



数列-期中必做题

1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n + 1$, $a_1 = 3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 3^n + n - 1$.

解析 由 $a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n + 1$ 得 $a_{n+1} - a_n = 2 \times 3^n + 1$
 则 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$
 $= (2 \times 3^{n-1} + 1) + (2 \times 3^{n-2} + 1) + \cdots + (2 \times 3^2 + 1) + (2 \times 3^1 + 1) + 3$
 $= 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3^1) + (n-1) + 3$
 $= 2 \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} + (n-1) + 3$
 $= 3^n - 3 + n - 1 + 3$
 $= 3^n + n - 1$
 所以 $a_n = 3^n + n - 1$.

考点 一数列
 | 数列的概念
 | | 数列的定义及表示方法
 | | 数列的递推公式

2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1, 2^{n-1}a_n = a_{n-1} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

解析 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

考点 一数列
 | 数列的概念
 | | 数列的递推公式



已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ，当 $n \geq 2$ 时， $a_n = 2a_{n-1} - 1$ ，令 $b_n = a_n - 1$ 。

(1) 求证： $\{b_n\}$ 是等比数列。

(2) 若 $c_n = a_n + n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

答案 (1) 证明见解析。

$$(2) S_n = 2^{n+1} + \frac{n^2 + 3n}{2} - 2.$$

解析 (1) $\because a_1 = 3, \therefore b_1 = 2, \because b_n = a_n - 1, \therefore n \geq 2$ 时， $b_{n-1} = a_{n-1} - 1$,

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1} = \frac{2a_{n-1} - 1 - 1}{a_{n-1} - 1} = \frac{2(a_{n-1} - 1)}{a_{n-1} - 1} = 2,$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为2，公比为2的等比数列。

(2) 由(1)知， $b_n = 2^n$,

$$\because b_n = a_n - 1, \therefore a_n = 2^n + 1, \text{ 则 } c_n = a_n + n = 2^n + n + 1,$$

$$\therefore S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$= (2^1 + 2) + (2^2 + 3) + \dots + (2^n + n + 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) + (2 + 3 + 4 + \dots + n + 1)$$

$$= \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} + \frac{n(n+3)}{2} = 2^{n+1} + \frac{n^2 + 3n}{2} - 2.$$

考点 一 数列

— 数列的概念

└ 数列的递推公式

— 等差数列

└ 等差数列的前 n 项和

— 等比数列

└ 等比数列的概念和通项

└ 等比数列的性质

└ 等比数列的前 n 项和

4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^+)$ 。

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列。

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n 。



答案 (1) 证明见解析 .

(2) $S_n = (2n - 3) \times 2^n + 3$.

解析 (1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^+)$.

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1 ,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列 , 公差为 1 , 首项 $\frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 可得 : $\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \times 1 = \frac{2n-1}{2}$.

$$\therefore a_n = (2n-1) \times 2^{n-1} .$$

$$S_n = 1 + 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-2} + (2n-1) \times 2^{n-1} ,$$

$$2S_n = 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n ,$$

所以 :

$$-S_n = 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + 2 \times 2^{n-1} - (2n-1) \times 2^n$$

$$= \frac{2 \times (2^n - 1)}{2 - 1} - 1 - (2n-1) \times 2^n = (3-2n) \times 2^n - 3$$

$$\therefore S_n = (2n-3) \times 2^n + 3 .$$

考点 一 数列

— 数列的概念

— 数列的递推公式

— 数列的前 n 项和

— 等差数列

— 等差数列的概念和通项

5 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.

(1) 求正项数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求和 $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}$.

答案 (1) $a_n = \frac{1}{n+1}$.

(2) $\frac{n}{n+1}$.

解析 (1) 由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$,

$$\therefore a_{n+1}a_n + a_{n+1} = a_n ,$$



$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1,$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是首项为2, 公差为1的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 2 + n - 1 = n + 1,$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$(2) \therefore \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}$$

$$= \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}.$$

考点

— 数列

— 数列的概念

— 数列的递推公式

— 数列的前n项和

— 等差数列

— 等差数列的概念和通项

6 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

(1) 求证: $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $a_n = n \times 2^{n-1}$.

解析

(1) 证明: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$,

则有 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2a_n - 4a_n$,

即 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$,

又由 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 则 $a_2 - 2a_1 = 2$,



则数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 以 $a_2 - 2a_1 = 2$ 为首项，2为公比的等比数列。

(2) 有(1)有结论，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 以 $a_2 - 2a_1 = 2$ 为首项，2为列，

$$\text{则 } a_{n+1} - 2a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\text{变形可得: } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又由 } \frac{a_2}{2^2} - \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2},$$

则数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项， $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

$$\text{则 } \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2},$$

$$\text{则 } a_n = n \times 2^{n-1};$$

即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n \times 2^{n-1}$ 。

故答案为： $a_n = n \times 2^{n-1}$ 。

考点

一数列

— 数列的概念

└ 数列的递推公式

— 等比数列

└ 等比数列的概念和通项

7 若数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 3$ 且 $a_{n+1} = a_n^2$ (n 是正整数)，则它的通项公式是_____。

答案

$$a_n = 3^{2^{n-1}}$$

解析

由题意知 $a_n > 0$,

将 $a_{n+1} = a_n^2$ 两边取对数得 $\lg a_{n+1} = 2 \lg a_n$ ，即 $\frac{\lg a_{n+1}}{\lg a_n} = 2$ ，

所以数列 $\{\lg a_n\}$ 是以 $\lg a_1 = \lg 3$ 为首项，公比为2的等比数列，

$$\lg a_n = \lg a_1 \cdot 2^{n-1} = \lg 3^{2^{n-1}}, \text{ 即 } a_n = 3^{2^{n-1}}.$$

考点

一数列

— 数列的概念

└ 数列的递推公式

8 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n + 1$ ，求：



- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (3) 求 $f(n) = (n-7) \cdot T_n$ 的最小值 .

答案

$$\begin{aligned} (1) \quad a_n &= \begin{cases} 3, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases} . \\ (2) \quad T_n &= \frac{5}{24} - \frac{1}{4(n+1)} . \\ (3) \quad f(n)_{\min} &= -\frac{15}{24} . \end{aligned}$$

解析

(1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = n^2 + n + 1, S_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 1,$$

$$\text{两式相减得 } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n,$$

经验证 a_1 不满足上式 .

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ 2n, n \geq 2 \end{cases} .$$

$$(2) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2n \cdot 2(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{5}{24} - \frac{1}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{经检验 } T_1 \text{ 满足上式, 故 } T_n = \frac{5}{24} - \frac{1}{4(n+1)} .$$

(3)

$$\begin{aligned} f(n) &= (n-7) \cdot T_n = (n-7) \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{4(n+1)} \right) = \frac{5n^2 - 36n + 7}{24(n+1)} = \frac{5(n+1)^2 - 46(n+1) + 48}{24(n+1)} \\ &= \frac{5}{24}(n+1) + \frac{2}{n+1} - 46 \geq 2\sqrt{\frac{5}{24}(n+1) \cdot \frac{2}{n+1}} - 46 = 2\sqrt{\frac{5}{12}} - 46, \text{ 当且仅当} \\ &\frac{5(n+1)}{24} = \frac{2}{n+1} \text{ 时, 等号成立,} \end{aligned}$$

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*, \text{ 求 } f(3) = -4 \times \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{16} \right) = -\frac{7}{12}, f(2) = -5 \times \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} \right) = -\frac{15}{24},$$

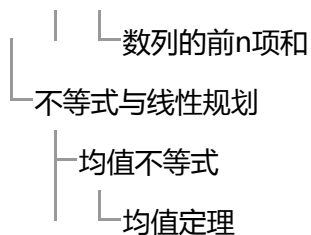
$$\therefore \text{当 } n=2 \text{ 时, } f(n) \text{ 取最小值, } f(n)_{\min} = f(2) = -\frac{15}{24} .$$

考点

一数列

一数列的概念

└ 数列的定义及表示方法



9 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，其前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2^n + a(n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求 a 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = (2n-1)a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

答案 (1) $a = -1$ ， $a_n = 2^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) $T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$ 。

解析 (1) 当 $n=1$ 时， $S_1 = a_1 = 2 + a$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$ 。

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，

所以 $a_1 = 2 + a = 2^{1-1} = 1$ ，即 $a_1 = 1$ ， $a = -1$ 。

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) 由(I)得 $b_n = (2n-1)a_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1}$ 。

则 $T_n = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$ 。①

$2T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n$ 。②

①-②得 $-T_n = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \times 2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n$

$= 1 + 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n$

$= 1 + 4(2^{n-1} - 1) - (2n-1) \cdot 2^n$

$= -(2n-3) \cdot 2^n - 3$ 。

所以 $T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$ 。

考点 一 数列

├── 数列的概念

├── 数列的定义及表示方法

└── 数列的前n项和

一 等比数列



等比数列的概念和通项

等比数列的前n项和

10 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \lambda a_n - \frac{n}{\lambda + 1}$, ($\lambda \neq \pm 1, n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 如果 $\lambda = 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) (II) 如果 $\lambda = 2$, 求证: 数列 $\left\{a_n + \frac{1}{3}\right\}$ 为等比数列, 并求 S_n .

(3) (III) 如果数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 求 λ 的取值范围.

答案

(1) $a_n = -1$.

(2) 证明见解析; $S_n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3}$.

(3) $\lambda > 1$ 或 $\lambda < -1$.

解析

(1) 由题意得 $\lambda = 0$ 时, $S_n = -n$.

$n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = -1$.

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -1$.

$\therefore a_n = -1$.

(2) 证明: 当 $\lambda = 2$ 时, $S_n = 2a_n - \frac{n}{3}$,

$S_{n+1} = 2a_{n+1} - \frac{n+1}{3}$, 相减得, $a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{3}$,

$\therefore a_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(a_n + \frac{1}{3}\right)$. $\left\{a_n + \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, 以2为公比的等比数列.

$\therefore a_n = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3}$, $S_n = 2a_n - \frac{n}{3} = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3}$.

(3) 解: 由(I)可得, 显然 $\lambda \neq 0$,

当 $n = 1$ 时, $S_1 = \lambda a_1 - \frac{1}{\lambda + 1}$, 得 $a_1 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \lambda a_n - \frac{n}{\lambda + 1}$, $S_{n-1} = \lambda a_{n-1} - \frac{n-1}{\lambda + 1}$.

相减得 $a_n = \frac{\lambda}{\lambda - 1} a_{n-1} + \frac{1}{\lambda^2 - 1}$,

可变形为 $a_n + \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(a_{n-1} + \frac{1}{\lambda + 1}\right)$.

$\because \lambda \neq \pm 1$, $\therefore a_1 + \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \neq 0$.

$\therefore \left\{a_n + \frac{1}{\lambda + 1}\right\}$ 是等比数列.



$$a_n = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^{n-1} - \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^n - \frac{1}{\lambda + 1} .$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列 .

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{\lambda+1} > 0 \\ \frac{\lambda}{\lambda-1} > 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{1}{\lambda+1} < 0 \\ 0 < \frac{\lambda}{\lambda-1} < 1 \end{cases} ,$$

$\therefore \lambda$ 的取值范围是 $\lambda > 1$ 或 $\lambda < -1$.

考点

—数列

—数列的概念

—数列的递推公式

—数列的前 n 项和

11 在数列 $\{a_n\}$ 中, $S_{n+1} = 4a_n + 2$, $a_1 = 1$.

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列 .

(2) $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证数列 $\{c_n\}$ 是等差数列 .

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前项和公式 .

答案

(1) 见解析 .

(2) 见解析 .

(3) 见解析 .

解析

(1) 由 $S_{n+1} = 4a_n + 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 知 $S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$,

两式相减得 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, 即 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$.

又 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$,

$\therefore b_{n+1} = 2b_n$,

已知 $S_2 = 4a_1 + 2$, $a_1 = 1$, 解得 $a_2 = 5$, $b_1 = a_2 - 2a_1 = 3$.

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列, $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

(2) $\because c_n = \frac{a_n}{2^n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

$$\therefore c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{4} .$$

又 $c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差是 $\frac{3}{4}$ 的等差数列, $c_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$.



$$(3) \because c_n = \frac{a_n}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 又 } c_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4},$$

$$\therefore a_n = (3n - 1) \cdot 2^{n-2}.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = 4a_{n-1} + 2 = (3n - 4) \cdot 2^{n-1} + 2.$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } S_1 = a_1 = 1 \text{ 也适合上式,}$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } S_n = (3n - 4) \cdot 2^{n-1} + 2.$$

考点

一 数列

— 数列的概念

└ 数列的前 n 项和

— 等差数列

└ 等差数列的概念和通项

— 等比数列

└ 等比数列的概念和通项

12 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*.$

(1) 求 a_1, a_2 ;

(2) 判断数列 $\{a_n\}$ 的增减性, 并说明理由;

(3) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 求数列 $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的最大项和最小项.

答案

(1) $a_1 = 0.45, a_2 = 1.215.$

(2) 当 $1 \leq n \leq 9$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 则 $1 \leq n \leq 10$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, $n \in \mathbf{N}^*;$

当 $n \geq 10$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, $n \in \mathbf{N}^*.$

(3) 最大项为 $c_{10} = 2.7$, 最小项为 $c_9 = -0.9.$

解析

(1) $a_1 = 0.45, a_2 = 1.215.$

$$(2) a_{n+1} - a_n = (n + 0.5) \cdot 0.9^{n+1} - (n - 0.5) \cdot 0.9^n = 0.9^n (0.9n + 0.45 - n + 0.5)$$

$$= -0.1 \times 0.9^n \times (n - 9.5).$$

则当 $1 \leq n \leq 9$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 则 $1 \leq n \leq 10$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, $n \in \mathbf{N}^*$

;

当 $n \geq 10$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, $n \in \mathbf{N}^*.$



(3) 由上问可得, $b_n = a_{n+1} - a_n = -0.1 \times 0.9^n \times (n - 9.5)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

令 $c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 即求数列 $\{c_n\}$ 的最大项和最小项.

$$\text{则 } c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0.9 \cdot \frac{n - 8.5}{n - 9.5} = 0.9 \left(1 + \frac{1}{n - 9.5} \right).$$

则数列 $\{c_n\}$ 在 $1 \leq n \leq 9$ 时递减, 此时 $c_9 \leq c_n < 0.9$, 即 $-0.9 \leq c_n < 0.9$;

数列 $\{c_n\}$ 在 $n \geq 10$ 时递增, 此时 $0.9 < c_n \leq c_{10}$, 即 $0.9 < c_n \leq 2.7$.

因此数列 $\{c_n\}$ 的最大项为 $c_{10} = 2.7$, 最小项为 $c_9 = -0.9$.

考点

一数列

—数列的概念

—数列的定义及表示方法

—数列的递推公式

13 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{n+1} = 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 a_2 是 S_2 与 1 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ 的前 n 项和为 T_n , 且对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $T_n < \lambda$ 恒成立, 求实数 λ 的最小值.

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 2

解析

(1) $\because a_{n+1} = 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

$$\therefore S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + 2a_1 = 3a_1,$$

$$\because a_2 \text{ 是 } S_2 \text{ 与 } 1 \text{ 的等差中项}, \therefore 2a_2 = S_2 + 1,$$

$$\text{即 } 2 \times 2a_1 = 3a_1 + 1, \therefore a_1 = 1.$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

(2) 由 (1) 可得 $\frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$\therefore \frac{1}{a_1} = 1, \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\therefore \text{数列 } \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

$$\because \frac{1}{2^n} > 0, \therefore T_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2,$$



若 $\lambda < 2$, 当 $n > \log_2 \left(\frac{2}{2-\lambda} \right)$ 时, $T_n > \lambda$,
 $\therefore$ 若对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $T_n < \lambda$ 恒成立, 则 $\lambda \geq 2$,
 $\therefore$ 实数 λ 的最小值为 2.

考点

—数列

—数列的应用

—数列的单调性和最值

—数列与不等式

—数列的概念

—数列的递推公式

—等差数列

—等差数列的概念和通项

—等差数列的性质

—等比数列

—等比数列的概念和通项

—等比数列的前 n 项和

14 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\left\{ \frac{2n-1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = a_n + b_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $b_1 = 3$. 若不等式 $\log_2(b_n - 2) < \frac{3}{16}n^2 + t$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$.

(2) $T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

(3) $\left(\frac{5}{16}, +\infty \right)$.

解析

(1) $\because S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$,

$\therefore$ 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$, 解得 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1) = 2a_n - 2a_{n-1}$,

化为 $a_n = 2a_{n-1}$,



$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，首项为 1，公比为 2.

$$\therefore a_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) \quad \frac{2n-1}{a_n} = \frac{2n-1}{2^{n-1}}.$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{2n-1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}},$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n = 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}\right),$$

$\therefore$

$$\frac{1}{2}T_n = 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} = 2 \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

,

$$\therefore T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}.$$

(3) $\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = a_n + b_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $b_1 = 3$.

$$\therefore b_{n+1} - b_n = a_n = 2^{n-1},$$

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= (b_n - b_{n-1}) + b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 = 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1 + 3 \\ &= \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 3 = 2^{n-1} + 2. \end{aligned}$$

$$\text{不等式 } \log_2(b_n - 2) < \frac{3}{16}n^2 + t,$$

$$\text{化为 } n - 1 < \frac{3}{16}n^2 + t,$$

$$\therefore t > -\frac{3}{16}n^2 + n - 1,$$

$$\text{令 } g(n) = -\frac{3}{16}n^2 + n - 1 = -\frac{3}{16}\left(n - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \leq g(3) = \frac{5}{16},$$

$$\therefore t > \frac{5}{16}.$$

$$\therefore \text{实数 } t \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{5}{16}, +\infty\right).$$

考点

函数与导数

函数

值域

最值

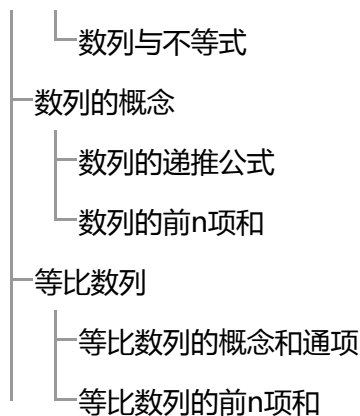
二次函数

二次函数的概念、图象和性质

数列

— 数列的应用

— 数列的单调性和最值



15 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 和, 若 $S_6 = 51, a_5 = 13$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 和 S_n .

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 和 T_n .

(3) 设函数 $f(n) = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ f(\frac{n}{2}), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, $c_n = f(2^n + 4) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 和 M_n (只需写出结论).

答案

(1) $a_n = 3n - 2, S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2}$.

(2) $T_n = \frac{n}{3n+1}$.

(3) $M_n = \begin{cases} 7, & n=1 \\ n+3 \times 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$.

解析

(1) 由题意可知, $\begin{cases} 25 = 6a_1 + \frac{5 \times 6}{2}d \Rightarrow 2a_1 + 5d = 17 \\ 13 = a_1 + 4d \end{cases}$,

得: $a_1 = 1, d = 3, \Rightarrow a_n = 3n - 2, S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2}$.

(2) $b_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$,

$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$

$= \frac{n}{3n+1}$.

(3) $c_1 = f(2+4) = f(3) = a_3,$

$c_2 = f(8) = f(1) = a_1,$

$c_3 = f(2^3+4) = f(2+1) = a_3, \cdots$

$c_n = f(2^n+4) = f(2^{n-2}+1) = a_{2^{n-2}+1}, \cdots$

$M_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n,$

当 $n=1$ 时, $M_1 = f(6) = a_3 = 7,$



$$\text{当 } n=2, M_2 = c_1 + c_2 = f(6) + f(8) = a_3 + a_1 = 8,$$

$$\text{当 } n \geq 3, M_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

$$= 8 + 3 \times (2 + 1) - 2 + 3 \times (2^2 + 1) - 2 + 3(2^{n-2} + 1) - 2$$

$$= 8 + 3(2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) + n - 2 = n + 3 \times 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } M_n = \begin{cases} 7, & n=1 \\ n + 3 \times 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}.$$

考点

数列

— 数列的概念

— 数列的定义及表示方法

— 数列的递推公式

— 数列的前n项和

— 等差数列

— 等差数列的概念和通项

— 等差数列的性质

— 等差数列的前n项和

— 等比数列

— 等比数列的前n项和

— 推理与证明

— 合情推理和演绎推理

— 合情推理

— 数学归纳法

— 数学归纳法的应用

16 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_3 = 2$ ， $S_5 = a_7$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及 S_n 。

(2) 若 a_4, a_{4+m}, a_{4+n} ($m, n \in \mathbf{N}^*$) 成等比数列，求 n 的最小值。

答案

(1) $a_n = 2n - 4$

$$S_n = n^2 - 3n$$

(2) n 有最小值6



解析

$$(1) \text{ 设公差为 } d, \text{ 由题意, 得 } \begin{cases} a_1 + 2d = 2, \\ 5a_1 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4d = a_1 + 6d, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a_1 = -2, d = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = -2 + (n-1) \times 2 = 2n - 4,$$

$$S_n = -2n + \frac{1}{2}n(n-1) \times 2 = n^2 - 3n.$$

(2) 因为 a_4, a_{4+m}, a_{4+n} 成等比数列,

$$\text{所以 } a_{4+m}^2 = a_4 a_{4+n},$$

$$\text{即 } (2m+4)^2 = 4(2n+4),$$

$$\text{化简, 得 } n = \frac{1}{2}(m+2)^2 - 2,$$

考察函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$, 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又因为 } f(1) = \frac{5}{2}, f(2) = 6, n \in \mathbf{N}^*,$$

所以当 $m = 2$ 时, n 有最小值 6.

考点

一数列

— 数列的概念

— 等差数列

— 等比数列

17 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n}, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) 证明见解析

$$(2) T_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

解析

$$(1) \text{ 由 } a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n, \text{ 得 } \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}.$$

$$\text{所以 } b_{n+1} = 2b_n, \text{ 即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2.$$

$$\text{又因为 } b_1 = \frac{a_1}{1} = 1,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 公比为 2 的等比数列.

$$(2) \text{ 由 (I) 可知 } b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{所以 } \log_2 b_n = \log_2 2^{n-1} = n-1.$$



则数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

考点

一、数列

— 数列的概念

└ 数列的递推公式

— 等差数列

└ 等差数列的概念和通项

└ 等差数列的前 n 项和

— 等比数列

└ 等比数列的概念和通项

18 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4$, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = n^2 + \lambda n (\lambda \in R)$.

(1) 求实数 λ 的值, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{\frac{1}{S_n} + b_n\}$ 是首项为 λ , 公比为 2λ 的等比数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $a_n = 2n$.

(2) $T_n = 2^n - \frac{2n+1}{n+1}$.

解析

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $a_2 = S_2 - S_1 = (4 + 2\lambda) - (1 + \lambda) = 3 + \lambda$,

所以 $3 + \lambda = 4$, 所以 $\lambda = 1$.

所以 $a_1 = S_1 = 2$, 所以 $d = a_2 - a_1 = 2$.

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$.

(2) 由(1)知 $\lambda = 1$,

所以 $\frac{1}{S_n} + b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

所以 $b_n = 2^{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} = 2^{n-1} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$.

所以 $T_n = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) - [(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})]$
 $= \frac{1-2^n}{1-2} - (1 - \frac{1}{n+1})$
 $= 2^n - \frac{2n+1}{n+1}$.



考点

—数列

—数列的概念

—数列的递推公式

—数列的前 n 项和

—等差数列

—等差数列的概念和通项

—等差数列的前 n 项和

—等比数列

—等比数列的前 n 项和

19 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3S_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 写出 a_2, a_3 的值, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 T_n 为数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 0$, $b_n - b_{n-1} = \log_2 a_n (n \geq 2)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案

(1) $a_2 = 4$, $a_3 = 16$; $a_n = 4^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) $T_n = \frac{3n-1}{9} \cdot 4^n + \frac{1}{9} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) $b_n = n(n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

解析

(1) 由已知得, $a_2 = 4$, $a_3 = 16$.

由题意, $a_{n+1} = 3S_n + 1$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 3S_{n-1} + 1$.

两式相减, 得 $a_{n+1} = 4a_n (n \geq 2)$.

又因为 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $\frac{a_2}{a_1} = 4$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以首项为1, 公比为4的等比数列,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 4^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 因为 $T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 1 + 2 \times 4 + 3 \times 4^2 + \cdots + n \cdot 4^{n-1}$,

所以 $4T_n = 4 \times 1 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \cdots + (n-1) \cdot 4^{n-1} + n \cdot 4^n$,

两式相减得, $-3T_n = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} - n \cdot 4^n = \frac{1-4^n}{1-4} - n \cdot 4^n$,

整理得, $T_n = \frac{3n-1}{9} \cdot 4^n + \frac{1}{9} (n \in \mathbf{N}^*)$.



(3) 当 $n \geq 2$ 时, 依题意得 $b_2 - b_1 = \log_2 a_2$, $b_3 - b_2 = \log_2 a_3$, $\dots$, $b_n - b_{n-1} = \log_2 a_n$.

相加得, $b_n - b_1 = \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_n$.

依题意 $\log_2 a_n = \log_2 4^{n-1} = 2(n-1)$.

因为 $b_1 = 0$, 所以 $b_n = 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] = n(n-1) (n \geq 2)$.

显然当 $b_1 = 0$ 时, 符合.

所以 $b_n = n(n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

考点

一、数列

— 数列的概念

— 数列的定义及表示方法

— 数列的递推公式

— 数列的前 n 项和

— 等比数列

— 等比数列的概念和通项

— 等比数列的性质

20 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + 2 \cdot (-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 写出 a_5 , a_6 的值.

(2) 设 $b_n = a_{2n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求数列 $\{S_{2n} - 18\}$ 的前 n 项和 T_n 的最小值.

答案

(1) $a_5 = -3$, $a_6 = 5$.

(2) $2n - 1$.

(3) -72 .

解析

(1) $a_3 = -1$, $a_4 = 3$,

$a_5 = -3$, $a_6 = 5$.

(2) 设 $b_n = a_{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$,

则 $b_{n+1} - b_n = a_{2n+2} - a_{2n} = 2(-1)^{2n} = 2$,

所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列,



所以 $b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$.

(3) 解法1: $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 2(-1)^{2n-1} = -2, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是以1为首项, -2 为公差 d 的等差数列,

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 个奇数项之和为 $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2n - n^2$,

由 (2) 可知, $a_{2n} = 2n-1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 个偶数项之和为 $\frac{(a_2 + a_{2n})n}{2} = n^2$,

所以 $S_{2n} = 2n$,

所以 $S_{2n} - 18 = 2n - 18$.

因为 $S_{2n} - 18 - (S_{2n-2} - 18) = 2$, 且 $S_2 - 18 = -16$,

所以数列 $\{S_{2n} - 18\}$ 是以 -16 为首项, 2 为公差的等差数列 .

由 $S_{2n} - 18 = 2n - 18 \leq 0$ 可得 $n \leq 9$,

所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时, 数列 $\{S_{2n} - 18\}$ 的前 n 项和 T_n 的最小值为

$$T_8 = T_9 = \frac{-16 \times 9}{2} = -72 .$$

解法2: 由 $a_{n+2} = a_n + 2(-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 得:

$$a_{2n} = a_{2n-2} + 2(-1)^{2n-2} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2) \textcircled{1} ,$$

$$a_{2n-1} = a_{2n-3} + 2(-1)^{2n-3} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2) \textcircled{2} ,$$

把 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 两个等式相加可得, $a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-3} + a_{2n-2} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$,

所以 $a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-3} + a_{2n-2} = \cdots = a_1 + a_2 = 2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = 2n$,

(或: 由 $a_{n+2} = a_n + 2(-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 得:

$$S_{2n} = 1 + 1 + (-1) + 3 + (-3) + 5 + \cdots + (-2n + 3) + (2n - 1)$$

$$= (1 + 1) + [(-1) + 3] + [(-3) + 5] + \cdots + [(-2n + 3) + (2n - 1)]$$

$$= 2n ,$$

所以 $S_{2n} - 18 = 2n - 18$.

因为 $S_{2n} - 18 - (S_{2n-2} - 18) = 2$, 且 $S_2 - 18 = -16$,

所以数列 $\{S_{2n} - 18\}$ 是以 -16 为首项, 2 为公差的等差数列 .

由 $S_{2n} - 18 = 2n - 18 \leq 0$ 可得 $n \leq 9$,

所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时, 数列 $\{S_{2n} - 18\}$ 的前 n 项和 T_n 的最小值为

$$T_8 = T_9 = \frac{-16 \times 9}{2} = -72 .$$



考点 一 数列

— 数列的应用

└ 数列的单调性和最值

— 数列的概念

└ 数列的定义及表示方法

— 等差数列

└ 等差数列的性质

21 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_1 = 1$ ， $2S_n = a_{n+1} - 1$ 。

(1) 求 a_2 ， a_3 的值。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并求数列 $\{a_n + 2n - 1\}$ 的前 n 项和 T_n 。

答案 (1) $a_2 = 3$ ， $a_3 = 9$ 。

(2) $a_n = 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $T_n = \frac{3^n - 1}{2} + n^2$ 。

解析 (1) $\because 2S_n = a_{n+1} - 1$ ，

$$\therefore 2a_1 = a_2 - 1。$$

$$\text{又} \because a_1 = 1，$$

$$\therefore a_2 = 3。$$

$$\because 2S_n = a_{n+1} - 1，$$

$$\therefore 2S_2 = a_3 - 1，\text{即} 2(a_1 + a_2) = a_3 - 1，$$

$$\therefore a_3 = 9。$$

(2) $\because 2S_n = a_{n+1} - 1$ ，

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时，} 2S_{n-1} = a_n - 1，$$

$$\therefore 2a_n = a_{n+1} - a_n，\text{即 } a_{n+1} = 3a_n，$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 (n \geq 2)。$$

$$\text{由 } a_1 = 1，a_2 = 3，\text{得 } \frac{a_2}{a_1} = 3，$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列。

$$\therefore a_n = 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)，$$

$$\therefore T_n = 3^0 + 1 + 3^1 + 3 + 3^2 + 5 + \cdots + 3^{n-1} + 2n - 1$$



$$\begin{aligned}
 &= (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) + (1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) \\
 &= \frac{1-3^n}{1-3} + \frac{n(1+2n-1)}{2} = \frac{3^n-1}{2} + n^2 \\
 &= \frac{3^n-1}{2} + n^2.
 \end{aligned}$$

考点 一 数列

— 数列的概念

— 数列的定义及表示方法

— 数列的递推公式

— 数列的前n项和

— 等比数列

— 等比数列的性质

22 数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n ，若 $a_1 = 3$ ， S_n 和 S_{n+1} 满足等式 $S_{n+1} = \frac{n+1}{n}S_n + n + 1$ 。

(1) 求 S_2 的值。

(2) 求证：数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列。

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n \cdot 2^{a_n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前n项和。

答案 (1) 8

(2) 证明见解析

$$(3) T_n = \left(\frac{16n}{3} + \frac{8}{9}\right)4^n - \frac{8}{9}.$$

解析 (1) 由已知： $S_2 = 2S_1 + 2 = 2a_1 + 2 = 8$ 。

$$(2) \because S_{n+1} = \frac{n+1}{n}S_n + n + 1,$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以3为首项，1为公差的等差数列。

$$(3) \text{ 由 (I) 可得 } \frac{S_n}{n} = 3 + n - 1 = n + 2,$$

$$\text{化为 } S_n = n^2 + 2n,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n + 1.$$

又 $a_1 = 3$ 也满足。

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$ ，



$$\therefore b_n = a_n \cdot 2^{a_n} = (2n+1) \cdot 2^{2n+1}.$$

$$\therefore T_n = 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^5 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{2n+1},$$

$$\therefore 4T_n = 3 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^7 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{2n+3},$$

$$\text{两式相减, 整理可得 } T_n = \left(\frac{16n}{3} + \frac{8}{9} \right) 4^n - \frac{8}{9}.$$

考点

—数列

—数列的概念

—数列的定义及表示方法

—数列的递推公式

—数列的前n项和

—等差数列

—等差数列的概念和通项

—等比数列

—等比数列的前n项和

23 已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ (n 为正整数) .

(1) 令 $b_n = 2^n a_n$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{n+1}{n} a_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前n项和 T_n .

答案

(1) 证明见解析, $a_n = \frac{n}{2^n}$.

(2) $T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$.

解析

(1) 在 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ 中, 令 $n=1$, 可得 $S_1 = -a_1 - 1 + 2 = a_1$, 即 $a_1 = \frac{1}{2}$

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = -a_{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2$,

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\therefore 2a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 即 } 2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1.$$

$$\therefore b_n = 2^n a_n, \therefore b_n = b_{n-1} + 1, \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n - b_{n-1} = 1.$$

又 $b_1 = 2a_1 = 1$, $\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为1的等差数列.

$$\text{于是 } b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n = 2^n a_n, \therefore a_n = \frac{n}{2^n}.$$

(2) 由(I)得 $c_n = \frac{n+1}{n} a_n = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以



$$\begin{aligned}
 T_n &= 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 \frac{1}{2}T_n &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 \text{由①-②得} \quad \frac{1}{2}T_n &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 &= 1 + \frac{\frac{1}{4}[1 - (\frac{1}{2})^{n-1}]}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\
 \therefore T_n &= 3 - \frac{n+3}{2^n}.
 \end{aligned}$$

考点

—数列

—数列的概念

—数列的前n项和

—等差数列

—等差数列的概念和通项

—等差数列的性质

24 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, 其前 n 项和 S_n 满足 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $b_n = \frac{S_n}{2n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

$$(1) a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

$$(2) \frac{n}{2n+1}$$

解析

$$(1) \because S_{n-1} - S_n = 2S_n S_{n-1},$$

$$\therefore \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2,$$

即数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 为等差数列, $S_1 = a_1 = 1$,

$$\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \times 2 = 2n-1,$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} = -\frac{2}{(2n-1) \cdot (2n-3)},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

$$(2) b_n = \frac{S_n}{2n+1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$$



考点 一 数列

数列的概念

数列的递推公式

数列的前n项和

25 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，点 $(n, \frac{S_n}{n})$ 在直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ 上．数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0 (n \in \mathbf{N}_+)$ ， $b_3 = 11$ ，且其前9项和为153．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式．

(2) 设 $c_n = \frac{3}{(2a_n - 11)(2b_n - 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求使不等式 $T_n > \frac{k}{57}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}_+$ 都成立的最大正整数 k 的值．

答案 (1) $a_n = n + 5$ ， $b_n = 3n + 2$ ．

(2) 18．

解析

(1) 由已知得 $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}n + \frac{11}{2}$ ， $\therefore S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{11}{2}n$ ．

当 $n \geq 2$ 时，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{11}{2}n - \frac{1}{2}(n-1)^2 - \frac{11}{2}(n-1) = n + 5. \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 6$ 也符合上式．

$$\therefore a_n = n + 5.$$

由 $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0 (n \in \mathbf{N}_+)$ 知 $\{b_n\}$ 是等差数列，

由 $\{b_n\}$ 的前9项和为153，可得 $\frac{9(b_1 + b_9)}{2} = 9b_5 = 153$ ，

得 $b_5 = 17$ ，又 $b_3 = 11$ ，

$$\therefore \{b_n\} \text{的公差 } d = \frac{b_5 - b_3}{2} = 3.$$

$$\therefore b_3 = b_1 + 2d,$$

$$\therefore b_1 = 5,$$

$$\therefore b_n = 3n + 2.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_n &= \frac{3}{(2n-1)(6n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \\ \therefore T_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$



$\therefore n$ 增大时, T_n 增大,

$\therefore \{T_n\}$ 是递增数列,

$\therefore T_n \geq T_1 = \frac{1}{3}$, $\therefore T_n > \frac{k}{57}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}_+$ 都成立, 只要 $T_1 = \frac{1}{3} > \frac{k}{57}$ 即可,

解得 $k < 19$, $\therefore k_{\max} = 18$.

考点

一数列

— 数列的概念

— 数列的定义及表示方法

— 数列的递推公式

— 数列的前 n 项和

26 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为 0, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = a$, $2S_n = a_n a_{n+1}$.

(1) 求 a_2 的值;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 $a = -9$, 求 S_n 的最小值.

答案

(1) $a_2 = 2$

(2) $a_n = \begin{cases} n + a - 1, & n \text{ 为奇数} \\ n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

(3) -15

解析

(1) 因为 $2S_n = a_n a_{n+1}$, 所以 $2S_1 = a_1 a_2$,

即 $2a_1 = a_1 a_2$,

因为 $a_1 = a \neq 0$,

所以 $a_2 = 2$.

(2) 因为 $2S_n = a_n a_{n+1}$, 所以 $2S_{n-1} = a_{n-1} a_n$, 两式相减,

得到 $2a_n = a_n(a_{n+1} - a_{n-1})$,

因为 $a_n \neq 0$, 所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$,

所以 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 都是公差为 2 的等差数列,

当 $n = 2k - 1$ 时, $a_n = a_1 + 2(k - 1) = n + a - 1$,

当 $n = 2k$ 时, $a_n = 2 + 2(k - 1) = 2k$,



$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} n + a - 1, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

$$(3) \text{ 当 } a = -9 \text{ 时, } a_n = \begin{cases} n - 10, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

$$\text{因为 } 2S_n = a_n a_{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-10)(n+1), n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2}n(n-9), n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

所以当 n 为奇数时, S_n 的最小值为 $S_5 = -15$,

当 n 为偶数时, S_n 的最小值为 $S_4 = -10$,

所以当 $n = 5$ 时, S_n 取得最小值为 -15 .

考点

一 数列

— 数列的应用

— 数列的单调性和最值

— 数列与不等式

— 数列的概念

— 数列的递推公式

— 数列的前 n 项和

— 等差数列

— 等差数列的概念和通项

— 等差数列的性质

— 等差数列的前 n 项和

27 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 和通项 a_n 满足 $\frac{S_n}{a_n - 1} = \frac{q}{q - 1}$ (q 是常数且 $q > 0, q \neq 1$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $q = \frac{1}{4}$ 时, 试证明 $S_n < \frac{1}{3}$;

(3) 设函数 $f(x) = \log_q x$, $b_n = f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)$, 是否存在正整数 m , 使

$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n} \geq \frac{m}{3}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都成立? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

答案

(1) $a_n = q^n$

(2) 证明见解析

(3) 存在, 其值为: 1, 2, 3, 理由见解析.



解析

(1) 由题意, $S_n = \frac{q}{q-1}(a_n - 1)$, 得 $S_1 = a_1 = \frac{q}{q-1}(a_1 - 1)$, $\therefore a_1 = q$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{q}{q-1}(a_n - 1) - \frac{q}{q-1}(a_{n-1} - 1) = \frac{q}{q-1}a_n - \frac{q}{q-1}a_{n-1}$,

$$(q-1)a_n = qa_n - qa_{n-1}, \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = q$, 公比为 q 的等比数列, $\therefore a_n = q \cdot q^{n-1} = q^n$

(2) 由 (I) 知当 $q = \frac{1}{4}$ 时, $S_n = \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4^n})}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4^n})$

$$\therefore 1 - \frac{1}{4^n} < 1, \therefore \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4^n}) < \frac{1}{3}$$

$$\text{即 } S_n < \frac{1}{3}$$

(3) $\therefore f(x) = \log_q x$

$$\therefore b_n = \log_q a_1 + \log_q a_2 + \cdots + \log_q a_n = \log_q (a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$= \log_q q^{1+2+\cdots+n} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n(1+n)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{2n}{n+1}$$

$$\text{由 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} \geq \frac{m}{3} \text{ 得 } m \leq \frac{6n}{n+1} = \frac{6(n+1)-6}{n+1} = 6 - \frac{6}{n+1} (*)$$

$\therefore (*)$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, $\therefore m \leq 6 - \frac{6}{1+1} = 3$, $\therefore m$ 是正整数, $\therefore m$ 的值为 1, 2, 3.

$\therefore$ 使 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} \geq \frac{m}{3}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 都成立的正整数 m 存在, 其值为: 1, 2, 3.

考点

数列

— 数列的概念

— 数列的定义及表示方法

— 数列的递推公式

— 数列的前 n 项和

— 不等式与线性规划

— 不等式与不等关系

— 不等关系

— 不等式的性质



已知点(1,2)是函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)的图象上一点, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = f(n) - 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_a a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 若 $c_n = (b_n + 1) \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^n$, 数列 $\{c_n\}$ 有没有最大值?如果有, 求出最大值;如果没有, 说明理由.

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $T_n = (n-1)2^n + 1$

(3) 有最大值为第9、10项 $c_9 = c_{10} = \frac{10^{10}}{11^9}$.

解析

(1) 把点(1,2)代入函数 $f(x) = a^x$ 得 $a = 2$

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = f(n) - 1 = 2^n - 1$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$ 也适合

$$\therefore a_n = 2^{n-1}$$

(2) 由 $a = 2$, $b_n = \log_a a_{n+1}$ 得 $b_n = n$, 所以 $a_n b_n = n \cdot 2^{n-1}$

$$T_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \quad ①$$

$$2T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \quad ②$$

$$\text{由① - ②得: } -T_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n = 2^n - 1 - n \cdot 2^n$$

$$\text{所以 } T_n = (n-1)2^n + 1$$

$$(3) c_n = (n+1) \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^n$$

$$\therefore c_{n+1} - c_n = (n+2) \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} - (n+1) \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot \frac{9-n}{11}.$$

当 $n < 9$ 时, $c_{n+1} - c_n > 0$, 即 $c_{n+1} > c_n$;

当 $n = 9$ 时, $c_{n+1} - c_n = 0$, 即 $c_{n+1} = c_n$;

当 $n > 9$ 时, $c_{n+1} - c_n < 0$, 即 $c_{n+1} < c_n$.

故 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_9 = c_{10} > c_{11} > c_{12} > \cdots$,

所以数列中有最大值为第9、10项 $c_9 = c_{10} = \frac{10^{10}}{11^9}$.



考点 一 数列

数列的概念

数列的递推公式

数列的前n项和

29 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2$, S_n 为其前 n 项和, 且 $S_n = \frac{a_n(n+1)}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$.

- (1) 求 a_1 的值;
- (2) 求证: $a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1} (n \geq 2)$;
- (3) 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列, 并说明理由.

答案

(1) $a_1 = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) 答案见解析.

解析

(1) 由题意知: $S_2 = \frac{3a_2}{2}$, 即 $a_1 + a_2 = \frac{3a_2}{2}$.

所以 $a_2 = 2a_1$.

因为 $a_2 = 2$,

所以 $a_1 = 1$.

(2) 因为 $S_n = \frac{a_n(n+1)}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$,

所以 $S_{n-1} = \frac{a_{n-1}(n-1+1)}{2} (n \geq 2)$.

因为 $a_n = S_n - S_{n-1}$,

所以 $a_n = \frac{(n+1)a_n - na_{n-1}}{2}$, 即 $(n-1)a_n = na_{n-1}$.

因为 $n \geq 2$,

所以 $a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1}$.

(3) 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 理由如下:

由(II)得: $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} (n = 2, 3, 4, \dots)$.

所以 $\frac{a_n}{n} = a_1 = 1 (n \geq 2)$, 即 $a_n = n (n \geq 2)$.

由(I)知: $a_1 = 1$, 所以 $a_n = n (n \geq 1)$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项, 1为公差的等差数列.



考点 一 数列

— 等差数列

— 等差数列的概念和通项

30 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$, 其中 $a \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3}, & a_n \text{ 为 } 3 \text{ 的倍数} \\ a_n + 1, & a_n \text{ 不为 } 3 \text{ 的倍数} \end{cases}$. 令集合

$$A = \{x | x = a_n, n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

(1) 若 $a = 4$, 写出集合 A 中的所有的元素;

(2) 若 $a \leq 2014$, 且数列 $\{a_n\}$ 中恰好存在连续的7项构成等比数列, 求 a 的所有可能取值构成的集合;

(3) 求证: $1 \in A$.

答案 (1) 集合 A 的所有元素为: $4, 5, 6, 2, 3, 1$.

(2) $\{3^6, 2 \times 3^6, 3^6 - 1, 2 \times 3^6 - 1, 3^6 - 2, 2 \times 3^6 - 2\}$.

(3) 证明见解析.

解析 (1) 集合 A 的所有元素为: $4, 5, 6, 2, 3, 1$.

(2) 不妨设成等比数列的这连续7项的第一项为 a_k ,

如果 a_k 是3的倍数, 则 $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k$;

如果 a_k 是被3除余1, 则由递推关系可得 $a_{k+2} = a_k + 2$,

所以 a_{k+2} 是3的倍数, 所以 $a_{k+3} = \frac{1}{3}a_{k+2}$;

如果 a_k 被3除余2, 则由递推关系可得 $a_{k+1} = a_k + 1$,

所以 a_{k+1} 是3的倍数, 所以 $a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1}$.

所以, 该7项的等比数列的公比为 $\frac{1}{3}$.

又因为 $a_n \in \mathbf{N}^*$, 所以这7项中前6项一定都是3的倍数,

而第7项一定不是3的倍数(否则构成等比数列的连续项数会多于7项),

设第7项为 p , 则 p 是被3除余1或余2的正整数, 则可推得 $a_k = p \times 3^6$

因为 $3^6 < 2014 < 3^7$, 所以 $a_k = 3^6$ 或 $a_k = 2 \times 3^6$.

由递推关系式可知, 在该数列的前 $k-1$ 项中, 满足小于2014的各项只有:

$a_{k-1} = 3^6 - 1$, 或 $2 \times 3^6 - 1$, $a_{k-2} = 3^6 - 2$, 或 $2 \times 3^6 - 2$,

所以首项 a 的所有可能取值的集合为



$$\{3^6, 2 \times 3^6, 3^6 - 1, 2 \times 3^6 - 1, 3^6 - 2, 2 \times 3^6 - 2\}.$$

(3) 若 a_k 被3除余1, 则由已知可得

$$a_{k+1} = a_k + 1, a_{k+2} = a_k + 2, a_{k+3} = \frac{1}{3}(a_k + 2);$$

若 a_k 被3除余2, 则由已知可得

$$a_{k+1} = a_k + 1, a_{k+2} = \frac{1}{3}(a_k + 1), a_{k+3} \leq \frac{1}{3}(a_k + 1) + 1;$$

若 a_k 被3除余0, 则由已知可得 $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k, a_{k+3} \leq \frac{1}{3}a_k + 2;$

$$\text{所以 } a_{k+3} \leq \frac{1}{3}a_k + 2,$$

$$\text{所以 } a_k - a_{k+3} \geq a_k - (\frac{1}{3}a_k + 2) = \frac{2}{3}(a_k - 3),$$

所以, 对于数列 $\{a_n\}$ 中的任意一项 a_k , “若 $a_k > 3$, 则 $a_k > a_{k+3}$ ”.

因为 $a_k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $a_k - a_{k+3} \geq 1$.

所以数列 $\{a_n\}$ 中必存在某一项 $a_m \leq 3$ (否则会与上述结论矛盾!)

若 $a_m = 1$, 结论得证.

若 $a_m = 3$, 则 $a_{m+1} = 1$; 若 $a_m = 2$, 则 $a_{m+1} = 3, a_{m+2} = 1$,

所以 $1 \in A$.

考点

集合与常用逻辑用语

— 集合与集合的表示方法

— 集合的概念

— 集合的表示方法

— 数列

— 数列的概念

— 数列的定义及表示方法

— 数列的递推公式

— 等比数列

— 等比数列的概念和通项