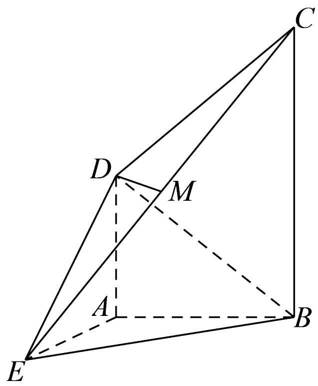
立体几何-期中必做题

1 如图，四棱锥$E-ABCD$中，$AD//BC$，$AD=AB=AE=\frac{1}{2}BC=1$，且$BC\perp$平面ABE，M为棱CE的中点．



（1）求证：$DM//$平面ABE．

（2）求证：平面$CDE\perp$平面CBE．

（3）当四面体$D-ABE$的体积最大时，判断直线AE与直线CD是否垂直，并说明理由．

2 如图1，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，D为AC中点，$AE\perp BD$于E（不同于点D），延长AE交BC于F，将$\triangle ABD$沿BD折起，得到三棱锥A_1-BCD，如图2所示．

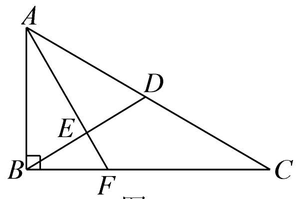


图1

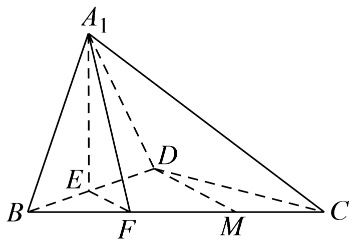


图2

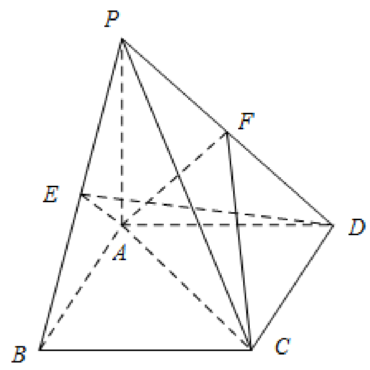
（1）若M是FC的中点，求证：直线$DM//$平面A_1EF．

（2）求证：$BD\perp A_1F$ ．

（3）若平面$A_1BD\perp$平面BCD，试判断直线A_1B与直线CD能否垂直？并说明理由．

3

在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=2$，E，F分别是PB，PD的中点．

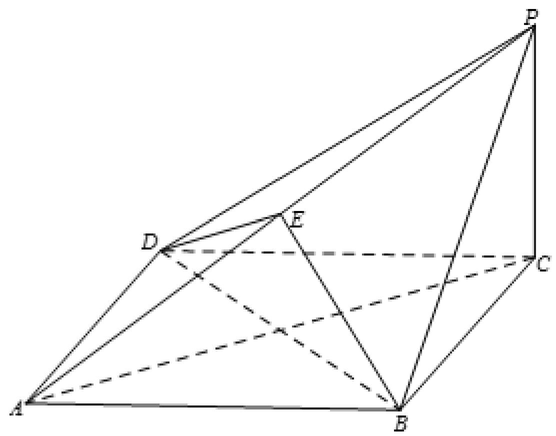


（1）求证：$PB//$平面FAC．

（2）求三棱锥$P-EAD$的体积．

（3）求证：平面$EAD\perp$平面FAC．

4 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$PC\perp$平面$ABCD$，点E在棱PA上．



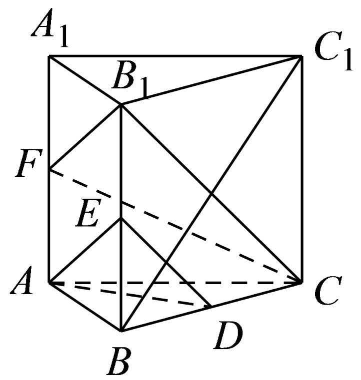
（1）求证：直线$BD\perp$平面PAC．

（2）若$PC//$平面BDE，求证：$AE=EP$．

（3）是否存在点E，使得四面体$A-BDE$的体积等于四面体$P-BDC$的体积的$\frac{1}{3}$？若存在，求出$\frac{PE}{PA}$的值，若不存在，请说明理由．

5

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的所有棱长都相等，且D,E,F分别为BC,BB_1,AA_1的中点．



（1）求证：平面$B_1FC//$平面EAD；

（2）求证：$BC_1\perp$平面EAD．

6 如图1，在直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle ADC=90^\circ$，$BA=BC$．把$\triangle BAC$沿AC折起到$\triangle PAC$的位置，使得P点在平面ADC上的正投影O恰好落在线段AC上，如图2所示．点E,F分别为棱PC,CD的中点．

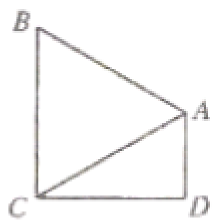


图 1

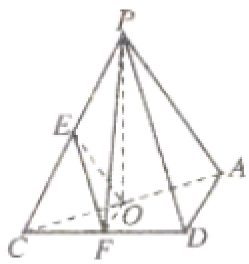


图 2

（1）求证：平面$OEF//$平面APD；

（2）求证：$CD\perp$平面POF；

（3）在棱PC上是否存在一点M，使得M到点P,O,C,F 四点距离相等？请说明理由．

7 如图1，在梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AD\perp DC$，$BC=2AD$，四边形$ABEF$是矩形. 将矩形$ABEF$沿AB折起到四边形ABE_1F_1的位置，使平面$ABE_1F_1\perp$平面$ABCD$，M为AF_1的中点，如图2.

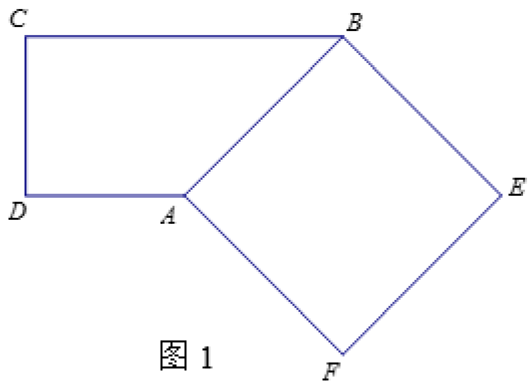


图 1

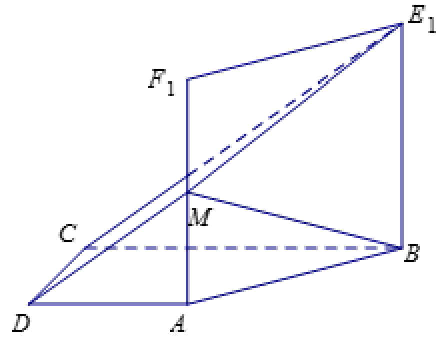


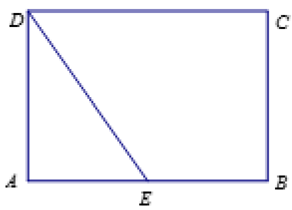
图 2

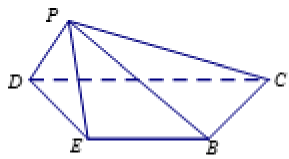
（1）求证：$BE_1 \perp DC$；

（2）求证：$DM//$平面BCE_1；

（3）判断直线CD与ME_1的位置关系,并说明理由．

8 已知长方形$ABCD$中， $AD=\sqrt{2}$，$AB=2$，E为AB中点，将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle PDE$，所得四棱锥$P-BCDE$如图所示．





（1）若点M为PC中点，求证：$BM//$平面PDE；

（2）当平面$PDE\perp$平面$BCDE$时，求四棱锥$P-BCDE$的体积；

（3）求证：$DE\perp PC$．

9 已知菱形$ABCD$中，$AB=4$，$\angle BAD=60^{\circ}$，（如图1所示），将菱形$ABCD$沿对角线BD翻折，使点C翻折到点C_1的位置（如图2所示），点E,F,M分别是AB,DC_1,BC_1的中点．

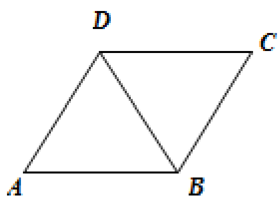


图1

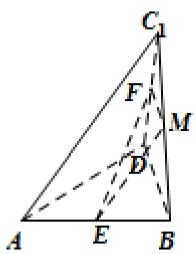


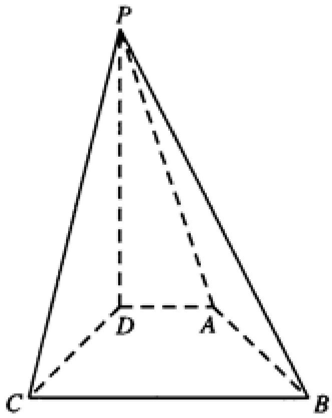
图2

（1）证明：$BD//$平面EMF；

（2）证明：$AC_1 \perp BD$；

（3）当$EF \perp AB$时，求线段AC_1的长．

10 如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD \perp$平面$ABCD$，又$AD//BC$，$AD \perp DC$，且$BC=PD=3AD=3$．

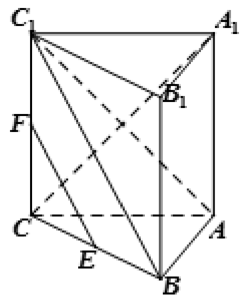


（1）画出四棱锥$P-ABCD$的正视图；

（2）求证：平面$PAD \perp$平面PCD；

（3）求证：棱PB上存在一点E，使得$AE//$平面PCD，并求$\dfrac{PE}{EB}$的值．

11 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1 \perp$底面ABC，$AB \perp AC, AC=AA_1$，E, F分别是棱BC, CC_1的中点．

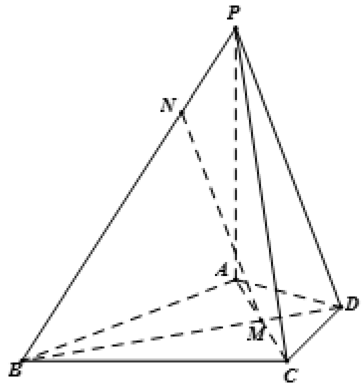


（1）求证：$AB \perp$平面AA_1C_1C；

（2）若线段AC上的点D满足平面$DEF//$平面ABC_1，试确定点D的位置，并说明理由；

（3）证明: $EF \perp A_1C$．

12 在四棱锥$P-ABCD$中，$PA \perp$平面$ABCD$，$\triangle ABC$是正三角形，AC与BD的交点M恰好是AC中点，$\angle CAD=30^\circ$，$PA=AB=4$，点N在线段PB上，且$\dfrac{PN}{NB}=\dfrac{1}{3}$．

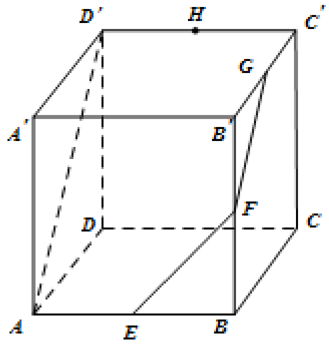


（1）求证：$BD \perp PC$；

（2）求证：$MN//$平面PDC；

（3）设平面$PAB \cap$平面$PCD = l$，试问直线l是否与直线CD平行，请说明理由．

13 在正方体$ABCD - A'B'C'D'$中，棱$AB, BB', B'C', C'D'$的中点分别是E, F, G, H，如图所示．

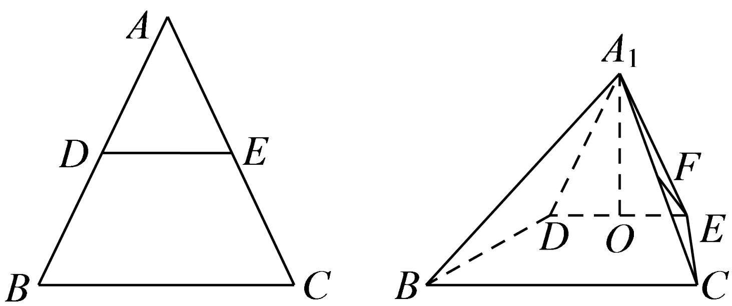


（1）求证：$AD'//$平面EFG；

（2）求证：$A'C \perp$平面EFG；

（3）判断点A, D', H, F是否共面? 并说明理由．

14 如图1，在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，O为DE的中点，$AB = AC = 2\sqrt{5}$，$BC = 4$．将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得平面$A_1DE \perp$平面$BCED$，F为A_1C的中点，如图2．

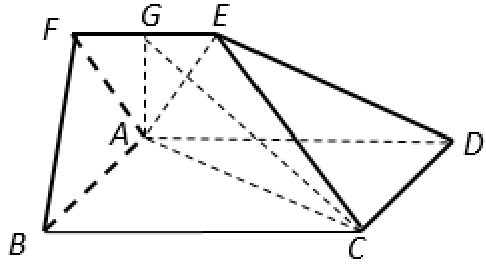


（1）求证：$EF//$平面A_1BD．

（2）求证：平面$A_1OB\perp$平面A_1OC．

（3）线段OC上是否存在点G，使得$OC\perp$平面EFG？说明理由．

15 如图，在五面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$为正方形，$EF//AD$，平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，且$BC=2EF,AE=AF$，点G是EF的中点.

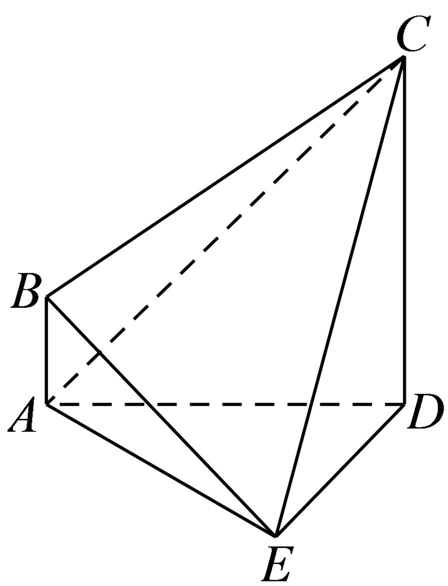


（1）证明：$AG\perp CD$．

（2）若点M在线段AC上，且$\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$，求证：$GM//$平面$ABF$．

（3）已知空间中有一点O到A,B,C,D,G五点的距离相等，请指出点O的位置. (只需写出结论)

16 如图，在四棱锥$E-ABCD$中，$AE\perp DE$，$CD\perp$平面ADE，$AB\perp$ 平面ADE，$CD=DA=6$，$AB=2$，$DE=3$．

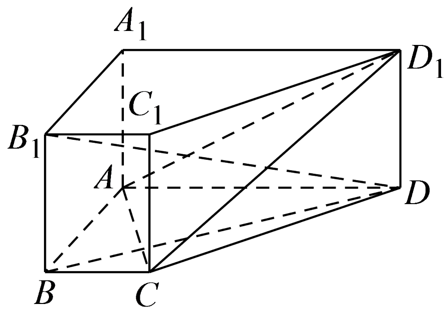


（1）求棱锥$C-ADE$的体积；

（2）求证：平面$ACE\perp$平面CDE；

（3）在线段DE上是否存在一点F，使$AF//$平面BCE？若存在，求出$\frac{EF}{ED}$的值；若不存在，说明理由．

17 如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BB_1\perp$底面$ABCD$，$AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AC\perp BD$．

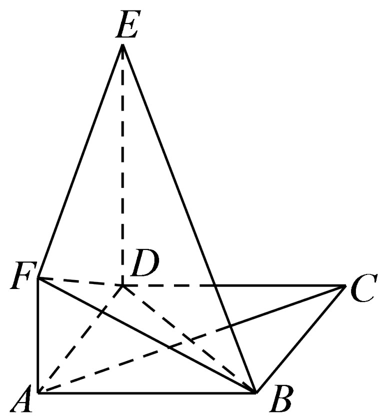


（1）求证：$B_1C//$平面ADD_1A_1．

（2）求证：$AC\perp B_1D$．

（3）若$AD=2AA_1$，判断直线B_1D与平面ACD_1是否垂直？并说明理由．

18 如图所示，正方形$ABCD$与直角梯形$ADEF$所在平面互相垂直，$\angle ADE=90^\circ$，$AF//DE$，$DE=DA=2AF=2$．



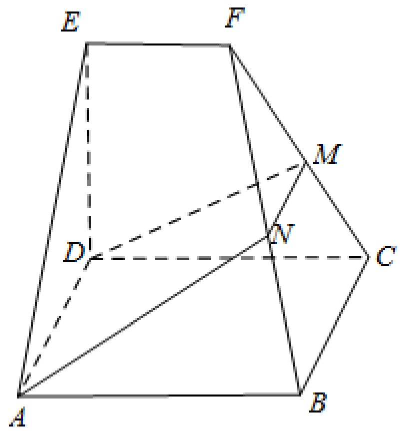
（1）求证：$AC\perp$平面BDE．

（2）求证：$AC//$平面BEF．

（3）求四面体$BDEF$的体积．

19

如图，在几何体$ABCDEF$中，底面$ABCD$为矩形，$EF//CD$，$CD\perp EA$，$CD=2EF=2$，$ED=\sqrt{3}$．M为棱FC上一点，平面ADM与棱FB交于点N．

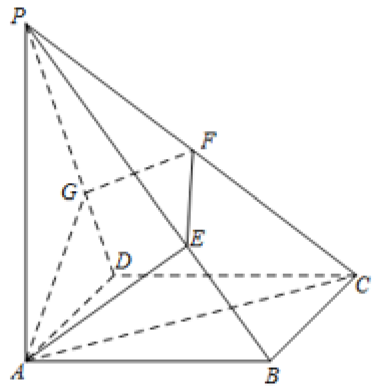


（1）求证：$ED\perp CD$．

（2）求证：$AD//MN$．

（3）若$AD\perp ED$，试问平面BCF是否可能与平面$ADMN$垂直？若能，求出$\frac{FM}{FC}$的值；若不能，说明理由．

20 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC$．过点A的平面与棱PB，PC，PD分别交于点E，F，G（E，F，G三点均不在棱的端点处）．

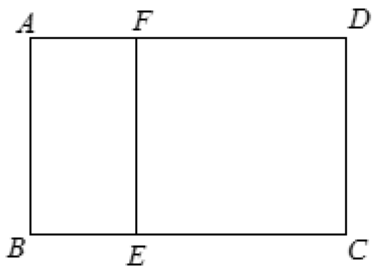


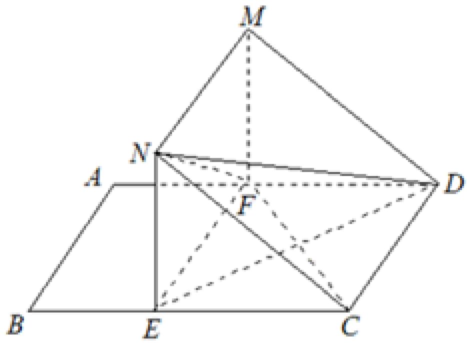
（1）求证：平面$PAB\perp$平面PBC．

（2）若$PC\perp$平面$AEFG$，求$\frac{PF}{PC}$的值．

（3）直线AE是否可能与平面PCD平行？证明你的结论．

21 如图，矩形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$．E，F分别在线段BC和AD上，$EF//AB$，将矩形$ABEF$沿EF折起．记折起后的矩形为$MNEF$，且平面$MNEF\perp$平面$ECDF$．



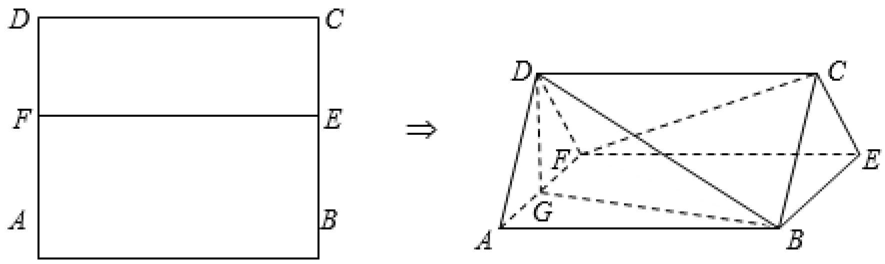


（1）求证：$NC//$平面MFD；

（2）若$EC=3$，求证：$ND\perp FC$；

（3）求四面体$NFEC$体积的最大值．

22 如图，在周长为8的矩形$ABCD$中，E，F分别为BC，DA的中点．将矩形$ABCD$沿着线段EF折起，使得$\angle DFA=60°$．设G为AF上一点，且满足$CF//$平面BDG．

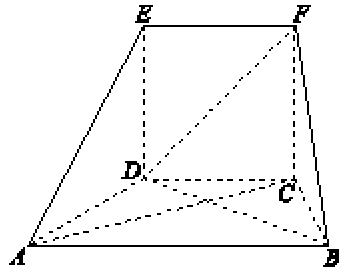


（1）求证：$EF\perp DG$；

（2）求证：G为线段AF的中点；

（3）求线段CG长度的最小值．

23 在如图所示的几何体中，面$CDEF$为正方形，面$ABCD$为等腰梯形，$AB//CD$，$AC=\sqrt{3}$，$AB=2BC=2$，$AC\perp FB$．

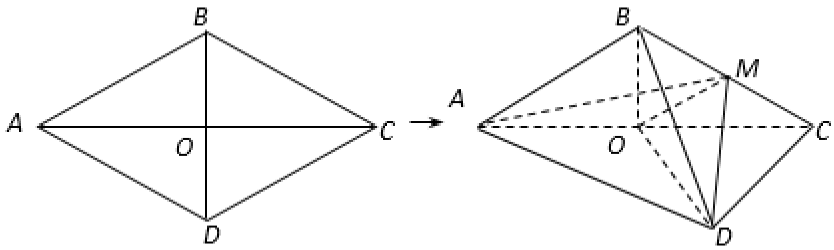


（1）求证：$AC\perp$平面FBC；

（2）求四面体$FBCD$的体积；

（3）线段AC上是否存在点M，使$EA//$平面FDM？证明你的结论．

24 如图，菱形$ABCD$的边长为6，$\angle BAD = 60°, AC \cap BD = O$．将菱形$ABCD$沿对角线$AC$折起，得到三棱锥$B-ACD$,点$M$是棱$BC$的中点，$DM = 3\sqrt{2}$．

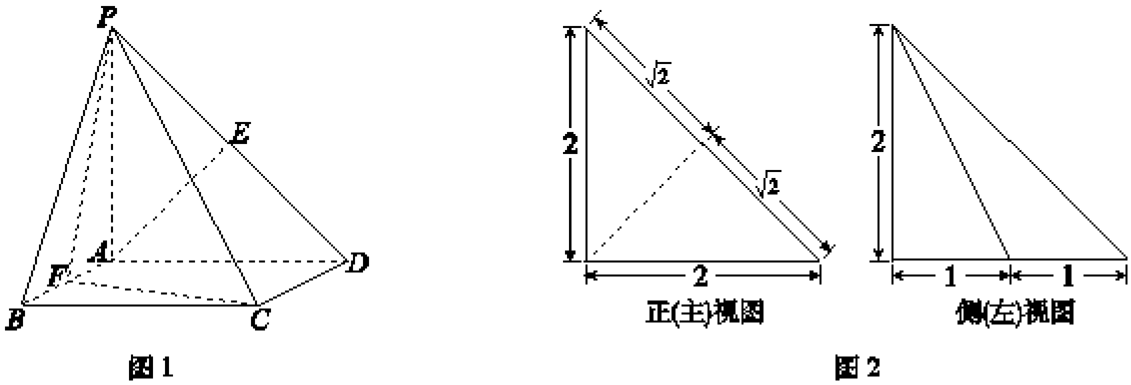


（1）求证：$OM//$平面ABD；

（2）求证：平面$ABC \perp$平面MDO；

（3）求三棱锥$M-ABD$的体积．

25 如图1，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA \perp$底面$ABCD$，面$ABCD$为正方形，E为侧棱PD上一点，F为AB上一点．该四棱锥的正（主）视图和侧（左）视图如图2所示．



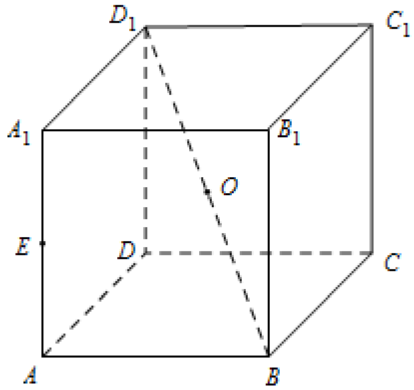
（1）求四面体$PBFC$的体积；

（2）证明：$AE//$平面PFC；

（3）证明：平面$PFC \perp$平面PCD．

26

如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2$，E为AA_1的中点，O为BD_1的中点．

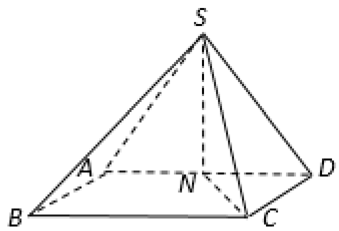


（1）求证：平面$A_1BD_1\perp$平面ABB_1A_1；

（2）求证：$EO//$平面$ABCD$；

（3）设P为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱上一点，给出满足条件$OP=\sqrt{2}$的点P的个数，并说明理由．

27 如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$AD=2AB$，$SA=SD$，$SA\perp AB$，N 是棱AD的中点．



（1）求证：$AB//$平面SCD；

（2）求证：$SN\perp$平面$ABCD$；

（3）在棱SC上是否存在一点P，使得平面$PBD\perp$平面$ABCD$?若存在，求出$\frac{SP}{PC}$的值；若不存在，说明理由．

28 如图1，在梯形$ABCD$中，$BC//AD, BC=1, AD=3, BE\perp AD$于$E$，$BE=AE=1$．将$\triangle ABE$沿$BE$折起至$\triangle A'BE$，使得平面$A'BE\perp$平面$BCDE$（如图2），$M$为线段$A'D$上一点．

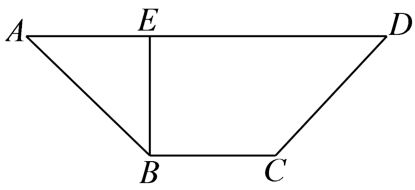


图1

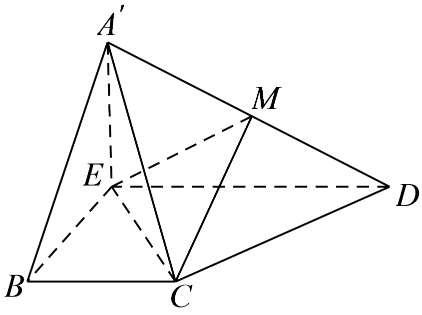


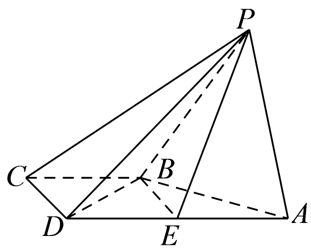
图2

（1）求证：$A'E \perp CD$．

（2）若M为线段$A'D$中点，求多面体$A'BCME$与多面体$MCDE$的体积之比．

（3）是否存在一点M，使得$A'B//$平面MCE?若存在，求$A'M$的长．若不存在，请说明理由．

29 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAB \perp$平面$ABCD$，$AD//BC$，$PA \perp AB$，$CD \perp AD$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$，E为AD的中点．

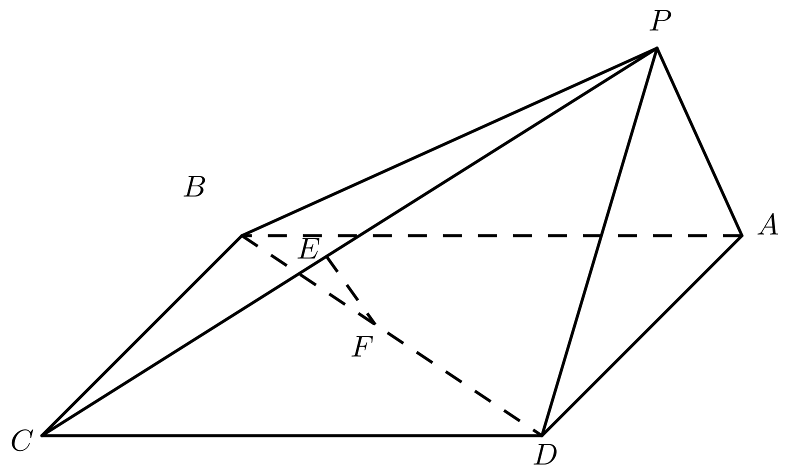


（1）求证：$PA \perp CD$；

（2）求证：平面$PBD \perp$平面PAB；

（3）在平面PAB内是否存在M，使得直线$CM//$平面PBE，请说明理由．

30 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧面$PAD \perp$底面$ABCD$．



（1）（Ⅰ）若E，F分别为PC，BD中点，求证：$EF//$平面PAD；

（2）（Ⅱ）求证：$PA\perp CD$；

（3）（Ⅲ）若$PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，求证：平面$PAB\perp$平面$PCD$．