数列-期中必做题

1 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2\times 3^n+1$，$a_1=3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

2 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1, 2^{n-1}a_n=a_{n-1}(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 2)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

3 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=2a_{n-1}-1$，令$b_n=a_n-1$．

（1）求证：$\{b_n\}$是等比数列．

（2）若$c_n=a_n+n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n

4 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_n=2a_{n-1}+2^n(n\geqslant 2$且$n\in\mathbf{N}^+)$．

（1）求证：数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列．

（2）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求S_n．

5 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，且$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}$．

（1）求正项数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）求和$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}$．

6 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$．

（1）求证：$\{a_{n+1}-2a_n\}$是等比数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式．

7 若数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$且$a_{n+1}={a_n}^2$（n是正整数），则它的通项公式是______．

8 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+n+1$，求：

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）求数列$\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

（3）求$f(n)=(n-7)\cdot T_n$的最小值．

9 已知$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和为S_n，且$S_n=2^n+a(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求a的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=(2n-1)a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

10 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=\lambda a_n-\frac{n}{\lambda+1}$，$(\lambda\neq\pm1,n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）如果$\lambda=0$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）（Ⅱ）如果$\lambda=2$，求证：数列$\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$为等比数列，并求$S_n$．

（3）（Ⅲ）如果数列$\{a_n\}$为递增数列，求λ的取值范围．

11 在数列$\{a_n\}$中，$S_{n+1}=4a_n+2$，$a_1=1$．

（1）设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，求证数列$\{b_n\}$是等比数列．

（2）$c_n=\frac{a_n}{2^n}$，求证数列$\{c_n\}$是等差数列．

（3）求数列$\{a_n\}$的通项公式及前项和公式．

12 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求a_1,a_2；

（2）判断数列$\{a_n\}$的增减性，并说明理由；

（3）设$b_n=a_{n+1}-a_n$，求数列$\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$的最大项和最小项．

13 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_{n+1}=2a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_2$是$S_2$与1的等差中项．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若数列$\left(\frac{1}{a_n}\right)$的前$n$项和为$T_n$，且对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\lambda$恒成立，求实数$\lambda$的最小值．

14 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）求数列$\left\{\frac{2n-1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

（3）数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}=a_n+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且$b_1=3$．若不等式$\log_2(b_n-2)<\frac{3}{16}n^2+t$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$t$的取值范围．

15 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n和，若$S_6=51, a_5=13$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n及前n和S_n．

（2）若数列$\{b_n\}$中$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$和$T_n$．

（3）设函数$f(n)=\begin{cases} a_n, n\text{为奇数} \\ f\left(\frac{n}{2}\right), n\text{为偶数}\end{cases}$，$c_n=f(2^n+4)(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{c_n\}$的前$n$和$M_n$（只需写出结论）．

16 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_3=2$，$S_5=a_7$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n及S_n．

（2）若a_4, a_{4+m}, a_{4+n}（$m,n\in\mathbf{N}^*$）成等比数列，求n的最小值．

17 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$，设$b_n=\frac{a_n}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）证明$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{\log_2 b_n\}$的前n项和T_n．

18 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，其前n项和S_n满足$S_n=n^2+\lambda n(\lambda\in R)$．

（1）求实数λ的值，并求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若数列$\{\frac{1}{S_n}+b_n\}$是首项为λ，公比为2λ的等比数列，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

19 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．已知$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n+1$，$n\in\mathbf{N}*$．

（1）写出a_2, a_3的值，并求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）记T_n为数列$\{na_n\}$的前n项和，求T_n．

（3）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=0$，$b_n-b_{n-1}=\log_2 a_n(n\geqslant 2)$，求数列$\{b_n\}$的通项公式．

20 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+2\cdot(-1)^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）写出a_5，a_6的值．

（2）设$b_n=a_{2n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式．

（3）记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求数列$\{S_{2n}-18\}$的前n项和T_n的最小值．

21 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_1=1$，$2S_n=a_{n+1}-1$．

（1）求a_2，a_3的值．

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式，并求数列$\{a_n+2n-1\}$的前n项和T_n．

22 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=3$，S_n和S_{n+1}满足等式$S_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}S_n+n+1$．

（1）求S_2的值．

（2）求证：数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列．

（3）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和．

23 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-a_n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2$（$n$为正整数）．

（1）令$b_n=2^n a_n$，求证数列$\{b_n\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$c_n=\dfrac{n+1}{n}a_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

24 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，当$n\geqslant 2$时，其前n项和S_n满足$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）令$b_n=\dfrac{S_n}{2n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

25 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，点$(n,\dfrac{S_n}{n})$在直线$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$上．数列$\{b_n\}$满足$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0(n\in\mathbf{N}_+)$，$b_3=11$，且其前9项和为153．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

（2）设$c_n=\dfrac{3}{(2a_n-11)(2b_n-1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求使不等式$T_n>\dfrac{k}{57}$对一切$n\in\mathbf{N}_+$都成立的最大正整数$k$的值．

26 已知数列$\{a_n\}$的各项均不为0，其前n项和为S_n，且满足$a_1=a$，$2S_n=a_na_{n+1}$．

（1）求a_2的值；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式；

（3）若$a=-9$，求S_n的最小值．

27 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n和通项a_n满足$\dfrac{S_n}{a_n-1}=\dfrac{q}{q-1}$（$q$是常数且$q>0$，$q\neq 1$）．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）当$q=\dfrac{1}{4}$时，试证明$S_n<\dfrac{1}{3}$；

（3）设函数$f(x)=\log_q x$，$b_n=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)$，是否存在正整数$m$，使$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}+\ldots+\dfrac{1}{b_n}\geqslant\dfrac{m}{3}$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$都成立？若存在，求出$m$的值；若不存在，请说明理由．

28 已知点$(1,2)$是函数$f(x)=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）的图象上一点，数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=f(n)-1$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_a a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n；

（3）若$c_n=(b_n+1)\cdot\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$，数列$\{c_n\}$有没有最大值?如果有，求出最大值；如果没有，说明理由．

29 已知数列$\{a_n\}$满足$a_2=2$，S_n为其前n项和，且$S_n=\dfrac{a_n(n+1)}{2}(n=1,2,3,\cdots)$．

（1）求a_1的值；

（2）求证：$a_n=\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant 2)$；

（3）判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列，并说明理由．

30 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$,其中$a\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3}, a_n\text{为}3\text{的倍数}\\ a_n+1, a_n\text{不为}3\text{的倍数}\end{cases}$．令集合$A=\{x|x=a_n,n=1,2,3,\cdots\}$．

（1）若$a=4$，写出集合A中的所有的元素；

（2）若$a \leqslant 2014$，且数列$\{a_n\}$中恰好存在连续的7项构成等比数列，求a的所有可能取值构成的集合；

（3）求证：$1 \in A$．