直线与圆-期中必做题

1 已知圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$，直线l与圆C相交于A、B两点．

（1）若直线l过点$M(4,0)$，且$|AB|=2\sqrt{5}$，求直线l的方程．

（2）若直线l的斜率为1，且以弦AB为直径的圆经过原点，求直线l的方程．

答案 （1）$y=0$或$12x-5y-48-0$

（2）$y=x+1$或$y=x-4$．

解析 （1）由题设知直线l的斜率存在，设其方程为$y=k(x-4)$，即$kx-y-4k=0$．

圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$，即$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，

圆心$C(1,2)$，半径为3，

由$|AB|=2\sqrt{5}$，知圆心到直线l的距离为$\sqrt{9-(\sqrt{5})^2}=2$，

于是$\dfrac{|k+2-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，即$|2-3k|=2\sqrt{k^2+1}$，

整理得$5k^2-12k=0$，解得$k=0$或$k=\dfrac{12}{5}$．

所以直线l的方程为$y=0$或$12x-5y-48-0$．

（2）由直线l的斜率为1，设直线l的方程为$y=x+b$．

由$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y-4=0\\ y=x+b\end{cases}$．

得$2x^2+2(b+1)x+b^2+4b-4=0$．

令$\Delta=4(b+1)^2-8\left(b^2+4b-4\right)>0$，解得$-3-3\sqrt{2}<b<-3+3\sqrt{2}$．

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-(b+1)$，$x_1x_2=\dfrac{b^2+4b-4}{2}$．

因为以AB为直径的圆过原点，所以$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$．

所以$x_1x_2+y_1y_2=0$，即$2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=0$．

代入得$b^2+3b-4=0$，解得$b=1$或$b=-4$，

故直线l的方程为$y=x+1$或$y=x-4$．

考点 一解析几何

├圆与方程

│└直线与圆的位置关系

2 已知直线l经过点$P(-2,5)$且斜率为$-\frac{3}{4}$．

（1）求直线l的方程．

（2）若直线m平行于直线l，且点P到直线m的距离为3，求直线m的方程．

答案 （1）$3x+4y-14=0$．

（2）$3x+4y+1=0$或$3x+4y-29=0$．

解析 （1）由直线方程的点斜式，

得$y-5=-\frac{3}{4}(x+2)$，

整理得：$3x+4y-14=0$．

（2）由直线m平行于直线l，可设直线m的方程为$3x+4y+C=0$，

由点到直线的距离公式得，

$\frac{|3\times(-2)+4\times5+C|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

即$\frac{|14+C|}{5}=3$，

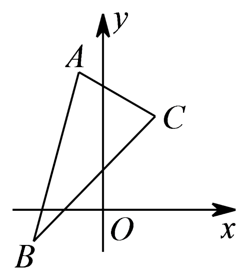
解得$C=1$或$C=-29$，

故所求直线方程为$3x+4y+1=0$或$3x+4y-29=0$．

考点 解析几何

- 直线与方程
  - 直线的倾斜角与斜率
  - 直线的方程
  - 直线的位置关系

3 如图，已知平行四边形$ABCD$的三个顶点的坐标为$A(-1,4)$，$B(-2,-1)$，$C(2,3)$．



（1）求平行四边形$ABCD$的顶点D的坐标．

（2）在△ACD中，求CD边上的高线所在直线方程．

（3）求△ACD的面积．

答案 （1）$(3,8)$．

（2）$x+5y-19=0$．

（3）8．

解析 （1）设AC的中点为M，则$M\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$，

设点D的坐标为(x,y)，由已知得M为线段BD中点，所以有：

$\begin{cases}\frac{-2+x}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{-1+y}{2}=\frac{7}{2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=3\\ y=8\end{cases}$，即点$D$的坐标为$(3,8)$．

（2）$\because$直线CD的斜率$k_{CD}=\dfrac{8-3}{3-2}=5$，

$\therefore CD$边长的高所在直线的斜率为$-\dfrac{1}{5}$．

又$\because A$点坐标$(-1,4)$，

$\therefore CD$边上的高所在直线的方程为：$y-4=-\dfrac{1}{5}(x+1)$，

即$x+5y-19=0$．

（3）$\because C(2,3)$，$D(3,8)$，$\therefore |CD|=\sqrt{(2-3)^2+(3-8)^2}=\sqrt{26}$，

由CD两点得直线CD的方程为：$5x-y-7=0$，

$\therefore$点A到直线CD的距离为：$\dfrac{|-5-4-7|}{\sqrt{26}}=\dfrac{16}{\sqrt{26}}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|CD|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{16}{\sqrt{26}}=8$．

考点 解析几何

- 直线与方程
  - 平面直角坐标系
  - 直线的倾斜角与斜率
  - 直线的方程
  - 直线的位置关系

4 已知以点$C\left(t,\frac{3}{t}\right)(t\in\mathbf{R},t\neq0)$为圆心的圆过原点$O$．

（1）设直线$3x+y-4=0$与圆C交于点M、N，若$|OM|=|ON|$，求圆C的方程．

（2）

在（1）的条件下，设$B(0,2)$，且P、Q分别是直线l：$x+y+2=0$和圆C上的动点，求$|PQ|-|PB|$的最大值及此时点P的坐标．

答案

（1）$(x-3)^2+(y-1)^2=10$．

（2）$(-6,4)$．

解析

（1）$\because OM=ON$，

$\therefore$原点在MN的中垂线上，

$\therefore OC\perp MN$．

$\because$直线MN的方程是$3x+y-4=0$，斜率为-3，

$\therefore$直线OC的斜率是：$k=\dfrac{\frac{3}{t}}{t}=\dfrac{3}{t^2}=\dfrac{1}{3}$，解得：$t=3$或$t=-3$，

$\therefore$圆心为$C(3,1)$或$C(-3,-1)$，

$\therefore$圆C的方程为$(x-3)^2+(y-1)^2=10$或$(x+3)^2+(y+1)^2=10$，

由于当圆方程为$(x+3)^2+(y+1)^2=10$时，圆心到直线$3x+y-4=0$的距离$d>r$

，

此时不满足直线与圆相交，故舍去．

$\therefore$圆C的方程为$(x-3)^2+(y-1)^2=10$．

（2）在三角形PBQ中，两边之差小于第三边，故$|PQ|-|PB|\leqslant|BQ|$，

又B，C，Q三点共线时，$|BQ|$最大，

所以，$|PQ|-|PB|$的最大值为$|BC|+\sqrt{10}=2\sqrt{10}$．

$\because B(0,2)$，$C(3,1)$，

$\therefore$直线BC的方程为$y=-\dfrac{1}{3}x+2$，

$\therefore$直线BC与直线$x+y+2=0$的交点P的坐标为$(-6,4)$．

考点

- 不等式与线性规划
  - 绝对值不等式
    - 绝对值的三角不等式
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程

└直线的位置关系

圆与方程

├圆的方程

└直线与圆的位置关系

5 已知：圆C过点$A(0,0)$，$B(2,0)$，直线$l: x-2y+2=0$．

（1）若圆C与直线l交于两点M，N，且$AM\perp AN$，求圆C的一般方程．

（2）若圆C的圆心到直线l的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$，求圆C的标准方程．

（3）若直线l与圆C交于两点M，N，且$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}$，求点$P$的轨迹．

答案 （1）$x^2+y^2-2x-3y=0$．

（2）$(x-1)^2+(y-1)^2=2$或$(x-1)^2+(y-2)^2=5$．

（3）$y=\frac{x+4}{2}$，$x\in\left(-\infty,-4\sqrt{2}-4\right)\cup\left(4\sqrt{2},+\infty\right)$．

解析 （1）由题，MN为$\odot C$直径，设$C(x_0,y_0)$，

$\therefore\begin{cases}x_0-2y_0+2=0\\x_0^2+y_0^2=(x_0-2)^2+y_0^2\end{cases}$，得$C\left(1,\frac{3}{2}\right)$，

$|AC|=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

$\therefore\odot C:(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$，

即$\odot C$一般方程为$x^2+y^2-2x-3y=0$．

（2）设$C(x_0,y_0)$，由$\begin{cases}\frac{|x_0-2y_0+2|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\\x_0^2+y_0^2=(x_0-2)^2+y^2\end{cases}$

得$\begin{cases}x_0=1\\y_0=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x_0=1\\y_0=2\end{cases}$，

$x_0=y_0=1$时，$|AC|=\sqrt{2}$，

$x_0=1$且$y_0=2$时，$|AC|=\sqrt{5}$，

$\therefore\odot C$标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$或$(x-1)^2+(y-2)^2=5$．

（3）设$C(x_0,y_0)$，$\therefore x_0^2+y_0^2=(x_0-2)^2+y_0^2\Rightarrow x_0=1$，$\therefore C(1,y_0)$，$\therefore\odot C$：

$(x-1)^2+(y-y_0)^2=1+y_0^2$，即$x^2+y^2-2x-2y_0y=0$．

根据$\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y_0y=0\\x-2y+2=0\end{cases}$可得$2y^2-(y_0+6)y+4=0$，

$\Delta>0\Rightarrow y_0>4\sqrt{2}-6$或$y_0<-4\sqrt{2}-6$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ ，$\therefore x=x_1+x_2,y=y_1+y_2$，

$\therefore y=y_1+y_2=\dfrac{y_0+b}{2}$,

$x=x_1+x_2=(2y_1-2)+(2y_2-2)$

$=2(y_1+y_2)-4=y_0+2$,

$\therefore P$轨迹为$y=\dfrac{x+4}{2}$ ，$x\in\left(-\infty,-4\sqrt{2}-4\right)\cup\left(4\sqrt{2},+\infty\right)$.

考点
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
    - 直线的位置关系
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系
  - 直线与圆锥曲线
    - 动点问题

6 已知圆C经过$P(4,-2)$，$Q(-1,3)$两点，且在y轴上截得的线段长为$4\sqrt{3}$，半径小于5 .

（1）求直线PQ与圆C的方程 .

（2）若直线$l//PQ$，且l与圆C交于A，B两点，且以线段AB为直径的圆经过坐标原点O，求直线l的方程 .

答案 （1）$x+y-2=0$；$(x-1)^2+y^2=13$

（2）方程为$x+y-4=0$或$x+y+3=0$

解析 （1）设圆标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

$$\begin{cases}(4-a)^2+(b+2)^2=r^2\\(a+1)^2+(b-3)^2=r^2\\2\sqrt{r^2-a^2}=4\sqrt{3}\end{cases},$$

解得$\begin{cases}a=1\\b=0\\r=\sqrt{13}\end{cases}$,

故圆C：$(x-1)^2+y^2=13$,

$k_{PQ}=-1,$

故PQ方程：$x+y-2=0$.

（2）设l：$x+y-m=0$（$m\neq2$） ,

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由题意，有$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，

即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

整理得：$2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=0$．

l与C联立得$2x^2-2(m+1)x+m^2-12=0$①

由韦达定理：$x_1x_2=m+1$，$x_1x_2=\frac{m^2-12}{2}$，

代入解得：$m=4$或-3，

① 中$\Delta>0\Rightarrow 1-\sqrt{26}<m<1+\sqrt{26}$，

② 故$m=4$或-3均满足题意．（方程为$x+y-4=0$或$x+y+3=0$）．

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
  - 圆与方程
    - 圆的方程

7 已知圆M：$x^2+(y-2)^2=1$，Q是x轴上的动点，QA，QB分别切圆M于A，B两点．

（1）若$Q(1,0)$，求切线QA，QB的方程．

（2）求四边形$QAMB$面积的最小值．

（3）若$|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，求直线MQ的方程．

答案

（1）$x=1$，$3x+4y-3=0$．

（2）$\sqrt{3}$．

（3）$\pm\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{2}=1$（截距式）．

解析

（1）设过Q与圆M相切直线方程为$x=my+1$．

依题有$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，解得$m=0$或$-\frac{4}{3}$，

故QA，QB方程分别为$x=1$，$3x+4y-3=0$．

（2）$S_{\triangle AMB}=2\times\frac{1}{2}\times MB\times QB=QB$，

故只需求QB最小值，

即MQ最小值，显然当$Q(0,0)$时，MQ达到最小，

此时$QB=\sqrt{3}$，

故S_{QAMB}的最小值为$\sqrt{3}$．

（3）设$Q(t,0)$，则故$S_{QAMB}=\dfrac{1}{2}\times AB\times MQ=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{t^2+4}$，

同时$S_{QAMB}=2S_{\triangle MAQ}=\sqrt{t^2+3}$，联立解得：$t=\pm\sqrt{5}$，

故MQ方程为$\pm\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{y}{2}=1$（截距式）．

考点

—解析几何

- 直线与方程
  - 直线的方程
- 直线与圆锥曲线
  - 弦长或面积问题

8 已知圆心为C的圆，满足下列条件：圆心C位于x的正半轴上，与直线$3x-4y+7=0$相切，且被y轴截得的弦长为$2\sqrt{3}$，圆C的面积小于13．

（1）求圆C的标准方程．

（2）设过点$M(0,3)$的直线l与圆C相交于不同的两点A,B，已OA,OB为邻边作平行四边形$OADB$．是否存在这样的直线l，使得直线OD与MC恰好平行？如果存在，求出l的方程；如果不存在，说明理由．

答案

（1）$(x-1)^2+y^2=4$．

（2）不存在这样的直线l．

解析

（1）设圆C：$(x-a)^2+y^2=R^2\ (a>0)$，

由题意知$\begin{cases}\frac{|3a+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=R\\ \sqrt{a^2+3^2}=R\end{cases}$，

解得$a=1$或$a=\dfrac{13}{8}$，

因为$S=\pi R^2<13$，所以$a=1$，

所以圆C标准方程为：$(x-1)^2+y^2=4$．

（2）当斜率不存在时，直线l为：$x=0$，不满足题意，当斜率存在时，设直线l：

$y=kx+3$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l与圆C相交于不同的两点，联立$\begin{cases} y=kx+3 \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases}$，

消去y得：$(1+k)^2x^2+(6k-2)x+6=0$，

所以$\Delta=(6k-2)^2-24\left(1+k^2\right)=3k^2-6k-5>0$，

解得$k<1-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$或$k>1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

$x_1+x_2=-\dfrac{6k-2}{1+k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+6=\dfrac{2k+6}{1+k^2}$，

$\overrightarrow{OD}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\overrightarrow{MC}=(1,-3)$.

假设$\overrightarrow{OD}//\overrightarrow{MC}$，则$-3(x_1+x_2)=y_1+y_2$，

所以$3\times\dfrac{6k-2}{1+k^2}=\dfrac{2k+6}{1+k^2}$，

解得$k=\dfrac{3}{4}\notin\left(-\infty,1-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$，

所以假设不成立，

所以不存在这样的直线l．

考点

- 解析几何
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系

9 在平面直角坐标系中，圆M经过点$O(0,0)$、$A(2a,0)$、$B(0,-4a)$，其中$a\in\mathbf{R}$．若过点$N(1,2)$的任意直线都与圆有公共点．

（1）求圆M的方程及a的取值范围．

（2）若$a=-1$，过N的直线与圆M交于P、Q两点，求证：$|PQ|$的取值范围是$[2,2\sqrt{5}]$．

答案 （1）$(x-a)^2+(y+2a)^2=5a^2$；$a\leqslant-\dfrac{5}{6}$．

（2）证明见解析．

解析 （1）$OA\perp OB$，

故AB是圆心直径，圆心$M(a,-2a)$，

从而圆心方程：$(x-a)^2+(y+2a)^2=5a^2$，

依题意，N点在圆心上或内部，

即$(1-a)^2+(2+2a)^2\leqslant5a^2$，

解得：$a\leqslant -\frac{5}{6}$．

（2）$a=-1$，圆的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=5$，

此时N在圆内，圆心M到PQ的距离d满足$0\leqslant d\leqslant MN$，

计算得$MN=2$，

故$0\leqslant d\leqslant 2$，

而由勾股定理：$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2+d^2=5$，

由此解得$2\leqslant PQ\leqslant 2\sqrt{5}$．

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系

10 已知：直线$l:3x+4y+1=0$，一个圆与x，y轴正半轴都相切，且圆心C到直线l的距离为3．

（1）求圆的方程．

（2）P是直线l上的动点，PE，PF是圆的两条切线，E，F分别为切点．求四边形$PECF$的面积的最小值．

（3）圆与x轴交点记作A，过A作一直线l_1与圆交于A，B两点，AB中点为M，求$|OM|$最大值．

答案

（1）$(x-2)^2+(y-2)^2=4$．

（2）$2\sqrt{5}$．

（3）$\sqrt{5}+1$．

解析

（1）设圆的方程为$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$．

$\because$圆心到直线l的距离为3，$\therefore d=\frac{|3a+4a-1|}{5}=3$，解得$a=-\frac{16}{7}$（舍）或$a=2$，

$\therefore$圆的方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=4$．

（2）$S_{四边形}=\frac{1}{2}\times PE\times CE\times 2=2PE=2\sqrt{PC^2-4}$．

$\because PC_{最小值}=3$，

$\therefore S_{四边形PECF}$的最小值$=2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$．

（3）设M点坐标为(x,y)，则$A(2,0)$，$B(2x-2,2y)$．

$\because$点B在圆$(x-2)^2+(y-2)^2=4$，

$\therefore$将B点坐标代入圆的方程得：$(2x-4)^2+(2y-2)^2=4$，即$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

，

$\therefore$点M在以$(2,1)$为圆心，1为半径的圆上，

$\therefore |OM|_{最大值}=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}+1=\sqrt{5}+1$．

考点 一解析几何

- 直线与方程
  - 直线的位置关系
- 圆与方程
  - 圆的方程
  - 直线与圆的位置关系

11 在平面直角坐标系xOy中，已知圆O的方程为$x^2+y^2=1$，直线l_1过点$A(3,0)$且与圆O相切．

（1）求直线l_1的方程．

（2）设圆O与x轴交与P，Q两点，M是圆O上异于P，Q的动点，过点A且与x轴垂直的直线为l_2，直线PM交直线l_2于点P'，直线交直线l_2于点Q'，求证：以$P'Q'$为直径的圆C总过定点，并求出定点坐标．

答案 （1）$\sqrt{2}x-4y-3\sqrt{2}=0$，$\sqrt{2}x+4y-3\sqrt{2}=0$．

（2）$(3\pm2\sqrt{2},0)$．

解析 （1）由题设直线l_1的斜率存在，

设直线l_1的方程为$kx-y-3k=0$，

则圆心到直线l_1的距离为$d=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore$直线l_1的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x-3)$，

即$\sqrt{2}x-4y-3\sqrt{2}=0$，$\sqrt{2}x+4y-3\sqrt{2}=0$．

（2）在$x^2+y^2=1$，令$y=0$，得$x=\pm1$，

即$P(-1,0)$，$Q(1,0)$，

又直线l_2过点且A与x轴垂直，

∴直线l_2方程为$x=3$．

设$M(s,t)$，（$t\neq 0$），（$s=\pm 1$），

则直线PM方程为$y=\dfrac{t}{s+1}(x+1)$，

解方程组$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{t}{s+1}(x+1) \end{cases}$，

得$P'\left(3,\dfrac{4t}{s+1}\right)$，

同理得$Q'\left(3,\dfrac{2t}{s-1}\right)$，

∴以为$P'Q'$直径的圆C'的方程$(x-3)(x-3)+\left(y-\dfrac{4t}{s+1}\right)\left(y-\dfrac{2t}{s-1}\right)=0$，

又$s^2+t^2=1$，

∴代入整理得$\dfrac{6s-2}{t}+y+x^2+y^2-6x+1=0$，

若圆C'经过定点，只需令$y=0$，从而$x^2-6x+1=0$，解得$x=3\pm 2\sqrt{2}$，

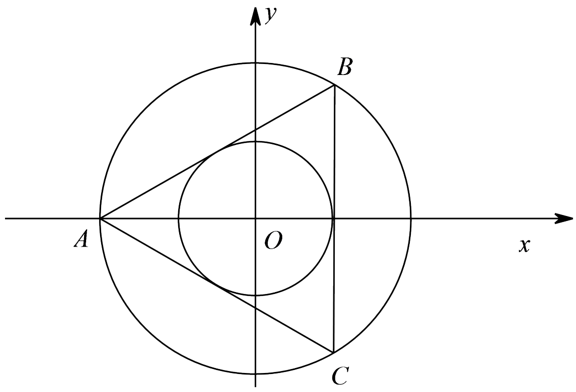
∴圆C'总经过的定点坐标为$(3\pm 2\sqrt{2},0)$．

考点

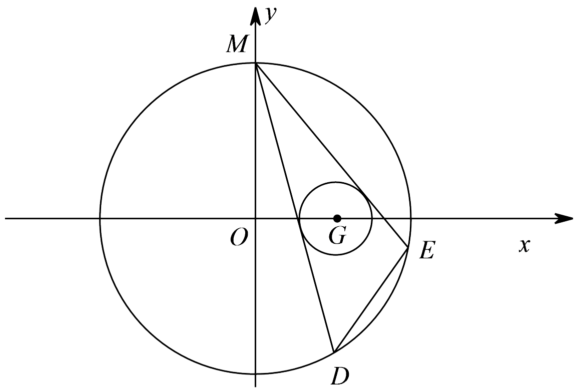
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
  - 圆与方程
    - 直线与圆的位置关系

12 已知，圆O：$x^2+y^2=16$．

（1）若圆F：$x^2+y^2=r^2$为圆O的内接$\triangle ABC$的内切圆，其中A为圆O与x轴的左交点，求圆F的半径r．



（2）若圆G：$(x-2)^2+y^2=R^2$内含于圆O：$x^2+y^2=16$，过点$M(0,4)$作圆G的两条切线交圆O：$x^2+y^2=16$于D、E两点，求证：直线DE的斜率为定值．



答案　（1）$r=2$．

（2）证明见解析．

解析　（1）法一：因为O为$\triangle ABC$的内心，

所以$\angle BAO=\angle CAO$，$\angle ABO=\angle CBO$，$\angle ACO=\angle BCO$，

因为O为$\triangle ABC$的外心，

所以$\angle BAO=\angle ABO$，$\angle BCO=\angle CBO$，$\angle ACO=\angle CAO$，

所以$\angle BAO=30^\circ$，

所以$r=\dfrac{1}{2}|OA|=2$．

法二：利用几何条件，建立方程．

由$\mathrm{Rt}\triangle AHO\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADB$，得

$\dfrac{r}{\sqrt{16-r^2}}=\dfrac{\sqrt{16-r^2}}{r+4}$，

$r^2+2r-8=0$，解得$r=2$．

（2）因为圆G：$(x-2)^2+y^2=R^2$内含于圆O：$x^2+y^2=16$，

所以$|OG|<4-R$，即$R<2$．

设过$M(0,4)$的圆G的切线为l，

因为$R<2$，所以切线l的斜率存在．

设l的方程为：$y=kx+4$，即$kx-y+4=0$，

由题$\dfrac{|2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=R$，

即$\left(R^2-4\right)k^2-16k+R^2-16=0$（*）

因为$R<2$，所以点$M(0,4)$在圆G外，

过M点可作圆G两条切线，方程（*）有两个不等实根，

关于k的方程（*）的两根即为切线MD，ME的斜率，

不妨设为k_1，k_2，则

$\begin{cases}k_1+k_2=\frac{16}{R^2-4}\\ k_1k_2=\frac{R^2-16}{R^2-4}\end{cases}$，

由$\begin{cases}y=kx+4\\ x^2+y^2=16\end{cases}$得$\left(1+k^2\right)x^2+8kx=0$，

所以$x=0$或$x=-\dfrac{8k}{1+k^2}$，

设$D\left(x_1,y_1\right)$，$E\left(x_2,y_2\right)$，则

$x_1=-\dfrac{8k_1}{1+{k_1}^2}$，$x_2=-\dfrac{8k_2}{1+{k_2}^2}$，

$y_1=k_1x_1+4$，$y_2=k_2x_2+4$，

所以直线DE的斜率为：

$$k_{DE}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{k_2x_2-k_1x_1}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{-\frac{8{k_2}^2}{1+{k_2}^2}+\frac{8{k_1}^2}{1+{k_1}^2}}{-\frac{8k_2}{1+{k_2}^2}+\frac{8k_1}{1+{k_1}^2}}$$
$$=\frac{8{k_1}^2\left(1+{k_2}^2\right)-8{k_2}^2\left(1+{k_1}^2\right)}{8k_1\left(1+{k_2}^2\right)-8k_2\left(1+{k_1}^2\right)}$$
$$=\frac{8{k_1}^2-8{k_2}^2}{8k_1-8k_2+8k_1{k_2}^2-8k_2{k_1}^2}$$
$$=\frac{k_1+k_2}{1-k_1k_2}=\frac{\frac{16}{R^2-4}}{1-\frac{R^2-16}{R^2-4}}$$
$$=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

直线DE的斜率为定值$\dfrac{4}{3}$．

考点　一解析几何

- 圆与方程
  - 圆的方程
  - 直线与圆的位置关系

13 已知圆$O:x^2+y^2=4$，P为直线$l:x=4$上的动点．

（1）过点P向圆引两条切线，若切线长为$2\sqrt{3}$，求两条切线的夹角．

（2）若点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，直线PA，PB与圆O的另一个交点分别为M，N，求证：直线MN恒过定点，并求定点的坐标．

答案 （1）60°．

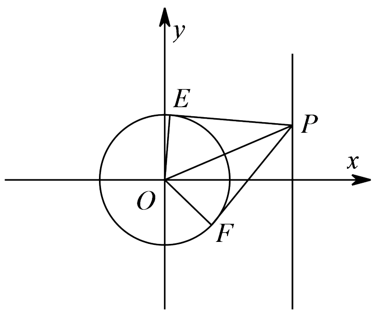
（2）证明见解析，定点$(1,0)$．

解析 （1）切线长$PE=2\sqrt{3}$，半径$OE=2$．

则$\tan\angle OPE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle OPE=30^\circ$．

所以两条切线的夹角为60°．

（2）



设$P(4,t)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．

则$l_{AP}:y=\dfrac{t}{6}(x+2)=\dfrac{t}{6}x+\dfrac{t}{3}$．

$l_{BP}:y=\dfrac{t}{2}(x-2)=\dfrac{t}{2}x-t$．

由$\begin{cases} y=\frac{t}{6}x+\frac{t}{3} \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$得：

$(t^2+36)x^2+4t^2x+4t^2-144=0$．

则

$\Delta=16t^4-16(t^2+36)(t^2-24)=192(t^2+72)>0$．

所以有$-2x_1=\dfrac{4t^2-144}{t^2+36}$，即$x_1=-\dfrac{2t^2-72}{t^2+36}$，故$y_1=\dfrac{24t}{t^2+36}$．

同理，由$\begin{cases} y=\frac{t}{2}x-t \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$得：$(t^2+4)x^2-4t^2x+4t^2-16=0$．

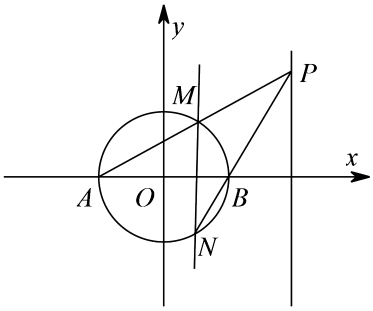
则$\Delta=16t^4-16(t^2+4)(t^2-4)=256>0$．

所以有$2x_2=\dfrac{4t^2-16}{t^2+4}$，即$x_2=\dfrac{2t^2-8}{t^2+4}$，故$y_2=\dfrac{-8t}{t^2+4}$．

故$k_{MN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\frac{-8t}{t^2+4}-\frac{24t}{t^2+36}}{\frac{2t^2-8}{t^2+4}+\frac{2t^2-72}{t^2+36}}=\dfrac{-8t}{t^2-12}$．

则$l_{MN}:y=\dfrac{-8t}{t^2-12}\left(x-\dfrac{2t^2-8}{t^2+4}\right)-\dfrac{8t}{t^2+4}=\dfrac{-8t}{t^2-12}(x-1)$．

所以，直线l_{MN}过定点$(1,0)$．



考点 一解析几何
直线与方程
直线的方程
圆与方程
直线与圆的位置关系

14 已知$\odot C$：$x^2+y^2-2x-3=0$，以及点$A(2,0)$．

（1）若点B是已知圆上的动点，求$\angle CBA$的最大值．

（2）过A且互相垂直的两条射线分别于圆相交，且交点为P、Q．求矩形$APRQ$的顶点R的轨迹方程．

答案 （1）30°．

（2）$(x-1)^2+y^2=7$．

解析 （1）$\because \odot C$：$x^2+y^2-2x-3=0$，

$\therefore (x-1)^2+y^2=4$，

$\therefore C(1,0)$，$r=2$，

$\because A(2,0)$，B在圆上，

$\therefore |CB|=2,|CA|=1$，

$\therefore \cos\angle CBA=\dfrac{|CB|^2+|AB|^2-|CA|^2}{2\cdot|CB|\cdot|AB|}$，

设$|AB|=x$，$x\in[1,3]$

$\therefore \cos\angle CBA=\dfrac{4+x^2-1}{4x}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4x}$，

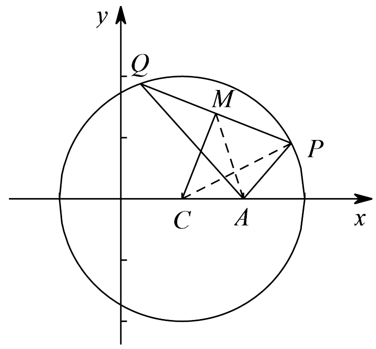
$\because x\in[1,3]$，

$\therefore \dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4x}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{3}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当“$x=\sqrt{3}$”时取“$=$”，

$\therefore \cos\angle CBA_{\max} = 30^\circ$.

（2）PQ中点为M，$\angle QAP = 90^\circ$，

则$AM = MP$，



设$R(x,y)$，则$M\left(\dfrac{2+x}{2},\dfrac{y}{2}\right)$，

$|CP|^2 = |CM|^2 + |MP|^2 = |CM|^2 + |AM|^2$，

即$4 = \left(\dfrac{2+x}{2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2+x}{2} - 2\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2$ ，

即$4 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{x^2 - 4x + 4}{4} + \dfrac{y^2}{4}$，

即$4 = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{y^2}{2} + 1$，

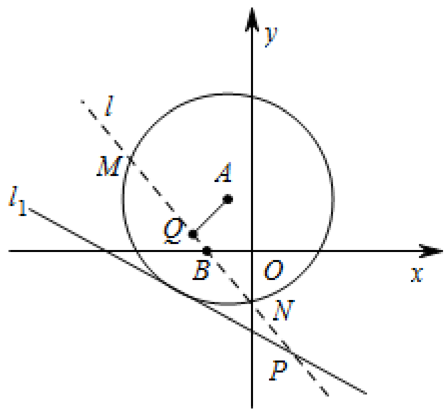
即$x^2 - 2x + y^2 = 6$，

$(x-1)^2 + y^2 = 7$.

考点

- 解析几何
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系
  - 曲线与方程

15 如图所示，已知以点$A(-1,2)$为圆心的圆与直线$l_1: x + 2y + 7 = 0$相切，过点$B(-2,0)$的动直线l与圆A相交于M，N两点，Q是MN的中点，直线l于l_1相交于点P .



（1）求圆A的方程．

（2）当$|MN|=2\sqrt{19}$时，求直线l的方程．

（3）$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BP}$是否为定值？如果是，求出其定值；如果不是，请说明理由．

答案 （1）$(x+1)^2+(y-2)^2=20$

（2）$y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$或$x=-2$．

（3）$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BP}$是定值，且定值为$-5$．

解析 （1）$\because$圆A与直线$l_1:x+2y+7=0$相切，

$\therefore r=d=\frac{|-1+2\times2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$，

$\therefore$圆A的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=20$．

（2）$\because r=2\sqrt{5}$，$MN=2\sqrt{19}$，

$\therefore$圆心A到直线l的距离$d=\sqrt{20-19}=1$，

当直线l的斜率不存在时，直线方程为$x=-2$，符合题意；

当直线l的斜率存在时，设斜率为k，则直线方程为$y=k(x+2)$，即

$kx-y+2k=0$，

$\therefore d=\frac{|-k-2+2k|}{\sqrt{k^2+1^2}}=1$，解得$k=\frac{3}{4}$，

$\therefore$直线l的方程为$y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$，

综上所述，直线l的方程为$y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$或$x=-2$．

（3）$\because Q$是MN的中点，

$\therefore$由垂径定理可知$AQ\perp BP$，即$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，

$\therefore\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$，

当直线l的斜率不存在时，易知$P(-2,-\frac{5}{2})$，则$\overrightarrow{BP}=(0,-\frac{5}{2})$，

$\because \overrightarrow{BA}=(1,2)$，

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=-5$；

当直线l的斜率存在时，设斜率为k，则直线方程为$y=k(x+2)$，

联立$\begin{cases}x+2y+7=0\\ y=kx+2k\end{cases}$，解得$P(\frac{-4k-7}{1+2k},\frac{-5k}{1+2k})$，

则$\overrightarrow{BP}=(\frac{-5}{1+2k},\frac{-5k}{1+2k})$，

$\because \overrightarrow{BA}=(1,2)$，

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=\frac{-5}{1+2k}+\frac{-10k}{1+2k}=-5$，

所以综上所述，$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BP}$是定值，且定值为$-5$．

考点

- 解析几何
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系
  - 直线与圆锥曲线
    - 向量点乘问题
    - 定值问题

16 已知定点$C(-1,0)$及椭圆$x^2+3y^2=5$，过点C的动直线与椭圆相交于A，B两点．

（1）若线段AB中点的横坐标是$-\frac{1}{2}$，求直线AB的方程．

（2）设点M的坐标为$\left(-\frac{7}{3},0\right)$，求$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的值．

答案 （1）$x-\sqrt{3}y+1=0$或$x+\sqrt{3}y+1=0$．

（2）$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{4}{9}$．

解析 （1）依题意，直线AB的斜率存在，设直线AB的方程为$y=k(x+1)$，

将$y=k(x+1)$代入$x^2+3y^2=5$，消去y整理得$(3k^2+1)$，

$x^2+6k^2x+3k^2-5=0$．

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}\Delta=36k^4-4(3k^2+1)(3k^2-5)>0,(1)\\ x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1},(2)\end{cases}$，

由线段AB中点的横坐标是$-\frac{1}{2}$，

得$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3k^2}{3k^2+1}=-\frac{1}{2}$，

解得$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，适合（1）．

所以直线AB的方程为$x-\sqrt{3}y+1=0$或$x+\sqrt{3}y+1=0$．

（2）①当直线AB与x轴不垂直时，

由（1）知$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-5}{3k^2+1}$．（3），

所以

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(x_1+\frac{7}{3}\right)\left(x_2+\frac{7}{3}\right)+y_1y_2=\left(x_1+\frac{7}{3}\right)\left(x_2+\frac{7}{3}\right)+k^2(x_1+1)(x_2+1)$

，

$=(k^2+1)x_1x_2+\left(k^2+\frac{7}{3}\right)(x_1+x_2)+k^2+\frac{49}{9}$．

将（3）代入，整理得：

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{(k^2+1)(3k^2-5)+\left(k^2+\frac{7}{3}\right)(-6k^2)}{3k^2+1}+k^2+\frac{49}{9}$，

$=\frac{4}{9}$．

②当直线AB与x轴垂直时，

此时点A，B的坐标分别为$\left(-1,\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$、$\left(-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，

此时亦有$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{4}{9}$．

综上，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{4}{9}$．

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
  - 椭圆
    - 椭圆的定义、图形及标准方程
    - 椭圆的性质
  - 直线与圆锥曲线
    - 直线与圆锥曲线的位置关系
    - 向量点乘问题

17 若圆C与y轴交于$(0,\sqrt{3})$和$(0,-\sqrt{3})$，且圆心C在直线$x-y+1=0$上．

（1）求圆C的方程．

（2）求过点$M(3,1)$的圆C的切线方程．

（3）设$P(x,y)$是圆C上任意一点，求$2x-y$的最大值．

答案 （1）$(x+1)^2+y^2=4$．

（2）$y-1=\dfrac{2+\sqrt{13}}{6}(x-3)$或$y-1=\dfrac{2-\sqrt{13}}{6}(x-3)$．

（3）$2\sqrt{5}-2$．

解析 （1）根据对称性知圆心位于x轴上，$y=0$，

又圆心在$x-y+1=0$上，将$y=0$代入可得$x=-1$，

$\therefore C$的坐标为$(-1,0)$，C到其中一个交点的距离为半径r，

$\therefore r^2=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=4$，

$\therefore$圆的方程为$(x+1)^2+y^2=4$．

（2）显然当斜率不存在时$x=3$不与C相切，

设切线方程为$y-1=k(x-3)$，

即：$kx-y-3k+1=0$，

易知有C到直线的距离等于r，

$\therefore\dfrac{|-k-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，

解得$k=\dfrac{2+\sqrt{13}}{6}$或$\dfrac{2-\sqrt{13}}{6}$，

切线方程为$y-1=\dfrac{2+\sqrt{13}}{6}(x-3)$或$y-1=\dfrac{2-\sqrt{13}}{6}(x-3)$．

（3）令$2x-y=b$，作出$y=2x-b$和圆C的图像易得：

当$y=2x-b$与圆C相切于圆的下方时，$-b$有最小值，则b为最大值，

$\therefore\dfrac{|-2-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$，

解得$b=2\sqrt{5}-2$或$-2\sqrt{5}-2$（舍），

$\therefore 2x-y$的最大值为$2\sqrt{5}-2$．

考点
- 函数与导数
  - 函数
    - 最值
- 解析几何
  - 圆与方程

圆的方程

几何证明选讲

圆

圆的切线的判定定理及性质定理

18 在平面直角坐标系xOy中，O为坐标原点．定义$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$两点之间的“直角距离”为$d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$．

（1）若点$A(-1,3)$，求$d(A,O)$的值．

（2）点M为直线$2x+y-4=0$上动点，求$d(O,M)$的最小值．

（3）点N是直线$kx-y+k+3=0(k>0)$上的动点，求$d(O,N)$的最小值（只需写出结论）．

答案 （1）4．

（2）2．

（3）$\begin{cases} 1+\frac{3}{k},k\geqslant 1 \\ k+3,0<k<1 \end{cases}$．

解析 （1）由题意，$d(A,O)=|-1|+|3|=4$．

（2）设$M(x_0,y_0)$，则$d(O,M)=|x_0|+|2x_0-4|$，

即$d(O,M)=\begin{cases} -3x_0+4,x_0\leqslant 0 \\ -x_0+4,0<x_0<2 \\ 3x_0-4,x_0\geqslant 2 \end{cases}$，

$\therefore$当$x_0=2$时，$d(O,M)$取得最小值为2．

（3）$d(O,N)$的最小值是$\begin{cases} 1+\frac{3}{k},k\geqslant 1 \\ k+3,0<k<1 \end{cases}$．

考点 函数与导数

函数

值域

分段函数

解析式

最值

图象

解析几何

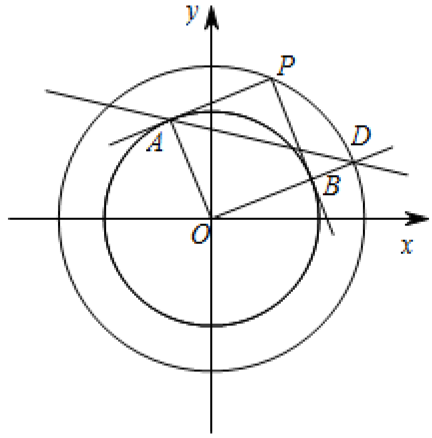
直线与方程

平面直角坐标系

直线的倾斜角与斜率

直线的方程

19 已知O为坐标原点，动点P是圆O：$x^2+y^2=r^2$（$r>\sqrt{2}$）上任一点，过点P作圆$x^2+y^2=2$的两条切线PA、PB（A、B为切点），若$PA\perp PB$．



（1）求r的值．

（2）若射线OB交圆O于点D，是否存在定圆与直线AD总相切，如果存在，求出此定圆的方程；如果不存在，说明理由．

（3）在（Ⅱ）条件下，已知点Q的坐标为$(2,2)$，求$\triangle ADQ$面积的最大值．

答案 （1）$r=2.$

（2）存在定圆$x^2+y^2=d^2=\dfrac{4}{3}$，与直线AD总相切．

（3）$2\sqrt{3}+\sqrt{2}$．

解析 （1）$\because PA\perp PB$，

$\therefore$四边形$PAOB$为正方形.

$\because AO=\sqrt{2}$，

$\therefore PO=2$，

$\therefore r=2.$

（2）设圆心到直线AD的距离为d，

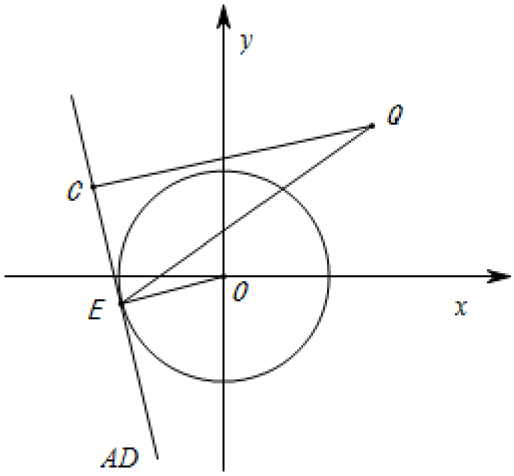
$\because\triangle AOD$为$Rt\triangle$，

$\therefore d\cdot|AD|=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{6}$，

$\therefore d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$为定值．

$\therefore$存在定圆$x^2+y^2=d^2=\frac{4}{3}$，与直线AD总相切．

（3）由（Ⅱ）知，AD总与圆$x^2+y^2=\frac{4}{3}$相切，



当Q离AD最远时，$\triangle ADQ$面积最大．

过Q点做$QC\perp AD$，垂足为C，

设AD与圆的切点为E，连结QE．

则$|QC|\leqslant|QE|$，当CE重合时，

即$|QE|=|QO|+d$时，

$|QC|$达到最大值，

此时$|QC|=2\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore S_{\triangle ADQ}=\frac{1}{2}|AD|\,|QC|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$．

考点 ─解析几何
　├圆与方程
　│└直线与圆的位置关系

20 已知点$A(0,1)$，B，C是x轴上两点，且$|BC|=6$（B在C的左侧）．设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为M．

（1）已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$，试求直线$AB$的方程．

（2）当圆M与直线$y=9$相切时，求圆M的方程．

（3）设$|AB|=l_1$，$|AC|=l_2$，$s=\frac{l_1}{l_2}+\frac{l_2}{l_1}$，试求$s$的最大值．

答案 （1）直线AB的方程为$y=x+1$或$y=\frac{1}{5}x+1$．

（2）圆方程为$(x\pm4)^2+(y-4)^2=25$．

（3）当$m=\pm\sqrt{10}$时，s的最大值为$2\sqrt{10}$．

解析 （1）设$B(a,0)$,则$C(a+6,0)$．

$\overrightarrow{AB}=(a,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(a+6,-1)$，

由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$得$a(a+6)+1=-4$，

解得$a=-1$或-5，

$\therefore$直线AB的方程为$y=x+1$或$y=\frac{1}{5}x+1$．

（2）设圆心为(a,b)，半径为r，则

$\begin{cases}\sqrt{a^2+(b-1)^2}=r\\ \sqrt{b^2+9}=r\\ |9-b|=r\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\pm4\\ b=4\\ r=5\end{cases}$．

$\therefore$圆方程为$(x\pm4)^2+(y-4)^2=25$．

（3）设$B(m-3,0)$，$C(m+3,0)$，

$l_1=\sqrt{(m-3)^2+1}$，$l_2=\sqrt{(m+3)^2+1}$，

$s=\frac{l_1}{l_2}+\frac{l_2}{l_1}=\frac{{l_1}^2+{l_2}^2}{l_1l_2}=\frac{2\left(m^2+10\right)}{\sqrt{(m^2+10)^2-36m^2}}$，

令$m^2+10=t\,(t\geqslant10)$，

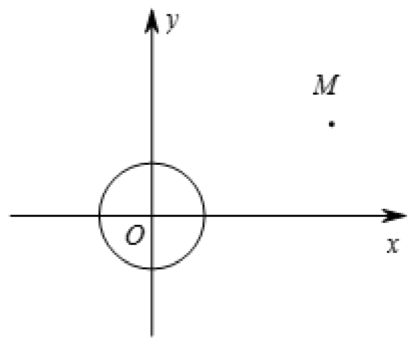
$s=\frac{2t}{\sqrt{t^2-36t+360}}=\frac{2}{\sqrt{360\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{20}\right)^2+\frac{1}{10}}}\leqslant2\sqrt{10}$，

当且仅当$t=20$即$m=\pm\sqrt{10}$时等号成立，

$\therefore$当$m=\pm\sqrt{10}$时，s的最大值为$2\sqrt{10}$．

考点
- 函数与导数
  - 函数
    - 值域
- 平面向量
  - 平面向量的数量积
- 解析几何
  - 直线与方程
  - 圆与方程
    - 圆的方程

21 已知圆O：$x^2+y^2=2$和点$M(4,2)$．



（1）过点M向圆O引切线l，求直线l的方程．

（2）求以点M为圆心，且被直线$y=2x-1$截得的弦长为4的圆M的方程．

（3）设P为（2）中圆M上任一点，过点P向圆O引切线，切点为Q．试探究：平面内是否存在一定点R，使得$\frac{|PQ|}{|PR|}$为定值？若不存在，请说明理由．

答案 （1）$x-y-2=0$或$x-7y+10=0$．

（2）$(x-4)^2+(y-2)^2=9$．

（3）存在定点$R\left(1,\frac{1}{2}\right)$或$\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$，使得$\frac{|PQ|}{|PR|}$为定值．

解析 （1）显然l不垂直于x轴，

设l的方程为$y-2=k(x-4)$，

$\because l$与圆O相切，

$\therefore\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解得$k=\frac{1}{7}$或1，

$\therefore$直线l的方程为$y-2=x-4$或$y-2=\frac{1}{7}(x-4)$，

即$x-y-2=0$或$x-7y+10=0$．

（2）设圆M的半径为r，$r>0$，

则圆M的方程为$(x-4)^2+(y-2)^2=r^2$，

M到直线$y=2x-1$的距离$d=\frac{|8-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，

又弦长为4，

$\therefore$半径$r=\sqrt{d^2+2^2}=3$．

$\therefore$圆M的方程为$(x-4)^2+(y-2)^2=9$．

（3）设$P(x,y)$，$R(a,b)$，

则$(x-4)^2+(y-2)^2=9$，即$x^2+y^2=8x+4y-11$，

$|PQ|^2=x^2+y^2-2=8x+4y-13$，

$|PR|^2=(x-a)^2+(y-b)^2=(8-2a)x+(4-2b)y+a^2+b^2-11$．

若$\dfrac{|PQ|}{|PR|}$为定值，设$\dfrac{|PQ|}{|PR|}=t$，

则有$8x+4y-13=(8-2a)t^2x+(4-2b)t^2y+(a^2+b^2-11)t^2$，

于是有$\begin{cases}(8-2a)t^2=8\\(4-2b)t^2=4\\(a^2+b^2-11)t^2=-13\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\\t^2=\frac{4}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{8}{5}\\b=\frac{4}{5}\\t^2=\frac{5}{3}\end{cases}$，

故存在定点$R\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$或$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，使得$\dfrac{|PQ|}{|PR|}$为定值．

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 平面直角坐标系
    - 直线的倾斜角与斜率
    - 直线的方程
    - 直线的位置关系
  - 圆与方程
    - 圆的定义
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系

22 不等式$\begin{cases}x+y-4\leqslant 0\\2x-y+7\geqslant 0\\x+2y-4\geqslant 0\end{cases}$所表示的区域为$Q$，若定义区域边界的公共点为区域顶点．

（1）求区域Q的顶点及区域的面积；

（2）若点$P(x,y)\in Q$，求$\dfrac{y}{x}$的取值范围；

（3）若点$P(x,y)\in Q$，使得$z_1=y-3x$取最大值时所对应的点为M；

① 求点M坐标；

② 若仅在点M处使得$z_2=2x+ay$有最小值，求a的取值范围．

答案

（1）$\frac{15}{2}$

（2）$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[0,+\infty)$

（3）① $(-2,3)$

② $(-1,4)$

解析

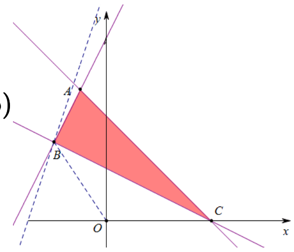
（1）联立方程组解得区域Q的顶点坐标为$(-1,5)$，$(-2,3)$，$(4,0)$

分别记为$A(-1,5)$，$B(-2,3)$，$C(4,0)$，则$\overrightarrow{CA}=(-5,5)$，$\overrightarrow{CB}=(-6,3)$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|[-5\times3-5\times(-6)]|=\frac{15}{2}$

（2）$\frac{y}{x}$的几何意义是(x,y)与连线的斜率，

由图中观察不难得到$\frac{y}{x}$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[0,+\infty)$



（3）① 平移斜率为3的动直线，显然当此时直线过B点是，

纵截距z_1最大，因此M即为B点．

② 对a进行讨论：

(i) $a=0$，$z_2=2x$，满足在$M(B)$处有最小值；

(ii) $a>0$，目标函数变为$y=-\frac{2}{a}x+\frac{z_2}{a}$，若使其在$M(B)$处有最小值，则应有$-\frac{2}{a}<-\frac{1}{2}$，解得：$0<a<4$

(iii) $a<0$，目标函数变为$y=-\frac{2}{a}x+\frac{z_2}{a}$，若使其在$M(B)$处有最小值，则应有$-\frac{2}{a}>2$，解得：$-1<a<0$

综上所述，a的取值范围是$(-1,4)$

考点

- 函数与导数
  - 函数的模型及其应用
- 不等式与线性规划
  - 简单的线性规划
    - 截距问题
    - 二元一次不等式（组）所表示的平面区域
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的倾斜角与斜率

圆O：$x^2+y^2=16$与x轴交于A、B两点（点A在点B的左侧），l_1、l_2是分别过A、B点的圆O的切线，过此圆上的另一个点P（P点是圆上任一不与A、B重合的动点）作此圆的切线，分别交l_1、l_2于C，D两点，且AD、BC两直线交于点M．

（1）设切点P坐标为(x_0,y_0)，求证：切线CD的方程为$x_0x+y_0y=16$．

（2）设点M坐标为(m,n)，试写出m^2与n^2的关系表达式（写出详细推理与计算过程）．

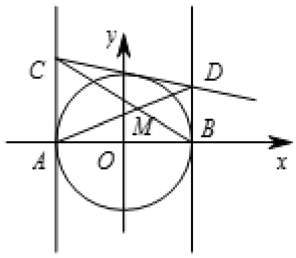
（3）判断是否存在点$Q\,(a,0)\,(a>0)$，使得$|QM|$的最小值为$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$？若存在，求出Q点的坐标．若不存在，请说明理由．

答案 （1）证明见解析．

（2）$m^2+4n^2=16$．$(n\neq 0)$

（3）存在$Q\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{3},0\right)$，使$|OM|$最小值为$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

解析 （1）当P为$(0,4)$时，切线方程为$y=4$．



符合$x_0x+y_0y=16$．

当P为$(0,-4)$时，切线方程为$y=-4$．

也符合$x_0x+y_0y=16$．

当$x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$时，过P的切线斜率为$-\dfrac{x_0}{y_0}$

$\therefore$切线方程CD为$y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$

即$x_0x+y_0y={x_0}^2+{y_0}^2=16$．

综上，切线CD的方程为$x_0x+y_0y=16$．

（2）依题意$A\,(-4,0)$，$B\,(4,0)$

直线l_1：$x=-4$，l_2为$x=4$．

$\therefore C\left(-4,\dfrac{16+4x_0}{y_0}\right)$，$D\left(4,\dfrac{16-4x_0}{y_0}\right)$

$\therefore$直线AD：$y=\dfrac{4-x_0}{2y_0}(x+4)$ ①

直线BC：$y=\dfrac{4+x_0}{-2y_0}(x-4)$ ②

由①②解得$\begin{cases}x=x_0\\ y=\frac{16-{x_0}^2}{2y_0}\end{cases}$

即$m=x_0$，$n=\dfrac{16-{x_0}^2}{2y_0}=\dfrac{{y_0}^2}{2y_0}=\dfrac{1}{2}y_0$，$(y_0\neq 0)$

又$\because {x_0}^2+{y_0}^2=16$

$\therefore m^2+4n^2=16$．$(n\neq 0)$

（3）假设存在．

$|QM|=\sqrt{(m-a)^2+n^2}$

$=\sqrt{m^2-2am+a^2+4-\frac{m^2}{4}}$

$=\sqrt{\frac{3}{4}m^2-2am+a^2+4}$．

令$f(m)=\frac{3}{4}m^2-2am+a^2+4$，$-4<m<4$

依题意，$f(m)_{\min}=\frac{7}{4}$．

又∵对称轴为$m=\frac{4}{3}a$，$(a>0)$

∴当$0<\frac{4}{3}a<4$即$0<a<3$时

$f(m)_{\min}=f\left(\frac{4}{3}a\right)=-\frac{1}{3}a^2+4=\frac{7}{4}$

解得$a=\frac{3}{2}\sqrt{3}$．

而当$\frac{4}{3}a\geqslant 4$即$a\geqslant 3$时，$f(m)$无最小值

∴存在$Q\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},0\right)$，使$|OM|$最小值为$\frac{\sqrt{7}}{2}$．

考点 一解析几何
- 直线与方程
  - 直线的方程
- 圆与方程
  - 圆的定义
  - 圆的方程
  - 直线与圆的位置关系

24 在直角坐标系xOy中，以原点为圆心的圆O与直线$x-\sqrt{3}y=4$相切．

（1）求圆O的方程；

（2）从点$A(4,4)$引圆的切线，切点为B，求切线长$|AB|$的值；

（3）$P(x,y)$是圆O上任意一点，求$x-2y$的取值范围．

答案 （1）$x^2+y^2=4$．

（2）$|AB|=2\sqrt{7}$．

（3）$[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$．

解析　（1）设所求的圆的方程为：$x^2+y^2=r^2$

$\because$直线$x-\sqrt{3}y=4$与圆相切

圆心$(0,0)$到直线$x-\sqrt{3}y=4$的距离$d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}}=2=r$

所求的圆的方程为：$x^2+y^2=4$．

（2）从点$A(4,4)$引圆的切线，所以$|AO|=\sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$，圆的半径为：$2$

，

切点为B，切线长$|AB|=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$．

（3）圆的方程为：$x^2+y^2=4$，设圆上的任意点为$(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$\alpha\in\mathbf{R}$，

所以$x-2y=2\cos\alpha-4\sin\alpha=2\sqrt{5}\cos(\alpha+\theta)$，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，

$\cos(\alpha+\theta)\in[-1,1]$．

所以$2\sqrt{5}\cos(\alpha+\theta)\in\left[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}\right]$．

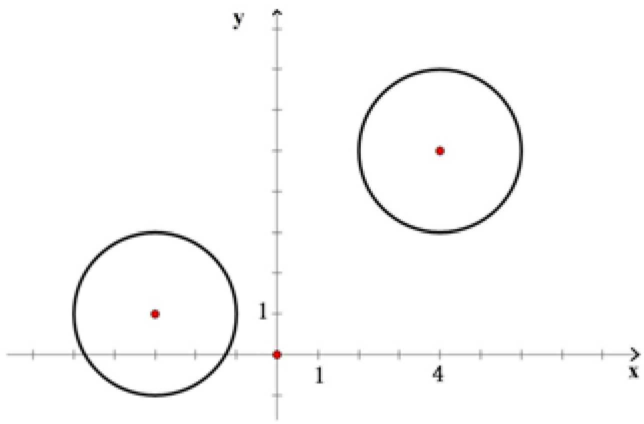
考点　一解析几何

　　├圆与方程

　　　　├圆的方程

　　　　└直线与圆的位置关系

25　在平面直角坐标系xoy中，已知圆C_1：$(x+3)^2+(y-1)^2=4$和圆C_2：$(x-4)^2+(y-5)^2=4$，



（1）若直线l过点$A(4,0)$，且被圆C_1截得的弦长为$2\sqrt{3}$，求直线l的方程；

（2）设P为平面上的点，满足：存在过点P的无穷多相互垂直的直线l_1和l_2，它们分别与圆C_1和圆C_2相交，且直线l_1被圆C_1截得的弦长与直线l_2被圆C_2截得的弦长相等，试求所有满足条

件的点P的坐标．

答案　（1）直线l的方程为$y=0$或$7x+24y-28=0$．

（2）见解析．

解析　（1）由于直线$x=4$与圆C_1不相交，所以直线l的斜率存在，

设直线方程为$y=k(x-4)$，圆C_1的圆心$C_1(-3,1)$到直线l的距离为d

$\because l$被圆C_1截得的弦长为$2\sqrt{3}$

则$d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$．

又$d=\dfrac{|1-k(-3-4)|}{\sqrt{1+k^2}}$，则$k(24k+7)=0$，

解得$k=0$或$k=-\dfrac{7}{24}$．

$\therefore$直线l的方程为$y=0$或$7x+24y-28=0$．

（2）设点$P(a,b)$满足条件，不妨设直线l_1的方程为$y-b=k(x-a)$，（$k\neq 0$）则直线l_2的方程为$y-b=-\dfrac{1}{k}(x-a)$．

$\because$圆C_1与圆C_2半径相等，且直线l_1被圆C_1截得的弦长与直线l_2被圆C_2截得的弦长相等，

$\therefore$圆心C_1到直线l_1的距离与圆心C_2到直线l_2的距离相等，

即$\dfrac{|1-k(-3-a)-b|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\left|5+\frac{1}{k}(4-a)-b\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$

整理得$|1+3k+ak-b|=|5k+4-a-bk|$

所以$1+3k+ak-b=\pm(5k+4-a-bk)$

即$(a+b-2)k=b-a+3$或$(a-b+8)k=a+b-5$

$\because k$的取值有无穷多个，

$\therefore\begin{cases}a+b-2=0\\b-a+3=0\end{cases}$或$\begin{cases}a-b+8=0\\a+b-5=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\b=\frac{13}{2}\end{cases}$

即这样的点只能是$P_1\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$或$P_2\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{13}{2}\right)$

经检验，P_1、P_2满足题目条件．

考点　解析几何

- 直线与方程
  - 直线的方程

—圆与方程

　└直线与圆的位置关系

26 在平面直角坐标系xOy中，点A的坐标为$(0,3)$，设圆C的半径为1，且圆心C在直线$l:y=2x-4$上．

（1）若圆心C又在直线$y=x-1$上，过点A作圆C的切线，求此切线的方程；

（2）若圆C上存在点M，使得$|MA|=2|MO|$，求圆心C的横坐标的取值范围．

答案　（1）$y=3$或$3x+4y-12=0$.

（2）$[0,\frac{12}{5}]$.

解析　（1）由$\begin{cases}y=2x-4,\\ y=x-1.\end{cases}$得圆心$C$为$(3,2)$,

因为圆C的半径为1,

所以圆C的方程为:$(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

显然切线的斜率一定存在，设所求圆C的切线方程为$y=kx+3$，

即$kx-y+3=0$.

所以$\frac{|3k-2+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，则$|3k+1|=\sqrt{k^2+1}$.

所以$2k(4k+3)=0$，解得$k=0$或者$k=-\frac{3}{4}$．

则所求圆C的切线方程为: $y=3$或$3x+4y-12=0$.

（2）因为圆C的圆心在直线$l:y=2x-4$上，所以设圆心C为$(a,2a-4)$，

则圆C的方程为:$(x-a)^2+[y-(2a-4)]^2=1$.

又$|MA|=2|MO|$，设M为(x,y)，则$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$.

整理得： $x^2+(y+1)^2=4$，设该方程对应的圆为D，

圆D圆C需有交点，即两圆相交或相切。

所以$2-1\leqslant\sqrt{(a-0)^2+(2a-4+1)^2}\leqslant 2+1$

解得$a\in[0,\frac{12}{5}]$.

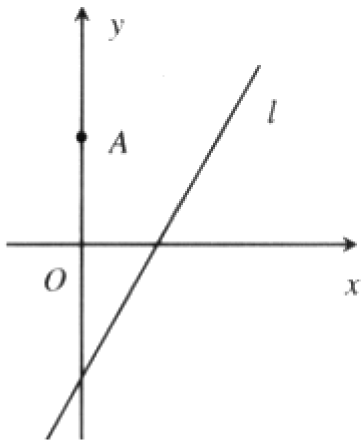
考点　—解析几何

—直线与方程

　└直线的方程

- 圆与方程
  - 圆的方程
  - 直线与圆的位置关系
  - 圆与圆的位置关系

27 如图，在平面直角坐标系xOy中，点$A(0,3)$，直线$l:y=2x-4$，设圆C的半径为1，圆心在直线l上．



（1）若圆心C也在直线$y=x-1$上，过点A作圆C的切线，求切线的方程；

（2）若圆C上存在唯一一点M，使$MA=2MO$，求圆C的方程．

答案 （1）$y=3$或$3x+4y-12=0$．

（2）$x^2+(y+4)^2=1$或$(x-\frac{12}{5})^2+(y-\frac{4}{5})^2=1$．

解析 （1）由$\begin{cases}y=2x-4\\y=x-1\end{cases}$得圆心$C$为$(3,2)$，

因为圆C的半径为1，

所以圆C的方程为：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$．

显然切线的斜率一定存在，设所求圆C的切线方程为$y=kx+3$，即$kx-y+3=0$

．

由$\frac{|3k-2+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，得$|3k+1|=\sqrt{k^3+1}$．

解得$k=0$或者$k=-\frac{3}{4}$．

所以所求圆C的切线方程为：$y=3$或$3x+4y-12=0$．

（2）因为圆C的圆心在直线$l:y=2x-4$上，所以，设圆心C为$(a,2a-4)$，

则圆C的方程为：$(x-a)^2+[y-(2a-4)^2]=1$．

又因为$MA=2MO$，所以设M为(x,y)，则$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$．

整理得：$x^2+(y+1)^2=4$设为圆D．

所以点M应该既在圆C上又在圆D上，即圆C和圆D有唯一交点．

所以$\sqrt{a^2+[(2a-4)-(-1)]^2}=|2-1|$或$\sqrt{a^2+[(2a-4)-(-1)]^2}=|2-1|$．

由$5a^2-12a+8=0$，得$a\in\varnothing$．

由$5a^2-12a=0$，得$a=0$，或$a=\frac{12}{5}$．

所以圆心坐标为$(0,-4)$或$(\frac{12}{5},\frac{4}{5})$

综上所述，圆C的方程为：$x^2+(y+4)^2=1$或$(x-\frac{12}{5})^2+(y-\frac{4}{5})^2=1$．

考点

- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系

28 已知O为平面直角坐标系的原点，过点$M(-2,0)$的直线l与圆$x^2+y^2=1$交于P，Q两点．

（1）若$|PQ|=\sqrt{3}$，求直线l的方程；

（2）若$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$，求直线$l$与圆的交点坐标．

答案 （1）$x-\sqrt{15}y+2=0$或$x+\sqrt{15}y+2=0$．

（2）P点坐标为$(-\frac{7}{8},\frac{\sqrt{15}}{8})$或$(-\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8})$，$Q$点坐标为$(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4})$或$(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4})$．

解析 （1）依题意，直线l的斜率存在，

因为直线l过点$M(-2,0)$，可设直线$l:y=k(x+2)$．

因为$|PQ|=\sqrt{3}$，圆的半径为1，P，Q两点在圆$x^2+y^2=1$上，

所以圆心O到直线l的距离等于$\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}$．

又因为$\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$，所以$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$，

所以直线l的方程为$x-\sqrt{15}y+2=0$或$x+\sqrt{15}y+2=0$．

（2）设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

所以$\overrightarrow{MQ}=(x_2+2,y_2)$，$\overrightarrow{MP}=(x_1+2,y_1)$．

因为$\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$，

所以$\begin{cases}+2=2(x_1+2)\\ y_2=2y_1\end{cases}$ 即$\begin{cases}=2(x_1+1)\\ y_2=2y_1\end{cases}$（*）；

因为P，Q两点在圆上，

所以$\begin{cases}{}^2+{y_1}^2=1\\ {x_2}^2+{y_2}^2=1\end{cases}$把（*）代入，得$\begin{cases}{}^2+{y_1}^2=1\\ 4(x_1+1)^2+4{y_1}^2=1\end{cases}$，

所以$\begin{cases}=-\frac{7}{8}\\ y_1=\pm\frac{\sqrt{15}}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}=\frac{1}{4}\\ y_2=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\end{cases}$，

所以P点坐标为$(-\frac{7}{8},\frac{\sqrt{15}}{8})$或$(-\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8})$，

Q点坐标为$(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4})$或$(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4})$．

考点

- 平面向量
  - 平面向量的基本概念
    - 向量的线性运算
- 解析几何
  - 直线与方程
    - 直线的方程
  - 圆与方程
    - 直线与圆的位置关系

29 已知圆$O:x^2+y^2=4$，点P为直线$l:x=4$上的动点．

（1）若从P到圆O的切线长为$2\sqrt{3}$，求P点的坐标以及两条切线所夹劣弧长；

（2）若点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，直线PA，PB与圆O的另一个交点分别为M，N，求证：直线MN经过定点$(1,0)$．

答案 （1）$\frac{4\pi}{3}$．

（2）证明过程见解析．

解析 （1）根据题意，设$P(4,t)$．

设两切点为C，D，则$OC\perp PC$，$OD\perp PD$，由题意可知$|PO|^2=|OC|^2+|PC|^2$，

即$4^2+t^2=2^2+(2\sqrt{3})^2$，解得$t=0$，所以点$P$坐标为$(4,0)$．

在$\mathrm{Rt}\triangle POC$中，易得$\angle POC=60^\circ$，所以$\angle DOC=120^\circ$．

所以两切线所夹劣弧长为$\frac{2\pi}{3}\times 2=\frac{4\pi}{3}$.

（2）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(1,0)$，依题意，直线PA经过点$A(-2,0)$，$P(4,t)$，

可以设$AP:y=\frac{t}{6}(x+2)$，和圆$x^2+y^2=4$联立，得到$\begin{cases} y=\frac{t}{6}(x+2) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$，

代入消元得到，$(t^2+36)x^2+4t^2x+4t^2-144=0$，

因为直线AP经过点$A(-2,0)$，$M(x_1,y_1)$，所以-2，x_1是方程的两个根，

所以有$-2x_1=\frac{4t^2-144}{t^2+36}$，$x_1=\frac{72-2t^2}{t^2+36}$，

代入直线方程$y=\frac{t}{6}(x+2)$得，$y_1=\frac{t}{6}(\frac{72-2t^2}{t^2+36}+2)=\frac{24t}{t^2+36}$.

同理，设$BP:y=\frac{t}{2}(x-2)$，联立方程有$\begin{cases} y=\frac{t}{2}(x-2) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$，

代入消元得到$(4+t^2)x^2-4t^2x+4t^2-16=0$，

因为直线BP经过点$B(2,0)$，$N(x_2,y_2)$，所以2，x_2是方程的两个根，

$2x_2=\frac{4t^2-16}{t^2+4}$，$x_2=\frac{2t^2-8}{t^2+4}$，

代入$y=\frac{t}{2}(x-2)$得到$y_2=\frac{t}{2}(\frac{2t^2-8}{t^2+4}-2)=\frac{-8t}{t^2+4}$.

若$x_1=1$，则$t^2=12$，此时$x_2=\frac{2t^2-8}{t^2+4}=1$，

显然M，Q，N三点在直线$x=1$上，即直线MN经过定点$Q(1,0)$，

若$x_1\neq 1$，则$t^2\neq 12$，$x_2\neq 1$，

所以有$k_{MQ}=\frac{y_1-0}{x_1-1}=\frac{\frac{24t}{t^2+36}}{\frac{72-2t^2}{t^2+36}-1}=\frac{8t}{12-t^2}$，

$k_{NQ}=\frac{y_2-0}{x_2-1}=\frac{\frac{-8t}{t^2+4}}{\frac{2t^2-8}{t^2+4}-1}=\frac{-8t}{t^2-12}$，

所以$k_{MQ}=k_{NQ}$，所以M，N，Q三点共线，即直线MN经过定点$Q(1,0)$.

综上所述，直线MN经过定点$Q(1,0)$.

考点

- 解析几何
  - 圆与方程
    - 直线与圆的位置关系

30 设圆C_1的方程为$(x-2)^2+(y-3m)^2=4m^2$，直线l的方程为$y=x+m-1$.

（1）求C_1关于l对称的圆C_2的方程；

（2）当m变化且$m\neq 0$时，求证：C_2的圆心在一条定直线上，并求C_2所表示的一系列圆的公切线方程 .

答案 （1）$(x-1-2m)^2+(y-1-m)^2=4m^2$.

（2）$y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$或$x=1$.

解析 （1）由已知可得，圆C_1的圆心为$C_1(2,3m)$，

设C_1关于直线l对称点为$C_2(a,b)$

则$\begin{cases}\frac{b-3m}{a-2}=-1\\ \frac{3m+b}{2}=\frac{2+a}{2}+m-1\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1+2m\\ b=1+m\end{cases}$

所以圆C_2的方程为$(x-1-2m)^2+(y-1-m)^2=4m^2$.

（2）由$\begin{cases}a=1+2m\\ b=1+m\end{cases}$消去$m$得$a-2b+1=0$

所以圆C_2的圆心在定直线$x-2y+1=0$上．

①当公切线的斜率不存在时，

易求公切线的方程为$x=1$；

②当公切线的斜率存在时，

设直线$y=kx+b$与圆系中的所有圆都相切

则$\frac{|k(1+2m)-(1+m)+b|}{\sqrt{1+k^2}}=2|m|$，

因为直线$y=kx+b$与圆系中的所有圆都相切，

所以上述方程对所有的m值都成立，

解得：$k=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{7}{4}$

C_2所表示的一系列圆的公切线方程为$y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$或$x=1$.

考点 一解析几何
- 圆与方程
  - 直线与圆的位置关系