD，试判断直线A_1B与直线CD能否垂直？并说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）证明见解析．

解析 （1）因为D，M分别为AC,BD中点，所以$DM//EF$

又$EF\subset$平面A_1EF，$DM\not\subset$平面A_1EF

所以$DM//$平面A_1EF．

（2）因为$A_1E\perp BD$，$EF\perp BD$且$A_1E\cap EF=E$

所以$BD\perp$平面A_1EF

又$A_1F\subset$平面A_1EF

所以$BD\perp A_1F$．

（3）直线A_1B与直线CD不能垂直，

$\because$平面$BCD\perp$平面A_1BD，

平面$BCD\cap$平面$A_1BD=BD$，

$EF\perp BD$，

$EF\subset$平面CBD，

$\therefore EF\perp$平面A_1BD，

$\because A_1B\subset$平面A_1BD，

$\therefore A_1B\perp EF$，

又$\because EF//DM$，

$\therefore A_1B\perp DM$，

假设$A_1B\perp CD$，

$\because A_1B\perp DM$，$DM\cap CD=D$点，

$\therefore A_1B\perp$平面BCD，

$\therefore A_1B\perp BD$，

与$\angle A_1BD$为锐角矛盾，

$\therefore$直线A_1B与直线CD不能垂直．

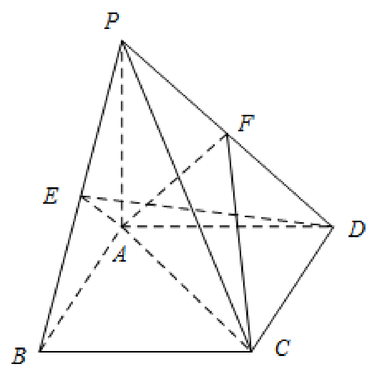
考点

—立体几何与空间向量

  —立体几何初步

    —空间几何体

3 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=2$，E，F分别是PB，PD的中点．



（1）求证：$PB//$平面FAC．

（2）求三棱锥$P-EAD$的体积．

（3）求证：平面$EAD\perp$平面FAC．

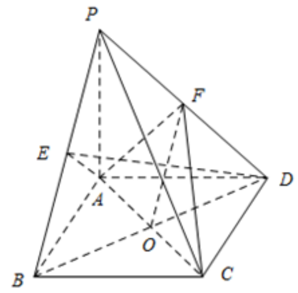
答案 （1）证明见解析．

（2）$\frac{2}{3}$．

（3）证明见解析．

解析

（1）连接BD，与AC交于点O，连接OF，



在$\triangle PBD$中，O，F分别是BD，PD中点，

所以$OF//PB$，

又因为$OF\subset$平面FAC， $PB\not\subset$平面FAC，

所以$PB//$平面FAC .

（2）法1：因为$PA\perp$平面$ABCD$，AB，$AD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp AB$，$PA\perp AD$

又因为$AB\perp AD$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面PAB，

所以$AD\perp$平面PAB，

在直角$\triangle PAB$中，$PA=AB=2$，E为PB中点，

所以$S_{\triangle PAE}=1$，

所以三棱锥$P-EAD$的体积为$V_{P-EAD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PAE}\times AD=\frac{2}{3}$.

法2:因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以PA为棱锥$P-ABD$的高 .

因为$PA=AB=2$，底面$ABCD$是正方形，

所以$V_{P-ABD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\times PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，

因为E为PB中点，所以$S_{\triangle PAE}=S_{\triangle ABE}$，

所以$V_{P-EAD}=\frac{1}{2}\times V_{P-ABD}=\frac{2}{3}$.

（3）因为$AD\perp$平面PAB，$PB\subset$平面PAB，

所以$AD\perp PB$，

在等腰直角$\triangle PAB$中，$AE\perp PB$，

又$AE\cap AD=A$，AE，$AD\subset$平面EAD，

所以$PB\perp$平面EAD，

又$OF//AB$，

所以$OF\perp$平面EAD，

又$OF\subset$平面FAC，

所以平面$EAD\perp$平面FAC .

考点 —立体几何与空间向量

—立体几何初步

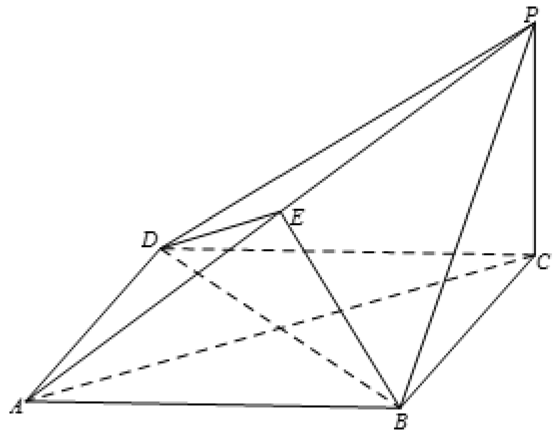
└—空间几何体体积和表面积的计算

空间几何体

空间中的平行

空间中的垂直

4 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$PC\perp$平面$ABCD$，点E在棱PA上．



（1）求证：直线$BD\perp$平面PAC．

（2）若$PC//$平面BDE，求证：$AE=EP$．

（3）是否存在点E，使得四面体$A-BDE$的体积等于四面体$P-BDC$的体积的$\frac{1}{3}$？若存在，求出$\frac{PE}{PA}$的值，若不存在，请说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）存在点P，且$\frac{PE}{PA}=\frac{2}{3}$

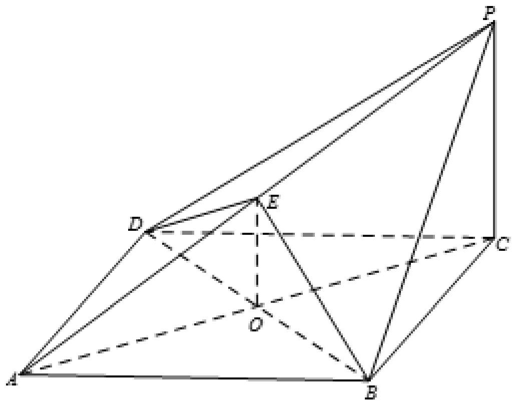
解析 （1）因为$PC\perp$平面$ABCD$，所以$PC\perp BD$，

因为底面$ABCD$是菱形，所以$BD\perp AC$，

因为$PC\cap AC=C$，

所以$BD\perp$平面PAC．

（2）设AC与BD交点为O，连接OE，



因为平面$PAC\cap$平面$BDE=OE$，

$PC//$平面BDE，

所以$PC//OE$，

又由$ABCD$是菱形可知，O为AC中点，

所以，在$\triangle PAC$中，

$\dfrac{AE}{EP}=\dfrac{AO}{OC}=1$，

所以$AE=EP$．

（3）在$\triangle PAC$中过点E作$EF//PC$，交AC于点F，

因为$PC\perp$平面$ABCD$，

所以$EF\perp$平面$ABCD$．

由$ABCD$是菱形可知$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BDC}$，

假设存在点E满足$V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}V_{P-BDC}$，即$V_{E-BDA}=\dfrac{1}{3}V_{P-BDC}$，

则$EF=\dfrac{1}{3}PC$，

所以在$\triangle PAC$中，$\dfrac{AE}{AP}=\dfrac{EF}{PC}=\dfrac{1}{3}$，

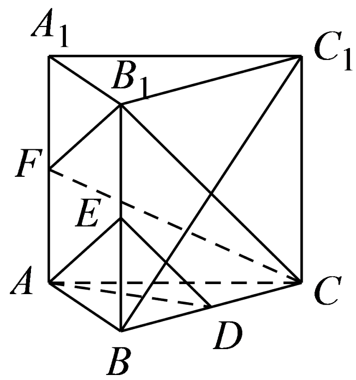
所以$\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{2}{3}$．

考点

—立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体体积和表面积的计算
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的所有棱长都相等，且D,E,F分别为BC,BB_1,AA_1的中点．



（1）求证：平面B_1FC//平面EAD；

（2）求证：$BC_1\perp$平面EAD．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

解析 （1）由已知可得$AF//B_1E$，$AF=B_1E$，

$\therefore$四边形AFB_1E是平行四边形，

$\therefore AE//FB_1$，

$\because AE\not\subset$平面B_1FC，$FB_1\subset$平面B_1FC，

$\therefore AE//$平面B_1FC；

又D,E分别是BC,BB_1的中点，

$\therefore DE//B_1C$，

$\because ED\not\subset$平面B_1FC，$B_1C\subset$平面B_1FC，

$\therefore ED//$平面B_1FC；

$\because AE\cap DE=E,AE\subset$平面$EAD$，$ED\subset$平面$EAD$，

$\therefore$平面B_1FC//平面EAD．

（2）$\because$三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，

$\therefore C_1C\perp$面ABC，又$\because AD\subset$面ABC，

$\therefore C_1C\perp AD$．

又$\because$直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的所有棱长都相等，D是BC边中点，

$\therefore\triangle ABC$是正三角形，$\therefore BC\perp AD$，

而$C_1C\cap BC=C$，$CC_1\subset$面BCC_1B_1，$BC\subset$面BCC_1B_1，

$\therefore AD\perp$面BCC_1B_1，

故$AD\perp BC_1$．

$\because$四边形BCC_1B_1是菱形，

$\therefore BC_1\perp B_1C$，

而$DE//B_1C$，故 $DE\perp BC_1$，

由$AD\cap DE=DAD\subset$面EAD，$ED\subset$面EAD，

得$BC_1\perp$面EAD．

考点

—立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

6 如图1，在直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle ADC=90^\circ$，$BA=BC$．把$\triangle BAC$沿AC折起到$\triangle PAC$的位置，使得P点在平面ADC上的正投影O恰好落在线段AC上，如图2所示．点E,F分别为棱PC,CD的中点．

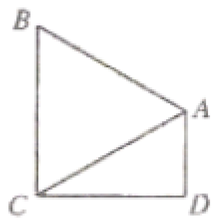


图 1

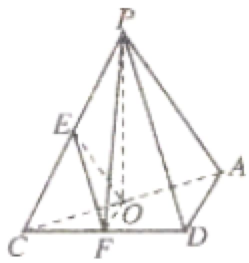


图 2

（1）求证：平面$OEF//$平面APD；

（2）求证：$CD\perp$平面POF；

（3）在棱PC上是否存在一点M，使得M到点P,O,C,F 四点距离相等？请说明理由．

答案 （1）证明见解析；

（2）证明见解析；

（3）存在，证明见解析．

解析　（1）因为点P在平面ADC上的正投影O恰好落在线段AC上

所以$PO\perp$平面ABC，所以$PO\perp AC$

因为$AB=BC$，

所以O是AC中点，

所以$OE\parallel PA$

同理$OF\parallel AD$

又$OE\cap OF=O, PA\cap AD=A$

所以平面$OEF\parallel$平面PDA

（2）因为$OF//AD$，$AD\perp CD$

所以$OF\perp CD$ …

又$PO\perp$平面ADC，$CD\subset$平面ADC

所以$PO\perp CD$

又$OF\cap PO=O$

所以$CD\perp$平面POF

（3）存在，事实上记点E为M即可

因为$CD\perp$平面POF，$PF\subset$平面POF

所以$CD\perp PF$

又E为PC中点，所以$EF=\frac{1}{2}PC$

同理，在直角三角形POC中，$EP=EC=OE=\frac{1}{2}PC$，

所以点E到四个点P, O, C, F的距离相等．

考点　一立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

7 如图1，在梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AD\perp DC$，$BC=2AD$，四边形$ABEF$是矩形. 将矩形$ABEF$沿AB折起到四边形ABE_1F_1的位置，使平面$ABE_1F_1\perp$平面$ABCD$，M为AF_1的中点，如图2.

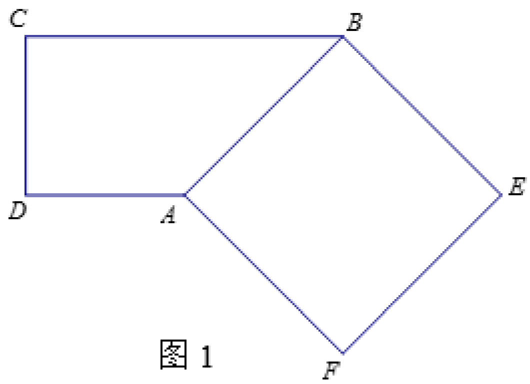


图 1

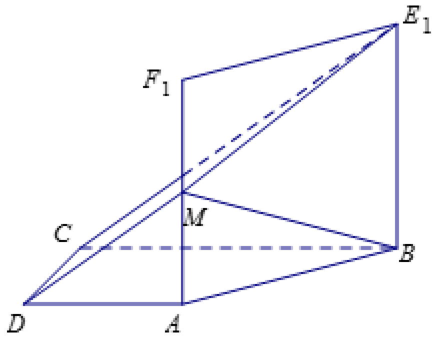


图 2

（1）求证：$BE_1 \perp DC$；

（2）求证：$DM//$平面BCE_1；

（3）判断直线CD与ME_1的位置关系,并说明理由．

答案 （1）证明见解析

（2）证明见解析

（3）直线CD与ME_1相交，理由见解析

解析 （1）因为 四边形ABE_1F_1为矩形， 所以$BE_1 \perp AB$. 因为平面$ABCD \perp$平面ABE_1F_1，且平面$ABCD \cap$平面$ABE_1F_1 = AB$，

$BE_1 \subset$平面ABE_1F_1， 所以$BE_1 \perp$平面$ABCD$. 因为$DC \subset$平面$ABCD$， 所以$BE_1 \perp DC$．

（2）因为 四边形ABE_1F_1为矩形， 所以$AM//BE_1$.

因为$AD//BC$，$AD \cap AM = A$，$BC \cap BE_1 = B$， 所以 平面$ADM//$平面BCE_1.

因为$DM \subset$平面ADM， 所以$DM//$平面BCE_1．

（3）直线CD与ME_1相交，理由如下：

取BC的中点P，CE_1的中点Q，连接AP，PQ，QM.

所以$PQ//BE_1$，且$PQ = \frac{1}{2}BE_1$.

在矩形ABE_1F_1中，M为AF_1的中点，

所以$AM//BE_1$，且$AM = \frac{1}{2}BE_1$.

所以$PQ//AM$，且$PQ = AM$.

所以 四边形$APQM$为平行四边形.

所以$MQ//AP$，$MQ=AP$.

因为 四边形$ABCD$为梯形，P为BC的中点，$BC=2AD$，

所以$AD//PC$，$AD=PC$.

所以 四边形$ADCP$为平行四边形.

所以$CD//AP$，且$CD=AP$.

所以$CD//MQ$，且$CD=MQ$.

所以$CDMQ$是平行四边形 .

所以 $DM//CQ$，即$DM//CE_1$.

因为 $DM\neq CE_1$，

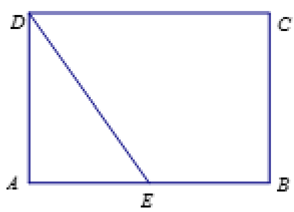
所以 四边形DME_1C是以DM，CE_1为底边的梯形.

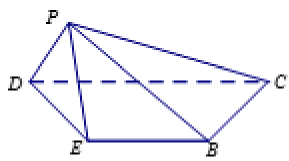
所以 直线CD与ME_1相交 .

考点

一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

8 已知长方形$ABCD$中，$AD=\sqrt{2}$，$AB=2$，E为AB中点，将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle PDE$，所得四棱锥$P-BCDE$如图所示 .





（1）若点M为PC中点，求证：$BM//$平面PDE；

（2）当平面$PDE\perp$平面$BCDE$时，求四棱锥$P-BCDE$的体积；

（3）求证：$DE\perp PC$.

答案 （1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）证明见解析

解析 （1）取DP中点F，连接EF，FM

因为在$\triangle PDC$中，点F，M分别是所在边的中点，所以$FM \underset{=}{//} \frac{1}{2}DC$．

又$EB \underset{=}{//} \frac{1}{2}DC$，所以$FM \underset{=}{//} EB$，

所以$FEBM$是平行四边形，所以$BM//EF$，

又$EF \subset$平面PDE，$BM \not\subset$平面PDE，

所以$BM//$平面PDE．

方法二：取DC中点N，连接$MNBN$

在$\triangle PDC$中，点N, M分别是所在边的中点，所以$MN//PD$．

又$DN \underset{=}{//} BE$，所以$DEBN$是平行四边形，

所以$DE//BN$

因为$NM \cap NB = N, DP \cap DE = D$,所以平面$BMN//$平面$EDP$

因为 $BM \subset$平面BMN，

所以$BM//$平面PDE．

（2）因为平面$PDE \perp$平面$EBCD$，

在$\triangle PDE$中，作$PO \perp DE$于O，

因为平面$PDE \cap$平面$EBCD = DE$，

所以$PO \perp$平面$EBCD$．

在$\triangle PDE$中，计算可得$PO = \frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$V_{P-BCDE} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(1+2) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$．

（3）在矩形$ABCD$中，连接AC交DE于I，

因为$\tan \angle DEA = \sqrt{2}$，$\tan \angle CAB = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle DEA + \angle CAB = \frac{\pi}{2}$，

所以$DE \perp AC$，

所以在四棱锥$P-EBCD$中，$PI \perp DE$，$CI \perp DE$，

又$PI \cap CI = I$，所以$DE \perp$平面POC．

因为$PC \subset$平面POC，所以$DE \perp PC$．

方法二：

由（Ⅱ），连接OC．

在$\triangle DOC$中，$\cos\angle ODC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$DO=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$DC=2$，

$OC^2=DC^2+DO^2-2DC\cdot DO\cos\angle CDO$，得到$OC=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以$DC^2=DO^2+OC^2$，所以$DO\perp OC$

又$PO\cap OC=O$，

所以$DE\perp$平面POC．

因为$PC\subset$平面POC，所以$DE\perp PC$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体体积和表面积的计算
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

9 已知菱形$ABCD$中，$AB=4$，$\angle BAD=60^\circ$，（如图1所示），将菱形$ABCD$沿对角线BD翻折，使点C翻折到点C_1的位置（如图2所示），点E,F,M分别是AB,DC_1,BC_1的中点．

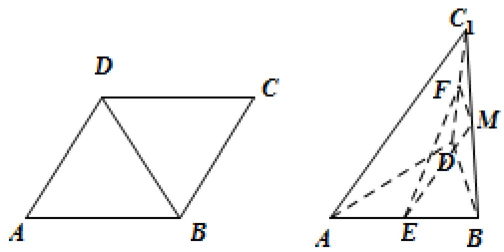


图1　　图2

（1）证明：$BD//$平面EMF；

（2）证明：$AC_1\perp BD$；

（3）当$EF\perp AB$时，求线段AC_1的长．

答案

（1）证明见解析

（2）证明见解析

（3）$AC_1=4$．

解析

（1）$\because$点F,M分别是DC_1,BC_1的中点，

$\therefore FM//BD$

由$FM\subset$平面EMF，$BD\not\subset$平面EMF，

$\therefore BD//$平面EMF；

（2）设在菱形$ABCD$中，$AC\cap BD=O$，

则$BD\perp AO, BD\perp C_1O$

$\because AO\subset$平面AC_1O，$C_1O\subset$平面AC_1O

$\therefore BD\perp$平面AC_1O，

$\therefore AC_1\perp BD$；

（3）当$EF\perp AB$，$\because E$为AB的中点，

$\because$在$\triangle ABF$中，$AF=BF=4\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，

在$\triangle ADF$中，$AD=4, DF=2, AF=2\sqrt{3}$，

$\therefore AF\perp C_1D, \angle ADF=60^\circ$

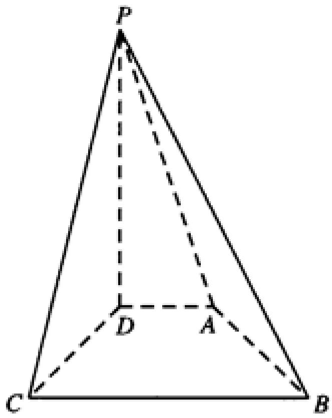
又$\because F$为C_1D的中点，

$\therefore \triangle ADC_1$为等边三角形，$AC_1=4$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

10 如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，又$AD//BC$，$AD\perp DC$，且$BC=PD=3AD=3$．



（1）画出四棱锥$P-ABCD$的正视图；

（2）求证：平面$PAD\perp$平面PCD；

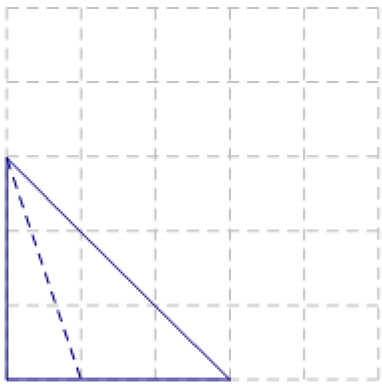
（3）求证：棱PB上存在一点E，使得$AE//$平面PCD，并求$\dfrac{PE}{EB}$的值．

答案 （1）见解析

（2）证明过程见解析

（3）见解析

解析 （1）四棱准$P-ABCD$的正视图如图所示．



（2）因为 $PD\perp$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，

所以 $PD\perp AD$．

因为 $AD\perp DC$，$PD\cap CD=D$，$PD\subset$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，

所以$AD\perp$平面PCD．

因为 $AD\subset$平面PAD， 所以 平面$PAD\perp$平面PCD．

（3）分别延长CD,BA交于点O，连接PO，在棱PB上取一点E，使得$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{1}{2}$．下证

$AE//$平面PCD．

因为 $AD//BC$，$BC=3AD$，

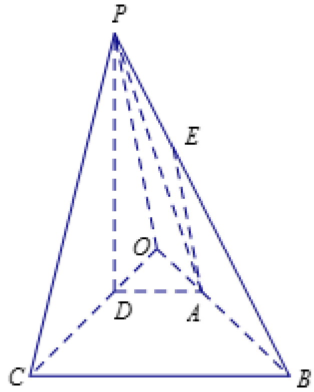
所以 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{1}{3}$，即$\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{1}{2}$．

所以 $\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{PE}{EB}$．

所以 $AE//OP$．

因为$OP\subset$平面PCD，$AE\not\subset$平面PCD，

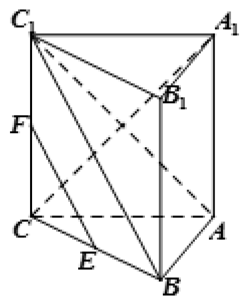
所以 $AE//$平面PCD．



考点

一立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

11 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面ABC，$AB\perp AC,AC=AA_1$，E,F分别是棱BC,CC_1的中点．



（1）求证：$AB\perp$平面AA_1C_1C；

（2）若线段AC上的点D满足平面$DEF//$平面ABC_1，试确定点D的位置，并说明理由；

（3）证明: $EF\perp A_1C$．

答案 （1）证明见解析．

（2）D是线段AC的中点，证明见解析．-

（3）证明见解析．

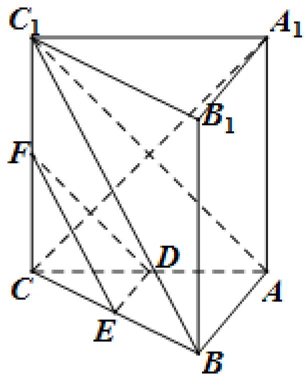
解析 （1）$\because A_1A\perp$底面ABC，$\therefore A_1A\perp AB$，

$\because AB\perp AC$，$A_1A\bigcap AC=A$，$\therefore AB\perp$面A_1ACC_1．

（2）$\because$面$DEF//$面ABC_1，面$ABC\bigcap$面$DEF=DE$，

面$ABC\bigcap$面$ABC_1=AB$，$\therefore AB//DE$，

$\because$在ΔABC中E是棱BC的中点，$\therefore D$是线段AC的中点．



（3）$\because$三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中$A_1A=AC$

$\therefore$侧面A_1ACC_1是菱形，

$\therefore A_1C\perp AC_1$，

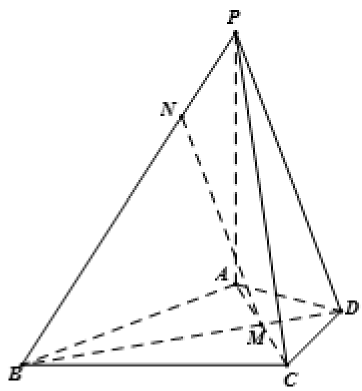
由（Ⅰ）可得$AB\perp A_1C$，$\because AB\bigcap AC_1=A$，$\therefore A_1C\perp$面$ABC_1$，$\therefore A_1C\perp BC_1$．

又$\because E,F$分别为棱BC,CC_1的中点，$\therefore EF//BC_1$，$\therefore EF\perp AC_1$．

考点 一立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

12 在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$\triangle ABC$是正三角形，AC与BD的交点M恰好是AC中点，$\angle CAD=30^{\circ}$，$PA=AB=4$，点N在线段PB上，且$\dfrac{PN}{NB}=\dfrac{1}{3}$．



（1）求证：$BD\perp PC$；

（2）求证：$MN//$平面PDC；

（3）设平面$PAB\cap$平面$PCD=l$，试问直线l是否与直线CD平行，请说明理由．

答案 （1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析

（3）直线l与直线CD不平行

解析 （1）因为$\triangle ABC$是正三角形，M是AC中点，

所以$BM\perp AC$,即$BD\perp AC$

又因为$PA\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，$PA\perp BD$

又$PA\cap AC=A$，所以$BD\perp$平面PAC

又$PC\subset$平面PAC，所以$BD\perp PC$

（2）在正三角形ABC中，$BM=2\sqrt{3}$

在$\triangle ACD$中，因为M为AC中点，$DM\perp AC$，所以$AD=CD$

$\angle CDA=120^\circ$，所以$DM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$BM:MD=3:1$

所以$BN:NP=BM:MD$，所以$MN//PD$

又$MN\not\subset$平面PDC，$PD\subset$平面PDC，所以$MN//$平面PDC

（3）假设直线$l//CD$，因为$l\subset$平面PAB，$CD\not\subset$平面PAB，

所以$CD//$平面PAB

又$CD\subset$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，所以$CD//AB$

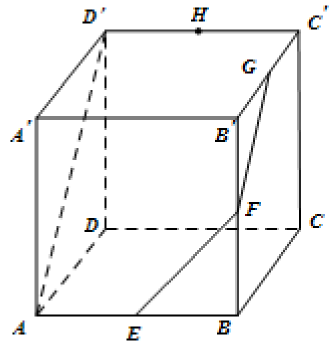
这与CD与AB不平行，矛盾

所以直线l与直线CD不平行

考点 —立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

13 在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，棱$AB,BB',B'C',C'D'$的中点分别是E,F,G,H，如图所示．



（1）求证：$AD'//$平面EFG；

（2）求证：$A'C\perp$平面EFG；

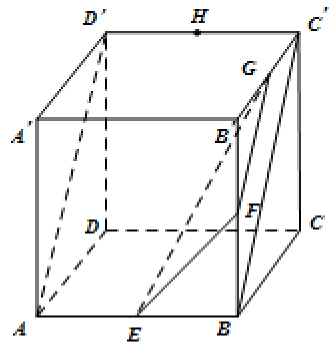
（3）判断点A, D', H, F是否共面？并说明理由．

答案　（1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）不共面，证明见解析．

解析　（1）连接BC'．



在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=C'D'$，$AB//C'D'$．

所以四边形$ABC'D'$是平行四边形．

所以$AD'//BC'$．

因为F, G分别是$BB', B'C'$的中点，

所以$FG//BC'$．

所以$FG//AD'$．

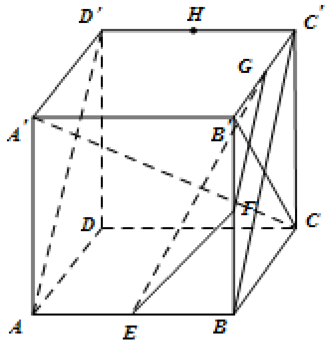
因为EF, AD'是异面直线，

所以$AD'\not\subset$平面EFG．

因为$FG\subset$平面EFG，

所以$AD'//$平面EFG．

（2）连接$B'C$．



在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，$A'B'\perp$平面$BCC'B'$，

$BC'\subset$平面$BCC'B'$，

所以$A'B'\perp BC'$．

在正方形$BCC'B'$中，$B'C\perp BC'$，

因为$A'B'\subset$平面$A'B'C$，$B'C\subset$平面$A'B'C$，

$A'B'\cap B'C=B'$，

所以$BC'\perp$平面$A'B'C$．

因为$A'C\subset$平面$A'B'C$，

所以$BC'\perp A'C$．

因为$FG//BC'$，

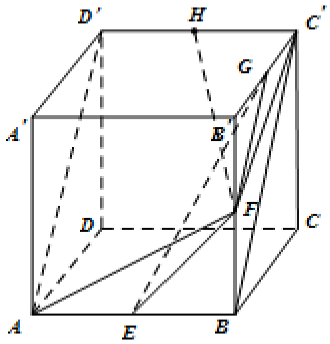
所以$A'C\perp FG$．

同理可证：$A'C\perp EF$．

因为$EF\subset$平面EFG，$FG\subset$平面EFG，$EF\cap FG=F$，

所以$A'C\perp$平面EFG．

（3）点A,D',H,F不共面．理由如下：



假设A,D',H,F共面．连接$C'F,AF,HF$．

由（Ⅰ）知，$AD'//BC'$，

因为$BC'\subset$平面$BCC'B'$，$AD'\not\subset$平面$BCC'B'$．

所以$AD'//$平面$BCC'B'$．

因为$C'\in D'H$，

所以平面$AD'HF\cap$平面$BCC'B'=C'F$．

因为$AD'\subset$平面$AD'HF$，

所以$AD'//C'F$．

所以$C'F//BC'$，而$C'F$与BC'相交，矛盾．

所以点A,D',H,F不共面．

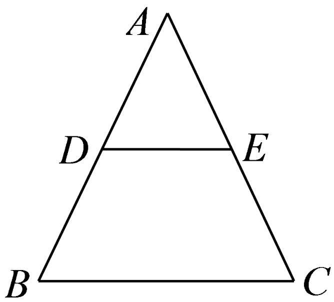
考点 —立体几何与空间向量

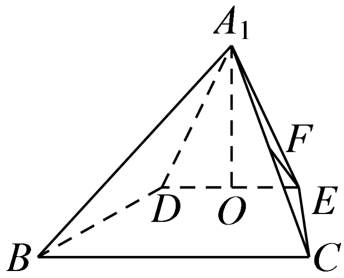
—立体几何初步

└空间几何体

点、直线、平面间的位置关系
空间中的平行
空间中的垂直

14 如图1，在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，O为DE的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$．将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，F为A_1C的中点，如图2．





（1）求证：$EF//$平面A_1BD．

（2）求证：平面$A_1OB\perp$平面A_1OC．

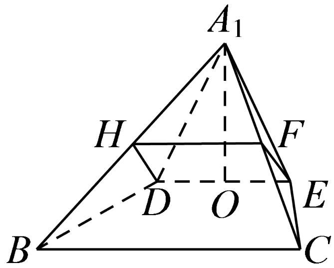
（3）线段OC上是否存在点G，使得$OC\perp$平面EFG？说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）不存在，证明见解析．

解析 （1）



取线段A_1B的中点H，连接HD，HF．$\because$在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，$\therefore DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$．

$\because H$，F分别为A_1B，A_1C的中点，$\therefore HF//BC$，$HF=\frac{1}{2}BC$，$\therefore HF//DE$，$HF=DE$，$\therefore$四边形$DEFH$为平行四边形，$\therefore EF//HD$．$\because EF\not\subset$平面A_1BD，$HD\subset$平面A_1BD，$\therefore EF//$平面A_1BD．

（2）$\because$在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，$\therefore AD=AE$．

$\therefore A_1D=A_1E$，又O为DE的中点，

$\therefore A_1O\perp DE$．$\because$ 平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，且$A_1O\subset$平面A_1DE，$\therefore A_1O\perp$平面$BCED$，$\therefore CO\perp A_1O$．在$\triangle OBC$中，$BC=4$，易知 $OB=OC=2\sqrt{2}$，$\therefore CO\perp BO$，$\therefore CO\perp$平面A_1OB，$\therefore$ 平面$A_1OB\perp$平面A_1OC．

（3）线段OC上不存在点G，使得$OC\perp$平面EFG．否则，假设线段OC上存在点G，使得$OC\perp$平面EFG，连接 GE，GF，

则必有 $OC\perp GF$，且$OC\perp GE$．

在$Rt\triangle A_1OC$中，由F为A_1C的中点，$OC\perp GF$，

得 G为OC的中点．

在$\triangle EOC$中，$\because OC\perp GE$，

$\therefore EO=EC$，

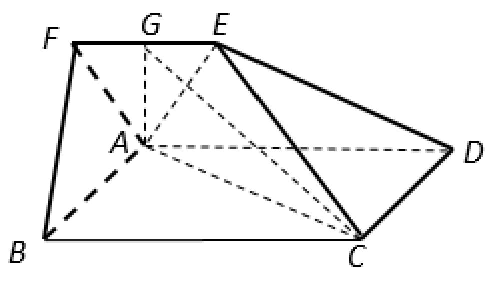
这显然与 $EO=1$，$EC=\sqrt{5}$矛盾！

$\therefore$ 线段OC上不存在点G，使得$OC\perp$平面EFG．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

15 如图，在五面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$为正方形，$EF//AD$，平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，且$BC=2EF, AE=AF$，点G是EF的中点.



（1）证明：$AG\perp CD$．

（2）若点M在线段AC上，且$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{1}{3}$，求证：$GM//$平面$ABF$．

（3）已知空间中有一点O到A, B, C, D, G五点的距离相等，请指出点O的位置. (只需写出结论)

答案 （1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析

（3）点O为线段GC的中点

解析 （1）因为$AE=AF$，点G是EF的中点， 所以 $AG\perp EF$.

又因为 $EF//AD$， 所以 $AG\perp AD$.

因为平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，且平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$， $AG\subset$平面$ADEF$，

所以 $AG\perp$平面$ABCD$.

因为 $CD\subset$平面$ABCD$，

所以 $AG\perp CD$.

（2）如图，过点M作$MN//BC$，且交AB于点N，连结NF，

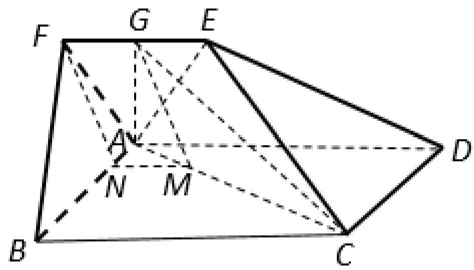
因为 $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{1}{3}$，

所以$\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{1}{4}$，

因为 $BC=2EF$，点G是EF的中点，

所以 $BC=4GF$，

又因为 $EF//AD$，四边形$ABCD$为正方形，



所以 $GF//MN$，$GF=MN$.

所以四边形$GFNM$是平行四边形.

所以 $GM//FN$.

又因为$GM\not\subset$平面ABF，$FN\subset$平面ABF，

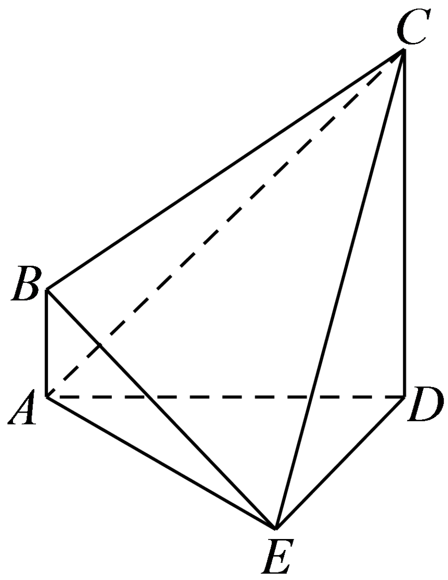
所以 $GM//$平面ABF.

（3）点O为线段GC的中点.

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

16 如图，在四棱锥$E-ABCD$中，$AE\perp DE$，$CD\perp$平面ADE，$AB\perp$ 平面ADE，$CD=DA=6$，$AB=2$，$DE=3$．



（1）求棱锥$C-ADE$的体积；

（2）求证：平面$ACE\perp$平面CDE；

（3）在线段DE上是否存在一点F ，使$AF//$平面BCE？若存在，求出$\dfrac{EF}{ED}$的值；若不存在，说明理由．

答案 （1）$9\sqrt{3}$．

（2）证明过程见解析

（3）在线段DE上存在一点F，且$\dfrac{EF}{ED}=\dfrac{1}{3}$，使$AF//$面$BCE$，理由见解析

解析 （1） 在$Rt\triangle ADE$中，$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=3\sqrt{3}$，

因为$CD\perp$平面ADE，

所以棱锥$C-ADE$的体积为$V_{C-ADE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot CD=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{AE\cdot DE}{2}\cdot CD=9\sqrt{3}$．

（2）因为$CD\perp$平面ADE，$AE\subset$平面ADE，

所以$CD\perp AE$．

又因为$AE\perp DE$，$CD\cap DE=D$，

所以$AE\perp$平面CDE．

又因为$AE\perp$平面ACE，

所以平面$ACE\perp$平面CDE．

（3）结论：在线段DE上存在一点F，且$\frac{EF}{ED}=\frac{1}{3}$，使$AF//$面$BCE$．

设F为线段DE上一点，且$\frac{EF}{ED}=\frac{1}{3}$，

过点F作$FM//CD$交CE于M，则

$FM=\frac{1}{3}CD$．

因为$CD\perp$面ADE，$AB\perp$面ADE，

所以$CD//AB$．

又因为$CD=3AB$

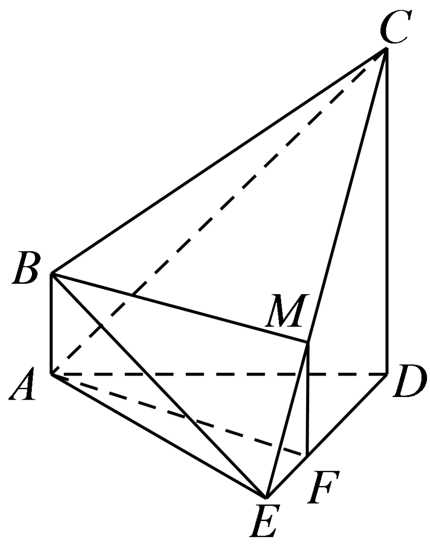
所以$MF=AB$，$FM//AB$，

所以四边形$ABMF$是平行四边形，

则$AF//BM$，

又因为$AF\not\subset$面BCE，$BM\subset$面BCE．

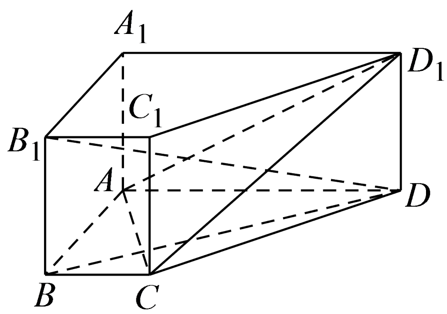
所以$AF//$面BCE．



考点

—立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

17 如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BB_1\perp$底面$ABCD$，$AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AC\perp BD$．



（1）求证：$B_1C//$平面ADD_1A_1．

（2）求证：$AC\perp B_1D$．

（3）若$AD=2AA_1$，判断直线B_1D与平面ACD_1是否垂直？并说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）不垂直.

解析 （1）证明：因为$AD//BC$，$BC\not\subset$平面ADD_1A_1，$AD\subset$平面ADD_1A_1，

所以$BC//$平面ADD_1A_1．

因为$CC_1//DD_1$，$CC_1\not\subset$平面ADD_1A_1，$DD_1\subset$平面ADD_1A_1，

所以$CC_1//$平面ADD_1A_1．

又因为$BC\cap CC_1=C$，

所以平面$BCC_1B_1//$平面ADD_1A_1．

又因为$B_1C\subset$平面BCC_1B_1，

所以$B_1C//$平面ADD_1A_1．

（2）证明：因为$BB_1\perp$底面$ABCD$, $AC\subset$底面$ABCD$，

所以$BB_1\perp AC$．

又因为$AC\perp BD$,$BB_1\cap BD=B$,

所以$AC\perp$平面BB_1D．

又因为$B_1D\subset$底面BB_1D， 所以$AC\perp B_1D$．

（3）结论：直线B_1D与平面ACD_1不垂直．

证明：假设$B_1D\perp$平面ACD_1， 由$AD_1\subset$平面ACD_1，得$B_1D\perp AD_1$．

由棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BB_1\perp$底面$ABCD$，$\angle BAD=90^\circ$

可得$A_1B_1\perp AA_1$，$A_1B_1\perp A_1D_1$，

又因为$AA_1\cap A_1D_1=A_1$，

所以$A_1B_1\perp$平面AA_1D_1D，

所以$A_1B_1\perp AD_1$．

又因为$A_1B_1\cap B_1D=B_1$，

所以$AD_1\perp$平面A_1B_1D，

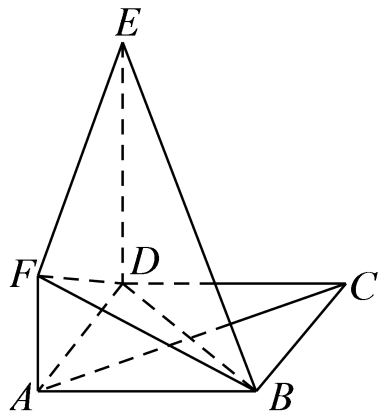
所以$AD_1\perp A_1D$．

这与四边形AA_1D_1D为矩形，且$AD=2AA_1$矛盾，

故直线B_1D与平面ACD_1不垂直．

考点 —立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

18 如图所示，正方形$ABCD$与直角梯形$ADEF$所在平面互相垂直，$\angle ADE=90^\circ$，$AF//DE$，$DE=DA=2AF=2$．



（1）求证：$AC\perp$平面BDE．

（2）求证：$AC//$平面BEF．

（3）求四面体$BDEF$的体积．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）$\frac{4}{3}$．

解析 （1）因为平面$ABCD\perp$平面$ADEF$，$\angle ADE=90^\circ$，

所以$DE\perp$平面$ABCD$，

所以$DE\perp AC$．

因为$ABCD$是正方形，

所以$AC\perp BD$，

所以$AC\perp$平面BDE．

（2）设$AC\cap BD=O$，取BE中点G，连结FG,OG，

所以，$OG//DE$．

因为$AF//DE$，$DE=2AF$，所以$AF\underline{\underline{//}}OG$

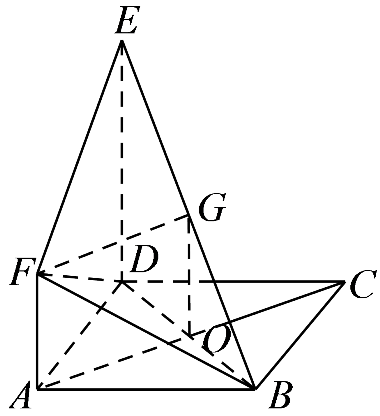
，

从而四边形$AFGO$是平行四边形，$FG//AO$

．

因为$FG\subset$平面BEF，$AO\not\subset$平面BEF，

所以$AO//$平面BEF，即$AC//$平面BEF．



（3）因为平面$ABCD\perp$平面$ADEF$，$AB\perp AD$，

所以$AB\perp$平面$ADEF$．

因为$AF//DE$，$\angle ADE=90^{\circ}$，$DE=DA=2AF=2$，

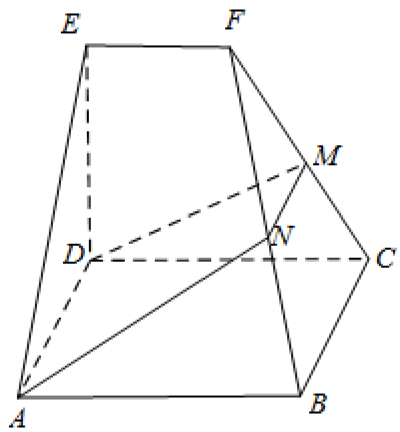
所以$\triangle DEF$的面积为$\dfrac{1}{2}ED\times AD=2$，

所以四面体$V_{BDEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DEF}\times AB=\dfrac{4}{3}$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

19 如图，在几何体$ABCDEF$中，底面$ABCD$为矩形，$EF//CD$，$CD\perp EA$，$CD=2EF=2$，$ED=\sqrt{3}$．M为棱FC上一点，平面ADM与棱FB交于点N．



（1）求证：$ED\perp CD$．

（2）求证：$AD//MN$．

（3）

若$AD\perp ED$，试问平面BCF是否可能与平面$ADMN$垂直？若能，求出$\dfrac{FM}{FC}$的值；若不能，说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）$\dfrac{FM}{FC}=\dfrac{1}{2}$时，平面$ADMN$与平面$BCF$可以垂直．证明见解析．

解析 （1）因为$ABCD$为矩形，所以$CD\perp AD$．

又因为$CD\perp EA$，

所以$CD\perp$平面EAD，

所以$ED\perp CD$．

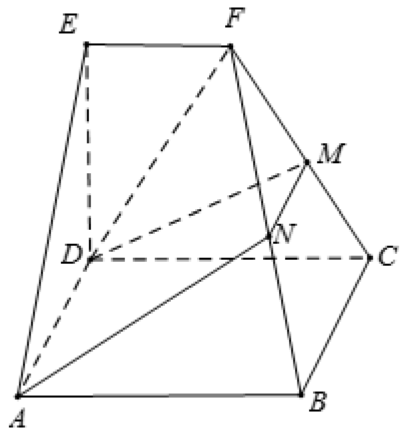
（2）因为$ABCD$为矩形，所以$AD//BC$，

所以$AD//$平面FBC．

又因为平面$ADMN\cap$平面$FBC=MN$，

所以$AD//MN$．

（3）平面$ADMN$与平面BCF可以垂直．证明如下：



连接DF．因为$AD\perp ED$，$AD\perp CD$，

所以$AD\perp$平面$CDEF$．

所以$AD\perp DM$．

因为$AD//MN$，所以$DM\perp MN$．

因为平面$ADMN\cap$平面$BCF=MN$，

若使平面$ADMN\cap$平面BCF，

则$DM\perp$平面BCF，所以$DM\perp FC$．

在梯形$CDEF$中，因为$EF//CD$，$ED\perp CD$，$CD=2EF=2$，$ED=\sqrt{3}$，

所以$DF=DC=2$．

所以$\dfrac{FM}{FC}=\dfrac{1}{2}$．

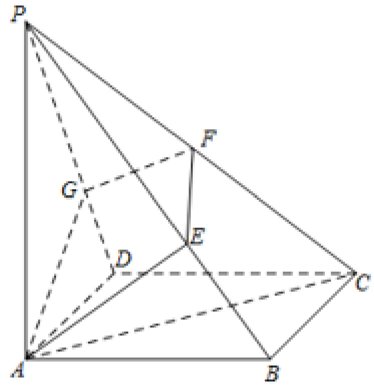
考点 —立体几何与空间向量

—立体几何初步

空间中的平行

空间中的垂直

20 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC$．过点A的平面与棱PB，PC，PD分别交于点E，F，G（E，F，G三点均不在棱的端点处）．



（1）求证：平面$PAB\perp$平面PBC．

（2）若$PC\perp$平面$AEFG$，求$\dfrac{PF}{PC}$的值．

（3）直线AE是否可能与平面PCD平行？证明你的结论．

答案 （1）证明见解析．

（2）$\dfrac{1}{2}$．

（3）否．

解析 （1）因为$PA\perp$平面$ABCD$，

所以$PA\perp BC$．

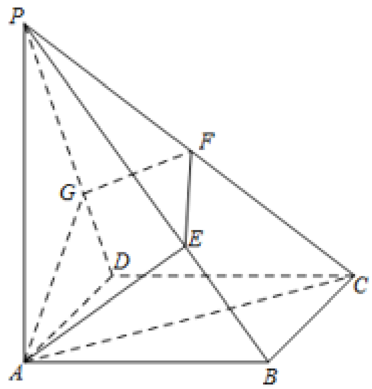
因为$ABCD$为正方形，

所以$AB\perp BC$，

所以$BC\perp$平面PAB．

所以平面$PAB\perp$平面PBC．

（2）连接AF．



因为$PC\perp$平面$AEFG$，

所以$PC\perp AF$．

又因为$PA=AC$，

所以F是PC的中点．

所以$\frac{PF}{PC}=\frac{1}{2}$．

（3）AE与平面PCD不可能平行．

证明如下：

假设$AE//$平面PCD，

因为$AB//CD$，$AB\not\subset$平面PCD．

所以$AB//$平面PCD．

而AE，$AB\subset$平面PAB，

所以平面$PAB//$平面PCD，这显然矛盾！

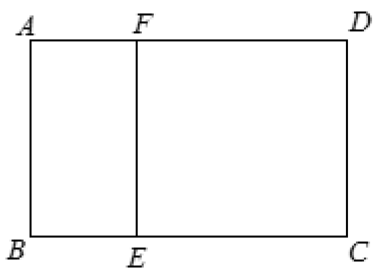
所以假设不成立，

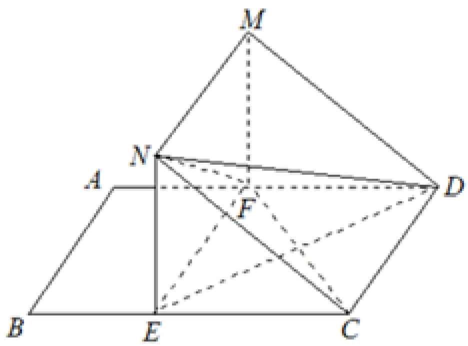
即AE与平面PCD不可能平行．

考点

—立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

21 如图，矩形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$．E，F分别在线段BC和AD上，$EF//AB$，将矩形$ABEF$沿EF折起．记折起后的矩形为$MNEF$，且平面$MNEF\perp$平面$ECDF$．





（1）

求证：$NC//$平面MFD；

（2）若$EC=3$，求证：$ND\perp FC$；

（3）求四面体$NFEC$体积的最大值．

答案 （1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析

（3）2

解析 （1）因为四边形$MNEF$，$EFDC$都是矩形，

所以$MN//EF//CD$，$MN=EF=CD$．

所以四边形$MNCD$是平行四边形，

所以$NC//MD$，

因为 $NC\not\subset$平面MFD，

所以$NC//$平面MFD．

（2）连接ED，设$ED\cap FC=O$．

因为平面$MNEF\perp$平面$ECDF$，且$NE\perp EF$，

所以$NE\perp$平面$ECDF$，

所以$FC\perp NE$．

又$EC=CD$，所以四边形$ECDF$为正方形，所以$FC\perp ED$．

所以$FC\perp$平面NED，

所以$ND\perp FC$．

（3）设$NE=x$，则$EC=4-x$，其中$0<x<4$．

由（Ⅰ）得$NE\perp$平面FEC，

所以四面体$NFEC$的体积为$V_{NFEC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta EFC}\cdot NE=\dfrac{1}{2}x(4-x)$．

所以$V_{NFEC}\leqslant\dfrac{1}{2}[\dfrac{x+(4-x)}{2}]^{2}=2$．

当且仅当$x=4-x$，即$x=2$时，四面体$NFEC$的体积最大．

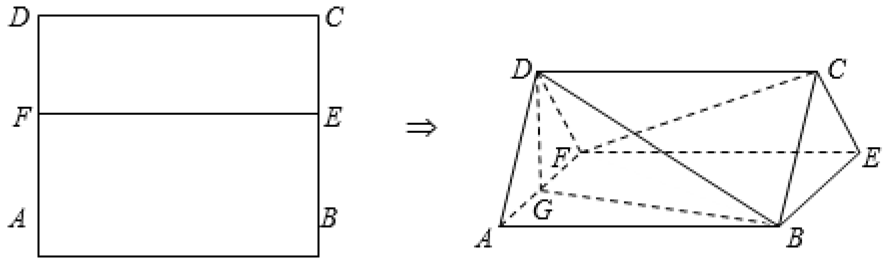
考点 —立体几何与空间向量

—立体几何初步

└空间几何体

点、直线、平面间的位置关系
空间中的平行
空间中的垂直

22 如图，在周长为8的矩形$ABCD$中，E，F分别为BC，DA的中点．将矩形$ABCD$沿着线段EF折起，使得$\angle DFA=60^\circ$．设G为AF上一点，且满足$CF//$平面BDG．



（1）求证：$EF\perp DG$；

（2）求证：G为线段AF的中点；

（3）求线段CG长度的最小值．

答案 （1）证明见解析

（2）证明见解析

（3）$\dfrac{4\sqrt{57}}{19}$．

解析 （1）因为在折起前的矩形$ABCD$中，E，F分别为BC，DA的中点，

所以$EF\perp FD$，$EF\perp FA$，

又因为$FD\cap FA=F$，

所以$EF\perp$平面DFA．

又因为$DG\subset$平面DFA，

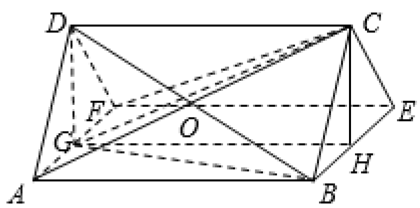
所以$EF\perp DG$．

（2）因为在折起前的矩形$ABCD$中，

E，F分别为BC，DA的中点，

所以在立体图中，$AB//EF//CD$．

即在立体图中，四边形$ABCD$为平行四边形．



连接AC，设$AC\cap BD=O$，则$AO=CO$．

又因为$CF//$平面BDG，$CF\subset$平面ACF，

平面$ACF\cap$平面$BDG=OG$，

所以$CF//OG$，

所以在$\triangle ACF$中，OG为中位线，

即G为线段AF的中点．

（3）因为G为线段AF的中点，$\angle DFA=60^\circ$

所以$\triangle DFA$为等边三角形，且$DG\perp FA$，

又因为$EF\perp DG$，$EF\cap FA=F$，

所以$DG\perp$平面$ABEF$．

设BE的中点为H，连接GH，CH，

易得四边形$DGHC$为平行四边形，

所以$CH\perp$平面$ABEF$，

所以$CG^2=GH^2+CH^2$．

设$DF=x$，由题意得$CH=DG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$GH=CD=4-2x$，

所以$CG^2=(4-2x)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\dfrac{19}{4}x^2-16x+16$，

所以当$x=\dfrac{32}{19}$时，${CG^2}_{\min}=\dfrac{48}{19}$．

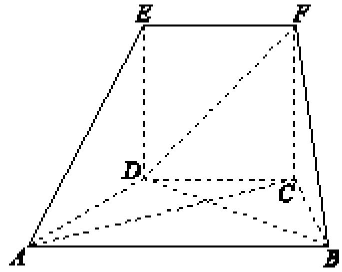
所以线段CG长度的最小值为$\dfrac{4\sqrt{57}}{19}$．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间几何体
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

23

在如图所示的几何体中，面$CDEF$为正方形，面$ABCD$为等腰梯形，$AB//CD$，$AC=\sqrt{3}$，$AB=2BC=2$，$AC\perp FB$．



（1）求证：$AC\perp$平面FBC；

（2）求四面体$FBCD$的体积；

（3）线段AC上是否存在点M，使$EA//$平面FDM？证明你的结论．

答案　（1）证明见解析

（2）四面体$FBCD$的体积为$\frac{\sqrt{3}}{12}$;

（3）线段AC上存在点M，使得$EA//$平面FDM成立．

解析　（1）在$\triangle ABC$中，

因为$AC=\sqrt{3}$，$AB=2$，$BC=1$，

所以$AC\perp BC$．

又因为$AC\perp FB$，

所以$AC\perp$平面FBC．

（2）因为$AC\perp$平面FBC，所以$AC\perp FC$．

因为$CD\perp FC$，所以$FC\perp$平面$ABCD$．

在等腰梯形$ABCD$中可得$CB=DC=1$，所以$FC=1$．

所以$\triangle BCD$的面积为$S=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

所以四面体$FBCD$的体积为：$V_{F-BCD}=\frac{1}{3}S\cdot FC=\frac{\sqrt{3}}{12}$．

（3）线段AC上存在点M，且M为AC中点时，有$EA//$ 平面FDM，证明如下：

连结CE，与DF交于点N，连接MN．

因为$CDEF$为正方形，所以N为CE中点．

所以$EA//MN$．

因为$MN\subset$平面FDM，$EA\not\subset$平面FDM，

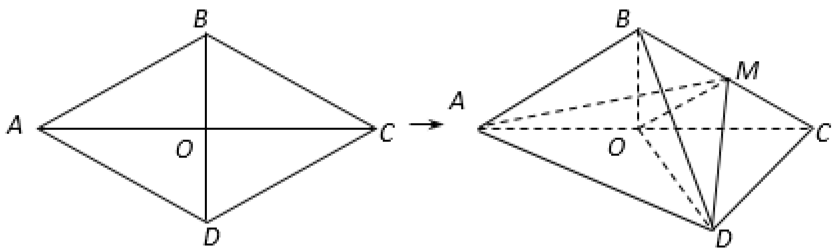
所以$EA//$平面FDM．

所以线段AC上存在点M，使得$EA//$平面FDM成立．

考点

—立体几何与空间向量
- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行

24 如图，菱形$ABCD$的边长为6，$\angle BAD=60^\circ, AC\cap BD=O$．将菱形$ABCD$沿对角线$AC$折起，得到三棱锥$B-ACD$,点$M$是棱$BC$的中点，$DM=3\sqrt{2}$．



（1）求证：$OM//$平面ABD；

（2）求证：平面$ABC\perp$平面MDO；

（3）求三棱锥$M-ABD$的体积．

答案

（1）证明过程见解析

（2）证明过程见解析

（3）$\frac{9\sqrt{3}}{2}$

解析

（1）证明：因为点O是菱形$ABCD$的对角线的交点，

所以O是AC的中点．又点M是棱BC的中点，

所以OM是$\triangle ABC$的中位线，$OM//AB$．

所以$OM//$平面ABD．

（2）证明：由题意，$OM=OD=3$,

因为$DM=3\sqrt{2}$,所以$\angle DOM=90^\circ$，$OD\perp OM$．

又因为菱形$ABCD$，所以$OD\perp AC$．

因为$OM\cap AC=O$,

所以$OD\perp$平面ABC，

因为$OD\subset$平面MDO，

所以平面$ABC\perp$平面MDO．

（3）三棱锥$M-ABD$的体积等于三棱锥$D-ABM$的体积．

由（Ⅱ）知，$OD\perp$平面ABC，

所以$OD=3$为三棱锥$D-ABM$的高．

$\triangle ABM$的面积为$\frac{1}{2}BA\times BM\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 6\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，

所求体积等于$\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABM}\times OD=\frac{9\sqrt{3}}{2}$．

考点

一立体几何与空间向量

　立体几何初步

　　空间几何体

　　空间中的平行

　　空间中的垂直

25 如图1，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，面$ABCD$为正方形，E为侧棱PD上一点，F为AB上一点．该四棱锥的正（主）视图和侧（左）视图如图2所示．

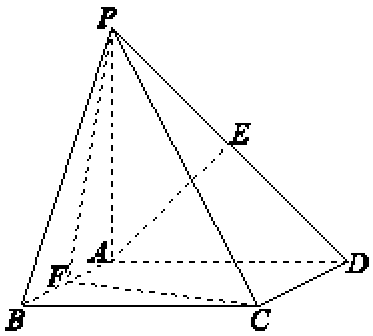


图1

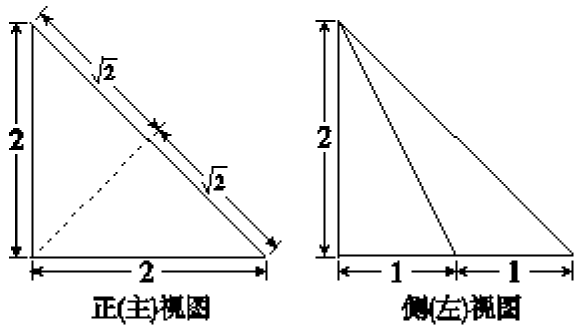


图2

（1）求四面体$PBFC$的体积；

（2）证明：$AE//$平面PFC；

（3）证明：平面$PFC\perp$平面PCD．

答案 （1）$\frac{2}{3}$．

（2）证明见解析．

（3）证明见解析．

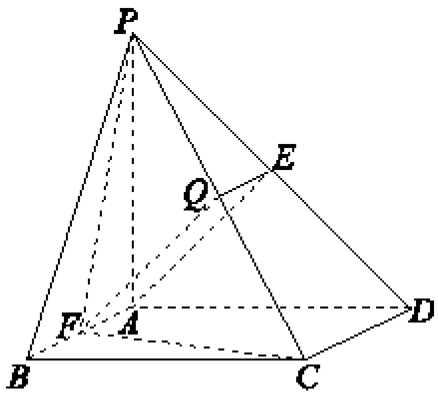
解析 （1）由左视图可得F为AB的中点，

所以$\triangle BFC$的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$．因为$PA\perp$平面$ABCD$，

所以四面体$PBFC$的体积为$V_{P-BFC}=\frac{1}{3}S_{\Delta BFC}\cdot PA$

$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2=\frac{2}{3}$．

（2）取PC中点Q，连结EQ，FQ．



由正（主）视图可得E为PD的中点，

所以$EQ//CD$，$EQ=\frac{1}{2}CD$．

又因为$AF//CD$，$AF=\frac{1}{2}CD$，

所以$AF//EQ$，$AF=EQ$．

所以四边形$AFQE$为平行四边形，

所以$AE//FQ$．

因为$AE\not\subset$平面PFC，$FQ\subset$平面PFC，

所以直线$AE\parallel$平面PFC．

（3）因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$．

因为面$ABCD$为正方形，所以$AD\perp CD$．

所以$CD\perp$平面PAD．

因为$AE\subset$平面PAD，所以$CD\perp AE$．

因为$PA=AD$，E为PD中点，所以$AE\perp PD$．

所以$AE\perp$平面PCD．

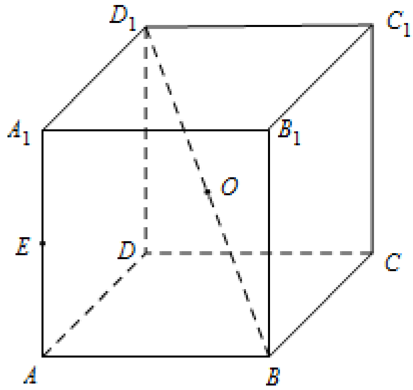
因为$AE//FQ$，所以$FQ\perp$平面PCD．

因为$FQ\subset$平面PFC，所以 平面$PFC\perp$平面PCD．

考点 —立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2$，E为AA_1的中点，O为BD_1的中点．



（1）求证：平面$A_1BD_1\perp$平面ABB_1A_1；

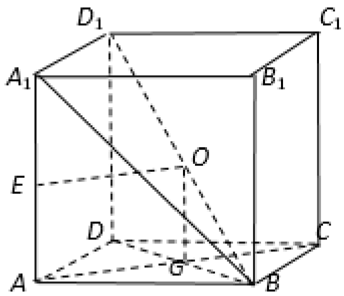
（2）求证：$EO//$平面$ABCD$；

（3）设P为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱上一点，给出满足条件$OP=\sqrt{2}$的点P的个数，并说明理由．

答案 （1）证明：在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中， 因为 $A_1D_1\perp$平面ABB_1A_1，$A_1D_1\subset$平面A_1BD_1，

所以平面$A_1BD_1\perp$平面ABB_1A_1 ．

（2）证明：连接BD，AC，设$BD\cap AC=G$，连接OG．



因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，

所以$AE//DD_1$，且$AE=\frac{1}{2}DD_1$，且G是BD的中点，

又因为O是BD_1的中点，

所以$OG//DD_1$，且$OG=\frac{1}{2}DD_1$，

所以$OG//AE$，且$OG=AE$，

即四边形$AGOE$是平行四边形，

所以$EO//AG$，

又因为$EO\not\subset$平面$ABCD$，$AG\subset$平面$ABCD$，

所以$EO//$平面$ABCD$．

（3）满足条件$OP=\sqrt{2}$的点P有12个．

解析 （1）略

（2）略

(3)因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，$AA_1=2$，

所以$AC=2\sqrt{2}$．

所以$EO=AG=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$．

在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

因为$AA_1\perp$平面$ABCD$，$AG\subset$平面$ABCD$，

所以$AA_1\perp AG$，

又因为$EO//AG$，

所以$AA_1\perp OE$，

则点O到棱AA_1的距离为$\sqrt{2}$，

所以在棱AA_1上有且只有一个点（即中点E）到点O的距离等于$\sqrt{2}$，

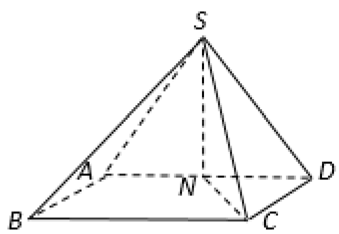
同理，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$每条棱的中点到点O的距离都等于$\sqrt{2}$，

所以在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱上使得$OP=\sqrt{2}$的点P有12个．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 点、直线、平面间的位置关系
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直

27 如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$AD=2AB$，$SA=SD$，$SA\perp AB$，N 是棱AD的中点．



(1)求证：$AB//$平面SCD；

(2)求证：$SN\perp$平面$ABCD$；

(3)在棱SC上是否存在一点P，使得平面$PBD\perp$平面$ABCD$?若存在，求出$\frac{SP}{PC}$的值；若不存在，说明理由．

答案 (1)证明见解析

（2）证明见解析

（3）证明见解析

解析 （1）证明：因为底面$ABCD$是矩形，所以 $AB//CD$，

又因为 $AB\not\subset$平面SCD，$CD\subset$平面SCD，所以 $AB//$平面SCD．

（2）证明：因为$AB\perp SA$，$AB\perp AD$，$SA\bigcap AD=A$，

所以$AB\perp$平面SAD，

又因为$SN\subset$平面SAD，

所以$AB\perp SN$．

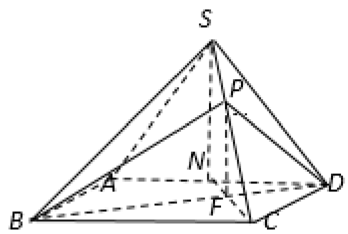
因为$SA=SD$，且N为AD中点，

所以$SN\perp AD$．

又因为$AB\bigcap AD=A$，

所以$SN\perp$平面$ABCD$．

（3）如图，连接BD交NC于点F，在平面SNC中过F作$FP//SN$交SC于点P，连接PB，PD．



因为 $SN\perp$平面$ABCD$，

所以$FP\perp$平面$ABCD$．

又因为$FP\subset$平面PBD，

所以平面$PBD\perp$平面$ABCD$．

在矩形$ABCD$中，因为$ND//BC$，

所以$\dfrac{NF}{FC}=\dfrac{ND}{BC}=\dfrac{1}{2}$．

在$\triangle SNC$中，因为$FP//SN$，

所以$\dfrac{NF}{FC}=\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{1}{2}$．

则在棱SC上存在点P，使得平面$PBD\perp$平面$ABCD$，此时$\dfrac{SP}{PC}=\dfrac{1}{2}$．

考点 一立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

28 如图1，在梯形$ABCD$中，$BC//AD,BC=1,AD=3,BE\perp AD$于$E$，$BE=AE=1$．将$\triangle ABE$沿$BE$折起至$\triangle A'BE$，使得平面$A'BE\perp$平面$BCDE$（如图2），$M$为线段$A'D$上一点．

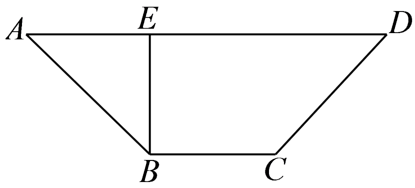


图1

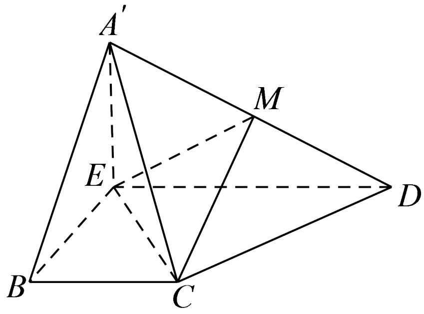


图2

（1）求证：$A'E\perp CD$．

（2）若M为线段$A'D$中点，求多面体$A'BCME$与多面体$MCDE$的体积之比．

（3）是否存在一点M，使得$A'B//$平面MCE?若存在，求$A'M$的长．若不存在，请说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）$2:1$．

（3）存在，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$．

解析 （1）在梯形$ABCD$中，因为$BE\perp AE$，所以$A'E\perp BE$，

$\because$平面$A'BE\perp$平面$BCDE$，平面$A'BE\cap$平面$BCDE$于BE，

$\because A'E\subset$平面$A'BE$，

$\therefore A'E\perp$平面$BCDE$，

$\because CD\subset$平面$BCDE$，

$\therefore A'E\perp CD$．

（2）$\because M$为$A'D$中点，

$\therefore M$到底面$BCDE$的距离为$\frac{1}{2}A'E$，

在梯形$ABCD$中，$S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}DE\cdot BE=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，

$V_{M-DCE}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A'E\cdot S_{\triangle DCE}=\frac{1}{6}$，

$V_{A'-BCE}=\frac{1}{3}\cdot A'E\cdot S_{\triangle BCE}=\frac{1}{6}$．

$\because A'E\perp DE$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle A'DE$中，$S_{\triangle A'EM}=\frac{1}{2}$，

$\because A'E\perp$平面$BCDE$，$A'E\subset$平面$A'DE$，

$\therefore$平面$A'DE\perp$平面$BCDE$，

$\because BE\perp ED$，平面$A'DE\cap$平面$BCDE=ED$，

$\because BC//AD$，

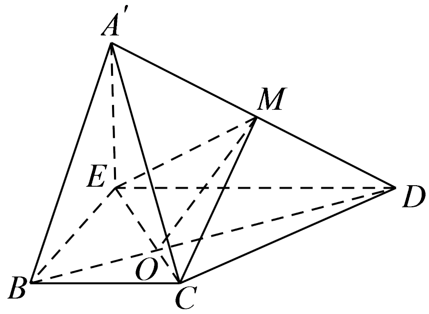
$\therefore C$到平面$A'DE$的距离为$BE=1$．

$\therefore V_{C-A'EM}=\dfrac{1}{3}\cdot BE\cdot S_{\triangle A'EM}=\dfrac{1}{6}$，

$V_{多面体A'BCME}=V_{多面体CA'EM}+V_{多面体A'BCE}=\dfrac{1}{3}$．

$\therefore V_{多面体A'BCME}:V_{多面体MCDE}=2:1$．

（3）连结BD交CE于O，连结OM，



在四边形$BCDE$中，

$\because BC//DE$，

$\therefore \triangle BOC\backsim\triangle DOE$，

$\therefore \dfrac{OD}{BD}=\dfrac{2}{3}$，

$\because A'B//$平面CME，平面$A'BD\cap$平面$CEM=OM$，

$\therefore A'B//OM$，

在$\triangle A'BD$中，$OM//A'B$，

$\therefore \dfrac{A'M}{A'D}=\dfrac{BO}{BD}=\dfrac{1}{3}$，

$\because A'E=1,DE=2,A'E\perp ED$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle A'ED$中，$A'D=\sqrt{5}$，

$\therefore A'M=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$．

考点

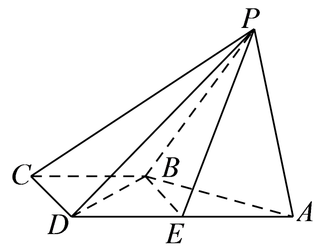
—立体几何与空间向量

—立体几何初步

└空间几何体体积和表面积的计算

点、直线、平面间的位置关系
空间中的平行
空间中的垂直
几何证明选讲
相似三角形

29 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，$AD//BC$，$PA\perp AB$，$CD\perp AD$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$，E为AD的中点．



（1）求证：$PA\perp CD$；

（2）求证：平面$PBD\perp$平面PAB；

（3）在平面PAB内是否存在M，使得直线$CM//$平面PBE，请说明理由．

答案 （1）证明见解析

（2）证明见解析

（3）存在，理由见解析

解析 （1）因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，

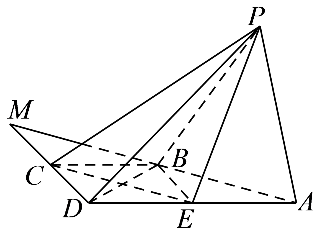
平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，

又因为$PA\perp AB$，

所以$PA\perp$平面$ABCD$．

则$PA\perp CD$．

（2）由已知，$BC//ED$，且$BC=ED$，所以四边形$BCDE$是平行四边形，



又$CD \perp AD$，$BC=CD$，所以四边形$BCDE$是正方形，

连接CE，所以$BD \perp CE$，

又因为$BC//AE$，$BC=AE$，

所以四边形$ABCE$是平行四边形，

所以$CE//AB$，则$BD \perp AB$．

由（Ⅰ）知$PA \perp$平面$ABCD$，

所以$PA \perp BD$，

又因为$PA \cap AB=A$，

则$BD \perp$平面PAB，

且$BD \subset$平面PBD，

所以平面$PBD \perp$平面PAB．

（3）在梯形$ABCD$中，AB与CD不平行．延长AB，DC，相交于点M（$M \in$平面PAB），点M即为所求的一个点．

理由如下：由已知，$BC//ED$，且$BC=ED$．

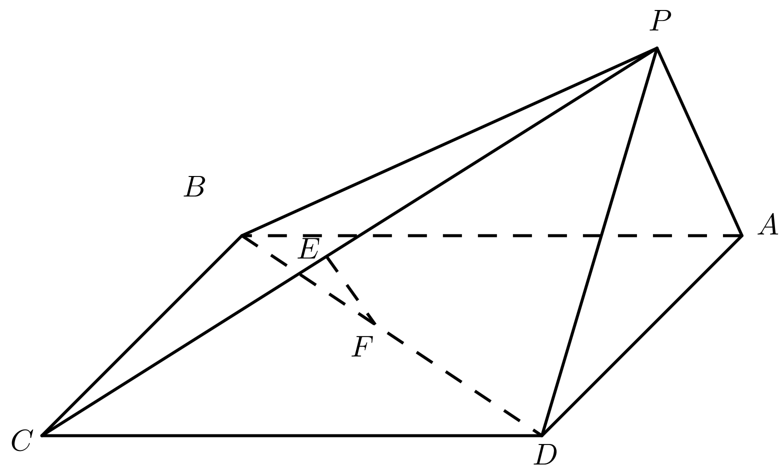
所以四边形$BCDE$是平行四边形，所以$CD//EB$，即$CM//EB$，

又$EB \subset$平面PBE，$CM \not\subset$平面PBE， 所以$CM//$平面PBE．

考点 —立体几何与空间向量

- 立体几何初步
  - 空间几何体
  - 点、直线、平面间的位置关系
  - 空间中的平行
  - 空间中的垂直

30 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧面$PAD \perp$底面$ABCD$．



（1）（Ⅰ）若E，F分别为PC，BD中点，求证：$EF//$平面PAD；

（2）（Ⅱ）求证：$PA\perp CD$；

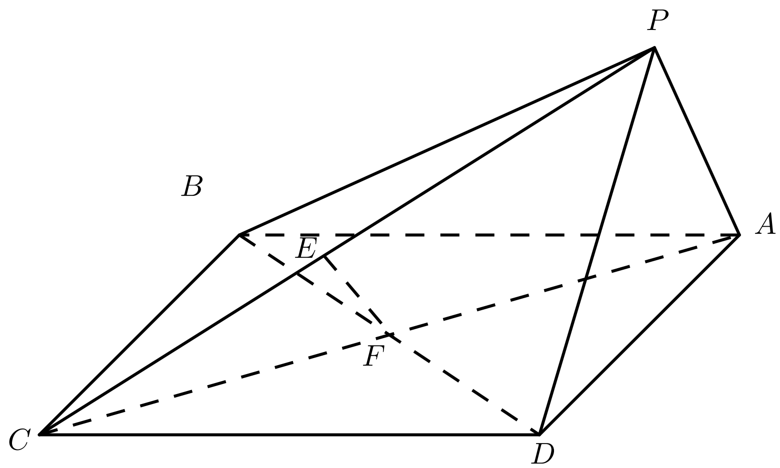
（3）（Ⅲ）若$PA=PD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$，求证：平面$PAB\perp$平面$PCD$．

答案 （1）**证明见解析；**

（2）**证明见解析；**

（3）**（Ⅲ）证明见解析．**

解析 （1）



如图，连结AC．

因为底面$ABCD$是正方形，所以AC与BD互相平分．

又因为F是BD中点，所以F是AC中点．

在$\triangle PAC$中，E是PC中点，F是AC中点，所以$EF\parallel PA$．

又因为$EF\not\subset$平面PAD，$PA\subset$平面PAD，

所以$EF\parallel$平面PAD．

（2）因为平面$PAD\perp$底面$ABCD$，且平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

又$CD \perp AD$，$CD \subset$平面$ABCD$，所以$CD \perp$面PAD．

又因为$PA \subset$平面PAD，所以$CD \perp PA$．即$PA \perp CD$．

（3）在$\triangle PAD$中，因为$PA = PD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$，所以$PA \perp PD$．

由（Ⅱ）可知$PA \perp CD$，且$CD \cap PD = D$，

所以$PA \perp$平面PCD．

又因为$PA \subset$平面PAB，

所以平面$PAB \perp$平面PCD．

考点

- 立体几何与空间向量
  - 立体几何初步
    - 空间中的平行
    - 空间中的垂直