第十届全国教育图书展优秀畅销图书
国家集训队教练执笔联合编写
在香港出版繁体字版和网络版
版版畅销，网络销量居榜首

畅销15年
超1200万册

总主编 单墫 熊斌

奥数教程

·第六版·

高一年级

熊斌 冯志刚 编著

著名商标 上海市
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

总主编 单墫 熊斌

奥数教程

·第六版·

华东师范大学出版社

高一年级

熊 斌 冯志刚 编著

目　录

基础篇

提高篇

(详细解答见《奥数教程学习手册》)

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

致读者

《奥数教程》的出版已有十五个年头了. 在这个过程中,包含了作者和编辑的辛勤劳作,更多的是让我们感到欣慰:这套书,曾荣获了第十届全国教育图书展的优秀畅销书奖;香港现代教育研究社出版了她的繁体字版和网络版,成为香港的畅销图书之一,并因此获得了版权输出奖;据北京开卷图书市场研究所的监控销售数据,近几年《奥数教程》的销量名列同类书前茅.《奥数教程》在网络上非常畅销,特别是一年级,长期居当当网同类书的榜首,评论数超1.8万条,好评率超过98%. 这些成绩的取得与作者们精到的创作,广大读者的支持、呵护是分不开的.

为了使《奥数教程》更健康、更成熟地发展,为了使学生的学习生活更主动、更有效,不断提高图书的质量,我们差不多两三年修订一次,现在已经是第六版了. 应广大读者的要求,方便读者自学,我们为本书配了"学习手册"和"能力测试". 把本书习题的详细解答放入"学习手册",并加入竞赛热点精讲. 全新的"能力测试"针对本书每讲,精选了一小时的习题量,帮助读者轻松巩固所学知识.

根据奥数题难度大的特点,我们特意请了奥赛名师,为《奥数教程》1—9年级中每一道例题精心录制了讲解视频,读者朋友可按照图书封底上提示的流程,利用手机或平板电脑扫描例题旁的二维码,即可免费观看. 由于视频的录制、审核、上线、更新的工作量较大,在不耽误读者朋友们学习进度的情况下,视频将逐步上线,在2014年11月30日前全部上线.

十年前,我们开展了"有奖订正"和"巧解共享"两项活动,得到了读者的支持与配合,不少读者纷纷来信、来电提出订正意见和更好的解法. 比如,广州市戴炽文老师、漳州市江晗同学、南京市单川同学等提供了一些巧妙解法,经作者确认后,已收入第六版图书中,并署上姓名. 这是对我们的鼓励,更是对我们的鞭策. 我们计划继续开展下列活动,希望有更多的读者朋友乐于参与.

一、有奖订正

2014年8月到2016年8月期间,欢迎读者朋友对《奥数教程》(第六版,共12册),提出改正意见,我们将对"纠错能手"给予奖励.

二、巧解共享

欢迎读者朋友对《奥数教程》中例题与习题,提供更巧妙的解法. 我们将选择有新意的、合适的解法在网上公布,以与其他读者朋友共享. 读者朋友也可以把巧妙的解法录制成微视频,通过"华师教辅 ECNUP"微信平台发送给我们,与大家分享与交流. 凡被采用者,我们将署上提供者的姓名,并支付相应的稿酬.

我们衷心祝愿《奥数教程》永远成为您的好朋友.

华东师范大学出版社

前 言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”．但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好．的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属．

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势．

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可．

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余)．

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”．但外国人，一学乘法，头就大了．不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵．

圆周率 $\pi=3.14159\cdots$．背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了．可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个……要背 π 先背诗，这在我们看来简直是自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法．

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色．从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生的学习兴趣，启迪学生智慧．例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解．中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200\div8=25$ 即是大和尚人数．小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头．恰好与总体的平均数相等．所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100\div(3+1)=25$ 人．

中国人善于计算，尤其善于心算．古代还有人会用手指计算(所谓“掐指一算”)．同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘．后者可以说是计算机的雏形．

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科．

几何推理，在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算，我国有不少论著)，比希腊人稍逊一筹．但是，中国人善于向别人学习．目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先．曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能

接受,但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来,中国队已经获得了14次团体冠军,可谓是成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说:"今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一……去年也是第一名."(陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演"怎样把中国建为数学大国")

陈省身先生还预言:"中国将在21世纪成为数学大国."

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:(1)进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

"天下大事,必作于细."我们希望,而且相信,这套丛书的出版,在使我国成为数学大国的努力中,能起到一点作用.本丛书初版于2000年,现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问,并为青少年数学爱好者题词,我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师大出版社及倪明、孔令志先生,没有他们,这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2014年5月

第 1 讲　集合的概念与运算

一、知识要点和基本方法

集合是数学中最重要的概念之一，是现代数学的基础. 集合是一个不加定义的原始概念. 一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合. 集合中的每一个对象叫做这个集合的元素. 对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、互异的、无序的.

正确地表达一个集合是学好数学的基础. 描述法是表示集合的重要方法，它基于下面的概括原则：

概括原则　任给一个性质 p，那么存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 p 的所有对象，即

$$S=\{x \mid p(x)\},$$

其中 $p(x)$ 是"x 具有性质 p"的缩写.

两个集合之间的关系可以通过子集、交集、并集来反映. 处理问题时，通常是从元素的角度出发来讨论，这里蕴含了"从局部到整体"的数学思想.

在集合的运算中，除了交与并两种运算外，经常出现的还有补运算与差运算.

由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 **A 关于 B 的差集**，记作 $A\backslash B$（也记作 $A-B$），即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A，但\ x\notin B\}.$$

集合的各种运算之间成立如下一些关系式.

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

De Morgan 法则：

$$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B),$$

$$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B).$$

二、例题精讲

【例 1】　已知 $A=\{1, 3, x\}$，$B=\{x^2, 1\}$，并且 $A\cup B=\{1, 3, x\}$. 求 x 的可能取值情况数.

解　由条件可知 $x\neq 1$、3，且 $x^2=3$ 或 $x^2=x$，$x^2\neq 1$. 于是，所求 x 只能为 $\pm\sqrt{3}$ 或 0. 故 x 的可能取值情况数为 3.

【例 2】 对任意 $x, y\in S$,若 $x+y\in S$, $x-y\in S$,则称 S 对加减封闭,S 为 $\mathbf{R}$ 的真子集.

(1) 试举一例 S;

(2) 证明:若 S_1, S_2 为 $\mathbf{R}$ 的两个真子集,且对加减封闭,则必存在 $c\in\mathbf{R}$,使得 $c\notin S_1\cup S_2$.

解 (1) $S=\{2k\mid k\in\mathbf{Z}\}$ 等.

(2) 因为 S_1 为 $\mathbf{R}$ 的真子集,故存在 $a\in\mathbf{R}$, $a\notin S_1$,若 $a\notin S_2$,则问题得证;否则 $a\in S_2$. 同理,存在 $b\in\mathbf{R}$, $b\notin S_2$,若 $b\notin S_1$,则问题得证. 否则 $b\in S_1$,令 $c=a+b$,下证,$c\notin(S_1\cup S_2)$. 反证,若 $c\in(S_1\cup S_2)$,则不妨设 $c\in S_1$,即 $a+b\in S_1$,而 $b\in S_1$,所以 $a+b-b=a\in S_1$,矛盾!

说明 本题的 c 的选取方法也不是唯一的,也可令 $c=a-b$ 或 $b-a$.

【例 3】 设集合 $M\subseteq\{1, 2, \cdots, 2011\}$,满足:在 M 的任意三个元素中,都可以找到两个元素 a, b,使得 $a|b$ 或 $b|a$. 求 $|M|$ 的最大值(其中 $|M|$ 表示集合 M 的元素个数). (2011 年中国西部数学奥林匹克试题).

解 当 $M=\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}, 3, 3\times2, 3\times2^2, \cdots, 3\times2^9\}$ 时满足条件,此时 $|M|=21$.

假设 $|M|\geqslant22$,设 M 中的元素为 $a_1<a_2<\cdots<a_k(k\geqslant22)$.

首先证明 $a_{n+2}\geqslant2a_n$,否则 $a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<2a_n$,那么 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 中任意两个元素之间没有整数倍数关系,矛盾!

由上述结论知:
$$a_4\geqslant2a_2\geqslant4,$$
$$a_6\geqslant2a_4\geqslant8,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{22}\geqslant2a_{20}\geqslant2^{11}>2011,$$
矛盾!

综上,$|M|$ 的最大值为 21.

【例 4】 设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a, b\in\mathbf{R})$,集合 $A=\{x\mid x=f(x), x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid x=f(f(x)), x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 证明:$A\subseteq B$;

(2) 当 $A=\{-1, 3\}$ 时,求集合 B.

解 (1) 对任意的 $x_0\in A$,知 $x_0=f(x_0)$, $x_0\in\mathbf{R}$, 于是
$$x_0=f(x_0)=f(f(x_0)),$$
故 $x_0\in B$, 从而 $A\subseteq B$.

(2) 因为 $A=\{-1, 3\}$,所以 $-1=f(-1)$, $3=f(3)$, 即

$$\begin{cases}(-1)^2+a(-1)+b=-1,\\ 3^2+a\cdot 3+b=3,\end{cases}$$

解得 $a=-1$，$b=-3$.

所以，$f(x)=x^2-x-3$. 由 $x=f(f(x))$，得

$$x=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3,$$

即
$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0.$$

由(1)知，$A\subseteq B$，故 -1，$3\in B$，从而 -1 和 3 是上述方程的根，即方程左端含有因式 $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$，于是因式分解可将上述方程化为

$$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0,$$

解得 $x=-1$，3，$\pm\sqrt{3}$. 所以，$B=\{-1,\ 3,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$.

【例 5】 集合 A、B、C(不必相异)的并集

$$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}.$$

求满足条件的集合的有序三元组$(A,\ B,\ C)$的个数.

解 由文氏图，可知在求 $A\cup B\cup C$ 时，A、B、C 之间可交出 7 个区域(如图 1－1 所示). 从而 1，2，…，10 中每个数有 7 种选择，故所求有序三元组的个数为 7^{10}.

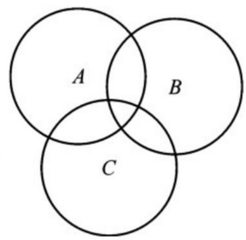


图 1－1

说明 这里每个数 1，2，…，10 均有 7 种选择，用到了"A、B、C 不必相异"，以及"$(A,\ B,\ C)$为有序三元组"两个条件. 当然，从解法上来看，我们体会了文氏图的一个妙用.

【例 6】 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 15$，集合 A、B 都是 $I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$. 证明：集合 A 或者 B 中，必有两个不同的数，它们的和为完全平方数.

证明 由 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$，我们不妨设 $1\in A$，并采用反证法来处理.

设集合 A 与 B 中，都没有两个数，它们的和为完全平方数. 则 $3\in B$，于是 $6\in A$，$10\in B$. 这时，如果 $15\in B$，则 $10+15=25$ 为完全平方数，若 $15\in A$，则 $1+15$ 又是一个完全平方数，从而 15 没有归属，由 $n\geqslant 15$，这是一个矛盾.

所以，命题成立.

说明 这里"我们不妨设 $1\in A$"是应该把握的一种技巧，人为地作合理的假设在处理具有对称性的问题时，可使问题简化.

【例 7】 设 A 是两个整数平方和的集合,即

$$A=\{x \mid x=m^2+n^2,\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

(1) 证明:若 $s,\ t\in A$,则 $st\in A$;

(2) 证明:若 $s,\ t\in A,\ t\neq 0$,则 $\frac{s}{t}=p^2+q^2$,其中 $p,\ q$ 是有理数.

分析 欲证 $st\in A$,只需证明 st 具有集合的性质即可,即证 st 可以表示为两个整数的平方和.

证明 (1) 由 $s,\ t\in A$,可设

$$s=m_1^2+n_1^2,\ t=m_2^2+n_2^2,$$

其中 m_1、m_2、n_1、n_2 都是整数,于是

$$\begin{aligned}st&=(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)\\&=m_1^2m_2^2+n_1^2n_2^2+m_1^2n_2^2+m_2^2n_1^2\\&=(m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2,\end{aligned}$$

即 st 是两个整数的平方和,从而 $st\in A$.

(2) 由于 $s,\ t\in A$,由(1)知,$st\in A$,于是可设 $st=m^2+n^2$,其中 m、n 都是整数.

对于 $t\neq 0$,有

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\frac{m^2+n^2}{t^2}=\left(\frac{m}{t}\right)^2+\left(\frac{n}{t}\right)^2,$$

而 $\frac{m}{t}$、$\frac{n}{t}$ 均为有理数,从而命题得证.

【例 8】 设 $m,\ n$ 是给定的大于 1 的整数,$a_1<a_2<\cdots<a_m$ 都是整数. 证明:存在整数集的一个子集 T,其元素个数

$$|T|\leqslant 1+\frac{a_m-a_1}{2n+1},$$

且对每个 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$,均有 $t\in T$ 及 $s\in[-n,\ n]$,使得 $a_i=t+s$. (2010 年中国数学奥林匹克)

证明 令 $a_1=a,\ a_m=b$,作带余除法 $b-a=(2n+1)q+r$,其中 $q,\ r\in\mathbf{Z}$ 且 $0\leqslant r\leqslant 2n$.

取 $T=\{a+n+(2n+1)k \mid k=0,\ 1,\ \cdots,\ q\}$,则 $|T|=q+1\leqslant 1+\dfrac{b-a}{2n+1}$,且集合

$$B=\{t+s \mid t \in T,\ s=-n,\ -n+1,\ \cdots,\ n\}$$
$$=\{a,\ a+1,\ \cdots,\ a+(2n+1)q+2n\}.$$

注意到 $a+(2n+1)q+2n \geqslant a+(2n+1)q+r=b$，故每个 a_i 均在 B 中，从而结论成立.

【例 9】 设集合 A 的元素都是正整数，满足如下条件：

(1) A 的元素个数不小于 3；

(2) 若 $a \in A$，则 a 的所有因数都属于 A；

(3) 若 $a \in A$，$b \in A$，$1<a<b$，则 $1+ab \in A$.

请解答下面的问题：

(1) 证明：1、2、3、4、5 都是集合 A 的元素；

(2) 问：2005 是否为集合 A 的元素？

解 (1) 首先，易知 $1 \in A$.

设 $a \in A$，$b \in A$，$1<a<b$. 若 a、b 中至少有一个偶数，则 $2 \in A$；若 a、b 都为奇数，则 $1+ab \in A$，而 $1+ab$ 是偶数，故 $2 \in A$.

设 $1,\ 2,\ a \in A(a>2)$，则

$$1+2a \in A,\ 1+2(1+2a)=3+4a \in A,$$

$$1+(1+2a)(3+4a)=4+10a+8a^2 \in A,$$

若 a 是偶数，则 $4 \mid (4+10a+8a^2)$，于是 $4 \in A$；若 a 是奇数，则把 $4+10a+8a^2$ 作为 a，重复上面的过程可得 $4 \in A$.

又 $1+2\times 4=9 \in A$，所以 $3 \in A$，$1+2\times 3=7 \in A$，$1+2\times 7=15 \in A$，所以 $5 \in A$.

所以，1、2、3、4、5 都是集合 A 的元素.

(2) 2005 是集合 A 的元素. 因为 $1+3\times 5=16$，故 $8 \in A$，进而

$$1+4\times 8=33,\ 1+3\times 33=100,$$

$$1+5\times 100=501,\ 1+4\times 501=2005,$$

都是集合 A 的元素.

说明 其实，可以证明：$A=\mathbf{N}^*$.

由(1)知，1、2、3、4、5 都是集合 A 的元素. 假设 $1,\ 2,\ \cdots,\ n \in A(n \geqslant 5)$，下证 $n+1 \in A$.

如果 $n+1=2k+1$ 为奇数，那么 $3 \leqslant k<n$，于是 $n+1=1+2k \in A$；

如果 $n+1=2k$ 是偶数，那么 $3 \leqslant k<n$，于是 $n=2k-1 \in A$，$1+2k \in A$，所以 $1+(2k-1)(2k+1)=4k^2 \in A$，从而 $2k \in A$，即 $n+1 \in A$.

综上所述,我们证明了 $A=\mathbf{N}^*$.

练习题

A组

1 对于集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, 我们把 $b-a$ 称为它的长度. 设集合 $A=\{x \mid a \leqslant x \leqslant a+1981\}$, $B=\{x \mid b-1014 \leqslant x \leqslant b\}$, 且 A、B 都是集合 $U=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2012\}$ 的子集,则集合 $A \cap B$ 的长度的最小值是________. (2012 年全国高中数学联赛试题 B 卷)

2 设集合 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A=$________. (2011 年全国高中数学联赛一试)

3 设 x、y、z 都是非零实数, 试用列举法将 $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}+\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{xy}{|xy|}+\dfrac{xyz}{|xyz|}$ 的所有可能值构成的集合表示出来.

4 设集合 $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\left\{1, 5a-5, -\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}a+4, a^3+a^2+3a+7\right\}$, 问:是否存在 $a \in \mathbf{R}$, 使 $A \cap B=\{2, 5\}$? 证明你的结论.

5 已知 X 是方程 $x^2+px+q=0$ 的实数解集, $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 4, 7, 10\}$, 且 $X \cap A=\varnothing$, $X \cap B=X$. 求 p、q 的值.

6 已知集合 $A=\{(x, y) \mid y=ax+2\}$, $B=\{(x, y) \mid y=|x+1|\}$, 且 $A \cap B$ 是一个单元集,求实数 a 的取值范围.

7 已知集合 $A=\{x \mid x=a^2+1, a \in \mathbf{N}^*\}$, $B=\{y \mid y=b^2-6b+10, b \in \mathbf{N}^*\}$. 问:集合 A 和 B 之间的关系是怎样的?

8 已知集合 $M=\{x, xy, \lg(xy)\}$, $N=\{0, |x|, y\}$, 并且 $M=N$. 求

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}}\right)$$

的值.

9 已知 $I=\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$, $A=\{(x, y) \mid y=3x-2\}$, $B=\left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{y-4}{x-2}=3\right\}$. 求 $A \cap B$ 及 $\complement_I A \cup B$.

10 在集合 $\{1, 2, \cdots, 50\}$ 的子集 S 中,任意两个元素的平方和不是 7 的倍数. 求 $|S|$ 的最大值.

11 M 是正整数集的子集,满足: $1 \in M$, $2006 \in M$, $2007 \notin M$, 并且有如下性质:若 $a, b \in M$, 则 $\left[\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right] \in M$, 问: M 有多少个非空子集?

12 设 S_1、S_2、S_3 是三个由整数组成的非空集,已知对于 1、2、3 的任意一个排列 i、j、k,如果 $x \in S_i$, $y \in S_j$,则 $x-y \in S_k$. 证明:S_1、S_2、S_3 中必有两个集合相等.

13 已知集合 $A=\{(x, y) \mid ax+y=1\}$, $B=\{(x, y) \mid x+ay=1\}$, $C=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$. 则

(1) 当 a 取何值时,$(A \cup B) \cap C$ 是一个 2 元集?

(2) 当 a 取何值时,$(A \cup B) \cap C$ 是一个 3 元集?

14 设集合 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B=\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$,其中 $a_i(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 都是正整数,且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$, $a_1+a_4=10$,并满足 $A \cap B=\{a_1, a_4\}$, $A \cup B$ 中所有数之和为 224. 求集合 A.

B 组

15 考虑集合$\{1, 2, \cdots, 2000\}$的满足下述条件的子集 A, A 中没有一个数是另一个数的 5 倍. 求$|A|$的最大值.

16 已知一族集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 具有性质:

(1) 每个 A_i 含有 30 个元素;

(2) 对每一对 i、j: $1 \leqslant i<j \leqslant n$, $A_i \cap A_j$ 都是单元集;

(3) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n=\varnothing$.

求使这样的集合族存在的最大的正整数 n.

17 已知 $A \subseteq\{1, 2, \cdots, 2000\}$,且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于 4 或 7. 求$|A|$的最大值.

18 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, T 是 A 的子集族,包含$\varnothing$及 A,且任意两个元素的交及并也属于 T,求这样的 T 的个数.

19 给定整数 $n \geqslant 2$,

(1) 求证:可以将集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有子集适当地排列为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2^n},使得 A_i 与 A_{i+1} 的元素个数恰相差 1,其中 $i=1, 2, \cdots, 2^n$ 且 $A_{2^n+1}=A_1$;

(2) 对于满足(1)中条件的子集 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2^n},求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i)$ 的所有可能值,其中 $S(A_i)=\sum\limits_{x \in A_i} x$, $S(\varnothing)=0$. (2011 年中国西部数学奥林匹克试题).

第2讲　有限集元素的数目

一、知识要点和基本方法

按照集合的元素个数是否为有限数，集合可分为有限集和无限集. 若集合 A 是有限集，用 $|A|$ 表示它的元素个数.

1. 映射

对任意的两个集合 A、B，依对应法则 f，如果对 A 中任意一个元素 x，在 B 中都有唯一的元素 $f(x)$ 与之对应，则称 $f: A \to B$ 是一个映射. 这里 $f(x)$ 称为 x 的象，而 x 称为 $f(x)$ 的原象.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，且对任意 $x, y \in A$, $x \neq y$, 都有 $f(x) \neq f(y)$，则称 f 是 A 到 B 的一个单射. 显然，若 A、B 都是有限集，而且能建立 A 到 B 的一个单射，则 $|A| \leqslant |B|$.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，且对任意 $y \in B$，都有一个 $x \in A$，使得 $y = f(x)$，则称 f 是 A 到 B 上的一个满射. 若 A、B 都是有限集，且能建立 A 到 B 上的一个满射，则 $|A| \geqslant |B|$.

若 $f: A \to B$ 是一个映射，并且 f 既是单射，又是满射，则称 f 是 A 到 B 的一个一一对应. 当 A、B 都是有限集时，如能建立 A 到 B 上的一个一一对应，则 $|A| = |B|$.

2. 容斥原理

定理 1　设 A、B 都是有限集，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

定理 2　设 A、B、C 都是有限集，则

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = {}& |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ & |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

二、例题精讲

【例 1】　在 $1, 2, \cdots, 1000$ 中，有多少个正整数既不是 2 的倍数，又不是 5 的倍数?

解　设 $S = \{1, 2, \cdots, 1000\}$, $A_2 = \{a \mid a \in S, 2 \mid a\}$, $A_5 = \{a \mid a \in S, 5 \mid a\}$. 则 $|A_2| = \dfrac{1000}{2} = 500$, $|A_5| = \dfrac{1000}{5} = 200$, $|A_2 \cap A_5| = \dfrac{1000}{10} = 100$, 于是 $|\complement_S A_2 \cap \complement_S A_5| = |S| - (|A_2| + |A_5|) + |A_2 \cap A_5| = 1000 - (500 +$

$200) + 100 = 400$.

【例 2】 集合 A 的元素都是正整数，其中最小的是 1，最大的是 100，除 1 以外，每一个元素都等于集合 A 中的两个数(可以相同)的和. 求集合 A 的元素个数的最小值.

解 设 $A = \{1, a_1, a_2, \cdots, a_n, 100\}$，其中 $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 100$. 则 $a_1 = 1 + 1 = 2$.

若 $n = 6$，则 $a_2 \leqslant 2 + 2 = 4$，$a_3 \leqslant 4 + 4 = 8$，$a_4 \leqslant 8 + 8 = 16$，$a_5 \leqslant 16 + 16 = 32$，$a_6 \leqslant 32 + 32 = 64$. 由于 $a_5 + a_6 \leqslant 32 + 64 = 96 < 100$，所以 $100 = 2a_6$，$a_6 = 50$. 又 $a_4 + a_5 \leqslant 16 + 32 = 48 < 50$，所以 $50 = 2a_5$，$a_5 = 25$. 而 $a_3 + a_4 \leqslant 8 + 16 = 24 < 25$，所以 $25 = 2a_4$，矛盾.

若 $n \leqslant 5$，则由上可知，$a_n \leqslant 32$，$2a_n \leqslant 64 < 100$，不可能.

综上可知，$|A| \geqslant 9$.

又当 $A = \{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ 时，集 A 满足题述性质，且 $|A| = 9$. 故集 A 的元素个数的最小值为 9.

【例 3】 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相等，且 $A \cap B$ 为空集，若 $n \in A$，总有 $2n + 2 \in B$，则集合 $A \cup B$ 的元素个数最多为________.

解 先证明 $|A \cup B| \leqslant 66$，只须证 $|A| \leqslant 33$. 为此只须证明若 A 是 $\{1, 2, 3, \cdots, 49\}$ 的任何一个 34 元子集，则必存在 $n \in A$，使得 $2n + 2 \in A$，证明如下：

将 $\{1, 2, 3, \cdots, 49\}$ 分成如下 33 个集合：

$$\{1, 4\}, \{3, 8\}, \{5, 12\}, \cdots, \{23, 48\}, \{2, 6\}, \{10, 22\}, \cdots,$$
$$\{18, 38\}, \{25\}, \{27\}, \cdots, \{49\}, \{26\}, \{34\}, \{42\}, \{46\}$$

由于 A 是 $\{1, 2, 3, \cdots, 49\}$ 的 34 元子集，从而由抽屉原理知，上述 33 个集合中至少有一个二元集合中的数均属于 A 即必存在 $n \in A$，使得 $2n + 2 \in A$，则 $|A| \leqslant 33$.

如取 $A = \{1, 3, 5, \cdots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, \cdots, 49, 26, 34, 42, 46\}$，$B = \{2n + 2 \mid n \in A\}$，则 A、$B$ 满足题设且 $|A| = |B|$，$|A \cup B| = 66$.

【例 4】 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$，n 项的数列：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有下列性质：对于 S 的任一非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$)，在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B. 求 n 的最小值.

解 首先，S 中的每个数在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少出现 2 次. 事实上，若 S 中的某个数在这个数列中只出现 1 次，由于含这个数的二元子集共有 3 个，但在数

列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法，因而不可能 3 个含这个数的二元子集都在数列相邻两项中出现.

由于 S 中的每个数在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少出现 2 次，所以，$n \geqslant 8$.

下面，我们构造一个 $n=8$ 且满足题设条件的例子，8 项数列：

$$3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 4$$

就是满足条件的一个数列.

综上所述，n 的最小值为 8.

【例 5】 设 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 2n, 2n+1\}$，$B$ 是 A 的一个子集，且 B 中的任意三个不同元素 x、y、z，都有 $x+y \neq z$. 求 $|B|$ 的最大值.

解 设 $O=\{1, 3, \cdots, 2n+1\}$，$E=\{2, 4, \cdots, 2n\}$. 则 $A=O \cup E$. 设 $B=\{b_1, \cdots, b_s, c_1, \cdots, c_t\}$，其中 $b_1, \cdots, b_s \in O$，$c_1, \cdots, c_t \in E$，且 $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$. 由题设知 $b_s - b_i \neq c_j$，其中 $i=1, 2, \cdots, s-1$，$j=1, 2, \cdots, t$（否则集 B 中就有三个元素 b_i、c_j、b_s，使得 $b_i + c_j = b_s$），且 $2 \leqslant b_s - b_i \leqslant 2n$，即 $b_s - b_i \in E$，$i=1, 2, \cdots, s-1$.

所以 $b_s-b_1, b_s-b_2, \cdots, b_s-b_{s-1}, c_1, \cdots, c_t$ 是 E 中互不相同的元素，故

$$(s-1)+t \leqslant |E|=n, \ |B|=s+t \leqslant n+1.$$

又当 $B=\{n+1, n+2, \cdots, 2n+1\}$ 时，B 中任意两个不同元素 x、y，都有 $x+y \geqslant 2n+3$，从而 B 满足题意.

综上所述，$|B|$ 的最大值为 $n+1$.

说明 例 2、例 3、例 4 和例 5，我们都是先求出一个上界或下界(例 2 是 $|A| \geqslant 9$，例 3 是 $|A| \leqslant 33$，例 4 是 $n \geqslant 8$，例 5 是 $|B| \leqslant n+1$)，然后再构造一个具体的例子来说明这个上界是可以达到的，这是处理这种最值问题的常用手法. 在实际解题时，我们往往先通过具体的例子猜出这个上界，然后再设法证明.

【例 6】 某班语文、数学、外语三门课程期中考试成绩统计结果：至少有一门课程得满分的学生只有 18 人，语文得满分的有 9 人，数学得满分的有 11 人，外语得满分的有 8 人，语文、数学都得满分的有 5 人，数学、外语都得满分的有 3 人，语文、外语都得满分的有 4 人. 问：

(1) 语文、数学两门课程至少有一门得满分的学生有多少人？

(2) 语文、数学、外语三门课程都得满分的学生有多少人？

解 设该班期中考试语文、数学、外语得满分的学生的集合分别为 A、B、C，由题意知

$$|A|=9, \ |B|=11, \ |C|=8.$$

$|A\cap B|=5$，$|B\cap C|=3$，$|C\cap A|=4$，$|A\cup B\cup C|=18$.

(1) 语文、数学两门课程至少有一门得满分的学生有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=9+11-5=15(\text{人}).$$

(2) 语文、数学、外语都得满分的学生有

$$\begin{aligned}|A\cap B\cap C|&=|A\cup B\cup C|-|A|-|B|-|C|+\\&\quad|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|\\&=18-9-11-8+5+3+4=2(\text{人}).\end{aligned}$$

【例 7】 考虑集合 $S=\{1,2,\cdots,10\}$ 的所有非空子集，若一个非空子集中的偶数的数目不少于奇数的数目，称这个子集是"好子集"，则求"好子集"的数目.

解 方法一：设一个"好子集"中有 $i(i=1,2,3,4,5)$ 个偶数，则奇数的数目可以有 $j=0,1,\cdots,i$ 个，因此"好子集"的数目为 $\sum\limits_{i=1}^{5}\left(C_5^i\sum\limits_{j=0}^{i}C_5^j\right)=C_5^1(C_5^0+C_5^1)+C_5^2(C_5^0+C_5^1+C_5^2)+C_5^3(C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3)+C_5^4(C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4)+C_5^5(C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5)=637$.

方法二：S 的非空子集共有 $2^{10}-1=1023$（个），根据子集中偶数与奇数个数的多少可分为三类：

(1)偶数多于奇数；(2)奇数多于偶数；(3)奇数与偶数个数相等. 由于 S 中的 10 个元素偶数与奇数的个数相等，所以(1)、(2)的子集数相等. 现考虑第三类，分别考虑含有 2、4、6、8、10 个元素子集的数目，则共有子集数为

$$C_5^1\cdot C_5^1+C_5^2\cdot C_5^2+C_5^3\cdot C_5^3+C_5^4\cdot C_5^4+1=251.$$

所以，第一类子集数为 $\dfrac{1}{2}(1023-251)=386$.

因此，"好子集"的数目为 $386+251=637$（个）.

【例 8】 将集合 $S=\{1,2,\cdots,36\}$ 分拆为 k 个互不相交的非空子集 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 的并，并且对于每一个 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$，其中任意两个不同的元素的和都不是完全平方数，求 k 的最小值.

解 首先，考虑数 6、19、30，因为 $6+19=5^2$，$6+30=6^2$，$19+30=7^2$，所以，这 3 个数必须属于 3 个不同的子集，于是 $k\geqslant 3$.

另一方面，集合 $S=\{1,2,\cdots,36\}$ 可以分拆为 3 个互不相交的非空子集 A_1、A_2、A_3 的并，使得它们满足题设条件. 令

$$A_1 = \{4k+3 \mid 0 \leqslant k \leqslant 8\} \cup \{4, 8, 16, 24, 36\},$$

$$A_2 = \{4k+1 \mid 0 \leqslant k \leqslant 8\} \cup \{6, 14, 18, 26, 34\},$$

$$A_3 = \{2, 10, 12, 20, 22, 28, 30, 32\},$$

由于完全平方数除以 4 的余数只能是 0 或者 1,所以,容易验证 A_1、A_2、A_3 满足题设条件.

综上所述,k 的最小值为 3.

【例 9】 将与 105 互质的所有正整数从小到大排成数列,求这个数列的第 1000 项.

解 设 $S=\{1, 2, \cdots, 105\}$, $A_3=\{a \mid a \in S$,且 $3 \mid a\}$, $A_5=\{a \mid a \in S$,且 $5 \mid a\}$, $A_7=\{a \mid a \in S$,且 $7 \mid a\}$,则

$$|A_3| = \frac{105}{3} = 35,\ |A_5| = \frac{105}{5} = 21,\ |A_7| = \frac{105}{7} = 15,$$

$$|A_3 \cap A_5| = \frac{105}{3 \times 5} = 7,\ |A_5 \cap A_7| = \frac{105}{5 \times 7} = 3,$$

$$|A_7 \cap A_3| = \frac{105}{7 \times 3} = 5,$$

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \frac{105}{3 \times 5 \times 7} = 1,\ |S| = 105.$$

在 1 到 105 中,与 105 互质的数有

$$\begin{aligned}|\complement_S A_3 \cap \complement_S A_5 \cap \complement_S A_7| &= |S| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\ &= |S| - (|A_3| + |A_5| + |A_7|) + \\ &\quad (|A_3 \cap A_5| + |A_5 \cap A_7| + \\ &\quad |A_7 \cap A_3|) - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= 105 - (35 + 21 + 15) + (7 + 3 + 5) - 1 \\ &= 48.\end{aligned}$$

设与 105 互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,则

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ \cdots,\ a_{48} = 104,\ a_{49} = 105 + 1,$$

$$a_{50} = 105 + 2,\ a_{51} = 105 + 4,\ \cdots,\ a_{96} = 105 + 104,\ \cdots.$$

因为 $1000 = 48 \times 20 + 40$,所以 $a_{1000} = 105 \times 20 + a_{40}$.

由于 $a_{48} = 104$, $a_{47} = 103$, $a_{46} = 101$, $a_{45} = 97$, $a_{44} = 94$, $a_{43} = 92$, $a_{42} =$

89, $a_{41}=88$, $a_{40}=86$, 所以 $a_{1000}=105\times 20+86=2186$.

说明 本题利用了逐步淘汰原理,即

(1) 设 A、B 是 S 的子集, $\complement_S A$、$\complement_S B$ 分别是 A、B 对 S 的补集,则

$$|\complement_S A\cap \complement_S B|=|S|-(|A|+|B|)+|A\cap B|.$$

(2) 设 A、B、C 是 S 的子集, $\complement_S A$、$\complement_S B$、$\complement_S C$ 分别是它们对 S 的补集,则

$$|\complement_S A\cap \complement_S B\cap \complement_S C|=|S|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|)-|A\cap B\cap C|.$$

(1)和(2)与定理 1、定理 2 一起称为容斥原理. 有兴趣的读者可以把它们推广到 n 个集合的情形.

练习题

A 组

1 设 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1) 写出一个 $f:A\to B$, 使得 f 是单射,并求 A 到 B 的单射的个数;

(2) 写出一个 $f:A\to B$, 使得 f 不是单射,并求所有这种映射的个数;

(3) A 到 B 的映射能否是满射?

2 集合 A 与 B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$, 当 $A\neq B$ 时,(A, B)与(B, A)视为不同的对,则这样的(A, B)有多少对?

3 若三个非零且互不相等的实数 a、b、c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$, 则称 a、b、c 是调和的;若满足 $a+c=2b$, 则称 a、b、c 是等差的. 已知集合 $M=\{x \mid |x|\leqslant 2013, x\in \mathbf{Z}\}$, 集合 P 是集合 M 的三元子集,即 $P=\{a, b, c\}\subset M$. 若集合 P 中元素 a、b、c 既是调和的,又是等差的,则称集合 P 为“好集”. 则不同的“好集”的个数为________.

4 已知集合

$$A=\{(x, y)\mid |x|+|y|=a, a>0\},$$
$$B=\{(x, y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}.$$

若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,求 a 的值.

5 设 $M=\{1, 2, 3, \cdots, 1995\}$, $A\subseteq M$,且当 $x\in A$ 时,$19x\notin A$. 求$|A|$的最大值.

6 在 1 到 100 这 100 个正整数中,最多可以选出多少个数,使得其中没有一个数是另一个数的 3 倍.

7 对于集合$\{1, 2, \cdots, n\}$和它的每个非空子集,我们定义“交替和”如下:把

集合中的数按从大到小的顺序排列，然后从最大的数开始交替地加减各数（例如$\{1, 2, 4, 6, 9\}$的交替和是$9-6+4-2+1=6$，而$\{5\}$的交替和就是5）. 对于$n=7$，求所有这些交替和的总和.

8 设S为$\{1, 2, \cdots, 9\}$的子集，且S中任意两个不同的数之和所得的数两两不同，问：S中最多有多少个元素？

9 设集合$A=\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 2000, a=4k+1, k \in \mathbf{Z}\}$，集合$B=\{b \mid 1 \leqslant b \leqslant 3000, b=3k-1, k \in \mathbf{Z}\}$. 求$|A \cap B|$.

10 求集合$M=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$的所有子集的元素和.

11 设$M=\{1, 2, 3, \cdots, 1995\}$，$A$是$M$的子集且满足条件：当$x \in A$时，$15x \notin A$. 求$|A|$的最大值.

12 某中学共有教师120名，教语文、数学、外语的分别有40、50、45名，其中有15名能教数学、外语，有10名能教数学、语文，有8名能教外语、语文，还有4名语文、数学、外语都能教. 问：该校这三门课都不能教的教师有多少名？

B组

13 设$E=\{1, 2, 3, \cdots, 200\}$，$G=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\} \subsetneqq E$，且$G$具有下列两条性质：

(1) 对任何$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 100$，恒有$a_i+a_j \neq 201$；

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=10\,080$.

试证：G中的奇数的个数是4的倍数，且G中所有数字的平方和为一定数.

14 对于有限集合A，存在函数$f: \mathbf{N}^* \rightarrow A$，具有下述性质：若$i, j \in \mathbf{N}^*$，且$|i-j|$是质数，则$f(i) \neq f(j)$. 求$|A|$的最小值.

15 集合$A=\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，$B_1, B_2, \cdots, B_k$为A的非空子集. 对于任何$i \neq j$，$B_i \cap B_j$至多有两个元素. 求k的最大值.

16 设$S=\{1, 2, \cdots, 100\}$，求最小的正整数n，使得S的每一个n元子集都含有4个两两互质的数.

17 已知n个4元集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足：

(1) $|A_i \cap A_j|=1$，$1 \leqslant i<j \leqslant n$；

(2) $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|=n$.

求n的最大值.

第3讲　二次函数

一、知识要点和基本方法

1. $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 称为二次函数. 也常常写成：$f(x)=a(x-k)^2+m(a\neq 0)$（顶点式），或 $f(x)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)(a\neq 0)$（零点式）.

2. $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的性质

（1）对称性. 对任意实数 x，有

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=f\left(-\frac{b}{2a}-x\right).$$

（2）$f(0)=c$.

（3）若 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，则 $f\left(\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$.

（4）当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上递减，在区间 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上递增，在区间 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上递减.

（5）当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f_{\min}(x)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f_{\max}(x)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

3. $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象

（1）对称轴：$f(x)$ 关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称.

（2）顶点：对称轴与抛物线的交点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 称为顶点. 当 $a>0$ 时，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，顶点是抛物线的最高点.

（3）开口：当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下，开口大小由 $|a|$ 决定.

（4）二次函数图象与 x 轴的位置关系：当 $\Delta>0$ 时，二次函数图象与 x 轴有两个不同的交点；当 $\Delta=0$ 时，二次函数图象与 x 轴相切只有一个交点；当 $\Delta<0$ 时，二次函数与 x 轴无交点.

二、例题精讲

【例 1】 已知 $a, b, c\in\mathbf{R}$，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当

$x \in [-1, 1]$ 时，$|f(x)| \leqslant 1$. 求证：

(1) $|c| \leqslant 1$；

(2) $x \in [-1, 1]$ 时，$|g(x)| \leqslant 2$；

(3) $a > 0$，当 $x \in [-1, 1]$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 $f(x)$.

证明 (1) $|c| = |f(0)| \leqslant 1$.

(2) 由于 $g(x)$ 是一个一次函数，也是单调函数，只证 $|g(1)| \leqslant 2$，$|g(-1)| \leqslant 2$ 即可.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \end{array}\right\} \Rightarrow g(1) = |a + b| = |f(1) - f(0)| \leqslant |f(1)| + |f(0)| \leqslant 2,$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \end{array}\right\} \Rightarrow g(-1) = |a - b| = |f(-1) - f(0)| \leqslant |f(-1)| + |f(0)| \leqslant 2.$$

(3) $a > 0$，显然 $g(x)_{\max} = g(1) = a + b = 2$.

而 $2 = g(1) = a + b = f(1) - c$，且 $|f(1)| \leqslant 1$，$|c| \leqslant 1$.

所以 $c = f(0) = -1$，又当 $x \in [-1, 1]$ 时，$|f(x)| \leqslant 1$，所以在 $x \in [-1, 1]$ 时，$f(x) \geqslant f(0) = c = -1$，即 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的最小值，$x = 0$ 必为 $y = f(x)$ 的图象的对称轴，$b = 0$，$a = 2$.

故 $f(x) = 2x^2 - 1$.

【例 2】 (1) 已知抛物线 $y = 2x^2$，把它向右平移 p 个单位，或向下平移 q 个单位，都能使得抛物线与直线 $y = x - 4$ 恰好有一个交点. 求 p、q 的值.

(2) 把抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 p 个单位，向上平移 q 个单位，则得到的抛物线经过点 $(1, 3)$ 与 $(4, 9)$，求 p、q 的值.

(3) 把抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向左平移三个单位，向下平移两个单位后，所得的图象是经过点 $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ 的抛物线 $y = ax^2$，求原二次函数的解析式.

解 (1) 抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 p 个单位后，得到的抛物线为 $y = 2(x - p)^2$. 于是方程 $2(x - p)^2 = x - 4$，即

$$2x^2 - (4p + 1)x + 2p^2 + 4 = 0,$$

有两个相同的实数根，所以

$$\Delta = (4p + 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2p^2 + 4) = 0.$$

解得 $p = \dfrac{31}{8}$. 这时的交点为 $\left(\dfrac{33}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$.

抛物线 $y = 2x^2$ 向下平移 q 个单位，得到的抛物线为 $y = 2x^2 - q$. 于是方程

$$2x^2-q=x-4,$$

即
$$2x^2-x+4-q=0,$$

有两个相同的实根,所以 $\Delta'=1-4\cdot2\cdot(4-q)=0$,解得 $q=\dfrac{31}{8}$. 这时的交点为 $\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{15}{4}\right)$.

(2) 把 $y=2x^2$ 向左平移 p 个单位,向上平移 q 个单位,得到的抛物线为 $y=2(x+p)^2+q$. 由题设得

$$\begin{cases}3=2(1+p)^2+q,\\9=2(4+p)^2+q,\end{cases}$$

解得 $p=-2$, $q=1$.

(3) 由于 $y=ax^2$ 经过点 $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$,所以 $-\dfrac{1}{2}=a\cdot(-1)^2$,因此 $a=-\dfrac{1}{2}$.

于是原来的二次函数可由 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 向右平移三个单位,向上平移两个单位后得到,即为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+2$.

说明 将抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向右平移 p 个单位,得到的抛物线是 $y=a(x-p)^2+b(x-p)+c$;向左平移 p 个单位,得到的抛物线是 $y=a(x+p)^2+b(x+p)+c$;向上平移 q 个单位,得到的抛物线是 $y=ax^2+bx+c+q$;向下平移 q 个单位,得到的抛物线是 $y=ax^2+bx+c-q$.

【例3】 如果抛物线 $y=x^2-(k-1)x-k-1$ 与 x 轴的交点为 A、B,顶点为 C,求$\triangle ABC$ 面积的最小值.

解 首先,由

$$\begin{aligned}\Delta&=(k-1)^2+4(k+1)=k^2+2k+5\\&=(k+1)^2+4>0\end{aligned}$$

知,对任意的 k 值,抛物线与 x 轴总有两个交点.

设抛物线与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 x_1、x_2,那么

$$\begin{aligned}|AB|&=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}\\&=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+2k+5}.\end{aligned}$$

又抛物线的顶点坐标是 $C\left(\dfrac{k-1}{2},-\dfrac{k^2+2k+5}{4}\right)$,所以,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+2k+5}\cdot\left|-\frac{k^2+2k+5}{4}\right|$$
$$=\frac{1}{8}\sqrt{(k^2+2k+5)^3}=\frac{1}{8}\sqrt{[(k+1)^2+4]^3}$$
$$\geqslant\frac{1}{8}\sqrt{4^3}=1,$$

当且仅当 $k=-1$ 时等号成立.

故$\triangle ABC$面积的最小值为 1.

【例 4】 设二次函数 $f(x)=ax^2+(2b+1)x-a-2(a,b\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 在$[3,4]$上至少有一个零点,求 a^2+b^2 的最小值.

解 方法 1:由已知得,设 t 为二次函数在$[3,4]$上的零点,则有

$$at^2+(2b+1)t-a-2=0,$$

$$(2-t)^2=[a(t^2-1)+2bt]^2\leqslant(a^2+b^2)[(t^2-1)^2+4t^2]$$
$$=(a^2+b^2)(1+t^2)^2,$$

于是 $$a^2+b^2\geqslant\left(\frac{t-2}{1+t^2}\right)^2=\frac{1}{\left(t-2+\dfrac{5}{t-2}+4\right)^2}\geqslant\frac{1}{100}.$$

因为 $t-2+\dfrac{5}{t-2}$, $t\in[3,4]$ 是减函数,上述式子在 $t=3$, $a=-\dfrac{2}{25}$, $b=-\dfrac{3}{50}$ 时取等号,故 a^2+b^2 的最小值为$\dfrac{1}{100}$.

方法 2:把等式看成关于 a, b 的直线方程:$(x^2-1)a+2xb+x-2=0$,利用直线上一点(a,b)到原点的距离大于原点到直线的距离,即 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{|x-2|}{\sqrt{(x^2-1)^2+(2x)^2}}$(以下同方法 1).

【例 5】 求所有的正实数对(a,b),使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足:对任意实数 x, y,有
$$f(xy)+f(x+y)\geqslant f(x)f(y).$$

(2013 年全国高中数学联赛)

解 已知条件可转化为:对任意实数 x, y,有

$$(ax^2y^2+b)+[a(x+y)^2+b]\geqslant(ax^2+b)(ay^2+b).\qquad ①$$

先寻找 a, b 所满足的必要条件.

在①式中令 $y=0$,得 $b+(ax^2+b)\geqslant(ax^2+b)\cdot b$,即对任意实数 x,有

$$(1-b)ax^2+b(2-b)\geqslant 0.$$

由于 $a>0$，故 ax^2 可取到任意大的正值，因此必有 $1-b\geqslant 0$，即 $0<b\leqslant 1$.

在①式中再令 $y=-x$，得 $(ax^4+b)+b\geqslant(ax^2+b)^2$，即对任意实数 x，有

$$(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\geqslant 0. \tag{②}$$

将②的左边记为 $g(x)$. 显然 $a-a^2\neq 0$（否则，由 $a>0$ 可知 $a=1$，此时 $g(x)=-2bx^2+(2b-b^2)$，其中 $b>0$，故 $g(x)$可取到负值，矛盾），于是

$$\begin{aligned}g(x)&=(a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+(2b-b^2)\\&=(a-a^2)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0\end{aligned}$$

对一切实数 x 成立，从而必有 $a-a^2>0$，即 $0<a<1$.

进一步，考虑到此时 $\frac{b}{1-a}>0$，再根据 $g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0$，可得 $2a+b\leqslant 2$.

至此，求得 a，b 满足的必要条件如下：

$$0<b\leqslant 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leqslant 2. \tag{③}$$

下面证明，对满足③的任意实数对(a,b)以及任意实数 x，y，总有①成立，即

$$h(x,y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2)$$

对任意 x，y 取非负值.

事实上，在③成立时，有 $a(1-b)\geqslant 0$，$a-a^2>0$，$\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0$，再结合 $x^2+y^2\geqslant -2xy$，可得

$$\begin{aligned}h(x,y)&\geqslant(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+(2b-b^2)\\&=(a-a^2)x^2y^2+2abxy+(2b-b^2)\\&=(a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0.\end{aligned}$$

综上所述，所求的正实数对(a,b)全体为 $\{(a,b)\mid 0<b\leqslant 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leqslant 2\}$.

【例 6】 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$、$N(2,3)$的线段（包括 M、N 两点）有两个相异的交点，求 a 的取值范围.

解 易知，过点 $M(0,1)$、$N(2,3)$的直线方程为 $y=x+1$. 抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 MN 有两个交点就是方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在区间$[0,2]$上有两

个不等实根.

令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$, 其对称轴为 $-\frac{a-1}{2}$, 于是

$$\begin{cases}0<-\frac{a-1}{2}<2,\\ \Delta=(a-1)^2-4>0,\\ f(0)=1\geqslant 0,\\ f(2)=2a+3\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 a 的取值范围是 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$.

说明 利用二次函数的图象来研究一元二次方程的根的分布是非常有效的手段.

【例7】 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$, 方程 $f(x)=x$ 的两个根是 x_1 和 x_2, 且 $x_1>0$, $x_2-x_1>\frac{1}{a}$. 又若 $0<t<x_1$, 试比较 $f(t)$ 与 x_1 的大小.

解 因为 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=x$ 的两个根, 所以

$$x_1+x_2=-\frac{b-1}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a},\ ax_1^2+bx_1+c=x_1,$$

因此
$$\begin{aligned}f(t)-x_1&=(at^2+bt+c)-(ax_1^2+bx_1+c)\\&=a(t+x_1)(t-x_1)+b(t-x_1)\\&=a(t-x_1)\left(t+x_1+\frac{b}{a}\right).\end{aligned}$$

由 $t+x_1+\frac{b}{a}=t+\left(\frac{1}{a}-x_2\right)=\left(t+\frac{1}{a}\right)-x_2<\left(x_1+\frac{1}{a}\right)-x_2<0$, 及 $a>0$, $t-x_1<0$ 得 $f(t)-x_1>0$.

所以, 当 $0<t<x_1$ 时, 有 $f(t)>x_1$.

【例8】 设实数 a、b、c、m 满足条件: $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$, 且 $a\geqslant 0$, $m>0$. 求证: 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根 x_0 满足 $0<x_0<1$.

证明 当 $a=0$ 时, 若 $b\neq 0$, 则 $x_0=-\frac{c}{b}=\frac{m}{m+1}$, 此时 $0<x_0<1$; 若 $b=0$, 则 $c=0$, 这时一切实数 x 都满足方程, 当然也有 $0<x_0<1$. 故当 $a=0$ 时, 结论成立.

当 $a>0$ 时, 令 $f(x)=ax^2+bx+c$. 则

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+b\left(\frac{m}{m+1}\right)+c=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2-\frac{am}{m+2}$$

$$=-\frac{am}{(m+1)^2(m+2)}<0.$$

若 $c>0$，因 $f(0)=c>0$，故必有一根 x_0 满足 $0<x_0<\frac{m}{m+1}<1$；

若 $c\leqslant 0$，因为

$$f(1)=a+b+c=(m+2)\frac{a}{m+2}+(m+1)\frac{b}{m+1}+c$$

$$=\frac{a}{m+2}+(m+1)\left(\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}\right)-\frac{c}{m}$$

$$=\frac{a}{m+2}-\frac{c}{m}>0,$$

故必有一根 x_0 满足 $0<\frac{m}{m+1}<x_0<1$.

综上所述，命题得证.

【例 9】 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a<b)$ 的图象恒不在 x 轴下方，且 $m<\frac{a+b+c}{b-a}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解 由题设知，$y=ax^2+bx+c\geqslant 0$ 恒成立，所以，$a>0$，且$b^2-4ac\leqslant 0$.

记 $t=\frac{b}{a}>1$，则

$$\frac{a+b+c}{b-a}=\frac{4a^2+4ab+4ac}{4a(b-a)}\geqslant\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$$

$$=\frac{4+4t+t^2}{4t-4}=\frac{1}{4}\left((t-1)+\frac{9}{t-1}+6\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{4}(6+6)=3,$$

当且仅当 $t=4$，即 $b=4a$，$b^2=4ac$ 时，等号成立，从而$\frac{a+b+c}{b-a}$的最小值为 3，于是，m 的取值范围是$m<3$.

练习题

A组

1 填空

(1) 将二次函数 $y=2x^2$ 进行平移,使得它的顶点在一次函数 $y=-4x$ 的图象上,且抛物线在 x 轴上截得的线段长为 2,则平移后二次函数的解析式为________.

(2) 当 a 取遍 0 到 5 的所有实数时,满足 $3b=a(3a-8)$ 的整数 b 的个数是______.

(3) 设 $f(x)=ax^2+bx$, 且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$, 则 $f(-2)$的取值范围是__________.

(4) 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 当 $x=3$ 时取得最大值 10,并且它的图象在 x 轴上截得的线段长为 4,则 $f(1)=$ ______.

(5) 已知点 $P_1(x_1, 1994)$和 $P_2(x_2, 1994)$在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+7$ $(a\neq 0)$ 的图象上,则 $f(x_1+x_2)=$ ______.

2 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件: $f(0)=2$, $f(1)=-1$, 且图象在 x 轴上所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$. 求这个二次函数的表达式.

3 设二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx$, $a>0$, a 与 b 都是整数,且 $x=15$ 时, $y<0$, $x=16$ 时, $y>0$.

(1) 求证: $a\nmid b$, b 是负整数;

(2) 当 x 取整数 n 所得的所有函数值 $f(n)$中,当 n 为何值时, $f(n)$最小?

4 若对任何实数 p,抛物线 $y=2x^2-px+4p+1$ 都通过一定点,求此定点的坐标.

5 已知定义在闭区间$[0, a]$上的函数 $y=x^2-2x+3$. 问:当 a 在什么范围内取值时, y 的最大值是 3 且最小值是 2?

6 设 a、b 是两个正数,且 $a<b$, 当 $x\in[a, b]$ 时, $y=x^2-4x+6$ 的最小值为 a,最大值为 b. 求 a、b 的值.

7 若函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{13}{2}$ 在区间$[a, b]$上的最小值为 $2a$,最大值为 $2b$,求$[a, b]$.

8 (1) 对于任意实数 x,不等式 $(a-1)x^2+2x+2>0$ 恒成立. 求实数 a 的取值范围;

(2) 对于在区间$[-1, 1]$上的任意实数 x,不等式 $(a-1)x^2+2x+2>0$ 恒成立. 求实数 a 的取值范围.

9 已知实数 b、c 满足 $b<2<c$,且函数 $y=x^2-4|x|+4$ 当 $b\leqslant x\leqslant c$ 时有最大值 $4c$,最小值 b,求 $b+c$ 的值.

10 若关于 x 的二次方程 $7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$ 的两根 α、β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，求实数 p 的取值范围.

B 组

11 已知二次函数 $f(x)$满足

(1) $f(-1)=0$；

(2) 对一切 x 的值有 $x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1+x^2}{2}$ 成立.

求 $f(x)$的解析式.

12 已知 A、B 为抛物线 C：$y^2=4x$ 上的两个动点，点 A 在第一象限，点 B 在第四象限. l_1、l_2 分别过点 A、B 且与抛物线 C 相切，P 为 l_1、l_2 的交点.

(1) 若直线 AB 过抛物线 C 的焦点 F，求证：动点 P 在一条定直线上，并求此直线方程；

(2) 设 C、D 为直线 l_1、l_2 与直线 $x=4$ 的交点，求$\triangle PCD$ 面积的最小值.

13 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)=x$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0,\ x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=x_0$ 对称. 证明：$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

14 设 a、b 是实数，二次方程 $x^2-ax+b=0$ 的一个根属于区间$[-1,\ 1]$，另一个根属于区间$[1,\ 2]$. 求 $a-2b$ 的取值范围.

15 已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根，求证：方程 $ax^2+bx+c+k\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=0\ (k\neq 0)$ 至少有一个根，在前一方程的两根之间.

16 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过$(0,\ -1)$、$(1,\ 2)$、$(-3,\ 2)$三点.

(1) 在这条抛物线上求出到两个坐标轴距离相等的点；

(2) 求出以(1)中的点为顶点的多边形的面积.

17 若抛物线 $y=-x^2+2ax+b$ 的顶点在直线 $mx-y-2m+1=0$ 上移动，且与抛物线 $y=x^2$ 有公共点. 求 m 的取值范围.

第4讲　函数的图象和性质

一、知识要点和基本方法

1. 映射与函数

设 $f:X\to Y$ 是一个映射，当 X 和 Y 都是非空数集时，我们称 f 是 X 到 Y 的一个函数，记为

$$f:\ X\to Y,\ x\mapsto y,$$

其中数集 X 称为函数 f 的定义域. 对于 X 中的每一个 x，对应法则 f 所对应的 Y 中的数 y，称为 f 在点 x 的函数值，记为 $f(x)$，全体函数值的集合

$$f(X)=\{y\mid y=f(x),\ x\in X\}\subseteq Y$$

称为函数 f 的值域.

2. 函数的图象

坐标为$(x,\ f(x))$的点的集合 $\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图象，其中 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域.

(1) 函数 $y=f(x+k)$ $(k\neq 0)$ 的图象是函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向向左($k>0$)或向右($k<0$)平移$|k|$个单位得到的.

(2) 函数 $y=f(x)+h$ $(h\neq 0)$ 的图象是函数 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上 $(h>0)$ 或向下($h<0$)平移$|h|$个单位得到的.

(3) 函数 $y=f(x+k)+h$ 是经过两次平移得到的. 可以先沿 x 轴平移$|k|$个单位，再沿 y 轴平移$|h|$个单位；也可以先沿 y 轴平移$|h|$个单位，再沿 x 轴平移$|k|$个单位.

(4) 函数 $y=-f(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称.

(5) 函数 $y=f(-x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

(6) 函数 $y=-f(-x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点成中心对称.

(7) 函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$对称.

(8) 函数 $y=|f(x)|$ 的图象是函数 $y=f(x)$ 的图象保留 x 轴上方的部分不变，将 x 轴下方的部分沿 x 轴对称翻折上来得到的.

3. 函数的性质

(1) 奇偶性. 设函数 $f(x)$的定义域为 D，且 D 是关于原点对称的数集. 若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数；若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数.

(2) 函数的增减性. 设函数 $f(x)$在区间 I 上满足：对任意 $x_1,\ x_2\in I$，并且当

$x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $f(x)$在区间 I 上是增函数(减函数)，区间 I 称为 $f(x)$的一个单调增(减)区间.

(3) 函数的周期性. 对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的正数 T，使得当 x 取定义域中的每一个数时，$f(x+T)=f(x)$ 总成立，那么称 $f(x)$是周期函数，T 称为这个周期函数的周期. 如果函数 $f(x)$的所有周期中存在最小值 T_0，称 T_0 为周期函数 $f(x)$的最小正周期.

二、例题精讲

1. 函数的图象

【例 1】 作出下列函数的图象：

(1) $y=|x^2+x-2|$； (2) $y=|x|^2+|x|-2$.

解 (1) 先作出 $y=x^2+x-2$ 的图象，然后将此图象在 x 轴下方的部分对称翻折到 x 轴的上方即可，如图 4－1 所示的实线部分即为 $y=|x^2+x-2|$ 的图象.

(2) 由于 $y=|x|^2+|x|-2$ 是偶函数，它的图象关于 y 轴对称，于是先作出 $y=|x|^2+|x|-2$ 在 $x\geqslant 0$ 时的图象，再作出它关于 y 轴对称的图形即可，如图 4－2 所示.

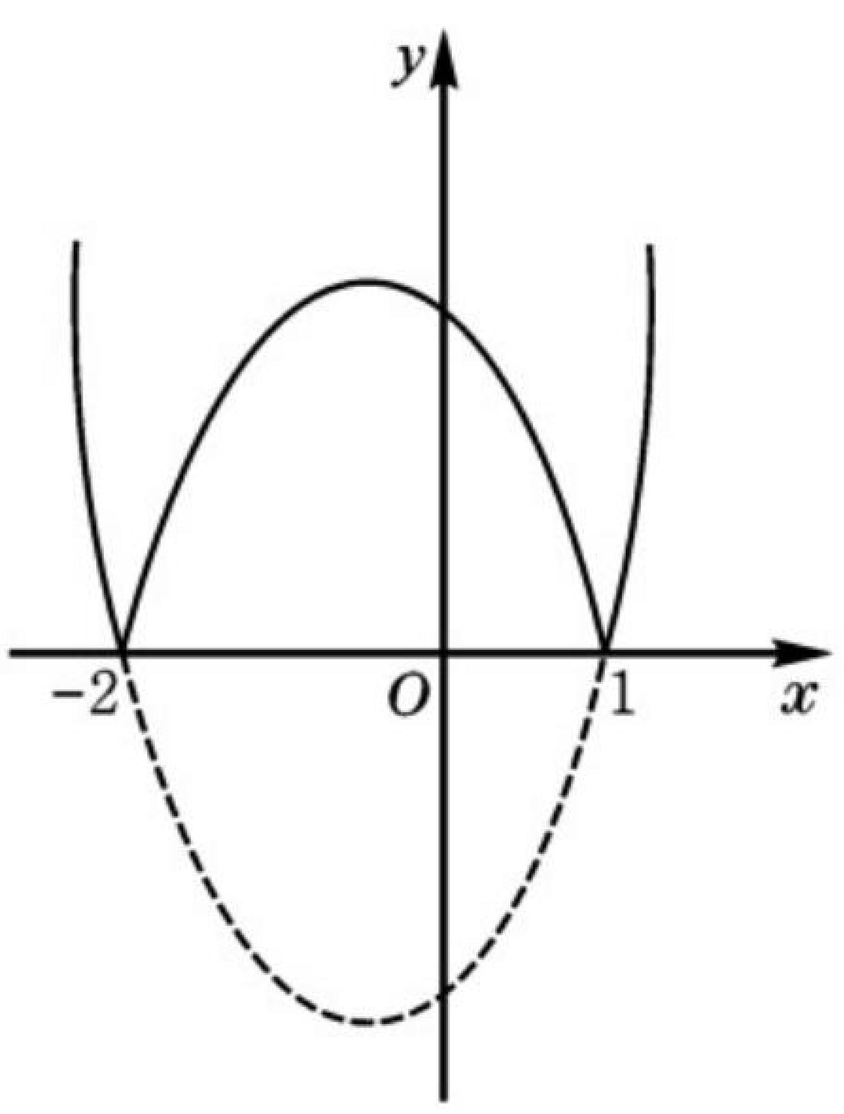


图 4－1

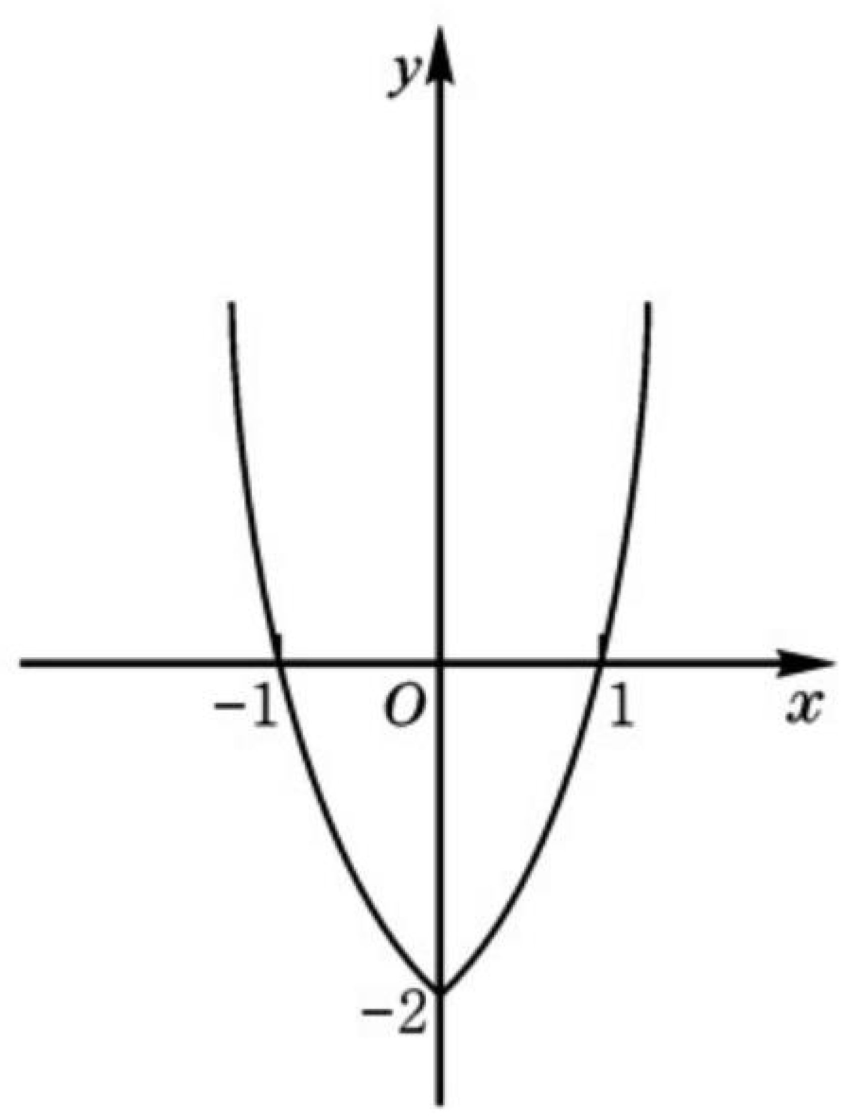


图 4－2

【例 2】 设函数 $f_0(x)=|x|$，$f_1(x)=|f_0(x)-1|$，$f_2(x)=|f_1(x)-2|$，求函数 $y=f_2(x)$ 的图象与 x 轴所围封闭区域的面积.

解 先把函数 $f_2(x)$的图象画出来.

如图 4－3 所示，函数 $f_0(x)=|x|$ 的图象是两条射线(图中的实线)，而函数 $f_1(x)=|f_0(x)-1|$ 的图象是把函数 $f_0(x)$的图象先沿 y 轴方向向下平移 1 个单位，然后再保留 x 轴上方的部分，把 x 轴下方的部分对称地翻折到 x 轴上方得到的，如图 4－3 中的虚线所表示的部分.

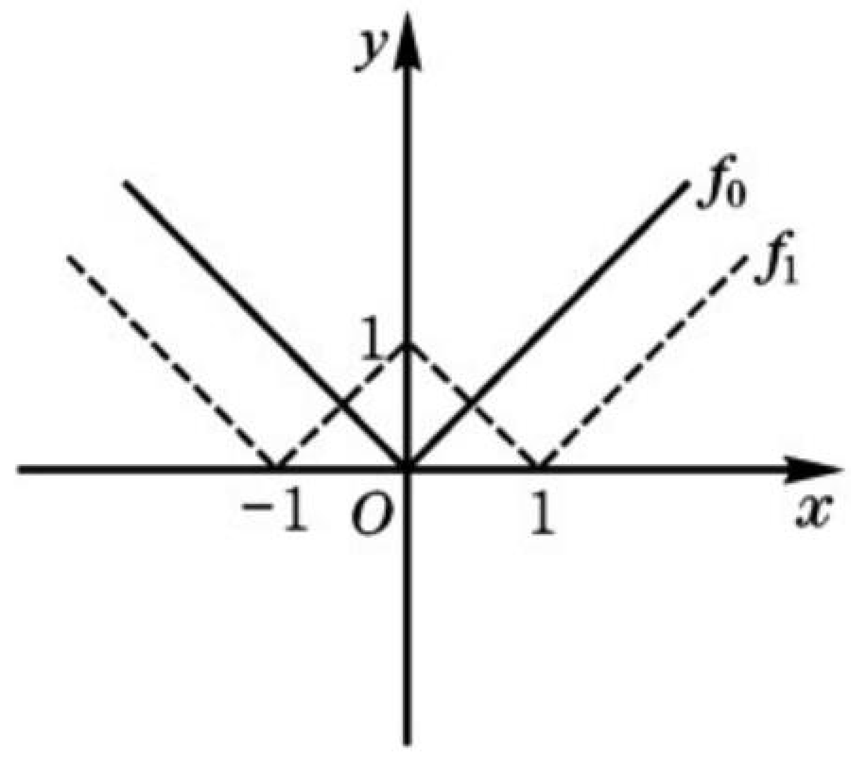


图 4 - 3

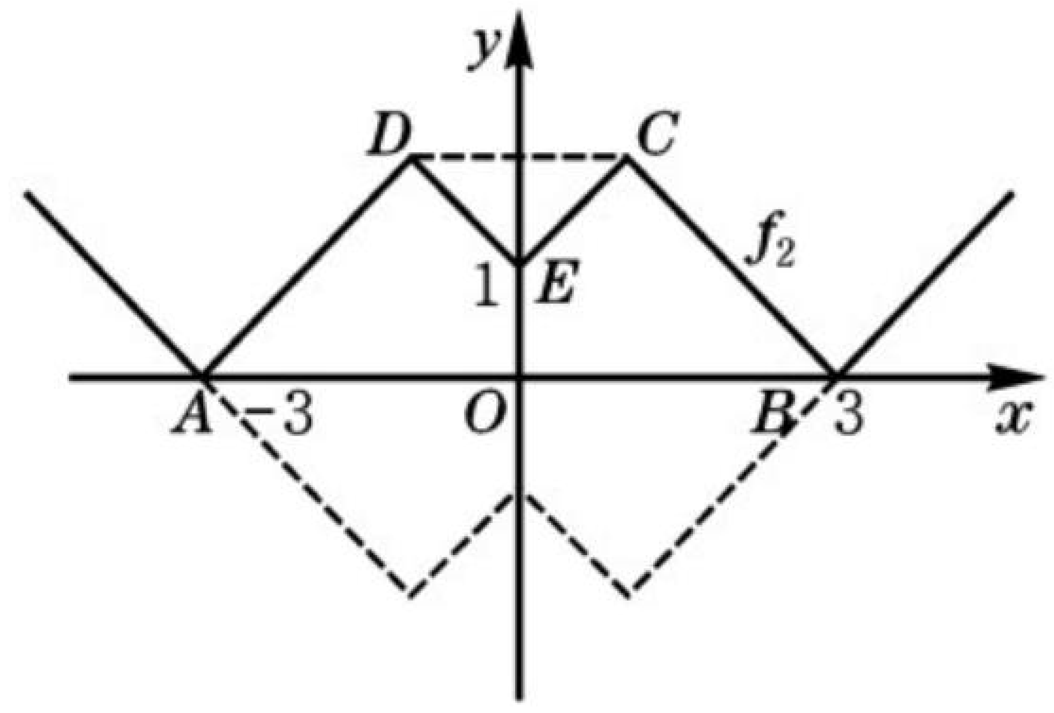


图 4 - 4

函数 $f_2(x)=|f_1(x)-2|$ 的图象是把函数 $f_1(x)$ 的图象先沿 y 轴方向向下平移 2 个单位,再保留 x 轴上方的部分,把 x 轴下方的部分对称地翻折到 x 轴上方得到的,如图 4 - 4 中实线部分所示.

所求的封闭部分的面积为

$$S_{\text{梯形}ABCD}-S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}(2+6)\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 1=7.$$

【例 3】 已知关于 x 的方程 $x^2-2|x|+3=k$ 有四个互不相等的实数根,求实数 k 的值.

解 将原方程变形为

$$x^2-2|x|+1=k-2.$$

设 $y=f(x)=x^2-2|x|+1$,用例 1 的方法作出 $y=f(x)$ 的图象,如图4 - 5所示. 而 $y=k-2$ 是一条与 x 轴平行的直线,原方程有四个互不相等的实根,即直线 $y=k-2$ 应与曲线有四个不同的交点. 由图象可知,当 $0<k-2<1$,即 $2<k<3$ 时,直线与曲线有四个不同的交点. 所以,当 $2<k<3$ 时,方程 $x^2-2|x|+3=k$ 有四个互不相等的实数根.

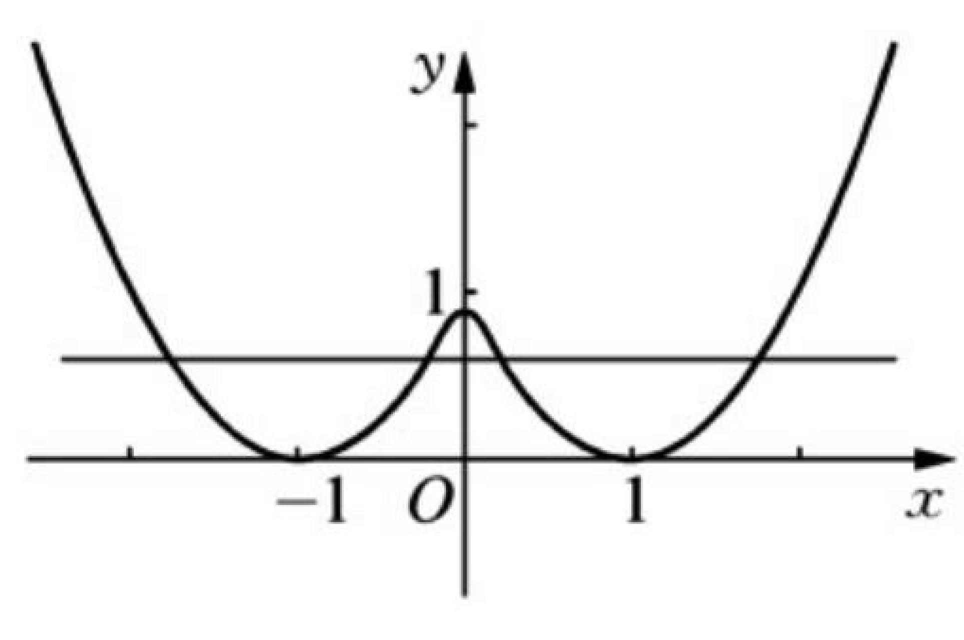


图 4 - 5

说明 在本题中,我们用图形来研究方程的根,这是一种非常重要的方法——数形结合法.

2. 函数的定义域与值域

【例 4】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$,求函数 $g(x)=f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域,其中 $a>0$.

解 函数 $g(x)$ 的定义域是下列两个集合的交集:

$$D_1=\{x\mid -1\leqslant ax\leqslant 1\}=\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right],$$

$$D_2=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\frac{x}{a}\leqslant 1\right\}=[-a,\ a].$$

当 $a\geqslant 1$ 时，$a\geqslant\frac{1}{a}$，$-a\leqslant-\frac{1}{a}$，所以 $D_1\cap D_2=D_1$；

当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>a$，$-\frac{1}{a}<-a$，所以 $D_1\cap D_2=D_2$.

因此，函数 $g(x)$ 的定义域为 $[-a,\ a]$（当 $0<a<1$ 时）或 $\left[-\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}\right]$（当 $a\geqslant 1$ 时）.

【例 5】 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+2}+k$，且存在 a、b $(a<b)$ 使 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的值域为 $[a,\ b]$，求实数 k 的取值范围.

解 由题设知 $f(x)$ 的定义域为 $x\geqslant-2$，由 $f(x)$ 的单调性，知 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的值域为 $[a,\ b]$ 等价于方程 $f(x)=\sqrt{x+2}+k=x$ 有两个不等实根，即

$$x^2-(2k+1)x+k^2-2=0(x\geqslant-2),$$

有两个不等实根. 故 $\Delta=(2k+1)^2-4(k^2-2)>0$，解得 $k>-\frac{9}{4}$.

由 $f(x)=\sqrt{x+2}+k=x$ 知 $x\geqslant k$，即

$$\frac{2k+1-\sqrt{(2k+1)^2-4(k^2-2)}}{2}\geqslant k,$$

解得 $k\leqslant-2$，且当 $k\in\left(-\frac{9}{4},\ -2\right]$ 时，

$$\frac{2k+1-\sqrt{(2k+1)^2-4(k^2-2)}}{2}\geqslant-2$$

恒成立.

所以 $k\in\left(-\frac{9}{4},\ -2\right]$.

【例 6】 设 $f(x)=x^2+ax+b\cos x$，且

$$\{x\mid f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}=\{x\mid f(f(x))=0,\ x\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing,$$

求满足条件的所有实数 a、b 的值.

解 设 $x_0\in\{x\mid f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，则

$$b=f(0)=f(f(x_0))=0,$$

于是 $f(x)=x(x+a)$，故

$$f(f(x))=f(x)(f(x)+a)=x(x+a)(x^2+ax+a),$$

显然 $a=0$ 满足题意.

若 $a\neq 0$，由于 $x^2+ax+a=0$ 的根不可能是 0 或者 $-a$，故$x^2+ax+a=0$ 没有实数根，于是 $\Delta=a^2-4a<0$，所以，$0<a<4$.

综上所述，满足题设条件的 a、b 分别为：$0\leqslant a<4$，$b=0$.

【例 7】 求函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域.

解 易求得函数的定义域为 $\{x \mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$.

(1) 易知函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 是$[1,+\infty)$上的增函数，所以，当 $x\geqslant 1$ 时，可得 $y\geqslant 1$.

(2) 当 $x\leqslant -1$ 时，

$$\begin{aligned} y&=x(x+\sqrt{x^2-1})=\frac{x(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}}\\ &=\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}. \end{aligned}$$

因为 $x\leqslant -1$，所以 $0\leqslant 1-\dfrac{1}{x^2}<1$，$1\leqslant 1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}<2$，所以 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\leqslant 1$，即 $\dfrac{1}{2}<y\leqslant 1$.

综合可知：$y>\dfrac{1}{2}$，故函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

【例 8】 已知函数 $f(x)=a\sin^2 x+b\sin x+c$，其中 a、b、c 是非零实数. 甲、乙两人做一游戏：他们轮流确定系数 a、b、c(如甲令 $b=1$，乙令 $a=-2$，甲再令 $c=3$)后，如果对于任意实数 x，$f(x)\neq 0$，那么甲得胜；如果存在实数 x，使 $f(x)=0$，那么乙得胜. 甲先选数，他是否有必胜的策略？为什么？如果 a、b、c 是任意实数，结论如何？为什么？

解 若 a、b、c 是非零实数，那么甲有必胜策略：甲先选 $b=1$，不论乙选 a 或 c，甲总可再选 c 或 a，使 $1-4ac<0$，从而方程 $f(x)=0$ 无解.

若 a、b、c 是任意实数，那么乙有必胜策略：当甲先选 a 或 b，则乙可选 $c=0$，这时 $x=0$ 是方程 $f(x)=0$ 的根；当甲选 $c\neq 0$，则乙选$a=-c$，这时有

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(a-b-a)(a+b-a)=-b^2\leqslant 0,$$

故 $f(x)=0$ 必有实根在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$内.

3. 函数的性质

【例 9】 证明:任何定义域关于原点对称的函数都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

证明 设函数 $f(x)$的定义域 D 是关于原点对称的,则 $f(x)$与$f(-x)$同时有意义. 易知有如下恒等式

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

令 $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$,则$f_1(x)$是偶函数,而 $f_2(x)$是奇函数. 事实上,有

$$f_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x),$$

$$f_2(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-f_2(x).$$

从而命题得证.

说明 函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$是如何"构造"出来的呢? 其实,$f_1(x)$和$f_2(x)$是可以"解"出来的. 设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)$是偶函数, $f_2(x)$是奇函数. 则

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ f(-x)=f_1(x)-f_2(x),$$

所以 $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

【例 10】 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx+c\sqrt[3]{x}+8$(其中 a、b、c 是实常数),且 $f(-2)=10$. 求 $f(2)$的值.

分析 由 $f(-2)=10$ 是不能确定 a、b、c 的,所以必须考虑$f(-2)$与 $f(2)$的关系,若 $f(x)$是奇函数或偶函数就好了,现在都不是,但 $f(x)-8$ 是奇函数. 这提供了一条解题途径.

解 令 $g(x)=f(x)-8$, 则 $g(x)$是奇函数,且

$$g(-2)=f(-2)-8=10-8=2,$$

所以 $g(2)=-g(-2)=-2$, 因此 $f(2)=g(2)+8=6$.

说明 本题还可以这样解:

因为 $$f(x)=x^5+ax^3+bx+c\sqrt[3]{x}+8,$$
$$f(-x)=-x^5-ax^3-bx-c\sqrt[3]{x}+8,$$
所以 $f(x)+f(-x)=16$ 对任意实数 x 都成立，因此 $f(2)+f(-2)=16$，所以 $f(2)=6$.

【例 11】 设 x、y 是实数，且满足
$$\begin{cases}(x-1)^3+2008(x-1)=-1,\\(y-1)^3+2008(y-1)=1.\end{cases}$$
求 $x+y$ 的值.

解 把原方程组化为
$$\begin{cases}(x-1)^3+2008(x-1)=-1,\\(1-y)^3+2008(1-y)=-1.\end{cases}$$

设 $f(t)=t^3+2008t$，易证 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的. 题设方程组告诉我们
$$f(x-1)=f(1-y),$$
所以 $x-1=1-y$，即 $x+y=2$.

【例 12】 设函数 $f(x)$ 对任一实数 x 满足
$$f(2-x)=f(2+x),\ f(7-x)=f(7+x),$$
且 $f(0)=0$. 求证：$f(x)=0$ 在区间 $[-30,30]$ 上至少有 13 个根，且 $f(x)$ 是以 10 为周期的周期函数.

证明 由题设知，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 和 $x=7$ 对称，所以
$$f(4)=f(2+2)=f(2-2)=f(0)=0,$$
$$f(10)=f(7+3)=f(7-3)=f(4)=0,$$
于是 $f(x)=0$ 在 $(0,10]$ 上至少有两个根.

另一方面，有
$$\begin{aligned}f(x+10)&=f(7+3+x)=f(7-3-x)=f(4-x)\\&=f(2+2-x)=f(2-2+x)=f(x),\end{aligned}$$
所以，$f(x)$ 是以 10 为周期的周期函数，因此，$f(x)=0$ 在 $[-30,30]$ 上至少有 $6\times2+1=13$ 个根.

说明 设函数的定义域为 D，若对任意的 $x\in D$，都有

$$f(a+x)=f(a-x)\ (a\text{ 是一个常数}),$$

则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

【例 13】 已知函数 $f(x)=\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$.

(1) 是否存在实数 a、b $(a<b)$，使得函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是 $[a, b]$?

(2) 若存在实数 a、b $(a<b)$，使得函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$，值域是 $[ma, mb]$ $(m\neq 0)$，求实数 m 的取值范围.

解 (1) 答案是否定的.

事实上，若存在实数 a、b $(a<b)$ 使得函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是 $[a, b]$，则由 $f(x)\geqslant 0$ 知 $a\geqslant 0$，而 $f(x)$ 的定义域中不包含 $x=0$，从而 $a>0$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{x}-1, & \text{当 } 0<x<1 \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $a, b\in(0, 1)$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数，所以

$$\begin{cases}f(a)=b,\\ f(b)=a,\end{cases}\ \text{即}\ \begin{cases}\dfrac{1}{a}-1=b,\\ \dfrac{1}{b}-1=a,\end{cases}$$

由此可得 $a=b$，矛盾!

当 $a, b\in[1, +\infty)$ 时，$f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数，所以

$$\begin{cases}f(a)=a,\\ f(b)=b,\end{cases}\ \text{即}\ \begin{cases}1-\dfrac{1}{a}=a,\\ 1-\dfrac{1}{b}=b,\end{cases}$$

于是，a、b 是一元二次方程 $x^2-x+1=0$ 的实根，而此方程的 $\Delta=1-4<0$，矛盾.

当 $a\in(0, 1)$，$b\in[1, +\infty)$ 时，则 $1\in[a, b]$，而 $f(1)=0$，故 $0\in[a, b]$，矛盾.

综上可知，不存在实数 a、b 满足题设条件.

(2) 若存在实数 a、b $(a<b)$，使得函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$，值域是 $[ma, mb]$ $(m\neq 0)$. 则由 $f(x)\geqslant 0$ 及 $x\neq 0$ 知 $ma>0$，结合 $mb>ma$ 及 $b>a$ 知，$m>0$，从而 $a>0$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x},\text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{x}-1,\text{当 } 0<x<1 \text{ 时}.\end{cases}$$

当 a, $b\in(0, 1)$时,同(1)知

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}-1=mb,\\ \dfrac{1}{b}-1=ma,\end{cases}$$

消去 m 可得 $a=b$, 矛盾!

若 a, $b\in[1, +\infty)$,则

$$\begin{cases}1-\dfrac{1}{a}=ma,\\ 1-\dfrac{1}{b}=mb,\end{cases}$$

于是 a、b 是如下一元二次方程 $mx^2-x+1=0$ 的两个大于 1 的实根(因为若 $a=1$,则 $m=0$, 不可能),所以

$$\begin{cases}\Delta=1-4m>0,\\ \dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{2m}>1,\\ \dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{2m}>1,\end{cases}$$

解得 $0<m<\dfrac{1}{4}$.

当 $a\in(0, 1)$, $b\in[1, +\infty)$时, $1\in[a, b]$,从而 $f(1)=0\in[ma, mb]$, 矛盾!

综上可知, m 的取值范围是 $0<m<\dfrac{1}{4}$.

练习题

A组

1 填空题

(1) 定义域为 **R** 的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x-1)=f(2-x)$,这个函数图象的一条对称轴是______.

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ $(x\neq\pm 1)$ 可以表示成一个偶函数 $f(x)$与一个奇函数

$g(x)$的和,则 $f(x)=$______.

(3) 设有三个函数,第一个是 $y=\varphi(x)$,它的反函数就是第二个函数,而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x+y=0$ 对称,那么第三个函数是______.

(4) 已知 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,则函数 $y=f(1-x^2)$ 的定义域为______.

2 函数 $f(x)=6x^2-mx+5$ 在区间$[-2,+\infty)$上是增函数,求 $f(1)$的取值范围.

3 设 $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$,计算

$$f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2}{2000}\right)+f\left(\frac{3}{2000}\right)+\cdots+f\left(\frac{1999}{2000}\right).$$

4 已知奇函数 $f(x)$在定义域$(-1,1)$内单调递减,当 m 为何值时,$f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 成立?

5 函数 $f(x)$具有如下性质:对每个实数 x,都有

$$f(x)+f(x-1)=x^2.$$

如果 $f(19)=94$,那么 $f(94)$除以 1000 的余数是多少?

6 当 $x\in[-1,1]$时,求

$$f(x)=\frac{x^4+4x^3+17x^2+26x+106}{x^2+2x+7}$$

的值域.

7 设函数 $f(x)$满足等式 $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$,$x\neq 0$. 求函数$f(x)$的值域.

8 已知 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的减函数,若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$ 成立,求 a 的取值范围.

9 设函数 $y=f(x)$ 对一切实数 x 都满足:$f(3+x)=f(3-x)$,且方程 $f(x)=0$ 恰有六个不同的实数根,求这六个实数根的和.

10 $f(x)$和 $g(x)$的定义域都是非零实数,$f(x)$是偶函数,$g(x)$是奇函数,且 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$,求$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的取值范围.

11 设函数 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的增函数,如果不等式 $f(1-kx-x^2)<f(2-k)$ 对任意 $x\in[0,1]$ 都成立,求 k 的取值范围.

12 已知函数 $f(x)=a\sin x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+a-\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{2}$,$a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$.

(1) 若对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\leqslant 0$,求 a 的取值范围;

(2) 若 $a\geqslant 2$,且存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)\leqslant 0$,求 a 的取值范围.

B组

13 已知 $f(x)$是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$.

(1) 求证：$f(x)$是周期函数；

(2) 若 $f(1)=2+\sqrt{3}$，求 $f(1997)$、$f(2001)$的值.

14 若函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$的图象与它的反函数的图象完全重合，其中 a、b、c、d 满足关系：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq 0$，则此函数应具有怎样的形式？

15 证明：函数 $f(x)=3x^2$ 可以表示为两个单调递增的多项式函数之差.

16 求函数 $y=2x-3+\sqrt{x^2-12}$ 的值域.

17 已知

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1. \end{cases}$$

定义 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{个}f}(x)\cdots))$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 $f_{2\,004}\left(\dfrac{2}{15}\right)$；

(2) 设 $B=\{x\mid f_{15}(x)=x,\ x\in[0,1]\}$，求证：$B$ 中至少含有 9 个元素.

18 证明：对任意整数 $n\geqslant 4$，存在一个 n 次多项式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

具有如下性质：

(1) a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}均为正整数；

(2) 对任意正整数 m，及任意 $k(k\geqslant 2)$ 个互不相同的正整数 r_1，r_2，$\cdots$，r_k，均有

$$f(m)\neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k).$$

（2011 年全国高中数学联赛加试）

第5讲　幂函数、指数函数、对数函数

一、知识要点和基本方法

1. 幂函数　形如 $y=x^{a}$ $(a\in\mathbf{R})$ 的函数叫做幂函数. 在中学阶段,我们只研究 $a\in\mathbf{Q}$ 的情况.

2. 指数函数　形如 $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的函数叫做指数函数. 其定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 $(0,\ +\infty)$. 当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 是单调减少的;当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 是单调增加的.

3. 对数函数　形如 $y=\log_{a}x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的函数叫做对数函数. 其定义域是 $(0,\ +\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$. 当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是单调减少的;当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是单调增加的.

对数函数 $y=\log_{a}x$ 与指数函数 $y=a^{x}$ 互为反函数.

二、例题精讲

1. 化简与求值

【例1】　(1) 设 $a=\dfrac{\log_{7}4(\log_{7}5-\log_{7}2)}{\log_{7}25(\log_{7}8-\log_{7}4)}$,求 5^{a} 的值;

(2) 设 $b=\dfrac{\log_{77}4(\log_{77}5-\log_{77}2)}{\log_{77}25(\log_{77}8-\log_{77}4)}$,求 5^{b} 的值.

解　(1) 因为

$$a=\frac{\log_{7}2^{2}\cdot\log_{7}\dfrac{5}{2}}{\log_{7}5^{2}\cdot\log_{7}2}=\frac{2\log_{7}2\cdot\log_{7}\dfrac{5}{2}}{2\log_{7}5\cdot\log_{7}2}$$

$$=\frac{\log_{7}\dfrac{5}{2}}{\log_{7}5}=\log_{5}\frac{5}{2},$$

所以

$$5^{a}=5^{\log_{5}\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}.$$

(2) 由(1)的求解过程知,上述结果是不依赖于对数的底,所以 $5^{b}=\dfrac{5}{2}$.

【例2】　若 $\log_{2}\log_{8}x=\log_{8}\log_{2}x$,求 $\log_{4}x$ 的值.

解　由 $\log_{2}\log_{8}x=\log_{8}\log_{2}x$ 可知 $(\log_{8}x)^{3}=\log_{2}x>0$. 令 $\log_{2}x=y$,则有 $(y/3)^{3}=y$,由此解得 $y=3\sqrt{3}$. 从而 $\log_{4}x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

【例3】 已知 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$（其中 a 是大于 0 的常数），求

$$f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)$$

的值.

解 因为

$$\begin{aligned}f(x)+f(1-x)&=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}\\&=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a}{a+\sqrt{a}\cdot a^x}\\&=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}\\&=1,\end{aligned}$$

所以 $\quad f\left(\dfrac{1}{101}\right)+f\left(\dfrac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{100}{101}\right)$

$$=\left[f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{99}{101}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{50}{101}\right)+f\left(\frac{51}{101}\right)\right]$$

$=50.$

【例4】 已知函数 $f(x)=x^3-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$，试判断$\dfrac{f(a)+f(b)}{a^3+b^3}$的符号，其中 a、b 为任意的实数且 $a+b\neq 0$.

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=-x^3-\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)+x^3-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=-\log_2[(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)]\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$ 为奇函数.

又因为 $\quad f(x)=x^3-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=x^3+\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)$

在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以，$f(x)$ 在 **R** 上是增函数.

注意到 $f(a)-f(-b)$ 与 $a-(-b)$ 同号，所以$\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$，又因为 a^3+b^3 与 $a+b$ 同号，故原式大于零.

2. 图象和性质

【例 5】 设 a、b 分别是方程 $\log_2 x+x-3=0$ 和 $2^x+x-3=0$ 的根，求 $a+b$ 及 $\log_2 a+2^b$ 的值.

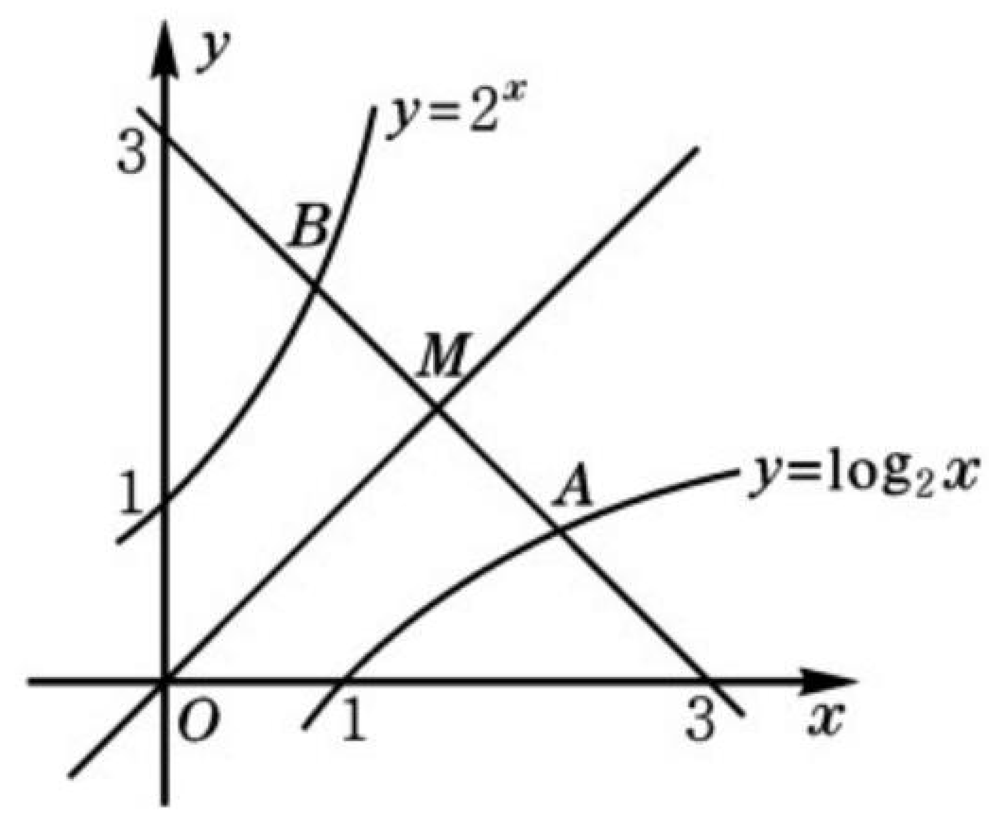


图 5－1

解 在直角坐标系内分别作出函数 $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 的图象，再作直线 $y=x$ 和 $y=-x+3$，如图 5－1 所示. 由于 $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 互为反函数，故它们的图象关于直线 $y=x$ 对称. 方程 $\log_2 x+x-3=0$ 的根 a 就是直线 $y=-x+3$ 与对数曲线 $y=\log_2 x$ 的交点 A 的横坐标，方程 $2^x+x-3=0$ 的根 b 就是直线 $y=-x+3$ 与指数曲线 $y=2^x$ 的交点 B 的横坐标.

设 $y=-x+3$ 与 $y=x$ 的交点为 M，则点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$. 所以

$$a+b=2x_M=3,$$

$$\log_2 a+2^b=2y_M=3.$$

【例 6】 设 $f(x)=\min\{3+\log_{\frac{1}{4}} x,\ \log_2 x\}$，其中 $\min\{p,\ q\}$ 表示 p、q 中的较小者. 求 $f(x)$ 的最大值.

解 易知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,\ +\infty)$.

因为 $y_1=3+\log_{\frac{1}{4}} x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是减函数，$y_2=\log_2 x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是增函数，而当 $y_1=y_2$，即 $3+\log_{\frac{1}{4}} x=\log_2 x$ 时，$x=4$，所以由 $y_1=3+\log_{\frac{1}{4}} x$ 和 $y_2=\log_2 x$ 的图象(图5－2)可知

$$f(x)=\begin{cases}3+\log_{\frac{1}{4}} x, & \text{当 } x\geqslant 4 \text{ 时},\\ \log_2 x, & \text{当 } 0<x<4 \text{ 时}.\end{cases}$$

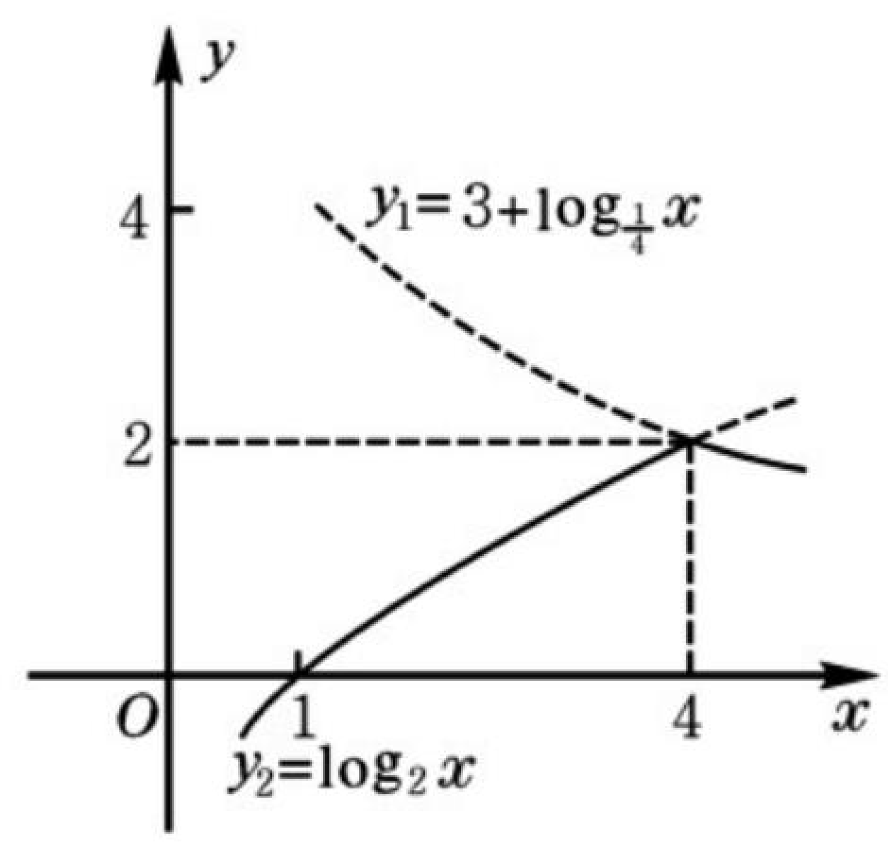


图 5－2

故当 $x=4$ 时，得 $f(x)$ 的最大值 2.

说明 本题先求出 $f(x)$ 的表达式，这是一个分段函数，从图象上易知 $f(x)$ 的最大值为 2. 下面我们再用另一种方法求解.

因为 $$f(x)\leqslant 3+\log_{\frac{1}{4}} x=3-\frac{1}{2}\log_2 x, \qquad ①$$

$$f(x)\leqslant \log_2 x. \qquad ②$$

① × 2 + ② 消去 $\log_2 x$，得 $3f(x)\leqslant 6$，

所以 $f(x)\leqslant 2$.

又 $f(4)=2$，故 $f(x)$的最大值为 2.

这里我们先估计 $f(x)$的上界，再构造例子说明 $f(x)$可以取到这个上界 2. 从而求得了 $f(x)$的最大值，这是求这类“复合”最值问题的常用手法.

【例 7】 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(0)=2008$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，满足

$$f(x+2)-f(x)\leqslant 3\cdot 2^{x},$$

$$f(x+6)-f(x)\geqslant 63\cdot 2^{x},$$

求 $f(2008)$.

解 方法一：由题设条件知

$$\begin{aligned}f(x+2)-f(x)&=-(f(x+4)-f(x+2))-(f(x+6)\\&\quad-f(x+4))+(f(x+6)-f(x))\\&\geqslant-3\cdot 2^{x+2}-3\cdot 2^{x+4}+63\cdot 2^{x}\\&=3\cdot 2^{x},\end{aligned}$$

因此有

$$f(x+2)-f(x)=3\cdot 2^{x},$$

故
$$\begin{aligned}f(2008)&=f(2008)-f(2006)+f(2006)-f(2004)\\&\quad+\cdots+f(2)-f(0)+f(0)\\&=3\cdot(2^{2006}+2^{2004}+\cdots+2^{2}+1)+f(0)\\&=3\cdot\frac{4^{1004}-1}{4-1}+f(0)\\&=2^{2008}+2007.\end{aligned}$$

方法二：

令
$$\begin{aligned}g(x+2)-g(x)&=f(x+2)-f(x)-2^{x+2}+2^{x}\\&\leqslant 3\cdot 2^{x}-3\cdot 2^{x}\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x+6)-g(x)&=f(x+6)-f(x)-2^{x+6}+2^{x}\\&\geqslant 63\cdot 2^{x}-63\cdot 2^{x}\\&=0,\end{aligned}$$

即 $g(x+2)\leqslant g(x)$，$g(x+6)\geqslant g(x)$，故

$$g(x)\leqslant g(x+6)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x),$$

得 $g(x)$是周期为 2 的周期函数，所以

$$
\begin{aligned}
f(2008) &= g(2008)+2^{2008} \\
&= g(0)+2^{2008} \\
&= 2^{2008}+2008.
\end{aligned}
$$

3. 方程和不等式

【例 8】 解方程：$x+\log_2(2^x-31)=5$.

解 原方程等价于 $\log_2 2^x+\log_2(2^x-31)=5$，

即 $$\log_2[2^x(2^x-31)]=5,$$

所以 $$(2^x)^2-31\cdot 2^x=2^5,$$

因式分解，得 $$(2^x+1)(2^x-32)=0.$$

因为 $2^x+1>0$，所以 $2^x-32=0$，故 $x=5$.

【例 9】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=2$，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f'(x)<\dfrac{1}{2}$，求不等式 $f(\log_2 x)>\dfrac{\log_2 x+3}{2}$ 的解集.

解 令 $g(x)=2f(x)-x$，由 $f'(x)<\dfrac{1}{2}$ 得：$2f'(x)-1<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，且 $g(1)=2f(1)-1=3$，不等式 $f(\log_2 x)>\dfrac{\log_2 x+3}{2}$ 化为 $2f(\log_2 x)-\log_2 x>3$，即 $g(\log_2 x)>g(1)$，由 $g(x)$的单调性得：$\log_2 x<1$，解得：$0<x<2$.

【例 10】 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，求证：方程 $a^x+a^{-x}=2a$ 的根不在区间$[-1, 1]$内.

解 设 $t=a^x$，则原方程化为

$$t^2-2at+1=0. \qquad ①$$

由 $\Delta=4a^2-4\geqslant 0$ 得 $|a|\geqslant 1$，即 $a>1$.

所以当 $a>1$ 时，①的两实根为

$$t=a\pm\sqrt{a^2-1},$$

即 $$a^x=a\pm\sqrt{a^2-1},\ x=\log_a(a\pm\sqrt{a^2-1}).$$

由 $a>1$ 及 $a+\sqrt{a^2-1}>a$ 知

$$x_1=\log_a(a+\sqrt{a^2-1})>\log_a a=1,$$

$$x_2=\log_a(a-\sqrt{a^2-1})=\log_a\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}$$
$$=-\log_a(a+\sqrt{a^2-1})<-\log_a a=-1.$$
所以，当 $a>1$ 时，方程有实根，且实根不在区间$[-1, 1]$内.

【例 11】 解不等式
$$\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)<1+\log_2(x^4+1).$$

解 方法一：

由 $1+\log_2(x^4+1)=\log_2(2x^4+2)$，且 $\log_2 y$ 在$(0, +\infty)$上为增函数，故原不等式等价于
$$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2x^4+2,$$
即
$$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6-2x^4-1<0.$$

分组分解
$$\begin{aligned}&x^{12}+x^{10}-x^8\\&\quad+2x^{10}+2x^8-2x^6\\&\qquad+4x^8+4x^6-4x^4\\&\qquad\quad+x^6+x^4-x^2\\&\qquad\qquad+x^4+x^2-1<0,\end{aligned}$$
可得
$$(x^8+2x^6+4x^4+x^2+1)(x^4+x^2-1)<0,$$
所以 $x^4+x^2-1<0$，即
$$\left(x^2-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$
所以
$$x^2<\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$
即 $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}<x<\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. 故原不等式的解集为
$$\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

方法二：

由 $1+\log_2(x^4+1)=\log_2(2x^4+2)$，且 $\log_2 y$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，故原不等式等价于

$$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2x^4+2.$$

即

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^6}&>x^6+3x^4+3x^2+1+2x^2+2\\&=(x^2+1)^3+2(x^2+1),\end{aligned}$$

则

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^3+2\left(\frac{1}{x^2}\right)>(x^2+1)^3+2(x^2+1).$$

令 $g(t)=t^3+2t$，则不等式转化为

$$g\left(\frac{1}{x^2}\right)>g(x^2+1),$$

显然 $g(t)=t^3+2t$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，由此原不等式等价于 $\frac{1}{x^2}>x^2+1$，即

$$(x^2)^2+x^2-1<0,$$

解得 $x^2<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故原不等式解集为 $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

练习题

A组

1 填空题

(1) $5^{\lg 20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg 0.5}=$ ______.

(2) 函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$，若 $f(x_1)-f(x_2)=1$，则 $f(x_1^2)-f(x_2^2)=$ ______.

(3) 方程 $\log_{4x}\sqrt{4x^2-5x+2}=\frac{1}{2}$ 的解为______.

(4) 集合 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},\ x\in\mathbf{N}^*\right\}$ 的真子集的个数是______.

(5) 若 $f(x)=3^x+\log_3 x+2$，则 $f^{-1}(30)=$ ______.

(6) 若函数 $f(x)=25^{-|x+1|}-4\times 5^{-|x+1|}-m$ 的图象与 x 轴有交点，则实数 m 的取值范围是______.

2 函数 $y=\lg(ax^2+2x+1)$ 的值域是一切实数，求 a 的取值范围.

3 已知不等式 $\log_a(x^2+2x+5)<\log_a 3$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

4 已知 $\log_7(2\sqrt{2}-1)+\log_2(\sqrt{2}+1)=a$，求 $\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)$ 的值.

5 设 $a>0$, $a\neq 1$, $t>0$. 比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小,并证明你的结论.

6 已知 $\frac{1}{\log_x 3}+\frac{1}{\log_y 3}\geqslant 4$,求函数 $u=2^x+2^y$ 的最小值.

7 设 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$,解不等式 $f(g(x))<3g(f(x))$.

8 关于 x 的方程 $9^{-x^2+x-1}-2\times 3^{-x^2+x+1}-m=0$ 有正实根,求 m 的取值范围.

9 若函数 $f(x)=\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)$ 的定义域是不等式 $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+7\log_{\frac{1}{2}} x+3\leqslant 0$ 的解集,求 $f(x)$的最大值和最小值.

10 设函数 $f(x)$满足 $f(2^x)=x^2-2ax+a^2-1$,且 $f(x)$在$[2^{a-1}, 2^{a^2-2a+2}]$上的值域为$[-1, 0]$,求实数 a 的取值范围.

B 组

11 已知 $a>0$, $a\neq 1$,求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

12 已知 n 为正整数,实数 $a>1$,解关于 x 的不等式

$$\log_a x-4\log_{a^2} x+12\log_{a^3} x+\cdots+n(-2)^{n-1}\log_{a^n} x>\frac{1}{3}[1-(-2)^n]\log_a(x^2-a).$$

13 当 a 为何值时,不等式

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$$

有且只有一个解?

14 设 $a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$, $b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$, $c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$,记 a、b、c 中的最大数为 M,求 M 的最小值.

15 设 $0<a<1$, $x<0$,求证:

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)<\frac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}.$$

16 已知函数 $f(x)=ax$, $g(x)=\ln x$,其中 $a\in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有极值 1,求 a 的值;

(2) 若函数 $G(x)=f[\sin(1-x)]+g(x)$ 在区间$(0, 1)$上为增函数,求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{(k+1)^2}<\ln 2$.

第6讲　含绝对值的函数

一、知识要点和基本方法

让函数 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴上方的部分不变，下方的部分翻转到 x 轴上方得到函数 $y=|f(x)|$ 的图象.

让函数 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴右方的部分不变，左方的部分改由右方的图象沿 y 轴翻转得出，得到函数 $y=f(|x|)$ 的图象.

二、例题精讲

【例1】 作函数 $y=|\lg|x||$ 的图象.

解

$$y=\begin{cases}\lg(-x), & (-\infty<x\leqslant-1),\\ -\lg(-x), & (-1<x<0),\\ -\lg x, & (0<x<1),\\ \lg x, & (1\leqslant x<+\infty),\end{cases}$$

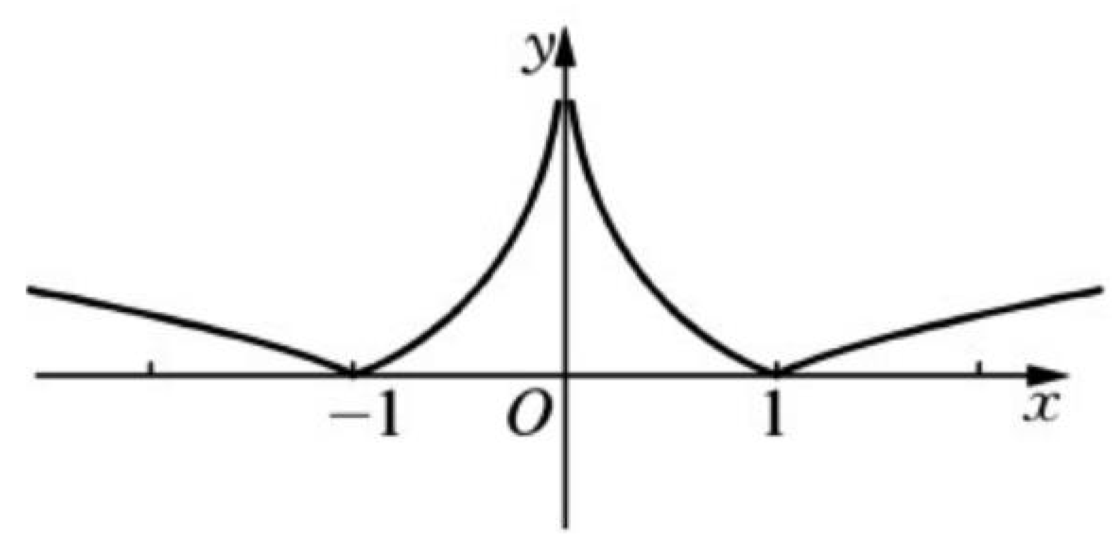


图6-1

于是可作出图象如图6-1.

说明　函数的表达式中含有绝对值，故设法去掉绝对值，而知道绝对值符号里的符号(正、负)时，即可去掉绝对值.

【例2】 求函数 $f(x)=\log_2(x|x|)$ 的单调递增区间.

解　由函数的定义域 $(0,+\infty)$，知

$$f(x)=\log_2(x|x|)=\log_2 x^2=2\log_2 x,$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

【例3】 已知 $0<k<1$，试确定关于 x 的方程 $|1-x^2|=kx+k$ 的解的个数.

分析　我们考察函数 $y=|1-x^2|$ 的图象与直线 $y=kx+k\ (0<k<1)$ 的公共点个数.

解　先画出函数 $y=|1-x^2|$，即 $y=|x^2-1|$ 的图象，再画直线 $y=kx+k\ (0<k<1)$(图6-2). 注意到该直线经过定点 $(-1,0)$，且在 y 轴上的截距 k 满足 $0<k<1$.

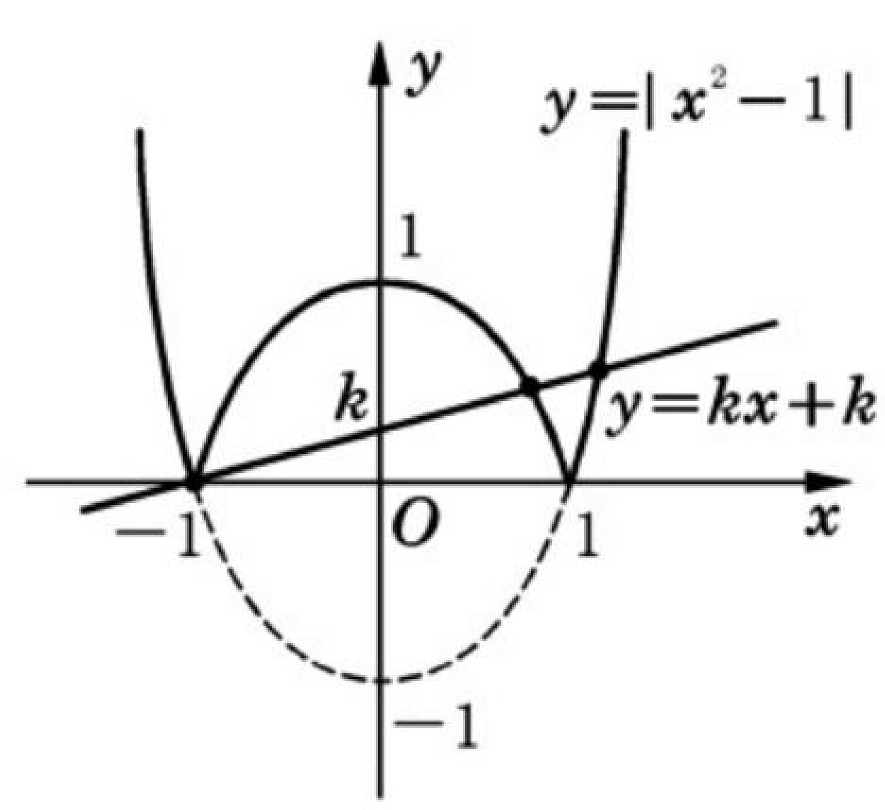


图6-2

易见，直线 $y=kx+k\ (0<k<1)$ 与函数 $y=$

$|x^2-1|$ 图象的公共点有 3 个，故原方程有 3 个解.

【例 4】 设 a_1、a_2、a_3、a_4 是实常数，且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$，求下列函数的最小值.

(1) $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|$；

(2) $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$；

(3) $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+|x-a_4|$.

分析 为了求第(1)小题中的函数最小值，可先设法脱去绝对号，化成自变量 x 取值有一定限制的一次函数，再求最小值. 第(2)、(3)小题可应用(1)的结论.

解 (1) 按实数绝对值的意义

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|=\begin{cases}a_1+a_2-2x, \text{当 } x<a_1 \text{ 时},\\ a_2-a_1, \text{当 } a_1 \leqslant x \leqslant a_2 \text{ 时},\\ 2x-a_1-a_2, \text{当 } x>a_2 \text{ 时},\end{cases}$$

对 $g(x)=a_1+a_2-2x\ (x \leqslant a_1)$ 而言，$g(x)$ 的最小值为 $g(a_1)=a_2-a_1$；对 $h(x)=2x-a_1-a_2(x \geqslant a_2)$ 而言，$h(x)$ 的最小值为 $h(a_2)=a_2-a_1$. 由此可见，当 $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ 时，$f(x)$ 取最小值 a_2-a_1.

(2) 根据上一小题的结论，函数 $|x-a_1|+|x-a_3|$ 在 $a_1 \leqslant x \leqslant a_3$ 时取最小值 a_3-a_1；又函数 $|x-a_2|$ 显然在 $x=a_2$ 时取最小值 0. 故 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$ 在 $x=a_2$ 时取最小值 a_3-a_1.

(3) 根据第(1)小题的结论，函数 $|x-a_1|+|x-a_4|$ 在 $a_1 \leqslant x \leqslant a_4$ 时取最小值 a_4-a_1；函数 $|x-a_2|+|x-a_3|$ 在 $a_2 \leqslant x \leqslant a_3$ 时取最小值 a_3-a_2. 注意到 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$，就知当 $a_2 \leqslant x \leqslant a_3$ 时，$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+|x-a_4|$ 取最小值 $a_4+a_3-a_2-a_1$.

说明 在第(1)小题中，为了应用一次函数求最大(小)值的方法，把 $f(x)$ 表示成分段函数. 如果把 $|x-a_1|$ 理解为数轴上点 x 到点 a_1 的距离，那么不脱去绝对值号，也能分析得出，只有当点 x 在点 a_1 与 a_2 之间(包括 a_1、a_2)时，才能使点 x 到点 a_1 和 a_2 的距离和(即 $f(x)$)最小，其最小值为点 a_1 与点 a_2 间的距离 a_2-a_1.

通过第(2)、(3)小题的解答，我们容易把本例的结果推广到一般情况，即对 n 个实常数 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，求 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的最小值.

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有些允许相等，因此，我们应该会求函数 $f(x)=k_1|x-a_1|+k_2|x-a_2|+\cdots+k_n|x-a_n|$ 的最小值，这里 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 都是正整数.

【例 5】 设 x、y、$z \in [0,1]$，求 $M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$ 的最大值.

解 不妨设 $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$，则 $M = \sqrt{y-x} + \sqrt{z-y} + \sqrt{z-x}$.

因为 $\sqrt{y-x} + \sqrt{z-y} \leqslant \sqrt{2[(y-x)+(z-y)]} = \sqrt{2(z-x)}$，

所以 $$M \leqslant \sqrt{2(z-x)} + \sqrt{z-x} = (\sqrt{2}+1)\sqrt{z-x} \leqslant \sqrt{2}+1.$$

当且仅当 $y-x=z-y$，$x=0$，$z=1$，即 $x=0$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=1$ 时，上式等号同时成立.

故 $M_{\max} = \sqrt{2}+1$.

【例 6】 求函数 $f(x) = |x-1| + |x-3| + |x-5| + |x-7|$ 的最小值.

解 如图 6-3，用 A、B、C、D 四点分别表示实数 1、3、5、7 在数轴上所对应的点，用 P 表示实数 x，则

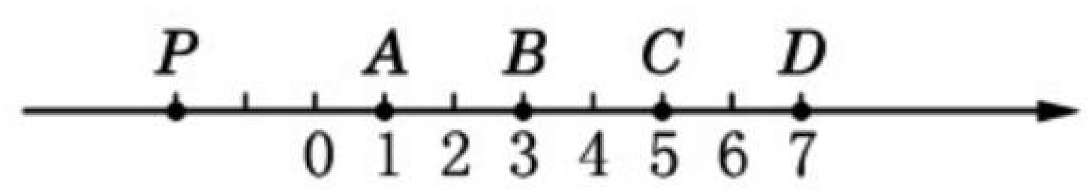


图 6-3

$$f(x) = |PA| + |PB| + |PC| + |PD|.$$

显然 $$|PA| + |PD| \geqslant |AD| = 6,$$

等号成立当且仅当 P 在线段 AD 之间(含端点)；

$$|PB| + |PC| \geqslant |BC| = 2,$$

等号成立当且仅当 P 在线段 BC 之间(含端点).

所以 $f(x) \geqslant 8$，等号成立当且仅当 P 在线段 BC 之间(含端点).

即当 $3 \leqslant x \leqslant 5$ 时，$f(x)$ 有最小值 8.

【例 7】 设 a 为实数，函数 $f(x) = x^2 + |x-a| + 1$，$x \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

解 (1) 当 $a=0$ 时，函数 $f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 1 = f(x)$，此时 $f(x)$ 为偶函数.

当 $a \neq 0$ 时，$f(a) = a^2+1$，$f(-a) = a^2 + 2|a| + 1$，$f(-a) \neq f(a)$，$f(-a) \neq -f(a)$.

此时函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

(2) (i) 当 $x \leqslant a$ 时，函数

$$f(x) = x^2 - x + a + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + \frac{3}{4}.$$

若 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递减，从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f(a) = a^2+1$；

若 $a>\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+a$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

(ii) 当 $x\geqslant a$ 时，函数 $f(x)=x^2+x-a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a+\frac{3}{4}$.

若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-a$，且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$；

若 $a>-\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增，从而函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

综上，当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 $\frac{3}{4}-a$；

当 $-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 a^2+1；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 $a+\frac{3}{4}$.

【例 8】 规定 $\max\{a, b\}$ 表示取 a、b 中的较大者，例如 $\max\{0.1, -2\}=0.1$，$\max\{2, 2\}=2$.

求函数 $f(x)=\max\{|x+1|, |x^2-5|\}$ 的最小值，并求当 $f(x)$ 取最小值时自变量 x 的值.

分析 $f(x)$ 的含义是，对每一个实数 x，$f(x)$ 等于 $|x+1|$ 与 $|x^2-5|$ 中的较大者. 因为 $f_1(x)=|x+1|$ 与 $f_2(x)=|x^2-5|$ 的图象都能很容易作出，而 $y=f(x)$ 的图象由 $y=f_1(x)$ 的图象及 $y=f_2(x)$ 的图象中的上方部分组成. 因此 $y=f(x)$ 的图象也可画出. 由此可看出 $f(x)$ 的最小值.

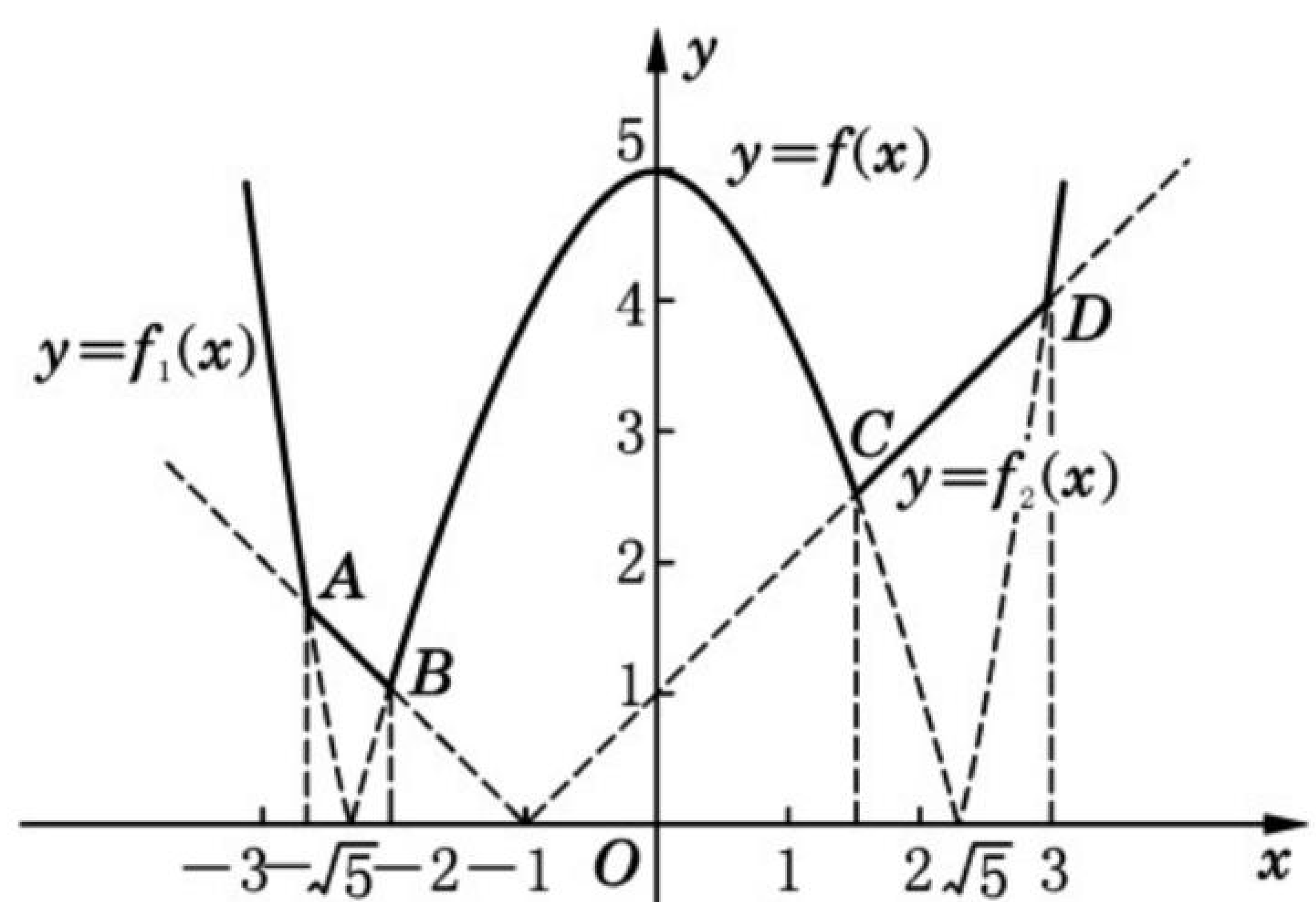


图 6-4

解 在同一直角坐标系中分别画出 $f_1(x)=|x+1|$ 与 $f_2(x)=|x^2-5|$ 的图象(图 6-4). 两图象有四个交点 A、B、C、D，它们的横坐标可由方程 $|x+1|=|x^2-5|$ 解得. 脱去绝对值号，得 $x^2-5=x+1$ 或 $x^2-5=-(x+1)$，解得 $x_1=3$，$x_2=-2$，

$x_3=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$，$x_4=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$. 由图易见 A、B、C、D 的横坐标顺次是 $-\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$、-2、$\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$、3.

按 $f(x)$的定义，它的图象为图 6-4 中的实线部分所示. 点 B 的纵坐标为函数 $f(x)$的最小值，此最小值为 $f(-2)=1$.

练习题

A 组

1 作出函数 $y=|x+1|+|x-2|$ 图象.

2 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的周期函数，且是偶函数. 已知当 $x\in[2, 3]$时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2, 0]$时，$f(x)$的解析式为(　　).

(A) $f(x)=x+4$　　(B) $f(x)=2-x$

(C) $f(x)=3-|x+1|$　　(D) $f(x)=2+|x+1|$

3 方程 $|x^2-1|=(4-2\sqrt{3})(x+2)$ 的解的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4 作函数 $y=x^2-2|x|-1$ 的图象.

5 求方程 $|x-|2x+1||=3$ 的实根个数.

6 已知定义域为$[0, 1]$的函数 $f(x)=1-|1-2x|$ 和 $g(x)=(x-1)^2$，记 $F(x)=\min\{f(x), g(x)\}$.

求：(1) $F(x)$ 的表达式；

(2) $F(x)$ 的最大值；

(3) 解方程 $F(x)=\dfrac{1}{3}$.

7 (1) 作出函数 $y=\dfrac{|x|+1}{|x+1|}$ 的大致图象；

(2) 讨论方程 $|x^2-4|x|+3|=a$ 的解的个数.

B 组

8 求函数 $f(x)=\dfrac{|x-a|}{x^2-ax+1}$ $(|a|<2)$ 的最值.

9 如果满足 $||x^2-6x-16|-10|=a$ 的实数 x 恰有 6 个，求实数 a 的值.

10 设 $f(x)=x^2+px+q$，p、q 为实数. 若$|f(x)|$在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时的最大值为 M，求 M 的最小值.

第7讲　函数的最大值和最小值

一、知识要点和基本方法

1. 基本概念. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在 $x_0 \in D$，使得对任意 $x \in D$，都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值，可简记为 $f_{\max}$. 如果存在 $y_0 \in D$，使得对任意 $x \in D$，都有 $f(x) \geqslant f(y_0)$，则称 $f(y_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最小值，简记为 $f_{\min}$.

2. 单调函数在闭区间上的最值. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上递增，那么 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值为 $f(a)$，最大值为 $f(b)$；如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上递减，那么 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值为 $f(b)$，最大值为 $f(a)$.

3. 一次函数 $f(x) = ax + b$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上的最值. 当 $a > 0$ 时，$f_{\min}(x) = f(\alpha)$，$f_{\max}(x) = f(\beta)$；当 $a < 0$ 时，$f_{\min}(x) = f(\beta)$，$f_{\max}(x) = f(\alpha)$.

4. 二次函数的最值. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$. 当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 有最小值，$f_{\min}(x) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$；当 $a < 0$ 时，$f(x)$ 有最大值，$f_{\max}(x) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

5. 二次函数在闭区间上的最值. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$，$x \in [\alpha, \beta]$.

(1) 当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 的最大值总在区间端点处取到，即

$$f_{\max}(x) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

$f(x)$ 的最小值有如下两种情形：

i) 若 $-\dfrac{b}{2a} \in [\alpha, \beta]$，则

$$f_{\min}(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a};$$

ii) 若 $-\dfrac{b}{2a} \notin [\alpha, \beta]$，则

$$f_{\min}(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

(2) 当 $a < 0$ 时，$f(x)$ 的最小值总在区间端点处取到，即

$$f_{\min}(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

$f(x)$ 的最大值有如下两种情形：

i) 若 $-\dfrac{b}{2a} \in [\alpha, \beta]$，则

$$f_{\max}(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a};$$

ii) 若 $-\dfrac{b}{2a}\notin[\alpha, \beta]$，则

$$f_{\max}(x)=\max\{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

6. 求函数的最大值与最小值的常用方法.

(1) 配方法：把函数写成若干个非负代数式及一个常数的和，从而估计出 $f(x)$ 的下界，进而求出最小值.

(2) 判别式法：把所求最值的函数放到某个一元二次方程的系数上，利用判别式求出这个函数的上界或下界，进而求得最值.

(3) 单调性法：利用函数的单调性求最值.

(4) 不等式法：利用基本不等式来求最值.

(5) 换元法：利用换元法将不易求最值的函数解析式化为易求最值的函数解析式.

二、例题精讲

【例 1】 设 x 是正实数，求函数 $y=x^2+x+\dfrac{3}{x}$ 的最小值.

解 先估计 y 的下界.

$$\begin{aligned}y&=(x^2-2x+1)+3\left(x+\frac{1}{x}-2\right)+5\\&=(x-1)^2+3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+5\\&\geqslant 5,\end{aligned}$$

又当 $x=1$ 时，$y=5$，所以，y 的最小值为 5.

说明 本题是利用“配方法”先求出 y 的下界，然后再“举例”说明这个下界是可以取到的. “举例”是必不可少的，否则就不一定对了. 例如，本题我们也可以这样估计：

$$\begin{aligned}y&=(x^2-2x+1)+3\left(x+\frac{1}{x}+2\right)-7\\&=(x-1)^2+3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-7\\&\geqslant -7.\end{aligned}$$

但 y 是取不到 -7 的，即 -7 不能作为 y 的最小值.

【例 2】 已知 $f(x)=ax^2+bx+c(0<2a<b)$,对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求 $\dfrac{f(1)}{f(0)-f(-1)}$ 的最小值.

解 由对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,得 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$. 又 $a>0$,所以 $c\geqslant\dfrac{b^2}{4a}$.

所以

$$\frac{f(1)}{f(0)-f(-1)}=\frac{a+b+c}{c-(a-b+c)}=\frac{a+b+c}{b-a}\geqslant\frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=\frac{1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}{\frac{b}{a}-1}.$$

令 $t=\dfrac{b}{a}$, 则 $\dfrac{f(1)}{f(0)-f(-1)}=\dfrac{1+t+\frac{1}{4}t^2}{t-1}(t>2)$.

再令 $s=t-1$, 则

$$\frac{f(1)}{f(0)-f(-1)}=\frac{\frac{1}{4}s^2+\frac{3}{2}s+\frac{9}{4}}{s}=\frac{s}{4}+\frac{9}{4s}+\frac{3}{2}(s>1)$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{s}{4}\cdot\frac{9}{4s}}+\frac{3}{2}=2\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=3,$$

当 $\dfrac{s}{4}=\dfrac{9}{4s}(s>1)$, 即 $s=3$ 时等号成立.

【例 3】 设函数 $f(x)$定义为:对于每个 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)$的值为三数 $x+2$、$4x+1$、$-2x+4$ 中的最小值,求 $f(x)$的最大值.

解 在直角坐标系中将如下三条直线画出 $y=x+2$, $y=4x+1$, $y=-2x+4$.

则由 $f(x)$的图象可知,P 点即为所求.

由 $\begin{cases}y=x+2\\ y=-2x+4\end{cases}$ 解得 P 点坐标为 $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$,则 $f(x)$的最大值为$\dfrac{8}{3}$.

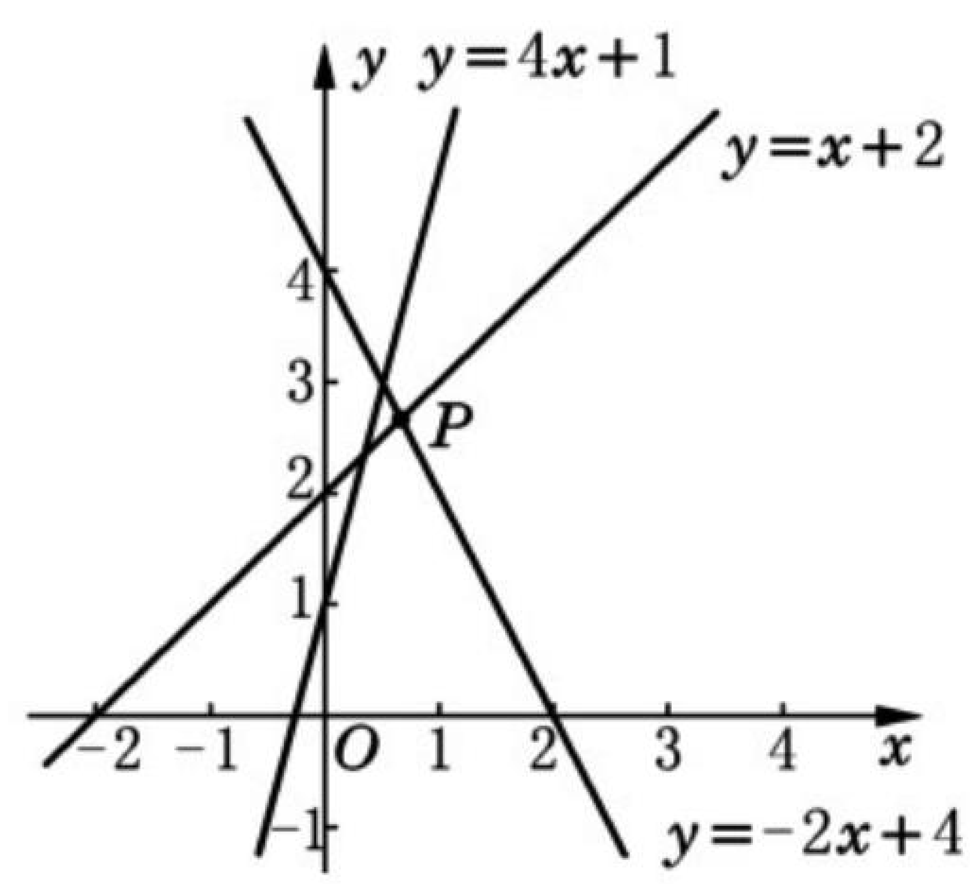


图 7－1

【例 4】 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$, 并且当点$(x,\ y)$在 $y=f(x)$ 的图象上运动时,点$\left(\dfrac{x}{3},\ \dfrac{y}{2}\right)$在 $y=g(x)$ 的图象上运动,求函数 $p(x)=g(x)-f(x)$ 的

最大值.

解 因为点(x, y)在$y=f(x)$的图象上,所以$y=\log_2(x+1)$. 点$\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right)$在$y=g(x)$的图象上,所以$\frac{y}{2}=g\left(\frac{x}{3}\right)$,故

$$g\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}\log_2(x+1),$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\log_2(3x+1).$$

$$\begin{aligned}p(x)=g(x)-f(x)&=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)-\log_2(x+1)\\&=\frac{1}{2}\log_2\frac{3x+1}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

令$u=\frac{3x+1}{(x+1)^2}$,则

$$\begin{aligned}u&=\frac{3(x+1)-2}{(x+1)^2}=-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}\\&=-2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\\&\leqslant\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

当$\frac{1}{x+1}=\frac{3}{4}$,即$x=\frac{1}{3}$时,$u=\frac{9}{8}$,所以$u_{\max}=\frac{9}{8}$.

从而 $$p_{\max}(x)=\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{8}.$$

【例5】 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x,若\ x\ 为无理数,\\ \frac{q+1}{p},若\ x=\frac{q}{p},其中\ p,\ q\in\mathbf{N}^*,且\ p、q\ 互质,p>q.\end{cases}$$

求函数$f(x)$在区间$\left(\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right)$上的最大值.

解 若x为有理数,且$x\in\left(\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right)$. 设$x=\frac{a}{a+\lambda}\in\left(\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right)(a, \lambda\in\mathbf{N}^*)$,由$\frac{7}{8}<\frac{a}{a+\lambda}<\frac{8}{9}$知,$\begin{cases}9a<8a+8\lambda,\\7a+7\lambda<8a,\end{cases}$ $7\lambda<a<8\lambda$.

当 $\lambda=1$ 时,a 不存在;

当 $\lambda=2$ 时,存在唯一的 $a=15$,此时 $x=\frac{15}{17}$,$f(x)=\frac{16}{17}$.

当 $\lambda\geqslant 3$ 时,设 $a=7\lambda+m$,其中 $1\leqslant m\leqslant\lambda-1$,且 $m\in\mathbf{N}^*$,此时

$$f(x)=\frac{7\lambda+m+1}{8\lambda+m}.$$

因为

$$\frac{16}{17}-\frac{7\lambda+m+1}{8\lambda+m}=\frac{9\lambda-m-17}{17(8\lambda+m)}=\frac{(\lambda-m)+(8\lambda-17)}{17(8\lambda+m)}>0,$$

所以若 x 为有理数,则 $x=\frac{15}{17}$ 时,$f(x)$ 取最大值 $\frac{16}{17}$.

又 x 为无理数,且 $x\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$ 时,$f(x)=x<\frac{8}{9}<\frac{16}{17}$.

综上可知,$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$ 上的最大值为 $\frac{16}{17}$.

【例 6】 求函数 $y=\frac{x^2+x+2}{2x^2-x+1}$ 的最大值和最小值.

解 去分母,整理得

$$(2y-1)x^2-(y+1)x+y-2=0,$$

当 $y\neq\frac{1}{2}$ 时,这是一个关于 x 的一元二次方程,因为 x、y 均为实数,所以

$$\Delta=(y+1)^2-4(2y-1)(y-2)\geqslant 0,$$

$$7y^2-22y+7\leqslant 0,$$

所以

$$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}\leqslant y\leqslant\frac{11+6\sqrt{2}}{7}.$$

又当 $x=-1-\sqrt{2}$ 时,$y=\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$;当 $x=-1+\sqrt{2}$ 时,

$$y=\frac{11+6\sqrt{2}}{7}.$$

所以,$y_{\min}=\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$,$y_{\max}=\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$.

说明 本题求最值的方法叫做判别式法.

【例 7】 已知函数 $y=\dfrac{ax^2+bx+6}{x^2+2}$ 的最小值是 2，最大值是 6，求实数 a、b 的值.

解 将原函数去分母，并整理得

$$(a-y)x^2+bx+(6-2y)=0.$$

若 $y\equiv a$，即 y 是常数，则不可能有最小值 2 和最大值 6 了，所以 $y\not\equiv a$. 于是

$$\Delta=b^2-4(a-y)(6-2y)\geqslant 0,$$

所以
$$y^2-(a+3)y+3a-\frac{b^2}{8}\leqslant 0. \qquad ①$$

由题设，y 的最小值为 2，最大值为 6，所以

$$(y-2)(y-6)\leqslant 0,$$

即
$$y^2-8y+12\leqslant 0. \qquad ②$$

由①、②得

$$\begin{cases}a+3=8,\\ 3a-\dfrac{b^2}{8}=12,\end{cases}$$

解得
$$a=5,\ b=\pm 2\sqrt{6}.$$

【例 8】 求函数

$$f(x)=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$$

的最小值和最大值.

解 先求定义域. 由

$$\begin{cases}8x-x^2\geqslant 0,\\ 14x-x^2-48\geqslant 0,\end{cases}$$

得
$$6\leqslant x\leqslant 8.$$

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{8-x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-6}\right)\\&=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}},\ x\in[6,\ 8].\end{aligned}$$

当 $x\in[6,\ 8]$，且 x 增加时，$\sqrt{x}+\sqrt{x-6}$ 增大，而 $\sqrt{8-x}$ 减小，于是 $f(x)$ 是随着 x 的增加而减小，即 $f(x)$ 在区间 $[6,\ 8]$ 上是减函数. 所以

$$f_{\min}(x)=f(8)=0,$$

$$f_{\max}(x)=f(6)=2\sqrt{3}.$$

【例 9】 求函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$，$\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 的最小值和最大值.

解 因为 $x\neq 1$，所以

$$y=\frac{x-1}{(x-1)^2+4}=\frac{1}{x-1+\dfrac{4}{x-1}},\ x\in\left[\frac{3}{2},\ 2\right].$$

令 $f(t)=t+\dfrac{4}{t}$，$t\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$. 当 $\dfrac{1}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned}f(t_2)-f(t_1)&=(t_2-t_1)+\left(\frac{4}{t_2}-\frac{4}{t_1}\right)\\&=(t_2-t_1)\left(1-\frac{4}{t_1t_2}\right)\\&<0,\end{aligned}$$

所以，$f(t)=t+\dfrac{4}{t}$ 在$\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$上是减函数，因此

$$f_{\min}(t)=f(1)=5,\ f_{\max}(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}.$$

所以 $$y_{\min}=\frac{2}{17},\ y_{\max}=\frac{1}{5}.$$

说明 例 8 和例 9 都是利用函数的单调性来求最值的. 例 8 的“分子有理化”是一种常用的求最值的方法. 例 9 不能用判别式法. 因为：

$$yx^2-(2y+1)x+5y+1=0.$$

$y=0$ 时，$x=1$，而 $x=1$ 不在定义域内，故 $y\neq 0$.

$y\neq 0$ 时，有

$$\Delta=(2y+1)^2-4y(5y+1)\geqslant 0,$$

所以 $$-\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}.$$

又当 $x=-1$ 时，$y=-\dfrac{1}{4}$；当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{1}{4}$. 而 -1、3 均不在区间$\left[\dfrac{3}{2},\ 2\right]$内，所以此题不能直接用判别式法.

练习题

A组

1 填空题

(1) 已知函数 $y=|x-a|+|x+19|+|x-a-96|$，其中 a 为常数，且满足 $19<a<96$. 当自变量 x 的取值范围为 $a\leqslant x\leqslant 96$ 时，y 的最大值是______.

(2) 函数 $y=x^2-4x+7$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值与最小值的和等于______.

(3) 函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ 的最大值为______.

(4) 当 $|x+1|\leqslant 6$ 时，函数 $y=x|x|-2x+1$ 的最大值是______.

(5) 函数 $y=-2x+5\sqrt{x+1}$，$x\in[0,1]$ 的最大值是______.

(6) 若 $3x^2+2y^2=2x$，则 x^2+y^2 的最大值为______.

2 设 x 是正实数，求函数 $y=x^2-x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值.

3 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+\sqrt{2013})^2+\sin 2013x}{x^2+2013}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$ ______.

4 x、y 是正实数，求

$$f(x,y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

的最小值.

5 已知 x、y 为实数，则 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y$ 的最小值为______.

6 求函数 $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$ 在区间 $[-6,6]$ 上的最大值和最小值.

7 求函数 $y=\dfrac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$ 的最大值和最小值.

8 设 x、y 是实数，且 $x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+6=0$，求 $u=x+y$ 的最小值.

9 已知 x_1、x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ (k 是实数)的两个实数根，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值和最小值.

10 设 a 是实数，求二次函数 $y=x^2-4ax+5a^2-3a$ 的最小值 m. 当 a 在 $0\leqslant a^2-4a-2\leqslant 10$ 中变动时，求 m 的最大值.

11 若 $x\neq 0$，求 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}{x}$ 的最大值.

12 设 x、y 是实数，求 $u=x^2+xy+y^2-x-2y+3$ 的最小值.

13 设函数 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 的最大值为 4，最小值为 -1，求 a、b 的值.

14 设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数，求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

B 组

15 求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2x}$ 的最小值.

16 已知函数 $f(x)=-9x^2-6ax-a^2+2a$，$x\in\left[-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right]$ 有最大值 -3，求实数 a 的值.

17 求函数 $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right]\right|$ 的最大值. 其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数.

18 求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值.

19 设 x、y、z、w 是非零实数，求 $\dfrac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$ 的最大值.

20 设函数 $f(x)=ax^2+8x+3\ (a<0)$. 对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0,\ l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立. 问 a 为何值时，$l(a)$ 最大？求出这个最大的 $l(a)$.

21 设实数 $\omega>0$，已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$. 求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值与最小值.

22 设 a, $b\in[0,\ 1]$，求 $S=\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+a}+(1-a)(1-b)$ 的最大值和最小值.

23 关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个实根为 α、$\beta\ (\alpha<\beta)$.

(1) 若 x_1、x_2 为区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上的两个不同的点，求证：

$$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0;$$

(2) 设 $f(x)=\dfrac{4x-t}{x^2+1}$，$f(x)$ 在区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上的最大值和最小值分别记为 $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$，$g(t)=f_{\max}-f_{\min}$，求 $g(t)$ 的最小值.

第 8 讲　等差数列与等比数列

一、知识要点和基本方法

数列是定义在正整数集(或整数集)上的函数,等差数列与等比数列是数列家族中最基本的两个成员. 与数列有关的大多数问题都需要转化为等差数列或等比数列来处理.

1. 等差数列$\{a_n\}$的一些基本性质

(1) 对于任意正整数 p、q、r、s,若 $p+s=q+r$, 则 $a_p+a_s=a_q+a_r$;

(2) 对于任意实数 b,数列$\{ba_n\}$是等差数列;

(3) 若$\{b_n\}$也是等差数列,则 $\{a_n+b_n\}$ 为等差数列.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,S_n 是其前 n 项之和,可以证明

(1) $S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)$;

(2) 若 $S_m=S_n\ (m\neq n)$,则 $S_{m+n}=0$;

(3) 若 $S_p=q$, $S_q=p$, $p\neq q$, 则 $S_{p+q}=-(p+q)$.

3. 等比数列$\{a_n\}$的一些基本性质

(1) 对于任意正整数 p、q、r、s,若 $p+s=q+r$, 则 $a_pa_s=a_qa_r$;

(2) 对于任意非零实数 b,$\{ba_n\}$是等比数列;

(3) 若$\{b_n\}$也是等比数列,则$\{a_nb_n\}$为等比数列.

4. 处理数列问题的思想方法

(1) 方程的思想.

数列的有关问题通常围绕 a_n 与 S_n 展开,在等差数列和等比数列问题中,主要涉及五个量 a_1、d(或 q)、n、a_n、S_n,其中前两个量确定后,即可确定欲求的数列,因此可以利用方程的思想来处理.

(2) 函数的思想.

对于等差数列,当它不是常数列时, a_n 可视为 n 的一次函数,S_n 可视为 n 的二次函数. 因此可以利用函数思想来处理.

二、例题精讲

【例 1】 七个正数组成等比数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_7,其前五项之和为 $\dfrac{62}{7\sqrt{2}-6}$,后五项之和为 $12+14\sqrt{2}$, 求这七项之积 $a_1a_2\cdots a_7$ 的值.

解 设公比为 q,则由

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=q^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$

得：$q=\sqrt{2}$，由 $q^2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=12+14\sqrt{2}$ 得：$a_1=\sqrt{2}$，故各项为$(\sqrt{2})^k$ $(k=1,2,\cdots,7)$，所以

$$a_1a_2a_3\cdots a_7=(\sqrt{2})^1(\sqrt{2})^2\cdots(\sqrt{2})^7=2^{14}.$$

【例2】 设$\{a_n\}$是一个等差数列，$a_1=19$，$a_{26}=-1$. 设 $A=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+6}$，其中 n 是正整数，求$|A|$的最小值.

解 由 $a_{26}=a_1+25d$，得公差 $d=-\dfrac{4}{5}$.

$$A=7a_n+21d=7a_1+7(n-1)d+21d=\frac{7}{5}(87-4n),$$

因为 n 是正整数，所以 $|87-4n|\neq 0$，故 $|87-4n|\geqslant 1$，于是 $|A|\geqslant\dfrac{7}{5}$.

当 $n=22$ 时，$|A|=\dfrac{7}{5}$. 所以，$|A|$ 的最小值是$\dfrac{7}{5}$.

【例3】 各项均为实数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项之和为 S_n，若 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$. 求 S_{40}.

解 记 $b_1=S_{10}$，$b_2=S_{20}-S_{10}$，$b_3=S_{30}-S_{20}$，$b_4=S_{40}-S_{30}$. 设 q 是$\{a_n\}$的公比，则 b_1、b_2、b_3、b_4 构成以 $r=q^{10}$ 为公比的等比数列. 于是

$$70=S_{30}=b_1+b_2+b_3=b_1(1+r+r^2)=10(1+r+r^2),$$

即 $r^2+r-6=0$，解得 $r=2$ 或 $r=-3$.

由于 $r=q^{10}>0$，所以 $r=2$，故

$$S_{40}=10(1+2+2^2+2^3)=150.$$

【例4】 给定正整数 n 和正数M. 对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

解 设公差为 d，$a_{n+1}=a$，则

$$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=(n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)d,$$

故
$$a+\frac{1}{2}nd=\frac{S}{n+1},$$

又
$$M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=(a-nd)^2+a^2$$

$$=\frac{4}{10}\left(a+\frac{1}{2}nd\right)^2+\frac{1}{10}(4a-3nd)^2$$

$$\geqslant\frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2,$$

所以 $$|S|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{10}(n+1)\sqrt{M},$$

且当 $a=\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}$，$d=\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sqrt{M}$ 时，

$$S=(n+1)\left[\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}+\frac{n}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{M}\right]$$

$$=(n+1)\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}\sqrt{M}=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M},$$

由于此时 $4a=3nd$，所以

$$a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2=\frac{4}{10}\cdot\frac{10}{4}M=M,$$

所以 S 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$.

【例 5】 设 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},$$

求 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积.

解 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则由题设知

当 $q=1$ 时，$S=na_1$，$T=\frac{n}{a_1}$，所以 $a_1^2=\frac{S}{T}$，从而 $a_1a_2\cdots a_n=a_1^n=\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$.

当 $q\neq1$ 时，$S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$，

$$T=\frac{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}}=\frac{a_1-a_nq}{a_1a_n(1-q)},$$

所以 $a_1a_n=\frac{S}{T}$.

因为等比数列中到首末两项距离相等的两项之积等于首末两项的积，即

$$a_1a_n=a_1a_n,\ a_2a_{n-1}=a_1a_n,$$
$$a_3a_{n-2}=a_1a_n,\ \cdots,\ a_na_1=a_1a_n,$$

把上面这 n 个等式相乘,得 $(a_1a_2\cdots a_n)^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$,于是

$$a_1a_2\cdots a_n=\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

综上所述,$a_1a_2\cdots a_n=\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$.

【例 6】 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项之和.

(1) 证明:$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$;

(2) 是否存在常数 $c>0$,使得 $\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立?并证明你的结论.

证明 (1) 设$\{a_n\}$的公比为 q,由已知得 $a_1>0$,$q>0$.

(i) 当 $q=1$ 时,$S_n=na_1$,从而

$$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2=-a_1^2<0.$$

(ii) 当 $q\neq1$ 时,

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

所以 $S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}=-a_1^2q^n<0$.

由(i)与(ii)均有 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$,两边同时取对数即得证.

(2) 不存在.

要使 $\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立,则有

$$\begin{cases}(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2,\\ S_n-c>0.\end{cases}$$

分两种情况讨论:

(i) 当 $q=1$ 时,

$$\begin{aligned}&(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2\\ =&(na_1-c)[(n+2)a_1-c]-[(n+1)a_1-c]^2\end{aligned}$$

$$=-a_1^2<0,$$

即不存在常数 $c>0$，使结论成立.

(ii) 当 $q\neq 1$ 时，若条件 $(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2$ 成立，则

$$\begin{aligned}&(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2\\=&\left[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c\right]\left[\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c\right]-\left[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c\right]^2\\=&-a_1q^n[a_1-c(1-q)],\end{aligned}$$

而 $a_1q^n\neq 0$，故只能是 $a_1-c(1-q)=0$，即 $c=\dfrac{a_1}{1-q}$.

此时，由于 $c>0$，$a_1>0$，必须有 $0<q<1$，但当 $0<q<1$ 时，

$$S_n-\frac{a_1}{1-q}=\frac{-a_1q^n}{1-q}<0,$$

不满足 $S_n-c>0$，即不存在常数 $c>0$ 满足条件.

综合(i)与(ii)可得，不存在常数 $c>0$ 满足题意.

【例7】 设正整数 x 满足 $\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2013}<\dfrac{2014}{2013}$. 数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2013}$ 是公差为 x^{2013}，首项 $a_1=(x+1)^2x^{2012}-1$ 的等差数列；数列 $b_1,b_2,\cdots,b_{2013}$ 是公比为 $\dfrac{1+x}{x}$，首项 $b_1=(x+1)x^{2013}$ 的等比数列，求证：$b_1<a_1<b_2<\cdots<a_{2012}<b_{2013}$.

证明 首先， $a_i=(x+1)^2x^{2012}-1+(i-1)x^{2013}$，

$$b_i=(x+1)x^{2013}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{i-1}=(x+1)^ix^{2014-i},$$

$$b_{i+1}-b_i=x^{2013}\left(\frac{1+x}{x}\right)^i.$$

用数学归纳法证明 $a_i-b_i\geqslant x^{2013}\dfrac{2014-i}{2013}$，$1\leqslant i\leqslant 2013$.

由于 $a_1-b_1=x^{2013}+x^{2012}-1\geqslant x^{2013}$，即 $i=1$ 成立. 假设 $1\leqslant i\leqslant 2012$ 成立，则

$$\begin{aligned}a_{i+1}-b_{i+1}&=(a_{i+1}-a_i)-(b_{i+1}-b_i)+(a_i-b_i)=x^{2013}-x^{2013}\left(\frac{1+x}{x}\right)^i+(a_i-b_i)\\&\geqslant x^{2013}-x^{2013}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2013}+(a_i-b_i)\geqslant -x^{2013}\frac{1}{2013}+(a_i-b_i)\\&\geqslant -x^{2013}\frac{1}{2013}+x^{2013}\frac{2013-i+1}{2013}=x^{2013}\frac{2014-(i+1)}{2013}.\end{aligned}$$

所以，$a_i > b_i$，$i = 1, 2, \cdots, 2013$.

用数学归纳法证明 $b_{i+1} > a_i$，$i = 1, 2, \cdots, 2012$，首先 $b_2 - a_1 = 1 > 0$，假设 $1 \leqslant i \leqslant 2011$ 成立，则

$$\begin{aligned} b_{i+2} - a_{i+1} &= (b_{i+2} - b_{i+1}) - (a_{i+1} - a_i) + (b_{i+1} - a_i) \\ &= x^{2013}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{i+1} - x^{2013} + (b_{i+1} - a_i) > 0. \end{aligned}$$

故命题成立.

【例 8】 将各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 排成如下所示的三角形数阵（第 n 行有 n 个数，同一行中，下标小的数排在左边）. b_n 表示数阵中，第 n 行、第 1 列的数. 已知数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，且从第 3 行开始，各行均构成公差为 d 的等差数列（第 3 行的 3 个数构成公差为 d 的等差数列；第 4 行的 4 个数构成公差为 d 的等差数列……），$a_1 = 1$，$a_{12} = 17$，$a_{18} = 34$.

（1）求数阵中第 m 行、第 n 列的数 $A(m, n)$（用 m、n 表示）.

（2）求 a_{2013} 的值；

（3）2013 是否在该数阵中？并说明理由.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_1 & & & \\ & & a_2 & & a_3 & & \\ & a_4 & & a_5 & & a_6 & \\ a_7 & & a_8 & & a_9 & & a_{10} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \end{array}$$

解 （1）设 $\{b_n\}$ 的公比为 q.

依题意，a_{12} 为数阵中第 5 行、第 2 列的数；a_{18} 为数阵中第 6 行、第 3 列的数.

所以 $b_1 = 1$，$b_n = q^{n-1}$，$a_{12} = q^4 + d = 17$，$a_{18} = q^5 + 2d = 34$.

所以 $q = 2$，$d = 1$，$b_n = 2^{n-1}$.

所以 $A(m, n) = b_m + (n-1)d = 2^{m-1} + n - 1$.

（2）由 $1+2+3+\cdots+62 = 1953$，$1+2+3+\cdots+62+63 = 2016$，$2013 - 1953 = 60$ 知，a_{2013} 为数阵中第 63 行、第 60 列的数.

所以 $a_{2013} = 2^{62} + 59$.

（3）假设 2013 为数阵中第 m 行、第 n 列的数.

因为第 m 行中，最小的数为 2^{m-1}，最大的数为 $2^{m-1} + m - 1$，所以

$$2^{m-1} \leqslant 2013 \leqslant 2^{m-1} + m - 1. \quad ①$$

由于 $m \leqslant 11$ 时，$2^{m-1} + m - 1 \leqslant 2^{10} + 10 = 1034 < 2013$，因此 $m \leqslant 11$ 不符合①；

由于 $m \geqslant 12$ 时，$2^{m-1} \geqslant 2^{11} = 2048 > 2013$，因此 $m \geqslant 12$ 不符合①；
所以上述不等式①无正整数解.
所以 2013 不在该数阵中.

练习题

A 组

一、选择题

1 给定公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$，设 $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$，$b_2 = a_4 + a_5 + a_6$，…，$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}$，…，则$\{b_n\}$（　　）.

(A) 是等差数列

(B) 是公比为 q 的等比数列

(C) 是公比为 q^3 的等比数列

(D) 既非等差数列又非等比数列

2 等比数列$\{a_n\}$的首项 $a_1 = 1536$，公比 $q = -\dfrac{1}{2}$. 用 Π_n 表示它的前 n 项之积，则 Π_n 中最大的是（　　）.

(A) Π_9　　(B) Π_{11}　　(C) Π_{12}　　(D) Π_{13}

3 等差数列$\{a_n\}$满足 $3a_8 = 5a_{13}$，且 $a_1 > 0$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 S_n 中最大的是（　　）.

(A) S_{10}　　(B) S_{11}　　(C) S_{20}　　(D) S_{21}

4 已知数列$\{a_n\}$满足 $3a_{n+1} + a_n = 4$，且 $a_1 = 9$，其前 n 项之和为 S_n，则满足不等式 $|S_n - n - 6| < \dfrac{1}{125}$ 的最小正整数 n 是（　　）.

(A) 8　　(B) 7　　(C) 6　　(D) 5

5 等差数列$\{a_n\}$前 n 项的和为 S_n，已知 $\dfrac{S_{25}}{a_{23}} = 5$，$\dfrac{S_{45}}{a_{33}} = 25$，则$\dfrac{S_{65}}{a_{43}}$的值是（　　）.

(A) 125　　(B) 85　　(C) 45　　(D) 35

二、填空题

6 一等差数列共 $3n$ 项，前 n 项和为 A，中间 n 项和为 B，后 n 项和为 C，$M = B^2 - AC$，$N = \left(\dfrac{A-C}{2}\right)^2$，则 M 与 N 的大小关系为__________.

7 已知正整数 $n \leqslant 2000$，且能表示成不少于 60 个连续正整数之和，这样的 n 共有________个.

8 在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中，$a_1 = 2$，且对于任意正整数 n，$3a_{n+1} - a_n = 0$，b_n 是 a_n 与 a_{n+1} 的等差中项，则$\{b_n\}$的各项和是________.

9 设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项之和，已知$\dfrac{1}{3}S_3$ 与$\dfrac{1}{4}S_4$ 的等比中项为

$\frac{1}{5}S_5$，$\frac{1}{3}S_3$ 与$\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1，则$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$ ________.

三、解答题

10 设$\{a_n\}$是等比数列，首项 $a_1>1$，公比 $q>1$. 求证：数列 $\{\log_{a_n}a_{n+1}\}$ 是递减数列.

11 一个公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中任二项之积仍是这个数列中的项的充要条件是：存在非负整数 m，使 $a_1=q^m$.

12 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$分别是等差数列和等比数列，且 $a_1=b_1>0$，$a_2=b_2>0$，试比较 a_n 与 b_n 的大小.

B 组

13 在一个不减数列 a_1，a_2，…中，每一项都是正整数，且对任意正整数 k，该数列中恰有 k 项等于 k. 求所有由 $a_1+a_2+\cdots+a_n(n=1, 2, \cdots)$形成的质数.

14 设数列 a_1，a_2，… 满足：$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2, & 若\ a_n-2\notin\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}，且\ a_n-2>0, \\ a_n+3, & 其他情况.\end{cases}$$

证明：对任意正整数 $k>1$，存在正整数 n，使得 $a_n=a_{n-1}+3=k^2$.

15 若$\{a_n\}$是正项递增的等差数列，n，$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$. 求证：

$$\sqrt[k]{\frac{a_{(n+1)k+1}}{a_{k+1}}}<\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\cdot\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}\cdot\frac{a_{3k+2}}{a_{3k+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{nk+2}}{a_{nk+1}}<\sqrt[k]{\frac{a_{nk+2}}{a_2}}.$$

16 设 $S=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，A 为至少含有两项、公差为正的等差数列，其每一项均在 S 中，且添加 S 中的其他元素于 A 以后，均不能构成与 A 有相同公差的等差数列. 求这种数列 A 的个数(只有两项的数列也看成等差数列).

17 两个正整数数列满足：一个是以 $r(>0)$为公差的等差数列，一个是以 $q(>1)$为公比的等比数列，这里 r、q 是互质的正整数. 证明：如果这两个数列中有一项相同，则存在无穷多项相同.

第9讲　高阶等差数列

一、知识要点和基本方法

1. 对于一个给定的数列$\{a_n\}$，把它的连续两项a_{n+1}与a_n的差$a_{n+1}-a_n$记为b_n，得到一个新数列$\{b_n\}$，把数列$\{b_n\}$称为原数列$\{a_n\}$的一阶差数列；如果$c_n=b_{n+1}-b_n$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{c_n\}$是$\{b_n\}$的一阶差数列，$\{c_n\}$是$\{a_n\}$的二阶差数列；依次类推，可以得出数列$\{a_n\}$的p阶差数列，其中$p\in\mathbf{N}^*$.

2. 如果某一数列的p阶差数列是一个非零常数数列，那么称此数列为p阶等差数列.

3. 一阶等差数列就是我们通常所述的(非常数数列的)等差数列.

4. 高阶等差数列是二阶或二阶以上的等差数列的统称.

5. 高阶等差数列的性质：

(1) 如果数列$\{a_n\}$是p阶等差数列，那么它的一阶差数列是$p-1$阶等差数列；

(2) 数列$\{a_n\}$是p阶等差数列的充要条件是：数列$\{a_n\}$的通项是关于n的p次多项式；

(3) 如果数列$\{a_n\}$是p阶等差数列，那么其前n项和S_n是关于n的$p+1$次多项式.

性质(1)是显然的，性质(2)与(3)可用数学归纳法证明.

6. 高阶等差数列中最重要也最常见的问题是求通项与前n项和，更深层的问题是差分方程的求解.解决问题的基本方法有：

(1) 逐差法：其出发点是$a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$.

(2) 待定系数法：在已知阶数的等差数列中，其通项a_n与前n项和S_n就是确定次数的多项式(关于n的)，先设出多项式的系数，再用已知条件代入解方程组即得.

(3) 裂项相消法：其出发点是a_n能写成

$$a_n=f(n+1)-f(n)$$

的形式.

二、例题精讲

【例1】 数列$\{a_n\}$的二阶差数列的各项均为16，且$a_{63}=a_{89}=10$，求a_{51}.

解法1 显然，$\{a_n\}$的一阶差数列$\{b_n\}$是公差为16的等差数列，设其首项为

a,则 $b_n = a + (n-1)16$, 于是

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= a_1 + \frac{a + [a + (n-2)16]}{2} \cdot (n-1) \\ &= a_1 + (n-1)a + 8(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

这是一个关于 n 的二次多项式,其中 n^2 的系数为 8,由于 $a_{63} = a_{89} = 10$, 所以

$$a_n = 8(n-63)(n-89) + 10,$$

从而 $$a_{51} = 8(51-63)(51-89) + 10 = 3658.$$

解法 2 由题意,数列$\{a_n\}$是二阶等差数列,故其通项是 n 的二次多项式,又 $a_{63} = a_{89} = 10$, 故可设

$$a_n = A(n-63)(n-89) + 10,$$

由于$\{a_n\}$的二阶等差数列每项均为 16,所以

$$(a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = 16,$$

即 $$a_3 - 2a_2 + a_1 = 16,$$

所以 $$A(3-63)(3-89) + 10 - 2[A(2-63)(2-89) + 10] + A(1-63)(1-89) + 10 = 16,$$

解得 $$A = 8,$$

故 $$a_n = 8(n-63)(n-89) + 10,$$

从而 $$a_{51} = 3658.$$

说明 解法 1 用的是逐差法,而解法 2 用的是待定系数法.

【例 2】 一个三阶等差数列$\{a_n\}$的前 4 项依次为 30、72、140、240. 求其通项公式.

解 由性质(2), a_n 是 n 的三次多项式,可设 $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$, 其中 A、B、C、D 待定. 由于 $a_1 = 30$, $a_2 = 72$, $a_3 = 140$, $a_4 = 240$, 列方程组

$$\begin{cases} A + B + C + D = 30, \\ 8A + 4B + 2C + D = 72, \\ 27A + 9B + 3C + D = 140, \\ 64A + 16B + 4C + D = 240, \end{cases}$$

解得 $$A=1,\ B=7,\ C=14,\ D=8,$$

所以 $$a_n=n^3+7n^2+14n+8.$$

【例 3】 求和：$S_n=1\cdot 3\cdot 2^2+2\cdot 4\cdot 3^2+\cdots+n(n+2)(n+1)^2$.

解 由于 $k(k+2)(k+1)^2=k(k+1)(k+2)(k+3)-2k(k+1)(k+2)$，故求 S_n 可转化为求 $K_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)$ 和求 $T_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$.

因为 $k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}[k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)]$，所以

$$\begin{aligned}K_n&=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\\&\quad-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)]\\&=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)]\\&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3),\end{aligned}$$

从而 $$S_n=K_n-2T_n=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3).$$

说明 求 K_n 与 T_n 用的是常见的裂项相消法.

【例 4】 已知整数列 $\{a_n\}$ 适合条件

(1) $a_{n+2}=3a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}$，$n=2,3,4,\cdots$；

(2) $2a_2=a_1+a_3-2$；

(3) $a_5-a_4=9$，$a_1=1$.

求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n.

解 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，$c_n=b_{n+1}-b_n$，由条件(1)得

$$\begin{aligned}c_n&=b_{n+1}-b_n\\&=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)\\&=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (3a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}) - 2a_{n+1} + a_n \\
&= a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} \\
&= c_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots),
\end{aligned}
$$

所以,$\{c_n\}$是常数列.

由(2)得,$c_2 = a_3 - 2a_2 + a_1 = 2$,因此 $c_n = 2$,

注意到
$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 \\
&= 1 + (n-1)b_1 + (n-1)(n-2).
\end{aligned}
$$

由条件(3)知 $b_4 = 9$,而 $b_4 = b_1 + 3 \times 2$,故 $b_1 = 3$. 于是

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) \\
&= 1 + 3n - 3 + n^2 - 3n + 2 \\
&= n^2,
\end{aligned}
$$

所以
$$
\begin{aligned}
S_n &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}
$$

【例 5】 数列$\{a_n\}$的二阶差数列是等比数列,且 $a_1 = 5$,$a_2 = 6$,$a_3 = 9$,$a_4 = 16$. 求$\{a_n\}$的通项公式.

解 易算出$\{a_n\}$的二阶差数列$\{C_n\}$是以 2 为首项、2 为公比的等比数列,且 $C_n = 2^n$. $\{a_n\}$的一阶差数列设为$\{b_n\}$,则 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$,且

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} \cdot 2 \\
&= 2^n - 1,
\end{aligned}
$$

从而
$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k - 1) \\
&= 5 + \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} \cdot 2 - (n-1) \\
&= 2^n - n + 4,
\end{aligned}
$$

即
$$
a_n = 2^n - n + 4.
$$

【例 6】 设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$ 为实数,数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 构成一个长为 m 的弱等差数列,即:存在实数 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 和 d,使得 $x_0 \leqslant a_1<x_1 \leqslant a_2<x_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m<x_m$, 且对任意 $0 \leqslant i \leqslant m-1$,均有 $x_{i+1}-x_i=d$(即 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 是一个公差为 d 的等差数列).

(1) 证明:若 $a_1<a_2<a_3$, 则数列 a_1、a_2、a_3 为弱等差数列;

(2) 设 A 是集合 $\{0, 1, 2, \cdots, 999\}$ 的一个有至少 730 个元素的子集. 证明:A 包含一个长为 10 的弱等差数列.

证明 (1) 考虑数列 a_1、a_2、a_3 的一阶差数列 d_1、d_2. 如果 $d_1=d_2$, 取 $x_0=a_1$, $x_1=a_2$, $x_2=a_3$, $x_3=a_3+d_1$, 即可知 a_1、a_2、a_3 为弱等差数列;如果 $d_1>d_2$,令 $d=d_1+\frac{d_2}{2}$,取 $x_1=a_1+\frac{1}{3}d_2$, $x_0=x_1-d$, $x_2=x_1+d$, $x_3=x_1+2d$, 就有 $x_0<a_1<x_1<a_2<x_2<a_3<x_3$,命题成立;如果 $d_1<d_2$,令 $d=\frac{1}{2}d_1+d_2$,取 $x_1=a_1+\frac{1}{3}d_1$, $x_0=x_1-d$, $x_2=x_1+d$, $x_3=x_1+2d$,可知命题成立. 所以 a_1、a_2、a_3 是弱等差数列.

(2) 若 A 中没有一个长为 10 的弱等差数列,考虑下面的集合

$$A_k=\{100k, 100k+1, \cdots, 100k+99\}, k=0, 1, 2, \cdots, 9,$$

注意到,数列 0, 100, 200, $\cdots$, 1000 是一个长为 11 的等差数列,故存在一个 k,使得 A_k 中没有一个元素属于 A.

对其余的 k,考虑下面的集合

$$A_{k,j}=\{100k+10j, 100k+10j+1, \cdots, 100k+10j+9\},\\ j=0, 1, 2, \cdots, 9,$$

由于 $100k+10j$, $100k+10j+10$, $\cdots$, $100k+10j+100$ 是一个长为 11 的等差数列,故存在一个 j,使得 $A_{k,j}$ 中没有一个元素属于 A. 又 $A_{k,j}$ 中的 10 个成等差,故每个 $A_{k,j}$ 中至少有一个元素不属于 A.

上述讨论表明,$\{0, 1, 2, \cdots, 999\}$ 中至少有 $100+9(10+9)=271$ 个元素不属于 A,这与 A 的元素个数不小于 730 矛盾.

综上所述,命题成立.

练习题

A组

一、选择题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=(-1)^{n-1}n^2$, 则其前 n 项之和 S_n 是关于 n 的(　　).

(A) 一次多项式　　(B) 二次多项式

(C) 三次多项式　　(D) 非多项式函数

2 已知数列$\{a_n\}$，条件"$a_n = f(n)$ 是 n 的五次多项式"是条件"$\{a_n\}$是五阶等差数列"的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要的条件

二、填空题

3 数列$\{n^3\}$的前 n 项和为______.

4 数列 $\{n(n+1)(n+2)(n+3)\}$ 的前 n 项和为______.

5 一个三阶等差数列的前 n 项为 1，2，8，22，47，86，…，则其通项为______.

6 $\{a_n\}$的一阶差数列为 $\{n(n+2)\}$，则$\{a_n\}$的通项为______(其中 $a_1=2$).

三、解答题

7 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n = n^4 - 2n^3 + 2n^2 - n + \dfrac{1}{5}$，求其前 n 项之和 S_n.

8 数列$\{a_n\}$的首项为 $a_1 = 1$，$\{a_n\}$的一阶差数列的首项为 7，二阶差数列为 $\{6n+6\}$，求通项 a_n.

B 组

9 若数列$\{a_n\}$的一阶差数列是公比为 $q(\neq 1)$ 的等比数列. 求证：$\{a_n\}$的通项为 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) \cdot \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$.

10 求和 $S_n = a + 4a^2 + 9a^3 + \cdots + n^2a^n$ $(a \neq 1)$.

11 把正奇数按下表排列

1	3	7	13	21	31	
5	9	15	23			
11	17	25				
19	27					
29						

并把从上至下数第 m 行，从左至右数第 n 列的数记为 a_{mn}，求数列$\{a_{m1}\}$与数列$\{a_{1n}\}$的通项.

12 已知$\{a_n\}$的首项为 $a_1 = 4$，一阶差数列为$\{n^2\}$，求$\{a_n\}$的通项.

13 对于任一实数序列 $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$，定义 ΔA 为序列 $\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \cdots\}$，它的第 n 项为 $a_{n+1} - a_n$. 假定序列 $\Delta(\Delta A)$的所有项均为 1，且 $a_{19} = a_{92} = 0$，求 a_1.

第 10 讲　数列求和

一、知识要点和基本方法

数列求和是数列研究的一个重要方面. 数列前 n 项和通常用 S_n 来表示，即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

1. 重要公式

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$；

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$；

(4) 等差数列中 $S_{m+n} = S_m + S_n + mnd$，其中 $m, n \in \mathbf{N}^*$，d 为公差.

(5) 等比数列中 $S_{m+n} = S_n + q^n S_m = S_m + q^m S_n$，其中 $m, n \in \mathbf{N}^*$，q 为公比.

2. 基本方法

(1) 化归思想.

"当解决问题时，我们总要利用以前解决过的问题，用其结果或用其方法，或利用解决它们时所得到的经验(波利亚语). "中学课本中仅推导了等差、等比数列求和公式，因而将数列求和转化为等差、等比数列求和是我们解题的重要思想.

(2) 裂项求和.

将数列的通项公式分成两个式子的差，即 $a_n = f(n+1) - f(n)$，然后在累加时抵消掉中间项，这种先裂后消的求和法叫裂项求和，这是数列求和中使用最频繁的方法.

(3) 并项求和

把数列的某些项放在一起先求和，然后再求 S_n.

数列求和的方法多种多样，要视具体情况选用合适方法.

二、例题精讲

【例 1】 求和 $\sum_{n=1}^{2015} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n!}$.

解　对于 $n \in \mathbf{N}^*$，有

$$\frac{n^2 + n + 1}{n!} = \frac{n+1}{n!} + \frac{n^2}{n!}$$

$$=\frac{n+1}{n!}+\frac{n}{(n-1)!}\text{（规定 }0!=1\text{）},$$

所以
$$(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}=(-1)^n\frac{n+1}{n!}+(-1)^n\frac{n}{(n-1)!}$$
$$=(-1)^n\frac{n+1}{n!}-(-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!},$$

故
$$\sum_{n=1}^{2015}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$$
$$=\sum_{n=1}^{2015}\left[(-1)^n\frac{n+1}{n!}-(-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!}\right]$$
$$=-\frac{2016}{2015!}-1.$$

【例 2】 设 $a_n=2^n$，$b_n=n$，$(n=1,2,3,\cdots)$，A_n、B_n 分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和. 记 $C_n=a_nB_n+b_nA_n-a_nb_n$，则数列$\{C_n\}$的前 10 项和为（　　）.

(A) $2^{10}+53$　　　(B) $2^{11}+53$

(C) $110\times(2^9-1)$　　　(D) $110\times(2^{10}-1)$

解 $n\geqslant 2$ 时，$C_n=(A_n-A_{n-1})B_n+(B_n-B_{n-1})A_n-(A_n-A_{n-1})(B_n-B_{n-1})$，所以 $C_n=A_nB_n-A_{n-1}B_{n-1}$，所以 $C_{10}=A_{10}B_{10}-A_9B_9$，$C_9=A_9B_9-A_8B_8$，$\cdots$，$C_2=A_2B_2-A_1B_1$，又 $C_1=a_1b_1=A_1B_1$，故$\{C_n\}$的前 n 项和为 A_nB_n. $A_{10}=\frac{2(1-2^{10})}{1-2}=2(2^{10}-1)$，$B_{10}=\frac{10(10+1)}{2}=55$，所以 $A_{10}\cdot B_{10}=110\times(2^{10}-1)$. 故选 D.

【例 3】 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_k=2^k$，$k=1,2,\cdots,n$，求所有可能的乘积 $a_ia_j\ (1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$ 的和.

解 因为 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_ia_j=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2)$，而

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1),$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{4(4^n-1)}{4-1}=\frac{4(2^{2n}-1)}{3},$$

所以
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_ia_j=\frac{1}{2}\left(\frac{4(2^{2n}-1)}{3}+(2(2^n-1))^2\right)$$
$$=\frac{4}{3}(2^{2n+1}-3\cdot 2^n+1).$$

【例 4】 数列$\{x_n\}$定义为：$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_n=\dfrac{2n-3}{2n}x_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$. 证明:对任意正整数 n,均有 $x_1+x_2+\cdots+x_n<1$.

证明 由条件可知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,均有 $x_n>0$,并且

$$x_k=(2k-3)x_{k-1}-(2k-1)x_k,\ k=2,3,\cdots,$$

所以,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}x_k&=x_1+\sum_{k=2}^{n}((2k-3)x_{k-1}-(2k-1)x_k)\\&=x_1+x_1-(2n-1)x_n\\&=1-(2n-1)x_n\\&<1.\end{aligned}$$

从而命题成立.

【例 5】 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2a_n-1$，数列$\{b_n\}$满足 $b_1=3$，$b_{k+1}=a_k+b_k$ $(k=1,2,\cdots)$. 求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

解 因为 $S_n=2a_n-1$，$a_1=S_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$，

又
$$\begin{aligned}a_k=S_k-S_{k-1}&=(2a_k-1)-(2a_{k-1}-1)\\&=2a_k-2a_{k-1},\end{aligned}$$

所以
$$a_k=2a_{k-1}.$$

因此,$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

对于 $b_{k+1}=a_k+b_k$，取 $k=1,2,\cdots,n-1$，得

$$b_2=a_1+b_1,$$
$$b_3=a_2+b_2,$$
$$\cdots$$
$$b_n=a_{n-1}+b_{n-1},$$

将上列等式两端相加,得

$$b_n=S_{n-1}+b_1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+3=2^{n-1}+2,$$

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和

$$S_n'=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2n=2^n+2n-1.$$

【例6】 数列 1，1，3，3，3^2，3^2，…，3^{2002}，3^{2002} 的各项之和记为 S. 对于给定的正整数 n，若能从数列中选取一些不同位置的项使得这些项之和恰为 n，便称为一种选项方案. 和数为 n 的所有选项方案的种数记为 a_n，求 $a_1+a_2+\cdots+a_S$.

解 注意到 $1+1+3+3+3^2+3^2+\cdots+3^{n-1}+3^{n-1}=3^n-1$. 设 $P_n=a_1+a_2+\cdots+a_{3^n-1}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

对于 $2(n+1)$ 项数列

$$1,\ 1,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ 3^{n-1},\ 3^{n-1},\ 3^n,\ 3^n \qquad ①$$

用前面 $2n$ 项表示 1 至 3^n-1 的自然数的方法数之和为 P_n. 若自然数 $m\in[1,\ 3^n-1]$，m 用数列①中前 $2n$ 项表示，有 a_m 种方法，则自然数 $m+3^n$ 用数列①表示就有 $2a_m$ 种方法. 自然数 $m+2\times3^n$ 用数列①表示有 a_m 种方法，此外，易得 $a_{3^n}=2$，$a_{2\times3^n}=1$.

于是推出 $P_{n+1}=P_n+2P_n+P_n+2+1=4P_n+3$，再算出

$$P_1=a_1+a_{3-1}=2+1=3.$$

这样 $P_n=4P_{n-1}+3=4(4P_{n-2}+3)+3=\cdots=4^{n-1}P_1+3(4^{n-2}+4^{n-1}+\cdots+4+1)=4^{n-1}\cdot3+(4^{n-1}-1)=4^n-1$.

本题中 $n=2003$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_S=P_{2003}=4^{2003}-1$.

说明 本题可推广到一般情形：设有数列

$$\underbrace{1\ 1,\ \cdots,\ 1}_{(k-1)\text{项}},\quad \underbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}_{(k-1)\text{项}},\ \cdots,$$

$$\underbrace{k^{n-1},\ k^{n-1},\ \cdots,\ k^{n-1}}_{(k-1)\text{项}}\quad (k,\ n\in\mathbf{N}^*,\ k\geqslant2), \qquad ②$$

其各项之和仍记为 S，对于给定的自然数 $m\in[1,\ k^n-1]$. 用数列②的不同位置的某些项之和来表示的方法数记为 a_m，则 $a_1+a_2+\cdots+a_S=2^{n(k-1)}-1$. 本题给出的是一种递归解法.

【例7】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$S_n=1-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 试求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知 $c_n=\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{1-a_{n+1}}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 P_n，求证：$P_n>2n-\dfrac{1}{5}$.

解 (1) 因为
$$S_n=1-a_n, \qquad ①$$
所以
$$S_{n+1}=1-a_{n+1}. \qquad ②$$

②－①得 $a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n$，故

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\ n\in\mathbf{N}^*.$$

又当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}$，所以

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}^*.$$

(2) 由已知得

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{1}{1+a_1}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{1-a_i}+\frac{1}{1+a_i}\right)+\frac{1}{1-a_{n+1}}\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}+2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{1-a_i^2}\\&=\frac{2}{3}+\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}+2\sum_{i=2}^{n}\frac{4^i}{4^i-1}\\&=\frac{2}{3}+\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}+2\sum_{i=2}^{n}\left(1+\frac{1}{4^i-1}\right).\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时，$P_1=2>\frac{3}{2}$，结论成立.

【例 8】 设 $f(n)$ 为定义在正整数集上的函数，并且 $f(1)=2$，

$$f(n+1)=(f(n))^2-f(n)+1,\ n=1,2,3,\cdots.$$

求证：对任意整数 $n>1$，均有

$$1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}<\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}<1-\frac{1}{2^{2^n}}.$$

证明 注意到，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $f(n)>1$，于是

$$\frac{1}{f(n+1)-1}=\frac{1}{(f(n))^2-f(n)}=\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n)},$$

从而
$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1},\ n=1,2,\cdots,$$

所以
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{f(k)-1}-\frac{1}{f(k+1)-1}\right)\\&=1-\frac{1}{f(n+1)-1}.\end{aligned}\qquad ①$$

另一方面，由递推式可知 $f(n+1)-1=f(n)^2-f(n)>(f(n)-1)^2$，所以，

$f(n+1)-1>(f(n)-1)^2>(f(n-1)-1)^{2^2}>\cdots>(f(2)-1)^{2^{n-1}}=2^{2^{n-1}}$,故由①式可知$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}>1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}$.

再由递推式,可知 $f(n)\in\mathbf{N}^*$,从而 $f(n+1)=f(n)^2-f(n)+1<f(n)^2$,依此递推,得 $f(n+1)<(f(1))^{2^n}=2^{2^n}$,从而

$$\frac{1}{f(n+1)-1}>\frac{1}{2^{2^n}-1}>\frac{1}{2^{2^n}},$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}<1-\frac{1}{2^{2^n}}.$$

综上可知,命题成立.

【例9】 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$,$a_{n+1}=a_n^2-na_n+\lambda$($n\in\mathbf{N}^*$,$\lambda$ 为实数).

(1)若 $a_n\geqslant 2n$ 恒成立,求 λ 的取值范围;

(2)若 $\lambda=-2$,求证:

$$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots+\frac{1}{a_n-2}<2.$$

解 (1)当 $n=2$ 时,由 $a_2=6+\lambda\geqslant 2\times 2$ 得 $\lambda\geqslant -2$,即 $a_n\geqslant 2n$ 时,$\lambda\geqslant -2$.

下面证明当 $\lambda\geqslant -2$ 时,$a_n\geqslant 2n$.

当 $n=2$ 时,$a_2\geqslant 2\times 2$ 成立;设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时,$a_k\geqslant 2k$ 成立;则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k^2-ka_k+\lambda=a_k(a_k-k)+\lambda\\&\geqslant 2k^2-2=2(k+1)(k-1)\geqslant 2(k+1),\end{aligned}$$

故对所有 $n\geqslant 2$,$a_n\geqslant 2n$ 成立.

当 $n=1$ 时,$a_1=3\geqslant 2\times 1$ 成立,故对所有 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n\geqslant 2n$ 成立.

综上,λ 的取值范围是 $\lambda\geqslant -2$.

(2)当 $\lambda=-2$ 时,

$$a_{n+1}-2=a_n^2-na_n-4\geqslant na_n-4\geqslant 2(a_n-2)>0\ (n\geqslant 2),$$

所以

$$\frac{1}{a_n-2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n-1}-2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{a_2-2}=\frac{1}{2^{n-1}}\ (n\geqslant 3),$$

$$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots+\frac{1}{a_n-2}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

故命题成立.

练习题

A组

一、选择题

1 $\sum\limits_{k=1}^{120}\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 的值为(　　).

(A) 无理数　　(B) 区间(10，11)的一个有理数

(C) 10　　(D) 11

2 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=2^n-1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=$(　　).

(A) $(2^n-1)^2$　　(B) $\dfrac{1}{3}(2^n-1)^2$

(C) 4^n-1　　(D) $\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

3 对于每个正整数n，抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴交于 A_n、B_n 两点，以$|A_nB_n|$表示该两点的距离，则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{2002}B_{2002}|$ 的值是(　　).

(A) $\dfrac{2001}{2002}$　　(B) $\dfrac{2002}{2003}$　　(C) $\dfrac{2001}{2003}$　　(D) $\dfrac{2003}{2001}$

4 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=$(　　).

(A) $\dfrac{n!-1}{(n+1)!}$　　(B) $\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

(C) $\dfrac{n!-(n+1)}{(n+1)!}$　　(D) $\dfrac{(n+1)!-n}{(n+1)!}$

5 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$ 的值为(　　).

(A) $\dfrac{n(n-1)}{2}$　　(B) $-\dfrac{n(n+1)}{2}$

(C) $(-1)^n\dfrac{n(n+1)}{2}$　　(D) $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

二、填空题

6 $1!+2\cdot2!+3\cdot3!+4\cdot4!+\cdots+n\cdot n!=$ ______.

7 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=$ ______.

8 已知 $a\in\mathbf{R}$，$a\neq-1$，则 $a-2a^2+3a^3-\cdots+(-1)^{n-1}na^n=$ ______.

9 $\dfrac{4}{1\times2\times3}+\dfrac{5}{2\times3\times4}+\cdots+\dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=$ ______.

10 数列$\{a_n\}$的相邻两项 a_n，a_{n+1} 是方程 $x^2-c_nx+\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ 的两个根，且 $a_1=2$，则无穷数列$\{c_n\}$ 的和为 $c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots=$ ______.

三、解答题

11 数列 x_1，x_2，…，x_{100}满足如下条件：对于 $k=1$，2，…，100，x_k 比其余 99 个数的和小 k，已知 $x_{50}=\frac{m}{n}$，m、n 是互质的正整数，求 $m+n$ 的值.

12 计算：$\arctan\frac{1}{1+1+1^2}+\arctan\frac{1}{1+2+2^2}+\cdots+\arctan\frac{1}{1+n+n^2}$.

13 求数列 $\frac{3}{1\cdot 3}$，$\frac{7}{2\cdot 4}\cdot 3$，…，$\frac{4n-1}{n(n+2)}\cdot 3^{n-1}$，… 的前 n 项和.

B 组

14 若 $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$，确定$[x]$的值，这里$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

15 设 $f(n)$ 是与$\sqrt[4]{n}$ 最接近的整数，求$\sum\limits_{k=1}^{2002}\frac{1}{f(k)}$.

16 给定正整数 $n\geqslant 3$. 令 S 是集合$\{2, 3, \cdots, n\}$的所有非空子集组成的集合. 对每一个 $S_i\in S$，$i=1$，2，…，$2^{n-1}-1$，令 p_i 是 S_i 中全部元素的乘积. 求 $p_1+p_2+\cdots+p_{(2^{n-1}-1)}$.

17 设x_1，x_2，…，x_n 为正整数，且没有一个数是另一个数的最左边的若干位构成的数(例如 12 是 12、125、12 405 的最左边的若干位构成的数). 证明：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}<3.$$

18 设 $a\in\mathbf{R}^+$，数列$\{x_n\}$满足如下条件：$x_1=a$，$x_{n+1}\geqslant(n+2)x_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx_k$. 证明：存在正整数 n，使得 $x_n>2008!$.

19 已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $4S_n=3a_n+2^{n+1}$($n\geqslant 0$，$n\in\mathbf{Z}$)

(1) 求 a_n 与 a_{n-1}之间的关系式；

(2) 求使得数列 a_0，a_1，a_2，…递增的所有 a_0 的取值.

第 11 讲　数列综合题

数列常常与其他知识结合在一起，例如函数、三角函数、不等式、解析几何等.

一、例题精讲

【例 1】 已知单调递增的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_3+a_4=28$，且 a_3+2 是 a_2、a_4 的等差中项.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=a_n\log_{\frac{1}{2}}a_n$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求使 $S_n+n\cdot 2^{n+1}>50$ 成立的正整数 n 的最小值.

解　（1）设该等比数列的公比为 $q(\neq 0)$，则由题设知

$$a_1q+a_1q^2+a_1q^3=28, \qquad ①$$

$$a_1q+a_1q^3=2(a_1q^2+2), \qquad ②$$

从①、②消去常数，得

$$6a_1q^3-15a_1q^2+6a_1q=0,$$

即
$$2q^2-5q+2=0,$$

解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$. 代入①得 $a_1=2$ 或 $a_1=32$. 而$\{a_n\}$是单调递增的，所以，$a_1=2$，$q=2$. 于是，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$.

（2）由(1)得，$b_n=a_n\log_{\frac{1}{2}}a_n=-n\cdot 2^n$，于是

$$\begin{aligned}S_n&=b_1+b_2+\cdots+b_n\\&=-(1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n),\end{aligned}$$

记　$T_n=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，则　③

$$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}, \qquad ④$$

③－④得

$$\begin{aligned}-T_n&=1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^n-n\cdot 2^{n+1}\\&=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1},\end{aligned}$$

即
$$S_n=-(n-1)2^{n+1}-2.$$

要使 $S_n+n\cdot 2^{n+1}>50$ 成立，即

$$-(n-1)\cdot 2^{n+1}-2+n\cdot 2^{n+1}>50,$$

$$2^n > 26,$$

而 $$2^4 = 16 < 26 < 32 = 2^5,$$

函数 $y = 2^x$ 是单调递增函数，所以，满足条件的正整数 n 的最小值为 5.

【例 2】 已知有穷数列$\{a_n\}$共有 $2k$ 项(整数 $k \geqslant 2$)，首项 $a_1 = 2$. 设该数列的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1} = (a-1)S_n + 2$ $(n = 1, 2, \cdots, 2k-1)$，其中常数 $a > 1$.

(1) 求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2) 若 $a = 2^{\frac{2}{2k-1}}$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n = \dfrac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$ $(n = 1, 2, \cdots, 2k)$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(3) 若(2)中的数列$\{b_n\}$满足不等式 $\left|b_1 - \dfrac{3}{2}\right| + \left|b_2 - \dfrac{3}{2}\right| + \cdots + \left|b_{2k-1} - \dfrac{3}{2}\right| + \left|b_{2k} - \dfrac{3}{2}\right| \leqslant 4$，求 k 的值.

解 (1) 当 $n = 1$ 时，$a_2 = 2a$，则 $\dfrac{a_2}{a_1} = a$；

当 $2 \leqslant n \leqslant 2k-1$ 时，

$$a_{n+1} = (a-1)S_n + 2,\ a_n = (a-1)S_{n-1} + 2,$$
$$a_{n+1} - a_n = (a-1)a_n,$$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$，即数列$\{a_n\}$是等比数列.

(2) 由(1)得 $a_n = 2a^{n-1}$，所以

$$a_1a_2\cdots a_n = 2^n a^{1+2+\cdots+(n-1)} = 2^n a^{\frac{(n-1)n}{2}} = 2^{n+\frac{n(n-1)}{2k-1}},$$

$$b_n = \frac{1}{n}\left[n + \frac{n(n-1)}{2k-1}\right] = \frac{n-1}{2k-1} + 1,\quad n = 1, 2, \cdots, 2k.$$

(3) 设 $b_n \leqslant \dfrac{3}{2}$，解得 $n \leqslant k + \dfrac{1}{2}$，又 n 是正整数，于是当 $n \leqslant k$ 时，$b_n < \dfrac{3}{2}$；当 $n \geqslant k+1$ 时，$b_n > \dfrac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\frac{3}{2} - b_1\right) + \left(\frac{3}{2} - b_2\right) + \cdots + \left(\frac{3}{2} - b_k\right) \\ &\quad + \left(b_{k+1} - \frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(b_{2k} - \frac{3}{2}\right) \\ &= (b_{k+1} + \cdots + b_{2k}) - (b_1 + \cdots + b_k)\end{aligned}$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{2}(k+2k-1)k}{2k-1}+k\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}(0+k-1)k}{2k-1}+k\right]$$

$$=\frac{k^2}{2k-1}.$$

由 $\frac{k^2}{2k-1}\leqslant 4$，得 $k^2-8k+4\leqslant 0$，即 $4-2\sqrt{3}\leqslant k\leqslant 4+2\sqrt{3}$.

又 $k\geqslant 2$，所以当 $k=2$、3、4、5、6、7 时，原不等式成立.

【例 3】 已知数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $x_1=x_2=1$，$y_1=y_2=2$，并且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\frac{x_n}{x_{n-1}}$，$\frac{y_{n+1}}{y_n}\geqslant\lambda\frac{y_n}{y_{n-1}}$（$\lambda$ 为非零参数，$n=2, 3, 4, \cdots$）.

(1) 若 x_1、x_3、x_5 成等比数列，求参数 λ 的值；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，证明：$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leqslant\frac{x_n}{y_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）；

(3) 当 $\lambda>1$ 时，证明：

$$\frac{x_1-y_1}{x_2-y_2}+\frac{x_2-y_2}{x_3-y_3}+\cdots+\frac{x_n-y_n}{x_{n+1}-y_{n+1}}<\frac{\lambda}{\lambda-1}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

解 (1) 由已知 $x_1=x_2=1$，且 $\frac{x_3}{x_2}=\lambda\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_3=\lambda$，$\frac{x_4}{x_3}=\lambda\frac{x_3}{x_2}\Rightarrow x_4=\lambda^3$，$\frac{x_5}{x_4}=\lambda\frac{x_4}{x_3}\Rightarrow x_5=\lambda^6$.

若 x_1、x_3、x_5 成等比数列，则 $x_3^2=x_1x_5$，即 $\lambda^2=\lambda^6$，而 $\lambda\neq 0$，解得 $\lambda=\pm 1$.

(2) 由已知，$\lambda>0$，$x_1=x_2=1$ 及 $y_1=y_2=2$，可得 $x_n>0$，$y_n>0$. 由不等式的性质，有

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}\geqslant\lambda\frac{y_n}{y_{n-1}}\geqslant\lambda^2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}}\geqslant\cdots\geqslant\lambda^{n-1}\frac{y_2}{y_1}=\lambda^{n-1}.$$

另一方面，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lambda^2\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}=\cdots=\lambda^{n-1}\frac{x_2}{x_1}=\lambda^{n-1},$$

因此 $$\frac{y_{n+1}}{y_n}\geqslant\lambda^{n-1}=\frac{x_{n+1}}{x_n}\quad(n\in\mathbf{N}^*),$$

故
$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \frac{x_n}{y_n} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(3) 当 $\lambda > 1$ 时，由(2)可知 $y_n > x_n \geqslant 1$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. 又由(2) $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \frac{x_n}{y_n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，则
$$\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{x_{n+1}} \geqslant \frac{y_n - x_n}{x_n},$$
从而
$$\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n} \geqslant \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$
因此
$$\begin{aligned} &\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} + \frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} + \cdots + \frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} \\ \leqslant\ &1 + \frac{1}{\lambda} + \cdots + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}{1 - \frac{1}{\lambda}} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

【例 4】 在 m $(m \geqslant 2)$ 个不同数的排列 $P_1P_2\cdots P_m$ 中，若 $1 \leqslant i < j \leqslant m$ 时，$P_i > P_j$（即前面某数大于后面某数），则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n，如排列 21 的逆序数 $a_1 = 1$，排列 4321 的逆序数 $a_3 = 6$.

(1) 求 a_4、a_5，并写出 a_n 的表达式；

(2) 令 $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}$，证明：$2n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 2n + 3$，$n = 1, 2, \cdots$.

解 (1) 由已知得 $a_4 = 10$，$a_5 = 15$，且
$$a_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) 因为
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \frac{n}{n+2} + \frac{n+2}{n} \\ &> 2\sqrt{\frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n}} = 2,\ n = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$
所以
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > 2n,$$

又因为

$$b_n=\frac{n}{n+2}+\frac{n+2}{n}=2+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2},\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

所以 $\quad b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$=2n+2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=2n+3-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}<2n+3,$$

综上可得 $\quad 2n<b_1+b_2+\cdots+b_n<2n+3,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$

【例 5】 设数列 $\{a_n\}(a_n\geqslant 0)$ 满足 $a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=9$，且 $S_n^2S_{n-2}=10S_{n-1}^3(n>3)$，其中 S_n 为数列$\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 $a_n(n\geqslant 3)$ 的表达式.

解 因为 $S_n^2S_{n-2}=10S_{n-1}^3$，所以

$$\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^2=10\,\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}.$$

令 $b_n=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\ (n\geqslant 3)$，则 $b_n=(10b_{n-1})^{\frac{1}{2}}$，因此

$$\begin{aligned}b_n&=10^{\frac{1}{2}}(10^{\frac{1}{2}}b_{n-2}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\\&=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}b_{n-2}^{\frac{1}{4}}\\&\cdots\\&=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}}}b_3^{\frac{1}{2^{n-3}}}\\&=10,\end{aligned}$$

那么 $S_n=10S_{n-1}$，且

$$a_n=9S_{n-1}=9a_{n-1}+9S_{n-2}=10a_{n-1},$$

而 $a_3=9$，所以，$a_n=9\times 10^{n-3}(n\geqslant 3)$.

【例 6】 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=\dfrac{1}{2}$，且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{2n+3}{2^{n+1}}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

解 (1) 因为 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{2n+3}{2^{n+1}}$，所以

$$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+2n+3,$$

令 $b_n=2^n a_n$,则 $b_1=1$,且 $b_{n+1}=b_n+2n+3$,

所以
$$\begin{aligned}b_n&=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\\&=(2n+1)+(2n-1)+\cdots+5+1\\&=\frac{1+(2n+1)}{2}(n+1)-3\\&=n^2+2n-2,\end{aligned}$$
$$a_n=\frac{n^2+2n-2}{2^n}.$$

(2) $$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k-2}{2^k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

令 $P_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$,则
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}P_n&=P_n-\frac{1}{2}P_n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{n^2}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

所以
$$\frac{1}{2}P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{n^2}{2^{n+1}},$$

因此
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}P_n&=\frac{1}{2}P_n-\frac{1}{4}P_n\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}},\end{aligned}$$

所以
$$P_n=6-\frac{4}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^n}.$$

用错位相减法可得
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n},$$

而 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$，因此

$$S_n = 6 - \frac{4}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n} + 2\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= 8 - \frac{n^2+6n+8}{2^n}.$$

【例 7】 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：$a_1 = 1$，$b_1 = 3$，$a_{n+1} = 2 + \frac{27a_n}{9a_n^2 + 4b_n^2}$，$b_{n+1} = \frac{27b_n}{9a_n^2 + 4b_n^2}$，$n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明：对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $\frac{(a_n-1)^2}{4} + \frac{b_n^2}{9} = 1$；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 (1) 用数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时，$a_1 = 1$，$b_1 = 3$，显然有 $\frac{(a_1-1)^2}{4} + \frac{b_1^2}{9} = 1$；

② 假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $\frac{(a_k-1)^2}{4} + \frac{b_k^2}{9} = 1$ 成立，则 $9a_k^2 + 4b_k^2 = 9(2a_k + 3)$，那么 $b_{k+1} = \frac{3b_k}{2a_k+3}$，$a_{k+1} - 1 = 1 + \frac{27a_k}{9(2a_k+3)} = \frac{5a_k+3}{2a_k+3}$，所以

$$\frac{(a_{k+1}-1)^2}{4} + \frac{b_{k+1}^2}{9} = \frac{(5a_k+3)^2}{4(2a_k+3)^2} + \frac{b_k^2}{(2a_k+3)^2}$$
$$= \frac{(5a_k+3)^2 + 4b_k^2}{4(2a_k+3)^2} = \frac{(5a_k+3)^2 + 9(2a_k+3-a_k^2)}{4(2a_k+3)^2}$$
$$= \frac{16a_k^2 + 48a_k + 36}{4(2a_k+3)^2} = 1,$$

所以，当 $n = k+1$ 时结论也成立.

综合①、②可知：对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $\frac{(a_n-1)^2}{4} + \frac{b_n^2}{9} = 1$.

(2) 由(1)知 $9a_n^2 + 4b_n^2 = 9(2a_n+3)$，所以

$$a_{n+1} = 2 + \frac{27a_n}{9a_n^2 + 4b_n^2} = 2 + \frac{27a_n}{9(2a_n+3)} = \frac{7a_n+6}{2a_n+3}.$$

易得 $a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{2a_n+3}$，$a_{n+1} + 1 = \frac{9(a_n+1)}{2a_n+3}$，所以 $\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a_n-3}{a_n+1}$.

又 $a_1=1$，递推可求得 $\dfrac{a_n-3}{a_n+1}=-\dfrac{1}{9^{n-1}}$，所以 $a_n=\dfrac{3\cdot 9^{n-1}-1}{9^{n-1}+1}$.

【例 8】 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足：$a_n^2+a_n-2S_n=0$，$c_n=a_nb_n$，

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_1=1$，$2b_n-b_{n-1}=0(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$，求：数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

(3) 是否存在整数 m、M，使得 $m<T_n<M$ 对任意正整数 n 恒成立，且 $M-m=4$? 说明理由.

解 (1) 令 $n>1$，$a_{n-1}^2+a_{n-1}-2S_{n-1}=0$，所以

$$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})+a_n-a_{n-1}-2a_n=0,$$
$$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0,$$

因此 $a_n-a_{n-1}=1$.

令 $n=1$，$a_1^2+a_1-2a_1=0$，所以 $a_1=1$，$a_n=1+(n-1)=n$.

(2) 因为 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，所以 $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，因此 $c_n=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

所以

$$T_n=1\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}T_n=1\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad ②$$

①-②得
$$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

所以
$$\begin{aligned}T_n&=4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=4-(2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

(3) 由(2)可得：$T_n<4$. 因为

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n&=4-(2n+6)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-4+(2n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n+1)>0.\end{aligned}$$

所以 $T_n \geqslant T_1 = 1$.

故存在整数 $M = 4$，$m = 0$ 满足题目要求.

练习题

A组

1 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，前 n 项和 S_n 满足条件 $\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{4n+2}{n+1}$，$n = 1$，$2$，$\cdots$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 记 $b_n = a_n p^{a_n}$ $(p > 0)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

2 设等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1 及公差 d 都为整数，前 n 项和为 S_n.

(1) 若 $a_{11} = 0$，$S_{14} = 98$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若 $a_1 \geqslant 6$，$a_{11} > 0$，$S_{14} \leqslant 77$，求所有可能的数列$\{a_n\}$的通项公式.

3 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 证明：$\frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

4 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，点$\left(n, \frac{S_n}{n}\right)$ $(n \in \mathbf{N}^*)$均在函数 $y = 3x - 2$ 的图象上.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{3}{a_n a_{n+1}}$，$T_n$ 是数列$\{b_n\}$的前 n 项和，求使得 $T_n < \frac{m}{20}$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m.

5 数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 8$，$a_4 = 2$ 且满足 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$，$n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{n(12 - a_n)}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，是否存在最大的整数 m，使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，均有 $T_n > \frac{m}{32}$ 成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.

6 数列$\{a_n\}$满足 $a_1 = \frac{1}{2}$，$a_{n+1} = a_n^2 + a_n$，$n \in \mathbf{N}^*$，$b_n = \frac{1}{1 + a_n}$，

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,\ P_n = b_1 b_2 \cdots b_n,$$

试求 $2P_n + S_n$ 的值.

7 已知 $a_1=2$，点 (a_n, a_{n+1}) 在函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象上，其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.

(1) 证明数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是等比数列；

(2) 设 $T_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$，求 T_n 及数列 $\{a_n\}$ 的通项；

(3) 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n+2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，并证明 $S_n+\dfrac{2}{3T_n-1}=1$.

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_2=3$，$2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

(2) 求使不等式 $\dfrac{a_n-m}{a_{n+1}-m}<\dfrac{2}{3}$ 成立的所有正整数 m、n 的值.

B 组

9 设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 满足：$b_n=a_n-a_{n+2}$，$c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}(n=1, 2, 3, \cdots)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是数列 $\{c_n\}$ 为等差数列且 $b_n\leqslant b_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots)$.

10 正数数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足条件：对一切正整数 n，有

$$x_{n+2}=x_n+x_{n+1}^2,\ y_{n+2}=y_n^2+y_{n+1},$$

且 x_1、x_2、y_1、y_2 都大于 1. 证明：存在正整数 n，使得 $x_n>y_n$.

11 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个整数数列，其中既有无穷多项是正整数，又有无穷多项是负整数. 如果对每一个正整数 n，整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同. 证明：每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

12 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$，数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=2$，$x_{n+1}=f(x_n)(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $b_n=\log_3\left(\dfrac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 成等比数列，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $c_n=-nb_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和公式 T_n.

第 12 讲　三角函数的概念与性质

一、知识要点和基本方法

考虑角 α 的终边上的点 $P(x, y)$，当 P 在终边上移动时，P 的两个坐标 x、y 和 r（这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$）之间的一些比值保持不变. 从此特性出发，我们引入了三角函数. 其中

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r};\ \tan\alpha=\frac{y}{x},\ \cot\alpha=\frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\ \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

从上述定义出发，我们不难把握三角函数的定义域和对应法则. 除此以外，还能得到如下的一些重要性质：

1. 正、余弦函数的有界性

对任意角 α，都有 $|\sin\alpha|\leqslant 1$，$|\cos\alpha|\leqslant 1$. 这一性质表明正、余弦函数都是有界函数. 解题中还经常用到 $1\pm\sin\alpha\geqslant 0$，$|A\sin\alpha+B\cos\alpha|\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$ 等性质.

2. 奇偶性与图象的对称性

利用函数奇偶性的定义，结合三角函数的概念与诱导公式可知：正弦函数、正切函数和余切函数都是奇函数，它们的图象都关于原点对称；余弦函数是偶函数，其图象关于 y 轴对称. 此外，函数 $f(x)=\sin x$ 的图象还关于直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 对称，函数 $f(x)=\cos x$ 的图象关于直线 $x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 对称.

3. 单调性

由三角函数的概念和性质可以写出三角函数的单调区间，例如：函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，这里 $k\in\mathbf{Z}$.

4. 周期性

周期性是三角函数具有而前面所学的二次函数、幂函数、指数函数和对数函数不具有的一个特殊性质.

一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个正常数 T，使得对定义域内的任意实数 x、$x+T$ 也是定义域内的实数，且 $f(x+T)=f(x)$，那么称 $f(x)$ 是一个周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

显然，若 $y=f(x)$ 是一个以 T 为周期的函数，则 $kT(k\in\mathbf{N}^*)$都是 $f(x)$的周期. 如果在周期函数 $f(x)$的所有周期中存在一个最小的正实数，那么我们称该数为 $f(x)$的最小正周期(注意，并非每个周期函数都有最小正周期，例如常数函数 $f(x)=c$，$x\in\mathbf{R}$ 是一个以任意正实数为周期的函数，它没有最小正周期).

三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$ 都是周期函数，并且它们都有最小正周期.

二、例题精讲

【例 1】 设 $a(a>0)$ 和 b 是常数，函数 $y=a\sin x+b$ 的最大值为 4，最小值为 2，求 a、b 的值.

解 由 $\sin x$ 的最大值和最小值分别为 1 和 -1，结合 $a>0$(此时函数 $f(t)=at+b$ 单调递增)，可知函数 $y=a\sin x+b$ 的最大值和最小值分别为 $a+b$ 和 $-a+b$，于是

$$\begin{cases}a+b=4,\\-a+b=2,\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=3$.

【例 2】 求函数 $y=(\sin x+2\sqrt{2})(\cos x+2\sqrt{2})$ 的值域.

解 注意到，$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$，令 $\sin x+\cos x=t$，则

$$\begin{aligned}y&=\sin x\cos x+2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+8\\&=\frac{t^2-1}{2}+2\sqrt{2}t+8\\&=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(t+2\sqrt{2})^2,\end{aligned}$$

结合 $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，知 $\sqrt{2}\leqslant t+2\sqrt{2}\leqslant 3\sqrt{2}$，所以，$\frac{9}{2}\leqslant y\leqslant\frac{25}{2}$.

所求函数的值域为$\left[\frac{9}{2},\frac{25}{2}\right]$.

【例 3】 设 a、x、y 都是实数，x，$y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，满足：$x^3+\sin x=2a$，$4y^3+\sin y\cos y=-a$. 求 $\cos(x+2y)$ 的值.

解 题中的条件变形为

$$x^3+\sin x=2a,$$

$$(2y)^3+\sin(2y)=-2a.$$

记 $f(t)=t^3+\sin t$，则 $f(x)=2a$，$f(2y)=-2a$. 注意到，函数 $f(t)$是一个奇函数，所以，$f(x)=-f(2y)=f(-2y)$.

另一方面，由于函数 $y=t^3$ 和 $y=\sin t$ 都是区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的增函数，所以，$f(t)$是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的增函数. 由 $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$知 $x,-2y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而 $f(x)=f(-2y)$，所以，$x=-2y$，即 $x+2y=0$，从而，$\cos(x+2y)=1$.

【例 4】 已知圆 $x^2+y^2=k^2$ 至少覆盖函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$ 的一个最大值点和一个最小值点. 求实数 k 的取值范围.

解 因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$ 是一个奇函数，其图象关于原点对称，而圆 $x^2+y^2=k^2$ 也关于原点对称，所以，只需圆 $x^2+y^2=k^2$ 盖住函数 $f(x)$的一个离原点最近的最值点.

取 x 使得 $\frac{\pi x}{k}=\frac{\pi}{2}$，可解得函数 $f(x)$的图象上离原点最近的一个最大值点 $P\left(\frac{k}{2},\sqrt{3}\right)$，圆 $x^2+y^2=k^2$ 盖住点 P 的充要条件是 P 到原点的距离不超过$|k|$，即

$$k^2\geqslant\left(\frac{k}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2,$$

所以，$|k|\geqslant 2$.

综上可知，k 的取值范围是 $|k|\geqslant 2$.

【例 5】 设函数 $f(x)$和 $g(x)$满足：对任意实数 x，都有

$$-\frac{\pi}{2}<f(x)+g(x)<\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2}<f(x)-g(x)<\frac{\pi}{2}.$$

证明：对任意实数 x，都有

$$\cos f(x)>\sin g(x).$$

证明 由条件，知对任意实数 x，都有

$$-\frac{\pi}{2}<f(x)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}.$$

情形一：$0\leqslant f(x)<\frac{\pi}{2}$，由第一个条件，得

$$-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}-f(x)\leqslant\frac{\pi}{2},$$

这样，利用函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是单调递增的，可知

$$\sin g(x)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-f(x)\right)=\cos f(x).$$

情形二：$-\frac{\pi}{2}<f(x)<0$，由第二个条件，得

$$-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}+f(x)<\frac{\pi}{2},$$

同上可得

$$\sin g(x)<\sin\left(\frac{\pi}{2}+f(x)\right)=\cos f(x).$$

命题获证.

说明 这里视 $f(x)$、$g(x)$为两个角，在理解上要容易些，作分段处理是为了恰当地运用三角函数的单调性.

此题的结论非常有用，例如：

由于对任意实数 x，都有 $|\cos x\pm\sin x|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，利用本题结论就有

$$\cos(\cos x)>\sin(\sin x),$$
$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

进一步，结合正、余弦函数的单调性，还可得到

$$\sin(\sin(\sin x))<\sin(\cos(\cos x))<\cos(\cos(\cos x))$$

等一系列的不等式.

【例 6】 证明：函数 $y=\sin(\cos x)$ 是周期函数.

讨论此函数是否存在最小正周期，证明你的结论.

证明 注意到对任意实数 x，都有 $\sin(\cos(x+2\pi))=\sin(\cos x)$，所以，函数

$y=\sin(\cos x)$ 是周期函数，2π 是它的一个周期.

下证：2π 是题给函数的最小正周期.

事实上，设存在实数 $T\in(0,2\pi)$，使得 T 为 $y=\sin(\cos x)$ 的一个周期，则对任意实数 x，都有

$$\sin(\cos(x+T))=\sin(\cos x).$$

上式中，令 $x=0$，得 $\sin(\cos T)=\sin 1$，注意到，当 $0<T<2\pi$ 时，有 $\cos T\in[-1,1)\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，利用正弦函数在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增，可得 $\sin(\cos T)<\sin 1$. 矛盾.

所以，2π 是函数 $y=\sin(\cos x)$ 的最小正周期.

说明 周期性是三角函数的一个重要性质，对一个周期函数而言，如果把握了它在一个周期内的函数性态就能在整体上了解该函数.

【例 7】 证明：函数 $f(x)=x+\cos x$ 不是一个周期函数.

证明 用反证法，若函数 $f(x)$ 是一个周期函数，$T(>0)$ 是 $f(x)$ 的一个周期. 则对任意实数 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，即

$$x+T+\cos(x+T)=x+\cos x,$$

令 $x=\frac{\pi}{2}-T$，则有 $\sin T=T$.

但是，根据正弦函数线可知：对任意 $x>0$，都有 $\sin x<x$，因此，$\sin T=T$ 不能成立.

从而，$f(x)=x+\cos x$ 不是一个周期函数.

练习题

A 组

1. 设锐角 α，β 满足：$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\frac{\alpha}{2}=k\cos\beta$. 求实数 k 的取值范围.

2. 设 $\alpha\in(0,\pi)$，关于 x 的方程

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x-\sin\alpha|=\cos 3\alpha$$

恰有一个实数根. 求 α 的所有可能值.

3. 已知对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都有 $\sin^2x+3m\cos x-6m-4<0$. 求实数 m 的取值范围.

4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为任意实数,证明:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots\cos\alpha_n+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_n\leqslant\sqrt{2}.$$

5 证明:对所有实数 x、y,都有 $\cos x^2+\cos y^2-\cos xy<3$.

6 已知函数 $f(x)=\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cos x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 求实数 a 的取值范围.

7 (1) 证明:关于 x 的方程 $\sin(\cos x)=x$ 和 $\cos(\sin x)=x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内都存在唯一的实数解.

(2) 设 $a, b, c\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,且 $\cos a=a$, $\sin(\cos b)=b$, $\cos(\sin c)=c$. 试比较 a、b、c 的大小.

8 实数 $a, b, c, d\in(0, \pi)$,满足: $\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin c}{\sin d}=\frac{\sin(a-c)}{\sin(b-d)}$.

证明: $a=b$ 且 $c=d$.

9 正实数 α, β, a, b 满足: $\alpha<\beta$, $\alpha+\beta<\pi$, $a+b<\pi$,且 $\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. 证明: $a<b$.

10 证明:函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 是一个有最小正周期的函数.

11 已知对任意 $x\in[0, 1]$,不等式

$$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$$

都成立. 求实数 θ 的取值范围.

B组

12 设 $A=\{t \mid 0<t<2\pi, t\in\mathbf{R}\}$, f 是 A 到平面点集的一个映射,对应法则为 $f: t\to(\sin t, 2\sin t\cos t)$. 记 $B=\{f(t) \mid t\in A\}$, $C(r)=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant r^2, r>0\}$. 求满足 $B\subseteq C(r)$ 的实数 r 的最小值.

13 对任意实数 b,设 $f(b)$ 为函数 $\left|\sin x+\frac{2}{3+\sin x}+b\right|$ 的最大值. 求函数 $f(b)$ 的最小值,并求 $f(b)$ 取最小值时 b 的值.

14 证明:函数 $f(x)=\sin(x^2)$ 不是一个周期函数.

15 设 a、b 为实数,满足:对任意实数 x,都有 $\cos(a\sin x)>\sin(b\cos x)$. 证明: $a^2+b^2<\frac{\pi^2}{4}$.

第 13 讲　三角恒等变形

一、知识要点和基本方法

三角恒等变形是重要的代数式变形，变形过程中，不仅需要熟练掌握各种三角公式及它们之间的内在联系，还需要有一种驾驭和处理复杂代数式的能力，更需要有化归的意识和统一的思想.

三角恒等变形涉及化简与求值、恒等式证明等内容，如何恰当地利用各三角公式显得尤为重要. 经常用到的都是我们应该熟悉的一些公式：同角三角函数关系式、两角和与差的三角函数关系式、倍半角公式、和差化积与积化和差公式等.

二、例题精讲

【例 1】 化简下列各式：

（1）$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{1-\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$；

（2）$\sin\alpha-\dfrac{1}{\sin\alpha}+\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\alpha+3}$；

（3）$\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

解　（1）直接通分，可得

$$\begin{aligned}原式&=\frac{[1+(\sin\theta-\cos\theta)]^2+[1-(\sin\theta+\cos\theta)]^2}{(1-\cos\theta)^2-\sin^2\theta}\\&=\frac{2+2[(\sin\theta-\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta)]+2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}\\&=\frac{4-4\cos\theta}{2\cos^2\theta-2\cos\theta}=-\frac{2}{\cos\theta}=-2\sec\theta.\end{aligned}$$

（2）利用 $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$，可知

$$\begin{aligned}原式&=\sin\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}+\sqrt{\sin^2\alpha+2+\frac{1}{\sin^2\alpha}}\\&=\sin\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}+\sqrt{\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2}\\&=\sin\alpha-\frac{1}{\sin\alpha}+\left|\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right|\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}2\sin\alpha,\ 2k\pi<\alpha<2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z};\\ -2\csc\alpha,\ 2k\pi-\pi<\alpha<2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

(3) 考虑倍角公式的运用.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{8\sin\theta\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta}{8\sin\theta}\\&=\frac{4\sin2\theta\cos2\theta\cos4\theta}{8\sin\theta}\\&=\frac{2\sin4\theta\cos4\theta}{8\sin\theta}=\frac{\sin8\theta}{8\sin\theta}.\end{aligned}$$

说明 在三角化简中恰当地选择三角公式对求解过程是非常重要的,选择恰当与否会直接关系到求解过程的繁简.在选择公式之前宜先观察所求三角式的结构,把握好式子的对称性、传递性、齐次性等特征后再处理.

第 3 小题的结论经常用到,例如:求 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ 的值时,令 $\theta=\frac{\pi}{7}$,就可得 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\dfrac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$.

【例 2】 设 $\alpha\in\mathbf{R}$,满足:$\sin\alpha+\sin^2\alpha=1$. 求下面各式的值:

(1) $\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

(2) $\cos^2\alpha+\cos^6\alpha$;

(3) $\cos^2\alpha+\cos^6\alpha+\cos^8\alpha$.

解 在某个条件下,求三角式的值时,往往采用化归的思想,将所求三角式往条件上去靠,这里我们用降次的手段来处理.

(1) 由条件,知 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\sin\alpha$,故

$$\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=\sin\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

(2) 由 $\sin\alpha+\sin^2\alpha=1$,可知 $\cos^2\alpha=\sin\alpha$,并且可解得 $\sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,注意到,$|\sin\alpha|\leqslant1$,故只能是 $\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,于是,

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^6\alpha&=\sin\alpha+\sin^3\alpha=\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)\\&=\sin\alpha(2-\sin\alpha)=2\sin\alpha-\sin^2\alpha=3\sin\alpha-1\\&=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}.\end{aligned}$$

(3) 不要直接利用(2)的结论,先试试降次处理.

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^6\alpha+\cos^8\alpha&=\sin\alpha+\sin^3\alpha+\sin^4\alpha\\&=\sin\alpha+\sin^2\alpha(\sin\alpha+\sin^2\alpha)\\&=\sin\alpha+\sin^2\alpha=1.\end{aligned}$$

【例3】 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{4}{5}$. 求$\cos\alpha\sin\beta$的值.

解 这个貌似简单的问题,在变形的处理上却需要一定的技巧,由条件解出$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\sin\beta$、$\cos\beta$的值来计算是不可取的.

为方便起见,将条件表述为

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{5}, & ①\\ \cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{4}{5}, & ②\end{cases}$$

$①^2+②^2$,得 $$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=1,$$

即 $$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2},$$

$②^2-①^2$,得 $\cos2\alpha-\cos2\beta+2(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)=\dfrac{7}{25}$,

将上式左边前两项和差化积,得

$$-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)-2\sin(\alpha-\beta)=\frac{7}{25},$$

结合 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}$,可得

$$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{7}{25},$$

所以 $$\begin{aligned}\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{7}{25}\right)\\&=-\frac{11}{100}.\end{aligned}$$

【例 4】 求下述乘积的值：

$$A = \cot 15^\circ \cot 25^\circ \cot 35^\circ \cot 85^\circ.$$

解 由诱导公式

$$\begin{aligned}A &= \tan 75^\circ \tan 65^\circ \tan 55^\circ \tan 5^\circ \\ &= \tan 75^\circ \cdot \tan 5^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}+\tan 5^\circ}{1-\sqrt{3}\tan 5^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3}-\tan 5^\circ}{1+\sqrt{3}\tan 5^\circ} \\ &= \tan 75^\circ \cdot \tan 5^\circ \cdot \frac{3-\tan^2 5^\circ}{1-3\tan^2 5^\circ} \\ &= \tan 75^\circ \cdot \tan 5^\circ \cdot \frac{3\cos^2 5^\circ-\sin^2 5^\circ}{\cos^2 5^\circ-3\sin^2 5^\circ} \\ &= \tan 75^\circ \cdot \tan 5^\circ \cdot \frac{2\cos 10^\circ+1}{2\cos 10^\circ-1} \\ &= \tan 75^\circ \cdot \frac{2\sin 5^\circ\cos 10^\circ+\sin 5^\circ}{2\cos 5^\circ\cos 10^\circ-\cos 5^\circ} \\ &= \tan 75^\circ \cdot \frac{\sin 15^\circ-\sin 5^\circ+\sin 5^\circ}{\cos 15^\circ+\cos 5^\circ-\cos 5^\circ} \\ &= \tan 75^\circ \tan 15^\circ \\ &= 1.\end{aligned}$$

说明 解决此题的关键在于计算 $\tan 5^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ$ 的值，事实上，仿照上述方法，可以得到关于正切函数的一个三倍角公式：

$$\tan 3\theta = \tan\theta \tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta).$$

【例 5】 求证下述恒等式：

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}, \qquad ①$$

其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

证明 式①左边三角函数内各角度成等差数列，抓住这一特点，可得出如下证法.

令 $\frac{\pi}{2n+1}=\alpha$，则用 $2\sin\alpha$ 乘以式①左边，可得

$$2\sin\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sin\alpha\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 4\alpha + \cdots + 2\sin\alpha\cos 2n\alpha \\
&= (\sin 3\alpha - \sin\alpha) + (\sin 5\alpha - \sin 3\alpha) + \cdots + \\
&\quad (\sin(2n+1)\alpha - \sin(2n-1)\alpha) \\
&= \sin(2n+1)\alpha - \sin\alpha \\
&= \sin\pi - \sin\alpha \\
&= -\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

由于 $\sin\alpha \neq 0$，上式两边同除以 $2\sin\alpha$，就可得要证明的等式.

说明 这里我们采用了数列求和中常见的“裂项求和”的处理方法，我们是从所求和式中各角成等差数列这个特点出发得到的思路. 特别地，$n=3$ 时，$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$. 这是常见的求值问题.

【例 6】 设 n 是一个正整数，证明：存在 $1, 2, \cdots, 2n+1$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$，使得

$$a_1\cos\frac{2\pi}{2n+1}+a_2\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+a_{2n+1}\cos\frac{2(2n+1)\pi}{2n+1}=0. \qquad ①$$

证明 利用 $\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$ 及例 5 的结论，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1}\cos\frac{2k\pi}{2n+1} &= 2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+\cos 2\pi \\
&= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0. \qquad ②
\end{aligned}
$$

寻找符合条件的 $1, 2, \cdots, 2n+1$ 的排列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 的灵感源于上述三角恒等式.

利用②式，可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2n+1}a_k\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}(a_k-n-1)\cos\frac{2k\pi}{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k-n-1)\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_{2n+1-k}-n-1)\cos\frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}+(a_{2n+1}-n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((a_k-n-1)\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+(a_{2n+1-k}-n-1)\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)+(a_{2n+1}-n-1).
\end{aligned}
$$

最后一式用到 $\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$.

现在如果存在 $1, 2, \cdots, 2n+1$ 的排列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 使得对 $1\leqslant k\leqslant n$，都

有$a_k-n-1=-(a_{2n+1-k}-n-1)$,且$a_{2n+1}-n-1=0$,那么满足条件的排列就找到了.而这是容易满足的,例如取$a_1=1$, $a_2=2$, …, $a_n=n$; $a_{n+1}=n+2$, …, $a_{2n}=2n+1$,而$a_{2n+1}=n+1$即可.

所以,满足条件的排列存在,命题获证.

说明 这个构造的出发点是基于首尾相加的思想,由于去掉①左边最后一项后,首尾对称位置上只有系数不同,如何才能将系数"抵消"呢?恒等式②架起了桥梁.

练习题

A组

1 化简下列各式:

(1) $\dfrac{(\tan\alpha+\cot\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{1/(1+\tan^2\alpha)+1/(1+\cot^2\alpha)}$;

(2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$;

(3) $\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)$.

2 计算下列各式的值:

(1) $\dfrac{1}{2}\csc 10^\circ-2\sin 70^\circ$;

(2) $\sin 20^\circ\cos^2 25^\circ-\sin 20^\circ\sin^2 25^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin^2 20^\circ$;

(3) $\dfrac{\sin 7^\circ+\sin 8^\circ\cos 15^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 8^\circ\sin 15^\circ}$;

(4) $(1+\cot 46^\circ)(1+\cot 47^\circ)\cdots(1+\cot 89^\circ)$.

3 已知$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,求$\sin^3\theta-\cos^3\theta$的值.

4 锐角α满足:$\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}$,求$\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$的值.

5 设α、β都是锐角,且$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$, $\cos(2\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$,求$\cos\alpha$的值.

6 实数α、β、γ满足$\beta-\alpha=\gamma-\beta=\dfrac{\pi}{3}$,求$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$的值.

7 设α为锐角,且$\tan\alpha=\tan(\alpha+10^\circ)\tan(\alpha+20^\circ)\tan(\alpha+30^\circ)$.求$\alpha$的所有可能值.

8 在$\triangle ABC$中,分别求解下述问题:

(1) 已知$\sin A$、$\sin B$、$\sin C$成等差数列.证明:$\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{C}{2}=3$;

(2) 已知 $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$. 证明:$\triangle ABC$ 为直角三角形;

(3) 已知 $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$. 证明:$\triangle ABC$ 中有一个内角等于$\dfrac{\pi}{3}$.

9 在$\triangle ABC$ 中,证明下述恒等式:

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}$;

(3) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$;

(4) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$;

(5) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$;

(6) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$;

(7) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$.

B 组

10 设 $\alpha\in\mathbf{R}$. 证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有

$$\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+\cdots+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right).$$

11 设 $\alpha\in\mathbf{R}$. 证明:

(1) $\tan 2\alpha+\dfrac{1}{2}\tan\alpha=\dfrac{1}{2}\cot\alpha-2\cot 4\alpha$;

(2) 对任意正偶数 n,都有

$$\tan\alpha+2\tan 2\alpha+\cdots+2^{n-1}\tan(2^{n-1}\alpha)=\cot\alpha-2^n\cot(2^n\alpha).$$

12 记$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c,p 为其半周长. 证明:$(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=2p$.

13 设 A、B、C 是一个三角形的三个内角,实数 x 满足:

$$\cos^3 x+\cos(x+A)\cos(x+B)\cos(x+C)=0.$$

求证:(1) $\tan x=\cot A+\cot B+\cot C$;

(2) $\sec^2 x=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$.

14 设 $n\in\mathbf{N}^*$,求乘积 $\prod\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\left(4\sin^2\dfrac{k\pi}{2^n}-3\right)$ 的值.

第14讲　三角不等式

一、知识要点和基本方法

在处理与三角函数有关的不等式问题的过程中，经常需要将三角函数的性质恰当地融合到证明不等式的一般方法中去.

在求解三角不等式问题时，我们要善于利用三角公式进行变形，善于利用三角函数的有界性和单调性. 在处理与三角形有关的三角不等式时，有时还需用到正弦定理、余弦定理以及边和角对应的不等量关系.

另外，下面的不等式也是与三角函数有关的一个重要不等式，经常在解题中用到.

当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，有 $\sin x<x<\tan x$，此不等式可利用三角函数线予以证明.

二、例题精讲

【例 1】 已知$\triangle ABC$是一个锐角三角形. 证明：

$$\tan A+\tan B+\tan C>\cot A+\cot B+\cot C.$$

证明 利用正切函数在区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增来处理.

由条件，可知 $0<C=\pi-(A+B)<\dfrac{\pi}{2}$，从而，$A+B>\dfrac{\pi}{2}$，于是 $0<\dfrac{\pi}{2}-B<A<\dfrac{\pi}{2}$，所以，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)<\tan A,$$

即 $\tan A>\cot B$.

同理可证：$\tan B>\cot C$，$\tan C>\cot A$.

将所得三个不等式相加，就可知命题成立.

【例 2】 设 θ 为锐角，试比较$\dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}$与 $\tan\theta$ 的大小.

解 作差进行比较.

$$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}-\tan\theta=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)-\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos\theta(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)}.$$

由于 θ 为锐角,故 $\cos\theta(1-\cos\theta)>0$. 又当 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)>\sin\theta$; 当 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\theta<\sin\theta$; 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\theta=\sin\theta$. 所以,本题的结论是:

当 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}>\tan\theta$; 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\tan\theta$; 当 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}<\tan\theta$.

说明 此题所比较的两个数都是正数,因此,也可采取作商的方法处理.

【例 3】 实数 α、β 满足 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, γ、δ 为满足如下条件的实数:

(1) $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, 且 $2\tan\gamma=\tan\alpha+\tan\beta$;

(2) $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, 且 $2\sec\delta=\sec\alpha+\sec\beta$.

求证: $\gamma<\delta$.

证明 将条件(1)中的式子两边平方,得

$$4\tan^2\gamma=\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta.$$

利用同角三角函数关系式,可知

$$\begin{aligned}4\sec^2\gamma&=\sec^2\alpha+2(1+\tan\alpha\tan\beta)+\sec^2\beta\\&=\sec^2\alpha+\frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+\sec^2\beta\\&=\sec^2\alpha+\frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}\cos(\beta-\alpha)+\sec^2\beta\\&<\sec^2\alpha+2\sec\alpha\sec\beta+\sec^2\beta.\end{aligned}$$

上述不等式用到了 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$, 及 $\cos(\beta-\alpha)<1$, 而这三个式子由条件易得.

上述讨论表明 $2\sec\gamma<\sec\alpha+\sec\beta=2\sec\delta$, 于是 $\cos\gamma>\cos\delta$, 结合余弦

函数在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上是单调递减的，所以$\gamma<\delta$.

【例 4】 已知x，y都是锐角，且$\tan x=3\tan y$. 证明：$x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$.

证明 由x，y都是锐角，可知$\tan x=3\tan y>\tan y$，从而$x-y>0$. 进一步有

$$\begin{aligned}\tan(x-y)&=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{2\tan y}{1+3\tan^2 y}\\&\leqslant\frac{2\tan y}{2\sqrt{3}\tan y}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

所以，$x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$.

说明 其中$1+3\tan^2 y\geqslant 2\sqrt{3}\tan y$是由均值不等式得到，在处理三角不等式问题时，常常会用到一些著名的不等式，例如：均值不等式、柯西不等式等.

【例 5】 设A、B、C是$\triangle ABC$的三个内角. 求证：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

证明 注意到$\sin\frac{A}{2}>0$，$\sin\frac{B}{2}>0$，$\sin\frac{C}{2}>0$，所以

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}&=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B+C}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{A}{2}+1-\sin\frac{A}{2}}{2}\right]^2\\&=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

从而，原不等式成立.

说明 上述证明中,用到了如下两个基本事实:(1)$\cos\dfrac{B-C}{2}\leqslant 1$;(2)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,有 $x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$. 前者是利用了三角函数的有界性,后者由均值不等式可得.

这里将 $\cos\dfrac{B-C}{2}$ 放大至 1 的处理手法在与三角函数有关的不等式中经常用到.

【例 6】 设 α, β 都是锐角. 证明:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

证明 此不等式在 $\alpha=\beta\left(=\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时取到等号,这引导我们对左边作如下放缩.

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\\&\leqslant 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos(\alpha+\beta))\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2-2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\\&=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\&\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

所以,命题成立.

【例 7】 设 $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 2$. 证明:

(1) $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;

(2) $\sin\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}$.

证明 解决此题需要用到：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，有 $\sin x<x<\tan x$.

(1) 记 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，那么

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow \sin\alpha>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\&\Leftrightarrow (n+1)\sin^2\alpha>1\\&\Leftrightarrow n\sin^2\alpha>\cos^2\alpha\\&\Leftrightarrow \tan^2\alpha>\frac{1}{n}\\&\Leftrightarrow \tan\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

注意到，$n\geqslant 2$ 时，有 $0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以，$\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 成立，从而(1)获证.

(2) 与(1)类似，仍记 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha<\frac{2}{\sqrt{n+1}}\\&\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha<\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\&\Leftrightarrow (n+1)\sin^2\alpha\cos^2\alpha<1\\&\Leftrightarrow (n+1)\sin^2\alpha<\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha,\end{aligned}$$

为证上式成立，只需证明：$n\sin^2\alpha<1$(因为 $\sin\alpha<\tan\alpha$)，这等价于 $\sin\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，即 $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，显然成立. 从而(2)获证.

说明 利用递推思想结合本题的结论，我们可得

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\underbrace{\sin\ \sin\ \cdots\ \sin}_{n\text{个}}\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2}{\sqrt{n+8}}.$$

特别地，当 $n=2014$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{2016}}<\underbrace{\sin\ \sin\ \cdots\ \sin}_{2014\text{个}}\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2}{\sqrt{2022}}.$$

如果让你直接证明此不等式,你是否会束手无策? 请记住:难题源于简单结论.

【例 8】 已知实数 x、y、z 满足 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$, 证明:

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

证明 利用三角公式,可将不等式转为证明

$$\frac{\pi}{4}+\sin x\cos y+\sin y\cos z>\sin x\cos x+\sin y\cos y+\sin z\cos z,$$

即证明

$$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z. \qquad ①$$

注意到式①右边是图 14 - 1 所示单位圆中三个阴影部分矩形的面积之和,而$\frac{\pi}{4}$为此单位圆在第一象限这部分的面积,所以式①成立.

综上所述,原不等式成立.

说明 三角问题一般都有其几何背景,许多平几问题可以用三角方法处理,反过来,利用几何性质来解三角问题也是正常的思路,这里通过构造几何图形来处理三角不等式问题的方法值得关注.

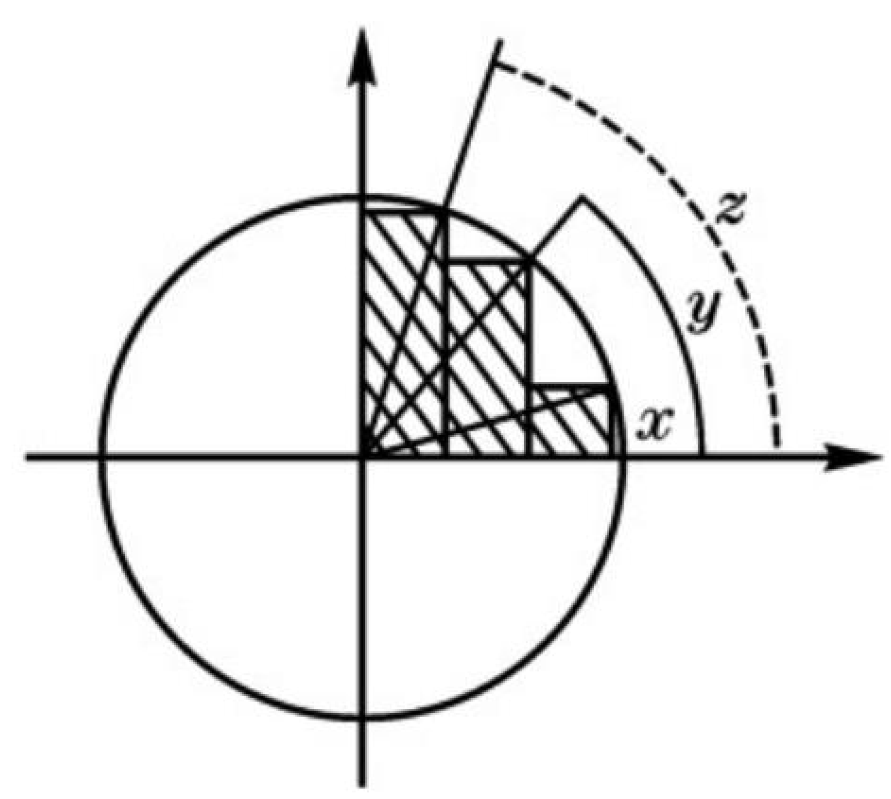


图 14 - 1

练习题

A 组

1 设 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 函数 $f(x)=\log_{\sin\theta}x$. 试比较 $f\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)$ 与 $f\left(\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$的大小.

2 设 α、β 是 $\triangle ABC$ 的内角中的两个锐角,函数 $f(x)=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^x+\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^x$ 满足:对任意 $x>0$, 都有 $f(x)<2$. 证明:$\triangle ABC$ 的第三个内角也是锐角.

3 设 α、β 都是锐角,且 $\sin^2\alpha=\cos(\alpha-\beta)$. 比较 α 与 β 的大小.

4 证明:对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\leqslant\cos(\sin x)-\sin(\cos x)\leqslant 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

5 在$\triangle ABC$中，证明如下不等式成立：

(1) $\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}$；

(2) $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$；

(3) $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6 在锐角$\triangle ABC$中，证明：

(1) $1 + \cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C$；

(2) 对任意$n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C > 3 + \frac{3n}{2}.$$

7 已知对任意实数x，都有

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x \geqslant 0.$$

证明：$A^2 + B^2 \leqslant 1$，$a^2 + b^2 \leqslant 2$.

8 设A、B、C都是锐角，证明：

$$\frac{\sin A\sin(A-B)\sin(A-C)}{\sin(B+C)} + \frac{\sin B\sin(B-A)\sin(B-C)}{\sin(C+A)} + \frac{\sin C\sin(C-A)\sin(C-B)}{\sin(A+B)} \geqslant 0.$$

9 设A，B，C是一个三角形的三个内角. 证明：

$$\cos^2\frac{A-B}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{C-A}{2} \geqslant \left(8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^3.$$

B组

10 在$\triangle ABC$中，a、b、c分别表示角A、B、C所对边的长度，已知$\angle C \geqslant 60°$. 证明：

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 4 + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

11 已知x、y、z为实数，A、B、C是$\triangle ABC$的三个内角. 证明：

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C.$$

12 求所有实数α的值，使得数列

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \cdots, \cos 2^{n} x, \cdots$$

中每一项都为负数.

13 两个实数数列 x_1, x_2, …和 y_1, y_2, …满足 $x_1=y_1=\sqrt{3}$,

$$x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2}, y_{n+1}=\frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}, n=1, 2, \cdots.$$

证明:当 $n>1$ 时,均有 $2<x_n y_n<3$.

14 设 $0<x$, $y<\frac{\pi}{2}$. 证明:

$$\frac{x\csc x+y\csc y}{2}<\sec\frac{x+y}{2}.$$

15 设 $n\in\mathbf{N}^*$, $\theta\in\mathbf{R}$. 证明:

$$|\sin\theta\sin 2\theta\cdots\sin 2^n\theta|\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

第 15 讲　三角函数的最大值和最小值问题

一、知识要点和基本方法

相对于第 7 讲中涉及的一些函数最值问题而言，三角函数的最值问题有其特殊性，这是由三角函数的单调性、周期性和有界性所决定的.

函数最值往往需要包含两个方面：一方面是一个不等式证明，另一方面要说明所证明的上界或下界是可以取到的. 三角函数的最值也不例外，并且在求等号成立的条件时，还需结合周期性来处理.

从众多的三角关系中，寻找到恰当的变形，将问题化归至最简单、本质的式子是处理三角最值问题中的基本方法.

二、例题精讲

【例 1】 设 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，求 $f(x)=\sin^2 x\cos x$ 的最大值.

解　对乘积式求最大值的一个思路是设法让所求的乘积中各项之和为常数，然后，去利用均值不等式.

注意到

$$\begin{aligned}f(x)^2&=\sin^4 x\cos^2 x=\frac{1}{2}(\sin^2 x)(\sin^2 x)(2\cos^2 x)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x+\sin^2 x+2\cos^2 x}{3}\right)^3\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27}=\frac{4}{27},\end{aligned}$$

故 $f(x)\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 等号当 $\sin^2 x=2\cos^2 x$，即 $\tan x=\sqrt{2}$ 时可以取到.

所以，$f(x)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

【例 2】 设 A、B、C 是一个三角形的三个内角. 求 $\cos A(\sin B+\sin C)$ 的最小值.

解　注意到，若 A 不是钝角，则 $\cos A(\sin B+\sin C)\geqslant 0$，因此，为求该式的最小值，我们可设 A 为钝角. 这时 $\cos A<0$，于是

$$
\begin{aligned}
\cos A(\sin B+\sin C) &= 2\cos A\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&\geqslant 2\cos A\sin\frac{B+C}{2} = 2\cos A\cos\frac{A}{2} \\
&= -2\left(\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2} \\
&= -2\sqrt{\left(\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\right)^2\cos^2\frac{A}{2}} \\
&= -\sqrt{\left(\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(4\cos^2\frac{A}{2}\right)} \\
&\geqslant -\sqrt{\left[\frac{\left(\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\right)\times 2+4\cos^2\frac{A}{2}}{3}\right]^3} \\
&= -\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2\sqrt{6}}{9},
\end{aligned}
$$

等号在 $B=C$，$\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}=4\cos^2\frac{A}{2}$ 且 A 为钝角时取到，即 $B=C$，A 为满足 $\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 的钝角(注意，利用余弦函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减，可知 $\frac{A}{2}>\frac{\pi}{4}$，所得角 A 确实是钝角)时取到.

所以，$\cos A(\sin B+\sin C)$ 的最小值为 $-\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

说明 这里再次用到将 $\cos\frac{B-C}{2}$ 放大到 1 的技巧. 此外，式子 $\cos A(\sin B+\sin C)\leqslant 2$(因为 $\cos A\leqslant 1$，$\sin B+\sin C\leqslant 2$)，但等号不能成立$\left(\text{因为等号在 } A=0,\ B=C=\frac{\pi}{2} \text{ 时才能取到}\right)$. 所以，$\cos A(\sin B+\sin C)$ 虽然有上界，但没有最大值.

【例 3】 设 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. 求函数 $\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)$ 的最大值.

解 利用两角和与差的三角函数关系式知

$$\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)=3\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

视 α 为常数，利用 $A\cos\beta+B\sin\beta\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$，可知

$$3\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\leqslant\sqrt{(3\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}=\sqrt{8\sin^2\alpha+1},$$

结合 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，知 $\sqrt{8\sin^2\alpha+1}\leqslant\sqrt{5}$，所以

$$\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\leqslant\sqrt{5},$$

等号可以在 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\arctan\frac{1}{3}$ 时取到，因此，所求的最大值为$\sqrt{5}$.

说明 如果视 β 为常数，可得 $3\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\leqslant\sqrt{(3\cos\beta)^2+\sin^2\beta}=\sqrt{8\cos^2\beta+1}\leqslant\sqrt{8+1}=3$，这时得到的上界要求 $\beta=0$，$\sin\alpha=1$ 才能取到，当 α，$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时是取不到的. 因此，在处理最值问题时，所求出的界能否达到是非常关键的，这要求在作不等式估计时有一定的前瞻性.

【例 4】 设 α、β 都是锐角，求代数式

$$A=\frac{\left(1-\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

的最大值.

解 令 $t=\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$，则由 α、β 都是锐角可知 $0<t<1$.

注意到，

$$\begin{aligned}\cot\alpha+\cot\beta&=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{2\tan\frac{\beta}{2}}\\&=\frac{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)}{2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}},\end{aligned}$$

所以

$$A=\frac{\left(1-\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\left(1-\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\left(1-\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)}{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)}$$

$$\leqslant\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\left(1-\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)}{2\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\left(1+\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}\right)}$$

$$=\frac{t(1-t)}{1+t}.$$

下面先求 $f(t)=\frac{t(1-t)}{1+t}$ 在 $0<t<1$ 上的最大值,作如下变形:

$$f(t)=\frac{t(1-t)}{1+t}=\left(1-\frac{1}{1+t}\right)(1-t)=1-t+\frac{t-1}{1+t}$$

$$=2-t-\frac{2}{1+t}=3-\left[(1+t)+\frac{2}{1+t}\right]$$

$$\leqslant 3-2\sqrt{(1+t)\cdot\frac{2}{1+t}}=3-2\sqrt{2}.$$

等号在 $1+t=\frac{2}{1+t}$ 时取到,故 $t=\sqrt{2}-1$ ($\in(0,1)$) 时,$f(t)$可取最大值 $3-2\sqrt{2}$.

回到原题,可知 $A\leqslant 3-2\sqrt{2}$,等号在 $\alpha=\beta$,且 $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$ 时可以取到.所以,代数式 A 的最大值为 $3-2\sqrt{2}$.

说明 此题的最大值不容易猜到,但在恰当变形后却容易变为有理式去处理,最后变为求单变量函数的最值.这种化归思想在涉及多个变量时经常被用到.

【例 5】 已知关于实数 x 的函数

$$f(x)=(\sin x+4\sin\theta+4)^2+(\cos x-5\cos\theta)^2$$

的最小值为 $g(\theta)$.求实数 θ 变化时,$g(\theta)$的最大值.

解 记 $u=5\cos\theta$, $v=-4(1+\sin\theta)$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=(\cos x-u)^2+(\sin x-v)^2\\&=1-2(u\cos x+v\sin x)+(u^2+v^2)\\&\geqslant 1-2\sqrt{u^2+v^2}+(u^2+v^2)=(\sqrt{u^2+v^2}-1)^2,\end{aligned}$$

这里用到, $u\cos x+v\sin x\leqslant\sqrt{u^2+v^2}$, 等号在 $\tan x=\dfrac{v}{u}$ 时取到$\Big($注意,若 $u=0$, 则取 $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right\}$, 使得 $v\sin x=|v|\Big)$. 所以, $f(x)$ 的最小值为 $(\sqrt{u^2+v^2}-1)^2$, 即

$$g(\theta)=(\sqrt{25\cos^2\theta+16(1+\sin\theta)^2}-1)^2,$$

为求 $g(\theta)$的最大值,我们先求 $h(\theta)=25\cos^2\theta+16(1+\sin\theta)^2$ 的取值范围.

因为

$$h(\theta)=16+32\sin\theta+16\sin^2\theta+25\cos^2\theta=41+32\sin\theta-9\sin^2\theta,$$

结合 $\sin\theta\in[-1,1]$ 及二次函数 $-9t^2+32t+41$ 在对称轴 $t=\dfrac{16}{9}$ 左侧时单调递增,所以

$$41+32\cdot(-1)-9\cdot(-1)^2\leqslant h(\theta)\leqslant 41+32\cdot 1-9\cdot 1^2,$$

即 $0\leqslant h(\theta)\leqslant 64$.

于是, $g(\theta)$的最大值为 $(8-1)^2=49$.

说明 问题有解析几何的背景, $f(x)$实质上是某两点之间距离的平方. 利用解析几何中的方法亦可处理本题.

【例 6】 设实数 a、b、c 满足 $abc+a+c=b$. 求代数式 $\dfrac{1}{1+a^2}-\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}$ 的最大值.

解 依题意,可知 $ac\neq 1$ (否则,由条件得 $a+c=0$, $ac=1$, 导致 a、c 都不是实数),于是 $b=\dfrac{a+c}{1-ac}$.

作三角代换 $a=\tan\alpha$, $c=\tan\beta$, $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha$, $\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $b=\tan(\alpha+\beta)$, 从而有

$$\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=\cos^2\alpha-\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos(2\alpha + 2\beta)) - \sin^2\beta$$
$$= 1 + \sin\beta\sin(2\alpha + \beta) - \sin^2\beta \leqslant 1 + |\sin\beta| - \sin^2\beta$$
$$= \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - |\sin\beta|\right)^2 \leqslant \frac{5}{4}.$$

等号在 $|\sin\beta| = \frac{1}{2}$，$\sin(2\alpha + \beta) = 1$ 或 -1 时可以取到.

因此，所求的最大值为 $\frac{5}{4}$.

说明 有些代数式的最值问题在本质上是三角函数的最值问题，其转化的纽带是作三角代换.

【例 7】 设 a，b 为实数，满足对任意 $x \in \mathbf{R}$，都有

$$a\cos 2x + b\cos x \geqslant -1. \qquad ①$$

求 $a + b$ 的最大值.

解 这个貌似简单的问题转化到关于 $\cos x$ 的二次函数去处理，在思路上是自然的，但求解过程有些痛苦.

换一个角度，在①中令 $x = \frac{2\pi}{3}$，可得 $a + b \leqslant 2$. 那么 $a + b$ 的最大值是否就是 2 呢?

事实上，令 $a = \frac{2}{3}$，$b = \frac{4}{3}$，则 $a + b = 2$，且

$$\begin{aligned} 3(a\cos 2x + b\cos x + 1) &= 2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x + 3 \\ &= 4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = (2\cos x + 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

此时，对任意 $x \in \mathbf{R}$，①都成立.

所以，$a + b$ 的最大值为 2.

练习题

A 组

1. 设 α 为锐角，求 $\tan\alpha + \cot\alpha + \sec\alpha + \csc\alpha$ 的最小值.
2. 设 α、β 都是锐角，求 $\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}$ 的最小值.
3. 已知 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，$\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. 求 $\cos^2\alpha\sin\beta + \frac{1}{\sin\beta}$ 的最小值.

4 实数 x、y 满足：$\sin x+\sin y=1$. 求 $\cos x+\cos y$ 的最大值和最小值.

5 设 a，$b\in\mathbf{R}$，满足：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $a\cos x+b\cos 3x\leqslant 1$. 求 b 的最大值.

6 实数 m 满足：对任意$\triangle ABC$的三个内角 A、B、C，都有 $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}-2(\cot A+\cot B+\cot C)\geqslant m$. 求 m 的最大值.

7 已知$\triangle ABC$的三个内角满足：

$$\sin A+\sin C=\sin B(\cos A+\cos C),$$

且$\triangle ABC$的面积等于 4. 求$\triangle ABC$的周长的最小值.

8 实数 x、y 满足：$4x^2-5xy+4y^2=19$. 求 x^2+y^2 的最大值和最小值.

9 求函数 $f(x)=\sqrt{3x+6}+\sqrt{8-x}$ 的最大值和最小值.

B 组

10 设 n 为给定正整数，实数 A_1，A_2，…，A_n 满足：$\tan A_1\tan A_2\cdots\tan A_n=1$. 求 $\sin A_1\sin A_2\cdots\sin A_n$ 的最大值.

11 设 A、B 为实数，记 $M(A,B)$为函数 $F(x)=|\cos 2x+\sin 2x+Ax+B|$ 在 $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值. 求 A、B 变化时，$M(A,B)$所能取到的最小值，并求取最小值时，A、B 的值.

12 在$\triangle ABC$中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$AB=1$，$BC=a$，$CA=b$，另一个三角形 DEF 中，$\angle F=90^\circ$，$EF=(a+1)\sin\frac{B}{2}$，$FD=(b+1)\sin\frac{A}{2}$. 求边 DE 长度的取值范围.

13 正实数 a、b、c 满足：$a+b+c=abc$. 求代数式 $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ 的最大值.

14 设 n 是一个给定的不小于 2 的正整数，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 求 $\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)$的最小值.

第 16 讲　反三角函数与三角方程

一、知识要点和基本方法

三角函数是周期函数，它不是一一对应，因此，在其定义域上并不存在反函数. 所谓反三角函数只是三角函数在其定义域内的某个单调区间上的反函数（实质上是对三角函数限制在某个区间后得到的函数的反函数），所以，在处理反三角函数的问题时，我们要对其值域予以足够的重视.

具体而言，反三角函数的基本概念与性质可以列表如下：

函数名称	定义域	值　域	单调性
$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	单调递增
$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$[0,\ \pi]$	单调递减
$y=\arctan x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	单调递增
$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ \pi)$	单调递减

此外，反正弦函数和反正切函数还是奇函数.

各反三角函数之间还成立如下的一些等式：

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1,\ 1]$;

(2) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2},\ x\in\mathbf{R}$;

(3) $\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$;

(4) $\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1,\ 1]$.

对其余三个反三角函数请读者给出类似于(3)、(4)的式子.

注意到反三角函数的值域是某个角的范围，因此解题中我们经常将反三角函数的值看作一个角来处理. 这为解三角方程带来便利.

处理三角方程的基本思想是“化归”，想方设法将方程转化为最基本的三角方程去求解.

下面列出最基本的三角方程的解的情况：

设 a 为给定的实数，

(1) 方程 $\sin x=a$ 在 $a\notin[-1,\ 1]$ 时无解；在 $a\in[-1,\ 1]$ 时，方程的解为

$x=k\pi+(-1)^k\arcsin a$, $k\in\mathbf{Z}$;

(2) 方程 $\cos x=a$ 也仅当 $a\in[-1,1]$ 时有解,解为 $x=2k\pi\pm\arccos a$, $k\in\mathbf{Z}$;

(3) 方程 $\tan x=a$ 和 $\cot x=a$ 在 $a\in\mathbf{R}$ 时都有解,解分别为 $x=k\pi+\arctan a$, $x=k\pi+\operatorname{arccot} a$, $k\in\mathbf{Z}$.

二、例题精讲

【例 1】 用反三角函数表示函数 $y=\cot x$, $x\in(\pi,2\pi)$ 的反函数.

解 记 $t=x-\pi$, 则 $t\in(0,\pi)$, 且 $\cot t=\cot x=y$, 于是,视 y 为 t 的函数,其反函数为 $t=\operatorname{arccot} y$, 即 $x-\pi=\operatorname{arccot} y$, 交换字母 x、y,即可求得函数 $y=\cot x$, $x\in(\pi,2\pi)$ 的反函数为

$$y=\pi+\operatorname{arccot} x,\ x\in\mathbf{R}.$$

说明 三角函数限制在其每一个单调区间上都有反函数,而反三角函数是三角函数限制在特定区间上的反函数,这两类反函数之间可以互相表出,常见的解决方法是利用诱导公式对自变量的范围作一个变换后处理.

【例 2】 求方程

$$\sin^3 x+\cos^5 x=1 \qquad ①$$

的所有实数解.

解 注意到,

$$\sin^3 x\leqslant|\sin x|^3\leqslant|\sin x|^2=\sin^2 x,$$
$$\cos^5 x\leqslant|\cos x|^5\leqslant|\cos x|^2=\cos^2 x,$$

于是, $\sin^3 x+\cos^5 x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 结合①式,可知 $\sin^3 x=\sin^2 x$ 且 $\cos^5 x=\cos^2 x$.

前者要求 $\sin x\in\{0,1\}$, 后者要求 $\cos x\in\{0,1\}$. 结合 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 得 $(\sin x,\cos x)=(1,0)$ 或 $(0,1)$,解为 $x=2k\pi$ 或 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

说明 利用不等式处理解方程问题是很常见的,这中间蕴含有最值问题,往往与最值取等号的条件有关. 事实上,当 m, $n\geqslant 2$, m, $n\in\mathbf{N}^*$ 时,方程 $\sin^m x+\cos^n x=1$ 都可用上述方法求解.

【例 3】 求下述方程的实数解:

$$\arccos\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\arcsin\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|+\operatorname{arccot}\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|=\pi.$$

解 方程中所给关于 x 的式子使我们容易联想到万能公式,因而,作三角变换就成为一件很自然的事情.

令 $x=\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则方程变形为

$$\arccos|\cos 2\alpha|+\arcsin|\sin 2\alpha|+\operatorname{arccot}|\cot 2\alpha|=\pi. \quad ①$$

如果 $|\tan\alpha|\geqslant 1$, 那么 $-\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$. 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant-\frac{\pi}{4}$, 则方程①化为 $\pi+2\alpha+\pi+2\alpha+\pi+2\alpha=\pi$, 即 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $x=-\sqrt{3}$; 类似地,若 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, 则可求出 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $x=\sqrt{3}$.

如果 $|\tan\alpha|<1$, 即 $-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$ 或 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. 若 $-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$, 那么方程①化为 $(-2\alpha)+(-2\alpha)+(-2\alpha)=\pi$, $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 类似地,若 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, 则 $2\alpha+2\alpha+2\alpha=\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

于是,原方程的解为 $x=\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

说明 这个与反三角函数相关的方程在作完三角代换后,为处理①式左边也需要用到不等式方法(当然,主要涉及反三角函数的值域范围),不等与相等之间的相互渗透正体现了数学中的一种和谐.

【例 4】 求所有的实数 α,使得

$$\{\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \sin 3\alpha\}=\{\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 3\alpha\}. \quad ①$$

解 由条件,可得

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha&=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha,\\ \sin 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos\alpha&=\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha,\\ \sin 2\alpha(1+2\cos\alpha)&=\cos 2\alpha(1+2\cos\alpha),\\ (\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)(1+2\cos\alpha)&=0,\end{aligned}$$

于是 $$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=0 \text{ 或 } 1+2\cos\alpha=0.$$

对方程 $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=0$ 两边除以 $\cos 2\alpha$(注意,这时 $\cos 2\alpha\neq 0$, 否则, $\sin 2\alpha=\pm 1$ 与方程不符),得 $\tan 2\alpha=1$, 解为 $\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$.

如果 $1+2\cos\alpha=0$，那么 $\cos\alpha=\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos 3\alpha=1$，这时 $\sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，与条件①不符.

最后，分别就 $k\equiv 0、1、2、3\pmod 4$，将 $\alpha=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}$ 代入①直接验证，可知①都成立.

所以，满足条件的 $\alpha=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

说明 此题从一个必要条件出发得到一个三角方程，求解后所得结果是必要的，其充分性需回代验证. 这里整体处理的思想应细细体会(考虑两个集合中各元素之和相等).

【例 5】 已知 $\arcsin x<\arccos x<\operatorname{arccot} x$，求实数 x 的取值范围.

解 由反三角函数的定义知 $x\in[-1,1]$，而在此定义域内 $y=\arcsin x$ 单调增，$y=\arccos x$ 单调减. 所以，$\arcsin x<\arccos x$ 的解集为 $x\in\left[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 这里用到 $\arcsin x=\arccos x$ 的解为 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Big($事实上，它可以这样得到：两边取正弦，得 $x=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}$，从而 $x\geqslant 0$，两边平方移项后即可得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$.

对另一个不等式：$\arccos x<\operatorname{arccot} x$，注意到，它们的值都属于$(0,\pi)$，而余切函数在$(0,\pi)$上单调递减，因此，两边取余切，得

$$\cot(\arccos x)>x,$$

即 $\dfrac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)}>x$，于是 $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}>x$，解得 $x\in(0,1)$.

综上可知，所求实数 x 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

说明 不等式 $\arcsin x<\arccos x$ 亦可通过两边取正弦来处理，但应先将 x 分为两个区间后再取正弦. 事实上，当 $x\in[-1,0]$ 时，$\arcsin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，而 $\arccos x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，故此时，$\arcsin x<\arccos x$ 成立；当 $x\in[0,1]$ 时，$\arcsin x$、$\arccos x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，正弦函数在此区间上单调增，因此，$\arcsin x<\arccos x$ 等价

于 $\sin(\arcsin x) < \sin(\arccos x)$，进而解得 $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

对涉及反三角函数的不等式两边取三角函数时，应讨论单调性，以保持不等式之间的等价性.

【例 6】 求所有的实常数 c，使得函数

$$f(x) = \arctan\frac{2-2x}{1+4x} + c$$

在区间 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 上为奇函数.

解 设 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 上为奇函数，则

$$f(0) = \arctan 2 + c = 0.$$

于是，$c = -\arctan 2$.

上述结果只表明，若满足条件的 c 存在，则 c 只能等于 $-\arctan 2$，并不表明 $c = -\arctan 2$ 时，$f(x)$ 为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 上的奇函数，这一点还需给出证明.

注意到，$x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 时，函数 $u(x) = \frac{2-2x}{1+4x} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{1+4x} - 1\right)$，故 $u(x) \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$，于是 $f(x) = \arctan u(x) - \arctan 2 \in \left(\arctan\frac{3}{4} - \arctan 2, \frac{\pi}{2} - \arctan 2\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

上述讨论表明，当 $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 时，$f(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，当然，$-f(-x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

为证明，对任意 $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$，均有 $f(-x) = -f(x)$ $\left(\text{即 } f(x) \text{ 为 } \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ 上的奇函数}\right)$，我们只需证明

$$\tan[-f(-x)] = \tan f(x). \quad ①$$

注意到，

$$\tan f(x)=\tan(\arctan u(x)-\arctan 2)$$
$$=\frac{u(x)-2}{1+2u(x)}=\frac{(2-2x)-2(1+4x)}{1+4x+2(2-2x)}=-2x;$$
$$\tan[-f(-x)]=\tan(\arctan 2-\arctan u(-x))$$
$$=\frac{2-u(-x)}{1+2u(-x)}=\frac{2(1-4x)-(2+2x)}{1-4x+2(2+2x)}$$
$$=-2x,$$

故①成立.

所以,当且仅当 $c=-\arctan 2$ 时,函数 $f(x)$ 为 $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ 上的奇函数.

【例 7】 设 n 是给定的不小于 3 的正整数,求关于 x 的方程的所有实数解

$$\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\cdots+\frac{1}{\cos(n-1)x\cos nx}=0. \qquad ①$$

解 对①式两边都乘以 $\sin x$,注意到,对 $2\leqslant k\leqslant n$,都有

$$\frac{\sin x}{\cos(k-1)x\cos kx}=\frac{\sin[kx-(k-1)x]}{\cos(k-1)x\cos kx}$$
$$=\frac{\sin kx\cos(k-1)x-\sin(k-1)x\cos kx}{\cos(k-1)x\cos kx}$$
$$=\tan kx-\tan(k-1)x,$$

于是,①变为

$$(\tan 2x-\tan x)+(\tan 3x-\tan 2x)+\cdots+(\tan nx-\tan(n-1)x)=0,$$

即可得: $\tan nx=\tan x$,其解为 $nx=m\pi+x$,即 $x=\frac{m\pi}{n-1}$, $m\in\mathbf{Z}$.

注意,这里应排除使得 $\cos x$, $\cdots$, $\cos nx$ 中有一个为零的解,并且还要排除由 $\sin x=0$ 引起的增根.由于 $\sin x=0$,导致对 $2\leqslant k\leqslant n$,都有 $\cos(k-1)x\cos kx=1$ 或者对 $2\leqslant k\leqslant n$,都有 $\cos(k-1)x\cos kx=-1$,这时都不是①的解,所以,①的所有解为

$$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{m\pi}{n-1},\ m\in\mathbf{Z},\ 并且\ \sin x\cos x\cos 2x\cdots\cos nx\neq 0\right\},$$

具体表述如下:

$\left\{x \middle| x=\dfrac{m\pi}{n-1}, m\in \mathbf{Z}\text{,并且不存在 } l\in\mathbf{Z} \text{ 及 } 1\leqslant k\leqslant n\text{,使得} x=\dfrac{2l\pi\pm\frac{\pi}{2}}{k} \text{ 或 } x=l\pi\right\}$.

说明 这里对①两边乘以 $\sin x$ 后进行裂项求和的处理对三角函数求和是一种特殊的技巧,它已经在前面几讲中多次用到.

【例 8】 求下述反三角式子的和:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}$$

$$+\cdots+\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)},$$

这里 n 为给定的正整数.

解 记所求和式为 $S(n)$,在处理和式中各项时,我们经常需要将每一项拆为两项之差,然后进行前后项抵消. 这是数列求和中裂项求和的思想.

事实上,设 $1\leqslant k\leqslant n$, k 为正整数,我们先证明

$$\arcsin\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}=\arcsin\frac{1}{k}-\arcsin\frac{1}{k+1}. \qquad ①$$

容易证明,上述式子两边都是锐角(这里,我们把反三角函数作为一个角度来处理),所以,只需证明上式两边的正弦值相同.

对式①两边分别取正弦,有

$$\sin\left[\arcsin\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}\right]=\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)};$$

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\arcsin\frac{1}{k}-\arcsin\frac{1}{k+1}\right)\\
=&\sin\left(\arcsin\frac{1}{k}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{k+1}\right)-\cos\left(\arcsin\frac{1}{k}\right)\sin\left(\arcsin\frac{1}{k+1}\right)\\
=&\frac{1}{k}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2}-\frac{1}{k+1}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\\
=&\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}}{k(k+1)}-\frac{\sqrt{k^2-1}}{(k+1)k}.
\end{aligned}$$

所以,式①成立.

利用式①的结果,可得

$$\begin{aligned}S(n)=&\left(\arcsin\frac{1}{1}-\arcsin\frac{1}{2}\right)+\left(\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)\\&+\left(\arcsin\frac{1}{3}-\arcsin\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1}\right)\\=&\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{n+1}\\=&\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{n+1}\\=&\arccos\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

从而,所求和式的值为 $\arccos\frac{1}{n+1}$.

说明 此题化简和式的思想是裂项后进行前后项抵消,从而达到简化的目的.但是,它套上了反三角的帽子,要猜出①式并不容易,需要对三角函数关系式和一般代数式变形非常熟悉.这些是数学基本功的重要组成部分.

练习题

A组

1 已知函数 $f(x)=2\arcsin(x-2)$ 的值域是 $\left[-\frac{\pi}{3},\pi\right]$.求此函数的定义域.

2 求方程的实数解:

$$\log_{1+\cos 2x}(\sin x+\sin 3x)=1.$$

3 求函数 $f(x)=\arcsin(1-x)+\arccos 2x$ 的值域.

4 一个正实数 x,将它分别视为角度和弧度,计算正弦值,所得的结果相同.求满足条件的最小的 x.

5 已知 $\arcsin(\sin\alpha+\sin\beta)+\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)=\frac{\pi}{2}$,求 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的值.

6 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足:对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(2-x)=f(x)$,且 $f\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)>f\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$.试判断 a、b 的符号.

7 函数 $f(x)$满足:对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$5f(\arctan x)+3f(-\arctan x)=\arctan x-\frac{\pi}{2}.$$

求 $f(x)$的表达式.

8 实数 α 满足：$\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha=0$,求 $\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin 4\alpha$ 的所有可能值.

9 设锐角 α 满足：$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.求 α 的值.

10 设 $x\in(0,\ 2\pi)$，且 $\cos 12x=5\sin 3x+9\tan^2 x+\cot^2 x$. 求 x 的值.

11 实数 x、y 满足：$\tan^2(x+y)+\cot^2(x+y)=1-2x-x^2$. 求 $|x-y|$ 的最小值.

12 求满足方程 $\left|\sin x-\dfrac{\sin x}{x}\right|+2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{\sin x}{x}=3$，并且满足 $x\in(0,\ \pi)$ 的实数 x.

B 组

13 证明：函数 $y=\arctan\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，并求其反函数.

14 设 $n\in\mathbf{N}^*$. 证明：

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\cdots+\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{n}{n+1}.$$

15 设 a 为正整数，关于 x 的方程

$$\cos^2\pi(a-x)-2\cos\pi(a-x)+\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right)+2=0$$

有实数解，求 a 的最小值.

16 已知 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 是 n 个给定的实数，函数 $f(x)=\cos(\alpha_1+x)+\dfrac{1}{2}\cos(\alpha_2+x)+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(\alpha_n+x)$. 证明：若实数 x_1、x_2 满足：$f(x_1)=f(x_2)=0$，则存在整数 m，使得 $x_2-x_1=m\pi$.

17 实数数列$\{a_n\}$定义如下：

$$a_1=t,\ a_{n+1}=4a_n(1-a_n),\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

问：对给定的正整数 n ($\geqslant 2$)，有多少个不同的实数值 t，使得 $a_n=0$?

18 求方程

$$\cos^2 x+\cos^2 2x-2\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{3}{4}$$

的所有实数解.

第 17 讲　正弦定理与余弦定理

一、知识要点和基本方法

三角函数是数学中的一个重要工具，被广泛应用在数学的各个分支. 中学阶段，主要在平面几何、复数和解析几何等内容中用到.

这一讲主要讨论三角在平面几何中的一些应用，常见思路是利用正弦定理和余弦定理将平面几何中一些涉及长度、面积等问题转为三角问题去求解. 这里正弦定理和余弦定理起到过渡与桥梁的作用.

二、例题精讲

【例 1】 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，$\angle A < 45^\circ$，D 为$\triangle ABC$ 内一点，满足：$\angle D = 4\angle A$，且 $BD = CD$. 点 E、F 分别是 C 关于 AB 和 B 关于 AC 的对称点. 证明：$AD \perp EF$.

证明　利用勾股定理的逆定理可知，要证 $AD \perp EF$，只需证明：$AE^2 - AF^2 = DE^2 - DF^2$.

由条件，E、C 关于 AB 对称，可知 $AE = AC$；同理 $AF = AB$. 所以，我们只需证明：

$$DE^2 - DF^2 = AC^2 - AB^2. \qquad ①$$

下面来计算①式左边的值.

由 E、C 关于 AB 对称，知 $BE = BC$，$\angle EBC = 2B$，而 $BD = DC$，$\angle D = 4A$，知 $\angle DBC = 90^\circ - 2A$，故 $\angle EBD = 2A + 2B - 90^\circ$（如图 17－1 所示）. 利用余弦定理，得

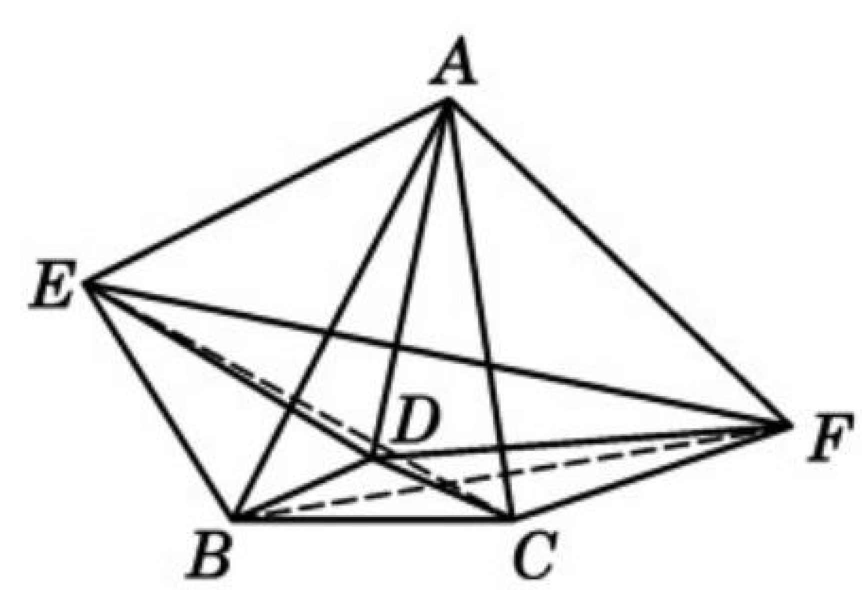


图 17－1

$$\begin{aligned} DE^2 &= BD^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE\cos\angle EBD \\ &= BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC\cos(2A + 2B - 90^\circ) \\ &= BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC\sin(2A + 2B), \end{aligned}$$

同理可得

$$DF^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC\sin(2A + 2C).$$

于是，结合 $BD = CD$，知

$$\begin{aligned} DE^2 - DF^2 &= 2BD \cdot BC(\sin 2(A + C) - \sin 2(A + B)) \\ &= 2BD \cdot BC(\sin 2C - \sin 2B), \end{aligned} \qquad ②$$

进一步,为方便起见,设$\triangle ABC$的外接圆半径等于1,则由正弦定理,知$BC=2\sin A$,又$BD=\frac{1}{2}BC\cdot\sec\angle DBC=\frac{\sin A}{\sin 2A}=\frac{1}{2\cos A}$,从而,由②得

$$\begin{aligned}DE^2-DF^2&=2\tan A(\sin 2C-\sin 2B)\\&=4\tan A\cos(C+B)\sin(C-B)\\&=-4\tan A\cos A\sin(C-B)\\&=-4\sin A\sin(C-B)\\&=-4\sin(C+B)\sin(C-B)\\&=-2(\cos 2B-\cos 2C)\\&=-2[(1-2\sin^2 B)-(1-2\sin^2 C)]\\&=-4(\sin^2 C-\sin^2 B)\\&=(2\sin B)^2-(2\sin C)^2\\&=AC^2-AB^2,\end{aligned}$$

所以,①成立.

命题获证.

说明 将问题代数化是处理几何问题的一个重要方法,过程中恰当地凸现出题中的几何性质是关键的.如果在三角方法介入几何解题时,不恰当地与几何定理结合,那么繁杂的计算有时会难以忍受.

【例2】 已知点P是$\triangle ABC$内一点,使得$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$.证明:

$$\cot\angle PAB=\cot A+\cot B+\cot C.$$

证明 满足题给条件的点称为布洛卡点,这样的点P在$\triangle ABC$为锐角三角形时是存在的,且在三角形内部,在$\triangle ABC$为钝角三角形时,点P在三角形外,而在$\triangle ABC$为直角三角形时,这样的点P不存在.此题描述的是布洛卡点的性质,给出了点P是布洛卡点的一个必要条件.

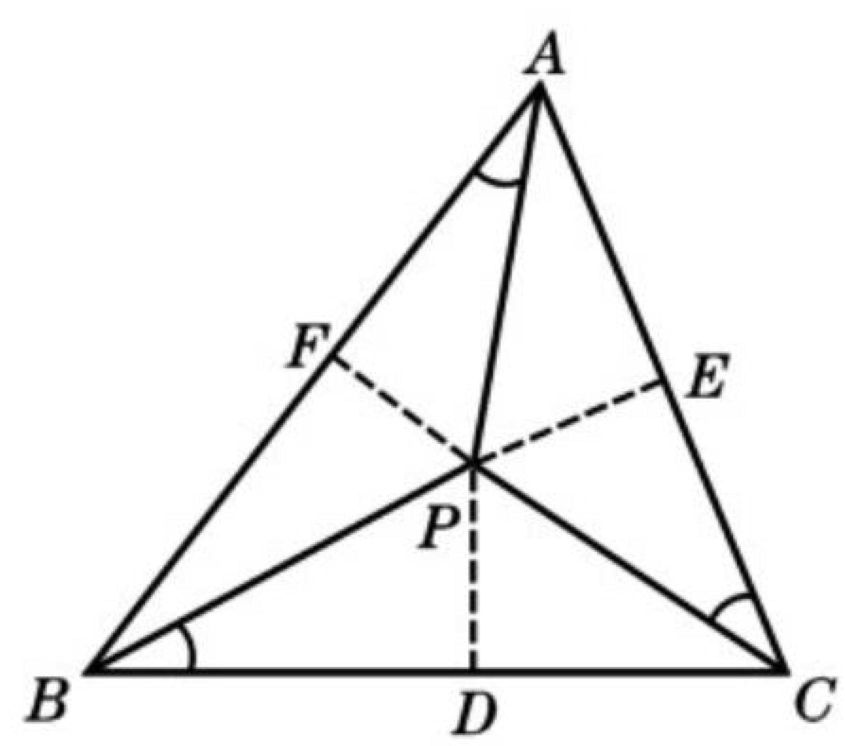


图 17-2

如图17-2所示,记$\angle PAB=\alpha$,过P作三边的垂线PD、PE、PF,点D、E、F为垂足,并记$PA=x$,$PB=y$,$PC=z$.

利用余弦定理,可知

$$\begin{cases}x^2=b^2+z^2-2bz\cos\alpha,\\y^2=c^2+x^2-2cx\cos\alpha,\\z^2=a^2+y^2-2ay\cos\alpha,\end{cases}$$

上述三式相加,就有

$$2\cos\alpha(bz+cx+ay)=a^2+b^2+c^2.$$

注意到,

$$x=\frac{PF}{\sin\alpha},\ y=\frac{PD}{\sin\alpha},\ z=\frac{PE}{\sin\alpha},$$

于是
$$2\cot\alpha(b\cdot PE+c\cdot PF+a\cdot PD)=a^2+b^2+c^2,$$

即
$$4\cot\alpha S_{\triangle ABC}=a^2+b^2+c^2.$$

结合 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$ 以及正弦定理,可得

$$\cot\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}\right).$$

利用 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ 等式子,上式可变形为

$$\begin{aligned}\cot\alpha&=\frac{1}{2}[(\cot C+\cot B)+(\cot A+\cot C)+(\cot B+\cot C)]\\&=\cot A+\cot B+\cot C.\end{aligned}$$

所以,原命题成立.

【例 3】 设 P 为$\triangle ABC$内一点,使得 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=30^\circ$. 证明:$\triangle ABC$是一个正三角形.

证明 如图 17-3 所示,记$\triangle ABC$的三边长 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,三个内角 $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$,由条件可知

$$\begin{aligned}\angle APB&=180^\circ-\angle ABP-\angle PAB=180^\circ-\angle ABP-\angle PBC\\&=180^\circ-\angle ABC=\gamma+\alpha.\end{aligned}$$

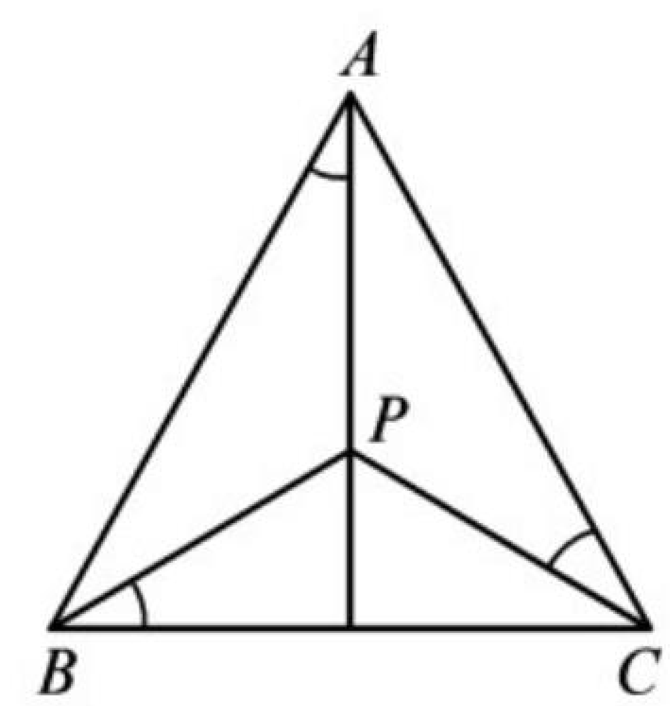


图 17-3

同理可证

$$\angle BPC=\alpha+\beta,\ \angle CPA=\beta+\gamma.$$

在$\triangle ABP$和$\triangle BCP$中,分别由正弦定理可得

$$BP=\frac{c\sin 30^\circ}{\sin(\gamma+\alpha)}=\frac{a\sin(\gamma-30^\circ)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

所以,我们有

$$\frac{1}{2}c\sin\gamma = a\sin(\gamma - 30^\circ)\sin\beta$$

再在$\triangle ABC$中用正弦定理，知

$$\frac{1}{2}\sin^2\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin(\gamma - 30^\circ) \Leftrightarrow \sin^2\gamma = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))\cos(120^\circ - \gamma).$$

注意到，条件中蕴含$\alpha,\ \beta,\ \gamma > 30^\circ$，从上式出发，可得

$$\begin{aligned}
&\sin^2\gamma \leqslant (1-\cos(\alpha+\beta))\cos(120^\circ-\gamma)\\
\Leftrightarrow\ &1-\cos^2\gamma \leqslant (1+\cos\gamma)\cos(120^\circ-\gamma)\\
\Leftrightarrow\ &1-\cos\gamma \leqslant \cos(120^\circ-\gamma)\\
\Leftrightarrow\ &1 \leqslant \cos\gamma + \cos(120^\circ-\gamma) = 2\cos 60^\circ\cos(\gamma-60^\circ)\\
\Leftrightarrow\ &1 \leqslant \cos(\gamma-60^\circ).
\end{aligned}$$

这表明$\gamma = 60^\circ$，并且上面的不等式都取等号，即要求$\cos(\alpha-\beta)=1$，故$\alpha=\beta$.进而$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

综上可知，$\triangle ABC$为正三角形.

说明　如果利用例2的结果，我们有$\cot A+\cot B+\cot C=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$，然后去证明此等式仅当$A=B=C=60^\circ$时成立，这个思路也是可取的.

【例4】　设P为$\triangle ABC$内或边界上一点，点P到三边的距离为PD、PE、PF.

求证：$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF)$，当且仅当$\triangle ABC$为正三角形且$P$为其中心时等号成立.

证明　这是平面几何里著名的爱尔多斯-莫德尔不等式，请细细体会其证明过程中的方法与技巧.

如图17-4所示，为方便起见，记$PD=p,\ PE=q,\ PF=r$.

注意到$PD\perp BC,\ PE\perp CA$，所以P、E、C、D四点共圆，且PC为该圆的一条直径. 由正弦定理知

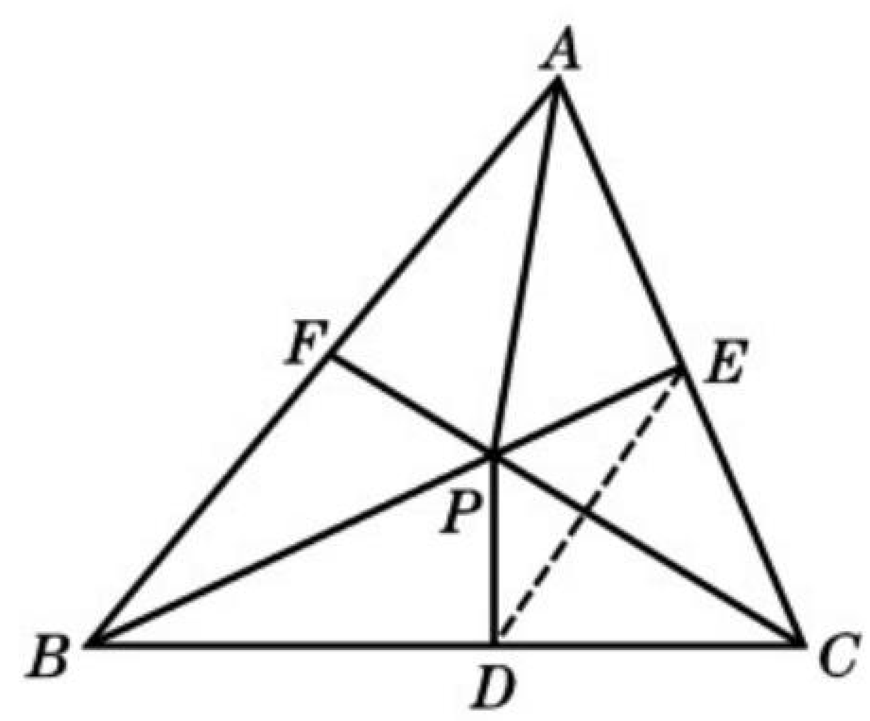


图17-4

$$DE = PC\cdot\sin C.$$

另一方面，由余弦定理，以及$\angle DPE = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$，可知

$$\begin{aligned}
DE &= \sqrt{p^2+q^2-2pq\cos(A+B)}\\
&= \sqrt{p^2-2pq(\cos A\cos B-\sin A\sin B)+q^2}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{(p\sin B + q\sin A)^2 + (p\cos B - q\cos A)^2}$$
$$\geqslant p\sin B + q\sin A,$$

于是,我们有

$$PC = \frac{DE}{\sin C} \geqslant \frac{p\sin B + q\sin A}{\sin C}.$$

类似地,还有

$$PA \geqslant \frac{q\sin C + r\sin B}{\sin A},\ PB \geqslant \frac{r\sin A + p\sin C}{\sin B}.$$

因此

$$PA + PB + PC \geqslant p\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + q\left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right) + r\left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}\right)$$
$$\geqslant 2(p + q + r) = 2(PD + PE + PF).$$

所以,原不等式成立,进一步,等号当且仅当 $\sin A = \sin B = \sin C$ 且 $p : q : r = \cos A : \cos B : \cos C$ 时才能成立. 这等价于$\triangle ABC$ 为正三角形,且 P 为$\triangle ABC$ 的中心,命题获证.

【例 5】 在$\triangle ABC$ 中,A、B、C 表示其三个内角,它们所对的边长分别为 a、b、c,用 r、R 分别表示$\triangle ABC$ 的内切圆和外接圆半径,p 和 S 分别表其半周长和面积. 证明下述结论:

(1) $$\frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\dfrac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\dfrac{C}{2}} \geqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}};\qquad ①$$

(2) $$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{r}{4R} + \frac{\sqrt{3}p}{4R}.\qquad ②$$

证明 这是一个涉及$\triangle ABC$ 的边角之间的不等式,尝试利用几何性质去处理(三角可用于解几何问题,反过来许多三角问题也有其几何背景,因此有时将三角问题还原到几何问题去解要容易得多).

(1) 如图 17-5 所示,取$\triangle ABC$ 的内心 I,记 $AI = x$, $BI = y$, $CI = z$, $\angle BIC = \alpha$, $\angle CIA = \beta$, $\angle AIB = \gamma$. 则(下式中 $\sum$ 表示循环和)

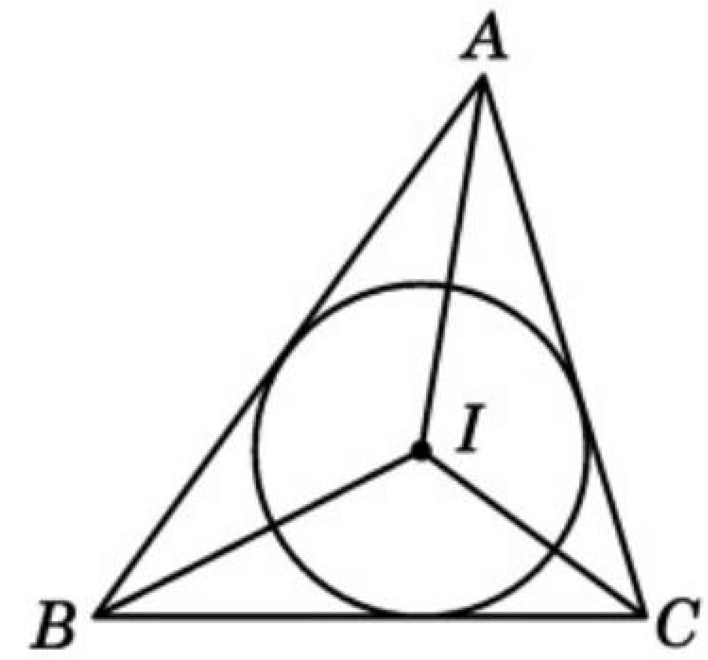


图 17-5

$$① \Leftrightarrow \sum \frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{\sum a^2 + 4\sqrt{3}S}{2}}.$$

注意到，I 为$\triangle ABC$ 的内心，故

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{x},\ \sin\frac{B}{2}=\frac{r}{y},\ \sin\frac{C}{2}=\frac{r}{z}.$$

所以

$$\begin{aligned}① &\Leftrightarrow \sum x\geqslant\sqrt{\frac{\sum a^2+4\sqrt{3}S}{2}}\\ &\Leftrightarrow 2\left(\sum x\right)^2\geqslant\sum a^2+4\sqrt{3}S. \qquad ③\end{aligned}$$

由余弦定理及三角形面积公式，知

$$\sum a^2=\sum\left(y^2+z^2-2yz\cos\alpha\right),$$

$$S=\sum S_{\triangle BIC}=\frac{1}{2}\sum yz\sin\alpha.$$

于是

$$\begin{aligned}③ &\Leftrightarrow 2\left(\sum x\right)^2\geqslant\sum\left(y^2+z^2-2yz\cos\alpha\right)+2\sqrt{3}\sum yz\sin\alpha\\ &\Leftrightarrow 4\sum yz\geqslant 2\sum yz\left(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha\right)\\ &\Leftrightarrow \sum yz\left[2-\left(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha\right)\right]\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 2\sum yz\left(1-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

由于 $1-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0$，所以，上式显然成立，从而，(1)成立.

(2) 由正弦定理，知 $\sum\sin A=\frac{p}{R}$，而

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=rp,$$

故

$$\begin{aligned}r&=\frac{ab\sin C}{a+b+c}=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\\ &=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\ &=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\ &=R\left(\sum\cos A-1\right)\end{aligned}$$

(这里用到的一些三角恒等式都在第 13 讲中出现过).

利用上面的结论,可知

$$
\begin{aligned}
&\sum \sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}+\frac{r}{4R}-\frac{\sqrt{3}\,p}{4R}\\
=\ &\sum \sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\sum\cos A-1\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\sum\sin A\\
=\ &\sum \sin\frac{A}{2}-\frac{1}{4}\sum(1-\cos A)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\\
=\ &\sum\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\\
=\ &\sum \sin\frac{A}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\right]\\
=\ &\sum \sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right),
\end{aligned}
$$

上述和式中每一项都$\geqslant 0$,依此可知②式成立.

从而,结论(2)成立.

【例 6】 设 ω 是以$\triangle ABC$ 的内心 I 为圆心的一个圆,点 D、E、F 分别是从 I 出发垂直于边 BC、CA 和 AB 的射线与 ω 的交点. 证明:AD、BE 和 CF 三线共点.

证明 如图 17－6 所示,记 $\angle BAD=\alpha_1$, $\angle CAD=\alpha_2$, $\angle CBE=\beta_1$, $\angle ABE=\beta_2$, $\angle ACF=\gamma_1$, $\angle BCF=\gamma_2$.

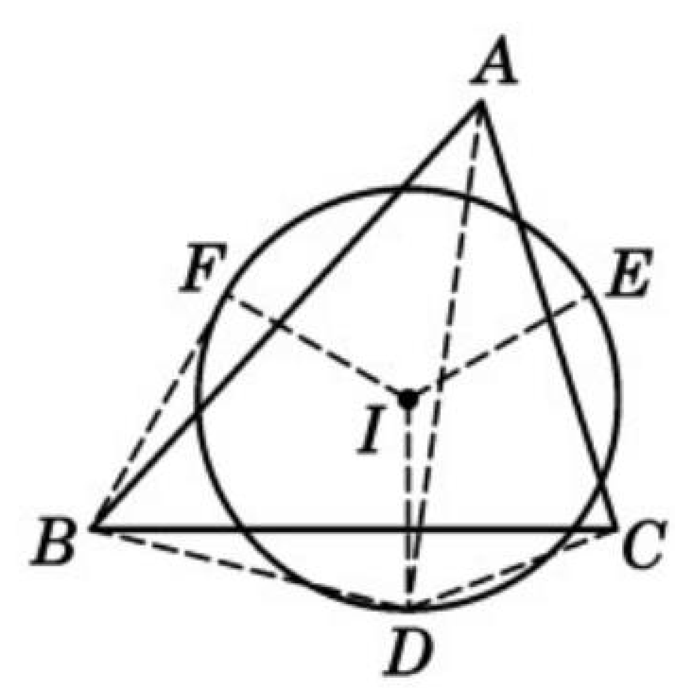


图 17－6

由塞瓦定理(角元形式)的逆定理可知,要证:AD、BE、CF 三线共点,只需证明:

$$\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin\alpha_1\sin\beta_2\sin\gamma_2}=1. \qquad ①$$

利用正弦定理,可知

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{BD\sin\angle ABD}{AD}\cdot\frac{AD}{CD\sin\angle ACD}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ACD}, \qquad ②$$

同理可得

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{CE}{AE}\cdot\frac{\sin\angle BCE}{\sin\angle BAE},\ \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CBF}. \qquad ③$$

在$\triangle BID$ 和$\triangle BIF$ 中,

$$BI=BI,\ ID=IF,$$

$$\angle BID=90^\circ-\angle IBC=90^\circ-\frac{B}{2}=90^\circ-\angle ABI=\angle BIF,$$

所以，$\triangle BID\cong\triangle BIF$，从而，有

$$BD=BF,\ \angle ABD=\angle IBD+\frac{B}{2}=\angle IBF+\frac{B}{2}=\angle CBF,$$

同理可得

$$CD=CE,\ \angle ACD=\angle BCE;$$
$$AE=AF,\ \angle CAF=\angle BAE.$$

上述关系式结合②与③可知①成立.

所以，AD、BE、CF 三线共点.

【例 7】 平面上的 4 个点，它们每两点之间的距离都是整数. 求证：其中至少有一个距离为 3 的倍数.

证明 我们恰当地标记所给的 4 个点为 A、B、C、D，使得 $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD$，并记 $\angle BAC=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，$\angle BAD=\gamma$. 则由余弦定理可得

$$\begin{cases}BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha,\\ CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos\beta,\\ BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\gamma.\end{cases}\qquad ①$$

若命题不成立，则 $AB^2\equiv AC^2\equiv AD^2\equiv BC^2\equiv BD^2\equiv CD^2\equiv 1\pmod 3$，进而，$2AB\cdot AC\cos\alpha\equiv 2AD\cdot AC\cos\beta\equiv 2AB\cdot AD\cos\gamma\equiv 1\pmod 3$，于是

$$\begin{aligned}&AC^2\cdot AB\cdot AD\cos\alpha\cos\beta\equiv 4AC^2\cdot AB\cdot AD\cos\alpha\cos\beta\\ =&(2AB\cdot AC\cos\alpha)(2AD\cdot AC\cos\beta)\equiv 1\pmod 3.\end{aligned}\qquad ②$$

利用①可知，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 都是有理数，进一步，设 $\cos\alpha=\frac{q}{p}$，$\cos\beta=\frac{s}{r}$，这里 p、q 和 r、s 是两对互素的整数，则由①可知 p、q、r、s 都不是 3 的倍数，故 $p^2\equiv q^2\equiv r^2\equiv s^2\equiv 1\pmod 3$.

注意到，$\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. 结合①可知 $2AC^2\cdot AB\cdot AD\sin\alpha\sin\beta\in\mathbf{Z}$. 进一步，

$$\begin{aligned}2AC^2\cdot AB\cdot AD\sin\alpha\sin\beta&=2AC^2\cdot AB\cdot AD\,\frac{\sqrt{p^2-q^2}\cdot\sqrt{r^2-s^2}}{|pr|}\\&\equiv 0\pmod 3,\end{aligned}\qquad ③$$

这里用到 $p^2-q^2\equiv r^2-s^2\equiv 0\pmod 3$. 而

$$2AC^2\cdot AB\cdot AD\cos\gamma\equiv 2AB\cdot AD\cos\gamma\equiv 1\pmod 3,\tag{④}$$

将式③与式④相加，结合 $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，可知

$$2AC^2\cdot AB\cdot AD\cos\alpha\cos\beta\equiv 1\pmod 3,$$

这与式②矛盾.

所以，命题成立.

【例 8】 考虑平面上的点 O、A_1、A_2、A_3、A_4. 已知对任意 $1\leqslant i<j\leqslant 4$，都有 $S_{\triangle OA_iA_j}\geqslant 1$.

求证：存在下标 i_0、j_0，使得 $1\leqslant i_0<j_0\leqslant 4$，且 $S_{\triangle OA_{i_0}A_{j_0}}\geqslant\sqrt{2}$.

证明 设 $OA_1=a$，$OA_2=b$，$OA_3=c$，$OA_4=d$，并设 $\angle A_1OA_2=\alpha$，$\angle A_2OA_3=\beta$，$\angle A_3OA_4=\gamma$. 这里 α、β、γ 为有向角(即当 OA_1 绕点 O 逆时针旋转至与直线 OA_2 重合时 α 为正角，否则 α 为负角).

于是，我们有

$$S_1=S_{\triangle OA_1A_2}=\frac{1}{2}ab\,|\sin\alpha|,$$

$$S_2=S_{\triangle OA_1A_3}=\frac{1}{2}ac\,|\sin(\alpha+\beta)|,$$

$$S_3=S_{\triangle OA_1A_4}=\frac{1}{2}ad\,|\sin(\alpha+\beta+\gamma)|,$$

$$S_4=S_{\triangle OA_2A_3}=\frac{1}{2}bc\,|\sin\beta|,$$

$$S_5=S_{\triangle OA_2A_4}=\frac{1}{2}bd\,|\sin(\beta+\gamma)|,$$

$$S_6=S_{\triangle OA_3A_4}=\frac{1}{2}cd\,|\sin\gamma|.$$

注意到，我们有如下等式

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\\=&\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)]+\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)]\\=&\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)]\end{aligned}$$

$$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

结合下述式子

$$S_1S_6 = \frac{1}{4}abcd\ |\ \sin\alpha\sin\gamma\ |,$$

$$S_2S_5 = \frac{1}{4}abcd\ |\ \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\ |,$$

$$S_3S_4 = \frac{1}{4}abcd\ |\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\ |,$$

我们可以适当选择"+"号或"−"号,使得

$$S_1S_6 \pm S_2S_5 \pm S_3S_4 = 0,$$

当然,上式中不能同时取"+"号,于是,总成立类似于下面的式子

$$S_3S_4 = S_1S_6 + S_2S_5,$$

从而,若记 $S=\max\{S_1, S_2, \cdots, S_6\}$,则有

$$S^2 \geqslant S_3S_4 = S_1S_6 + S_2S_5 \geqslant 2,$$

故 $S \geqslant \sqrt{2}$. 这就是要证明的结论.

说明 本讲中的问题涉及:几何证明,几何不等式,与数论、组合相关的几何问题等等,正余弦定理的纽带作用体现之余,重要的是对三角函数的性质、三角公式的熟练运用.知识在任何时候都只是工具,用的过程中方能体现能力.

练习题

A 组

1 一幅画挂在墙上,它的下缘在观察者眼睛上方 a 米处,而上缘在 b 米处.问观察者站在离墙多远的地方,才能使看画的视角最大?

2 面积为 32 的凸四边形的一组对边与一条对角线的长度之和为 16,求另一条对角线的所有可能的长度.

3 点 H 和 O 分别是锐角三角形 ABC 的垂心和外心,并且 $AH=AO$,求 $\angle A$ 的所有可能的值.

4 设 AD、BE 和 CF 为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线,D、E、F 分别是边 BC、CA、AB 上的点.已知 $\angle EDF=90^\circ$,求 $\angle BAC$ 的大小.

5 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A+\angle C=2\angle B$,并且 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h.求 $\sin\dfrac{C-A}{2}$ 的值.

6 在$\triangle ABC$中，若$c-a$等于AC边上的高h，求$\sin\dfrac{C-A}{2}+\cos\dfrac{C+A}{2}$的值.

7 设K、L、M分别是$\triangle ABC$的边BC、CA、AB的中点. 点A、B、C分$\triangle ABC$的外接圆为三段弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$. 设X是$\overset{\frown}{BC}$的中点，Y是$\overset{\frown}{CA}$的中点，Z是$\overset{\frown}{AB}$的中点. 设R、r分别为$\triangle ABC$的外接圆与内切圆的半径. 证明：$r+KX+LY+MZ=2R$.

8 在正方形$ABCD$的边AB和AD上分别取点K和N，使得$AK\cdot AN=2BK\cdot DN$，线段CK和CN分别与对角线BD交于点L、M. 求证：点K、L、M、N和A这五点共圆.

9 一个有内切圆的凸四边形的四边长分别为a、b、c、d，并且此四边形的面积$S=\sqrt{abcd}$. 证明：这个四边形有外接圆.

10 凸四边形$ABCD$中，$\angle ABC+\angle BCD<180^\circ$，$BA$和$CD$的延长线交于$E$. 证明：$\angle ABC=\angle ADC$的充要条件是：$AC^2=CD\cdot CE-AB\cdot AE$.

B组

11 设锐角$\triangle ABC$的三边长为a、b、c，r和R分别为$\triangle ABC$的内切圆和外接圆半径. 证明：$\dfrac{r}{2R}\leqslant\dfrac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}$.

12 已知圆O为$\triangle ABC$的内切圆，D是圆O与边BC的切点，DF是圆O的一条直径，连AF交边BC于点E. 求证：$BE=CD$.

13 点P为$\triangle ABC$内一点，求证：$\angle PAB$、$\angle PBC$、$\angle PCA$中至少有一个不超过30°.

14 $\triangle ABC$的角A、B、C的内角平分线，分别与$\triangle ABC$的外接圆交于另一点A'、B'、C'. 求证：

$$S_{\triangle A'B'C'}\geqslant S_{\triangle ABC}.$$

15 $\triangle ABC$的三条中线分别与其外接圆交于点A'、B'、C'. 证明：

$$S_{\triangle A'B'C'}\geqslant S_{\triangle ABC}.$$

16 设$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$、$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$、$C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$均为正七边形，面积分别为S_A、S_B、S_C. 若$A_1A_2=B_1B_3=C_1C_4$. 求证：

$$\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}.$$

第 18 讲　向量的概念与运算

一、知识要点和基本方法

1. 向量的概念与基本属性

（1）向量.

既有大小，又有方向的量叫做向量. 始点为 A，终点为 B 的向量记作$\overrightarrow{AB}$，在不计始点终点的情况下，也可记作 $\vec{a}$，或用小写的黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 来表示. 规定了起点的向量称为位置向量，否则称之为自由向量.

（2）向量的模.

向量$\overrightarrow{AB}$的大小亦即线段 AB 的长度叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$.

（3）相等的向量.

若两个向量有相同的模和方向（始点与终点不必相同），则它们相等（因此，模和方向是向量的基本量）.

（4）特殊向量.

模为 1 的向量叫做单位向量；模为 0 的向量叫做零向量，零向量记为$\vec{0}$，零向量是唯一的方向不确定的向量.

2. 向量的运算

（1）向量的加法和减法.

向量的加法按平行四边形法则进行，即以$\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作一个平行四边形，过共同始点的对角线对应的向量就是两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和向量，记作 $\vec{a}+\vec{b}$. 向量的减法规定为加法的逆运算：若 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，则向量 $\vec{c}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的差，记作 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. 向量的减法也适用三角形法则：将向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平移至同一始点，由向量 $\vec{b}$ 的终点指向向量 $\vec{a}$ 的终点的向量就是差向量 $\vec{a}-\vec{b}$.

（2）向量的数乘.

实数 m 与向量$\vec{a}$ 的乘积 $m\vec{a}$ 是一个向量，它的模为 $|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$，它的方向为：当 $m>0$ 时，$m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $m=0$ 时，$m\vec{a}(=\vec{0})$的方向不确定；当 $m<0$ 时，$m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向. 特别地，如果 $\vec{a}\neq\vec{0}$，那么$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 就是和 $\vec{a}$ 同方向的单位向量.

（3）向量的内积.

两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的内积（亦称点积或数量积）定义为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的长度以及它们之间正方向（将 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平移至同一起点后，从一个向量沿逆时针方向转向另一个向量）的夹角的余弦的乘积. 记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$. 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$，其中$(\vec{a},\vec{b})$表

示向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之间正方向的夹角. 特别地,我们有 $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$.

3. 向量的坐标表示

在平面内建立直角坐标系 xOy,对始点为坐标原点的向量 $\vec{a}$,$\vec{a}$ 由其终点坐标唯一确定,因此,也可以用坐标的形式来表示这种特殊的位置向量. 针对向量的一些运算就可以用坐标来表示. 例如:设 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$,$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$,则利用两点间的距离公式结合余弦定理,可知

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

4. 向量运算的基本性质

(1) 加法满足交换律、结合律:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

(2) 数乘满足分配律:

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},\ (\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a},\ (\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a}).$$

其中 λ、μ 为任意实数.

(3) 内积满足交换律和对加法的分配律:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},\ (\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a},$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

5. 向量在几何中的运用

通过引入向量可以将一些几何问题转化为向量计算,从而,将几何问题代数化. 在运用向量方法解决几何问题时经常用到如下结论:

(1) 不共线的四点 A、B、C、D 组成平行四边形的充要条件是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$.

(2) 两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线(或称线性相关)的充要条件是存在不全为 0 的实数 m、n,使 $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$,此结论常用于证三点共线.

(3) 两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 垂直的充要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

二、例题精讲

【例 1】 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是 A、B 两点的位置向量(起点相同),P 是有向线段 AB 所在直线上一点,它分 AB 所成的比为 λ. 求 P 点的位置向量 $\vec{p}(\lambda\neq-1)$.

解 由已知可得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{BA}$.

所以 $$\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{BP}=\vec{0},$$

又 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$，$\overrightarrow{BP}=\vec{p}-\vec{b}$，所以

$$(\vec{p}-\vec{a})+\lambda(\vec{p}-\vec{b})=\vec{0},$$

即 $$(1+\lambda)\vec{p}=\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

从而 $$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda}.$$

说明 这是向量形式的定比分点公式，特别地，若 $\lambda=1$，则可得中点公式.

【例 2】 设 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，证明：存在正实数 α、β、γ，使得 $\alpha+\beta+\gamma=1$，且

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

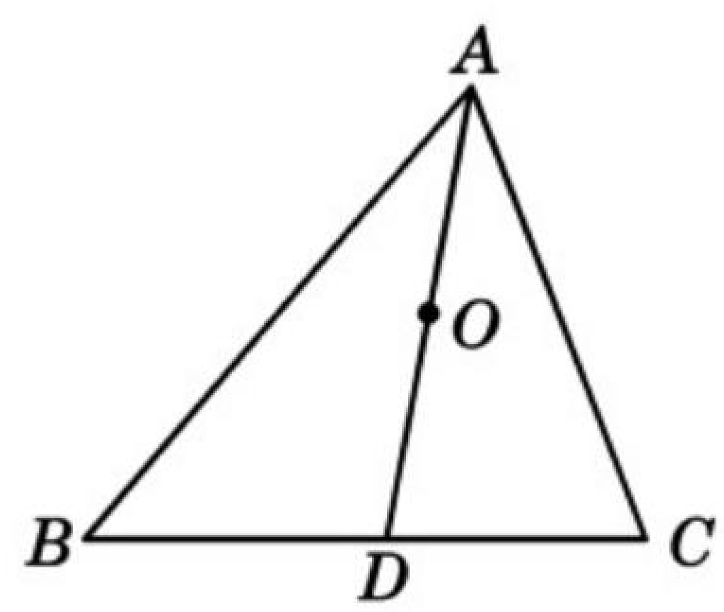


图 18-1

证明 如图 18-1 所示，连 AO 延长交 BC 于点 D，设 O 分 AD 所成的比为 λ，D 分 BC 所成的比为 μ. 则 λ、μ 为正实数，利用上题的结论知：$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}}{1+\mu}$. 结合 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{AO}=-\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{OA}$，得 $-\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{OA}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}}{1+\mu}$，于是，

$$\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{OB}+\frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{OC}=\vec{0},$$

因此，将上式两边除以 $1+\dfrac{1}{\lambda}$，得

$$\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{OC}=\vec{0},$$

令 $\alpha=\dfrac{1}{1+\lambda}$，$\beta=\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}$，$\gamma=\dfrac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}$，可知命题成立.

说明 利用此结论，可以用 A、B、C 对应的位置向量表示 $\triangle ABC$ 内任意一点的位置向量，特别地，如果 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$，那么就能得到 $\triangle ABC$ 的重心对应的位置向量.

换一个角度，以 B 为原点，$\overrightarrow{BC}$ 为 x 轴，$\overrightarrow{BA}$ 为 y 轴建立斜坐标系，并设 $|\overrightarrow{BC}|=a$，$|\overrightarrow{BA}|=c$（即 A 的坐标为 $(0,c)$，C 的坐标为 $(a,0)$），点 O 的坐标为 (x,y)，

通过解方程组可取$(\alpha,\beta,\gamma)=\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{c},\ \frac{y}{c},\ \frac{x}{a}\right)$,亦可证得命题成立.这个观点下,可知只要$O$为$\triangle ABC$所在平面上的一点,则存在实数$\alpha,\beta,\gamma$(代价是不能都为正实数),使得$\alpha+\beta+\gamma=1$,且$\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

【例3】 在四边形$ABCD$中,E是AB中点,K是CD中点.试证:以线段AK、CE、BK和DE中点为顶点的四边形为平行四边形.

证明 这是一个熟知的平面几何的结论,利用向量来处理非常简单、方便.分别以Y、Y_1、X_1和X表示线段AK、CE、BK和DE的中点.则

$$\overrightarrow{EX}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}),$$

$$\overrightarrow{EY}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}),$$

因此 $$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{EY}-\overrightarrow{EX}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DK})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}),$$

类似可得 $$\overrightarrow{X_1Y_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}),$$

从而$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X_1Y_1}$.所以四边形$XYY_1X_1$为平行四边形.

【例4】 设A_1、B_1、C_1分别是$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上的点,G为$\triangle ABC$的重心,G_a、G_b、G_c分别是$\triangle AB_1C_1$、$\triangle BA_1C_1$、$\triangle CA_1B_1$的重心,并设$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle G_aG_bG_c$的重心分别为G_1和G_2.证明:G、G_1、G_2三点共线.

证明 任取平面上一点O作为坐标原点,利用例1的结论,可设

$$\overrightarrow{OA_1}=\alpha\overrightarrow{OB}+(1-\alpha)\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OB_1}=\beta\overrightarrow{OC}+(1-\beta)\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OC_1}=\gamma\overrightarrow{OA}+(1-\gamma)\overrightarrow{OB},$$

这里$\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$.

于是,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_1}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})\\&=\frac{1}{3}[(\gamma+1-\beta)\overrightarrow{OA}+(\alpha+1-\gamma)\overrightarrow{OB}+(\beta+1-\alpha)\overrightarrow{OC}],\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OG_a}=\frac{1}{3}[(2-\beta+\gamma)\overrightarrow{OA}+(1-\gamma)\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}],$$

$$\overrightarrow{OG_b}=\frac{1}{3}[(2-\gamma+\alpha)\overrightarrow{OB}+(1-\alpha)\overrightarrow{OC}+\gamma\overrightarrow{OA}],$$

$$\overrightarrow{OG_c}=\frac{1}{3}[(2-\alpha+\beta)\overrightarrow{OC}+(1-\beta)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}],$$

依此可知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_2}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_a}+\overrightarrow{OG_b}+\overrightarrow{OG_c})\\&=\frac{1}{9}[(3-2\beta+2\gamma)\overrightarrow{OA}+(3-2\gamma+2\alpha)\overrightarrow{OB}+(3-2\alpha+2\beta)\overrightarrow{OC}].\end{aligned}$$

进而,

$$\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{OG_1}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}[(\gamma-\beta)\overrightarrow{OA}+(\alpha-\gamma)\overrightarrow{OB}+(\beta-\alpha)\overrightarrow{OC}],$$

$$\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG}=\frac{2}{9}[(\gamma-\beta)\overrightarrow{OA}+(\alpha-\gamma)\overrightarrow{OB}+(\beta-\alpha)\overrightarrow{OC}],$$

从而,有 $\overrightarrow{GG_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GG_2}$, 故 G、G_1、G_2 三点共线.

【例 5】 在$\triangle ABC$中,已知对任意实数 t,都有

$$|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|.$$

证明:$\triangle ABC$ 是一个直角三角形.

证明 记 $\angle ABC=\beta$, 由条件知,对任意 $t\in\mathbf{R}$, 都有

$$|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|^2\geqslant|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|^2,$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2t\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+t^2|\overrightarrow{BC}|^2\geqslant|BA|^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2,$$

即 $(t^2-1)|\overrightarrow{BC}|^2\geqslant 2(t-1)\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(t-1)|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\beta$,

于是,对任意 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$(t-1)\left(t+1-\frac{2|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos\beta}{|\overrightarrow{BC}|}\right)\geqslant 0.$$

记 $\frac{|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos\beta}{|\overrightarrow{BC}|}=u$, 则条件等价于:对任意 $t\in\mathbf{R}$, 都有 $(t-1)(t+1-2u)\geqslant 0$, 即 $t^2-2ut+2u-1\geqslant 0$. 此式恒成立的充要条件是

$$\Delta = 4u^2 - 4(2u-1) \leqslant 0,$$

即 $4u^2 - 8u + 4 \leqslant 0$, $4(u-1)^2 \leqslant 0$. 所以, $u = 1$.

综上可知, $|\overrightarrow{BA}| \cdot \cos\beta = |\overrightarrow{BC}|$, 这表明$\triangle ABC$中, $\angle C = 90°$, 命题获证.

【例 6】 给定 8 个非零实数 $a_1, a_2, \cdots, a_8$. 证明:下面的 6 个数

$$a_1a_3 + a_2a_4、a_1a_5 + a_2a_6、a_1a_7 + a_2a_8、a_3a_5 + a_4a_6、a_3a_7 + a_4a_8、a_5a_7 + a_6a_8$$

中,至少有一个数为非负实数.

证明 定义向量 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB} = (a_3, a_4)$, $\overrightarrow{OC} = (a_5, a_6)$, $\overrightarrow{OD} = (a_7, a_8)$,这里 O 为坐标原点.

由抽屉原则可知$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$ 中必有两个向量(不妨设为$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$)的夹角不超过 $90°$,于是$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \geqslant 0$,即

$$a_1a_3 + a_2a_4 \geqslant 0.$$

所以,命题成立.

【例 7】 证明:从任意 4 个不同实数中可以取出两个数 a、b,使得

$$1 + ab > \frac{1}{2}\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

证明 设所给的 4 个实数为 $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$, 如图 18 - 2 所示,设点 P_i 的坐标为$(1, y_i)$, $i = 1、2、3、4$. 考察向量 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OP_3}$ 和 $\overrightarrow{OP_4}$ 之间的夹角, 记 $\angle P_1OP_2 = \alpha$, $\angle P_2OP_3 = \beta$, $\angle P_3OP_4 = \gamma$, 则 $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, 从而, α、β、γ 中有一个小于$\frac{\pi}{3}$. 不妨设 $\alpha < \frac{\pi}{3}$, 那么令 $a = y_1$, $b = y_2$, 就有

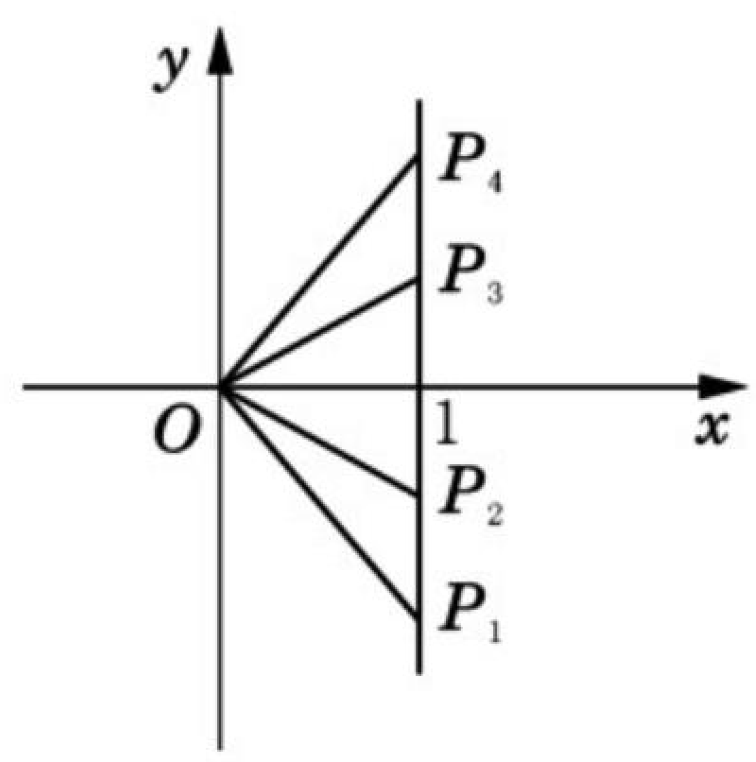


图 18 - 2

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = |\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}| \cdot \cos\alpha > \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}|,$$

即 $1 + ab > \frac{1}{2}\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$.

命题获证.

【例 8】 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是同一平面上的 $2n$ 个不同的点. 证明:可以将点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 重新排序为 $B_1', \cdots, B_n'$,使得对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 向量$\overrightarrow{A_iA_j}$与$\overrightarrow{B_i'B_j'}$的夹角都为锐角或者直角.

证明 任取平面上一点 O 作为原点，考虑下面的目标函数：

$$S=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i},$$

这里 A_1，…，A_n 固定，B_1，…，B_n 可以任意排列.

由于 B_1，…，B_n 的排列只有有限种，故存在 B_1，B_2，…，B_n 的一个排列 B_1'，…，B_n'使得 S 取最大值 S'.

下证：B_1，…，B_n 的这个排列 B_1'，…，B_n'符合题中的要求.

事实上，若存在 $1\leqslant i<j\leqslant n$，使得 $\overrightarrow{A_iA_j}$ 与$\overrightarrow{B_i'B_j'}$ 的夹角为钝角，则 $\overrightarrow{A_iA_j}\cdot\overrightarrow{B_i'B_j'}<0$. 现在将 B_1'，…，B_n'中 B_i'与 B_j'的位置交换，设这时 S 对应的值为 S''，那么

$$\begin{aligned}S'-S''&=\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_i'}+\overrightarrow{OA_j}\cdot\overrightarrow{OB_j'}-\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OB_j'}-\overrightarrow{OA_j}\cdot\overrightarrow{OB_i'}\\&=\overrightarrow{OA_i}\cdot(\overrightarrow{OB_i'}-\overrightarrow{OB_j'})-\overrightarrow{OA_j}\cdot(\overrightarrow{OB_i'}-\overrightarrow{OB_j'})\\&=(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j})\cdot(\overrightarrow{OB_i'}-\overrightarrow{OB_j'})\\&=\overrightarrow{A_jA_i}\cdot\overrightarrow{B_j'B_i'}=\overrightarrow{A_iA_j}\cdot\overrightarrow{B_i'B_j'}<0,\end{aligned}$$

与 S'是最大值矛盾.

所以，命题成立.

练习题

A 组

1 设$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$是两个单位向量，它们的夹角为 60°. 求向量 $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ 和$2\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m}$ 的夹角.

2 两个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足：$\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，而且 $\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直. 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

3 $\triangle ABC$ 中 $AB=7$，$BC=5$，$CA=6$. 求$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的值.

4 空间中的四个点 A、B、C、D 满足：$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=7$，$|\overrightarrow{CD}|=11$，$|\overrightarrow{DA}|=9$. 求$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的值.

5 设 O 为$\triangle ABC$ 内一点，记 $\alpha=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\beta=\frac{S_{\triangle COA}}{S_{\triangle ABC}}$，$\gamma=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}$. 证明：

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

6 凸四边形 $ABCD$ 的顶点对应的向量分别为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$. 已知 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. 试刻画四边形 $ABCD$ 的形状.

7 设 O 为$\triangle ABC$ 内一点，已知 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. 求

$\dfrac{S_{\triangle AOB}+2S_{\triangle BOC}+3S_{\triangle COA}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.

8 设 F 为平行四边形 $ABCD$ 的边 CD 的中点，AF 交 BD 于点 E. 证明：E 为 BD 的一个三等分点.

9 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为底边 BC 的中点，E 为 AC 上一点，使得 $DE\perp AC$，设 F 为 DE 的中点. 求证：$AF\perp BE$.

B 组

10 设 P 为给定的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内部或边界上的点，记 $f(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|$. 证明：$f(P)$的最大值可以在 P 为某个顶点 A_i 时取到.

11 将整数 1, 2, …, n^2 填入一个 $n\times n$ 的表格，每格填一个数，且任意两格中所填入的数不同. 现在将任意两个方格的中心连出一个向量，方向都是依所填的数从小到大. 证明：如果表格中每行、每列所填各数之和相等，那么所连出的全部向量之和等于零.

12 一个 $n\times n$ 的方格表的每个方格内填入 1 或 -1，已知该方格表中任意两行对应的向量的内积都等于 0(例如第 i 行与第 j 行对应向量为(x_1, …, x_n), (y_1, …, y_n)，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k=0$)，且它有一个 $a\times b$ 的子表格(即一个 a 行、b 列交出的方格组成的表格) 内所填的数都是 1. 证明：$ab\leqslant n$.

第19讲　空间的“角”和“距离”

一、知识要点和基本方法

与“角”和“距离”有关的立几问题是立体几何中的常见问题. 解决这类问题的出发点是基本概念和基本定理，具有一定水平的空间想象力和逻辑推理能力也是必须具备的基本功.

1. 与“角”有关的一些基本概念

立体几何中，主要涉及了如下几个“角”的概念：直线与直线的夹角（特别是两条异面直线所成的角）、直线与平面所成的角、二面角.

2. 与“距离”有关的概念

我们讨论的“距离”主要包括：点到直线的距离、异面直线之间的距离、点到平面的距离、直线与平面（平行时）的距离、两个平行平面之间的距离.

3. 常用定理

除了一些基本结论（例如平行线公理等）外，这里要强调的是三垂线定理、线面垂直的判定与性质定理、面面垂直的判定与性质定理等.

4. 基本方法

实现角度的求解，都需要将它们转化为“平面上的角”求解.

距离的求解，最终都需将其转化为求点到直线的距离，化归至求线段（例如公垂线段）的长度.

当然，“角”与“距离”的求解问题大都可以借助空间向量的运算来达到目的.

二、例题精讲

【例1】 如图19－1所示，在空间四边形$ABCD$中，点E、F分别是BC、AD上的点，已知$AB=4$，$CD=20$，$EF=7$，$\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{1}{3}$. 求异面直线$AB$与$CD$所成的角.

解　在BD上取一点G，使得$\dfrac{BG}{GD}=\dfrac{1}{3}$，连结$EG$、$FG$.

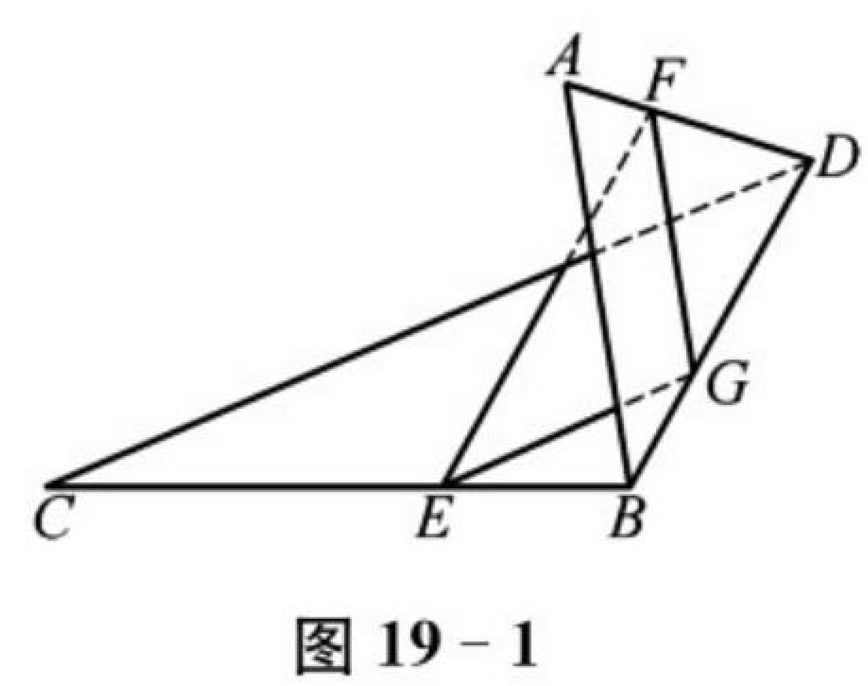


图19－1

在$\triangle BCD$中，$\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BG}{GD}$，故$EG\parallel CD$，并且$\dfrac{EG}{CD}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{4}$，所以$EG=5$；类似地，可证$FG\parallel AB$，且$\dfrac{FG}{AB}=$

$\frac{DF}{AD}=\frac{3}{4}$,故 $FG=3$. 在$\triangle EFG$中,利用余弦定理可得

$$\cos\angle FGE=\frac{EG^2+GF^2-EF^2}{2\cdot EG\cdot GF}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2},$$

故 $\angle FGE=120^\circ$.

另一方面,由前所得 $EG\,/\!/\,CD$, $FG\,/\!/\,AB$, 所以 EG 与 FG 所成的锐角等于 AB 与 CD 所成的角,于是 AB 与 CD 所成的角等于 60°.

说明 一般来说,关于异面直线所成的角,可以利用平移异面直线中的一条或同时移动两条使之相交而形成平面上的角.

【例 2】 已知空间一个平面与一个正方体的 12 条棱的夹角都等于 α,求 α 的值.

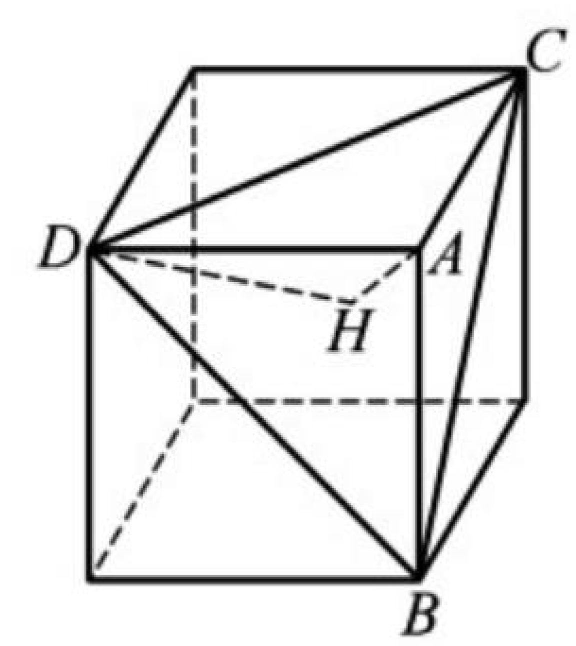


图 19-2

解 问题的难度在于不易确定该平面与正方体的位置关系.

如图 19-2 所示,由条件知,棱 AB、AC、AD 与所给平面的夹角相同,可知所给平面与面 BCD 平行,进一步,面 BCD 与此正方体的 12 条棱的夹角都相同,因而,我们只需求出棱 AD 与面 BCD 所成的角.

为此,过 A 作 $AH\perp$ 面 BCD, H 为 A 在面 BCD 上的投影,连结 DH,就有 $\angle ADH=\alpha$.

注意到,$\triangle BCD$ 为正三角形,进一步,还可证出 H 为$\triangle BCD$ 的外心,从而 H 为$\triangle BCD$ 的重心. 设正方体的棱长为 a,则 $DH=\frac{2}{3}CD\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt6}{3}a$, 结合 $AH\perp$ 面 BCD 可知 $AH\perp DH$, 所以 $\angle AHD=90^\circ$, 进而有 $\cos\alpha=\cos\angle ADH=\frac{DH}{AD}=\frac{\sqrt6}{3}$,故 $\alpha=\arccos\frac{\sqrt6}{3}$.

说明 本例也可用空间向量来解决. 如图 19-3,建立空间直角坐标系. 记 $A_1(1,\ 0,\ 0)$,设空间一平面 β 与正方体 12 条棱的夹角都等于 α, 平面 β 的法向量 $\vec{n}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ $(x_0>0)$, 则由 $\overrightarrow{DA}=(0,\ -1,\ 0)$, $\overrightarrow{DD_1}=(0,\ 0,\ -1)$, $\overrightarrow{DC}=(-1,\ 0,\ 0)$ 得

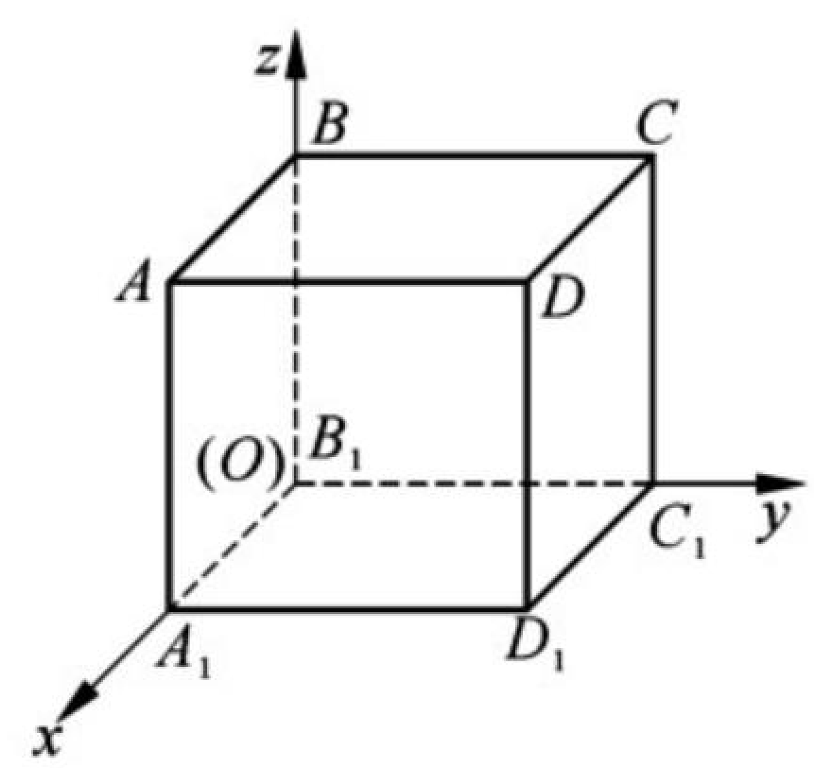


图 19-3

$$|\cos(90^\circ-\alpha)|=\left|\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DA}|\cdot|\vec{n}|}\right|$$

$$= \left| \frac{|\overrightarrow{DD_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{DD_1}| \cdot |\vec{n}|} \right|$$

$$= \left| \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\vec{n}|} \right|,$$

即 $\sin\alpha = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} = \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} = \dfrac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$,

故 $$x_0 = y_0 = z_0,\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{即 } \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【例 3】 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形,点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心,已知 $SA = 2\sqrt{3}$, $V_{S\text{-}ABC} = \dfrac{9}{4}\sqrt{3}$. 求二面角 $H-AB-C$ 的大小.

解 如图 19-4 所示,连结 BH 并延长交 SC 于点 E,连结 AE. 过 S 作面 ABC 的垂线,垂足为 O,连结 CO 并延长交 AB 于点 F.

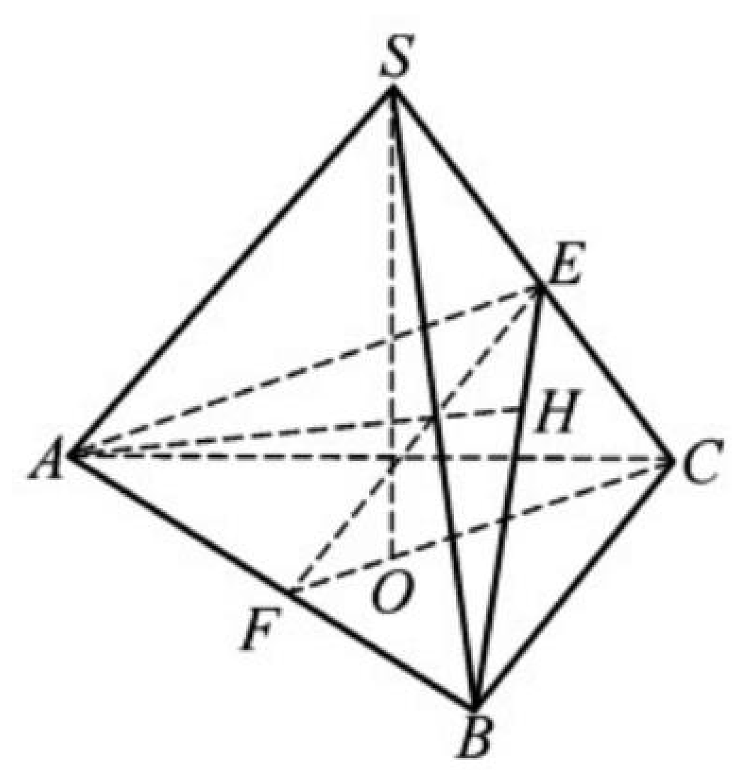


图 19-4

注意到, $AH \perp$ 面 SBC,故 $AH \perp SC$,而 H 为 $\triangle SBC$ 的垂心,所以 $BE \perp SC$,从而 $SC \perp$ 面 ABE,故 $SC \perp AB$,由三垂线定理逆定理,可知 $CF \perp AB$,同理可证 $BO \perp AC$,所以,O 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 从而,O 也是 $\triangle ABC$ 的外心,于是 $SB = SC = SA = 2\sqrt{3}$.

进一步,由于 EF 是 CF 在面 ABE 的射影,而 $CF \perp AB$,再由三垂线定理的逆定理,可知 $EF \perp AB$,故二面角 $H-AB-C$ 的平面角的大小等于二面角 $E-AB-C$ 的平面角的大小,也就等于 $\angle EFC$.

设 $\angle EFC = \alpha$,则在 $\text{Rt}\triangle FEC$ 中,有 $\angle ECF = 90° - \alpha$,从而 $SO = SC \cdot \sin\angle ECO = SC \cdot \cos\alpha$, $CO = SC \cdot \cos\angle ECO = SC \cdot \sin\alpha$,进而,由 $CO = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times AB$,及 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2$,可知 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3}CO)^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(SC \cdot \sin\alpha)^2$. 于是

$$\begin{aligned} V_{S\text{-}ABC} &= \frac{1}{3} \times SO \times S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times SC^3 \times \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= 18\sin^2\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

结合 $V_{S\text{-}ABC}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$，可知

$$\sin^2\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

从而 $$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ 或}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4},$$

故 $$\alpha=30^\circ\text{ 或 }\arccos\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}.$$

综上所述，二面角 $H-AB-C$ 的大小为 30°或 $\arccos\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$.

说明 求两平面所成角(一般指二面角)的平面角，可以依据定义，也可以利用三垂线定理及其逆定理，还可以利用棱的垂面来求.

本例也可用向量方法：通过求两平面的法向量的夹角来处理.

【例 4】 求棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，两条面对角线 A_1B 与 B_1D_1 的距离.

分析一 如图 19－5，连结 AC_1，由三垂线定理易得 $AC_1\perp B_1D_1$，$AC_1\perp A_1B$. 只需找一条直线与 AC_1 平行，又与 B_1D_1、A_1B 都相交，作出公垂线，去求公垂线段的长度.

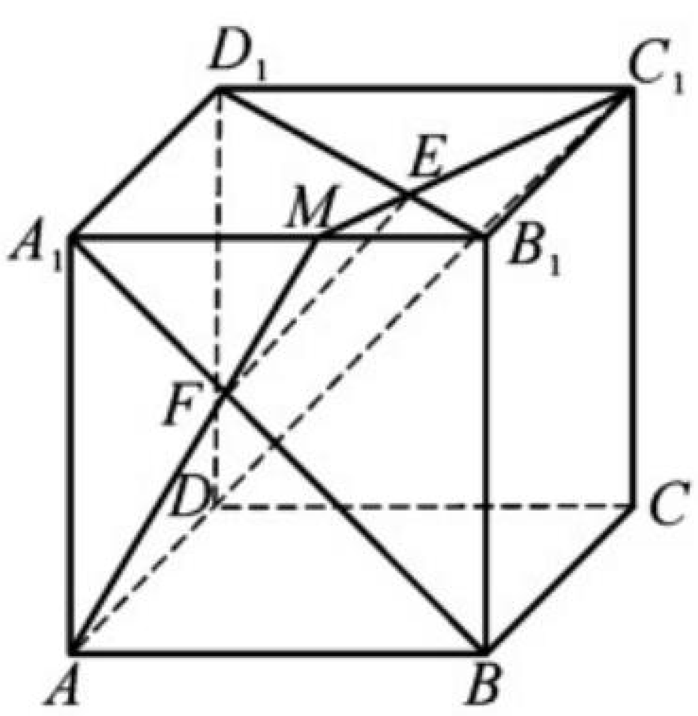


图 19－5

解法一 取 A_1B_1 的中点 M，连结 C_1M 与 B_1D_1 交于 E，显然 E 是$\triangle A_1B_1C_1$ 中 A_1C_1 与 A_1B_1 上的中线的交点，则 $C_1E:EM=2:1$. 连结 AM 交 A_1B 于 F，同理可得 $AF:FM=2:1$. 在$\triangle MAC_1$ 中，$EF\parallel C_1A$，则 EF 是异面直线 B_1D_1、A_1B 间的距离.

又 $AC_1=\sqrt{3}$，则 $EF=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

分析二 由于两条异面直线的距离，是分别在两条异面直线上的两点间距离中最小的，于是，可用求函数的最小值方法求 B_1D_1 与 A_1B 间的距离.

解法二 在 D_1B 上取点 E，作 $EG\perp D_1B$，交 A_1B_1 于 G，过 G 在平面 A_1B 内作 $GF\perp A_1B$，交 A_1B 于 F，则 $FG\perp GE$. 连结 EF，设 $B_1G=x$，则 $A_1G=1-x$，$GE^2=\frac{x^2}{2}$，$GF=1-x$，于是 $EF^2=GE^2+GF^2=\frac{x^2}{2}+(1-x)^2=\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$. 当 $x=\frac{2}{3}$ 时，EF 有最小值$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

分析三 连结 A_1D、BD_1. 由 $D_1B_1 \parallel DB$ 可知，$D_1B_1 \parallel$ 平面 A_1DB. 这样把"求异面直线 D_1B_1、A_1B 的距离"转化为"求 D_1B_1 与平面 A_1DB 的距离"，即只需求出 B_1 到面 A_1DB 的距离 h（这时可利用"体积法"去处理）.

解法三 由 $V_{B_1\text{-}A_1DB} = V_{D\text{-}A_1B_1B}$，则 $\frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2}$，即得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

分析四 显然平面 $D_1B_1C \parallel$ 平面 A_1BD，所求距离可转化为求平面 D_1B_1C 与平面 A_1BD 的距离. 连结 AC_1，易知 AC_1 与它们都垂直，用体积法求出 A 到平面 A_1DB 的距离，便可求出结果（读者可自行求解）.

说明 从上述解答可以看到，在求异面直线间的距离时方法是多种多样的，关键在于如何把"距离"转化为"线段的长".

【例 5】 已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$SA = SB = SC = 2$，$AB = 2$. 设 S、A、B、C 四点均在以 O 为球心的某个球面上，求点 O 到平面 ABC 的距离.

分析 由 $SA = SB = SC = 2$ 知，S 在面 ABC 上的投影即为 $\triangle ABC$ 的外心，又因为 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故其为斜边 AB 的中点，从而确定点 O 到面 ABC 的距离.

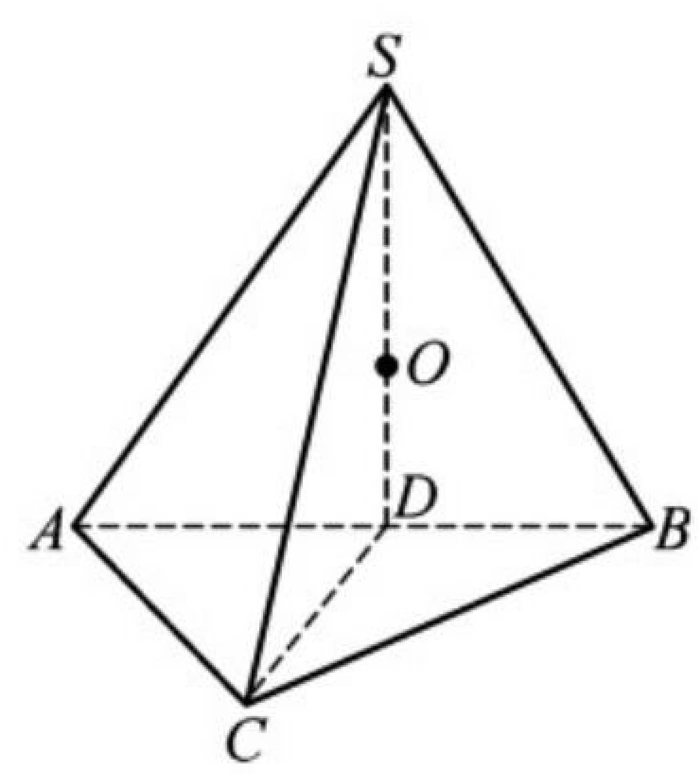


图 19－6

解 如图 19－6，过点 S 作平面 ABC 的垂线，D 为垂足，则由 $SA = SB = SC$ 可知，D 为 $\triangle ABC$ 的外心，从而 D 是 AB 的中点. 进一步，由于 O 为四面体 $S\text{-}ABC$ 的外接球的球心，故点 O 在 $\triangle ABC$ 所在平面的投影也是 $\triangle ABC$ 的外心，即 S、D、O 三点共线，且 OD 就是点 O 到平面 ABC 的距离. 设 $OD = x$，利用 $OA = OB = OC = OS$，可知 $\sqrt{1^2 + x^2} = SD - x = \sqrt{2^2 - 1^2} - x = \sqrt{3} - x$. 所以 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

说明 直角三角形的外心是斜边的中点. 同时关键在于说明 S、O、D 三点共线，从而确定 OD 为所求距离.

【例 6】 在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，侧棱 SC 等于底边 AB，且与底面 ABC 成 $60°$ 角，顶点 A、B、C 以及棱锥的侧棱中点都在半径为 1 的球上. 求证：此球的球心在棱 AB 上，并求此棱锥的高.

分析 可采用同一法，记 AB 的中点为 M，证明 SM 即为三棱锥的高.

解 如图 19－7，作 $SH \perp$ 底面 ABC，连结 HC，由已知 $\angle SCH = 60°$，在

$\triangle CHS$ 中，$SH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$HC=\dfrac{a}{2}$（a 表示 SC 的长）.

又已知 A、B、C 与相应侧棱中点 A_1、B_1、C_1 在一个球面上，则 A_1、A、B_1、B 四点共圆.

因为 $A_1B_1 \parallel AB$，所以，AA_1B_1B 是等腰梯形，且有 $AA_1=BB_1=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{1}{2}SB$.

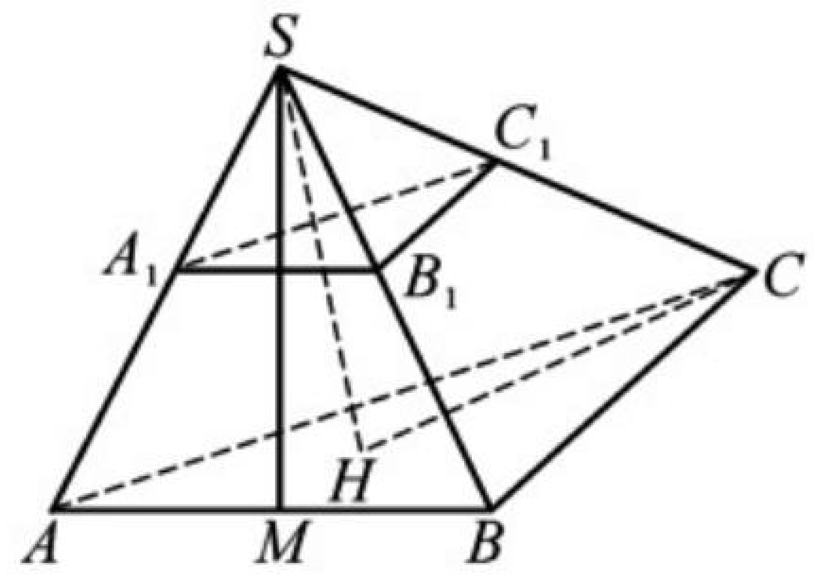


图 19－7

同理可证，$SA=SB=SC=AB=a$，故$\triangle ASB$ 是等边三角形，从而可知 $SM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，又 $SH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，得 $SM=SH$，这说明 H 与 M 重合.

如图 19－8，由于 $\angle SAH=\angle SBH=\angle SCH=60^\circ$，$HA=HB=HC=\dfrac{a}{2}$，且 $HA_1=HB_1=HC_1=\dfrac{a}{2}$，所以 H 是球心且在 AB 上，从而有 $a=2$，$SH=\sqrt{3}$.

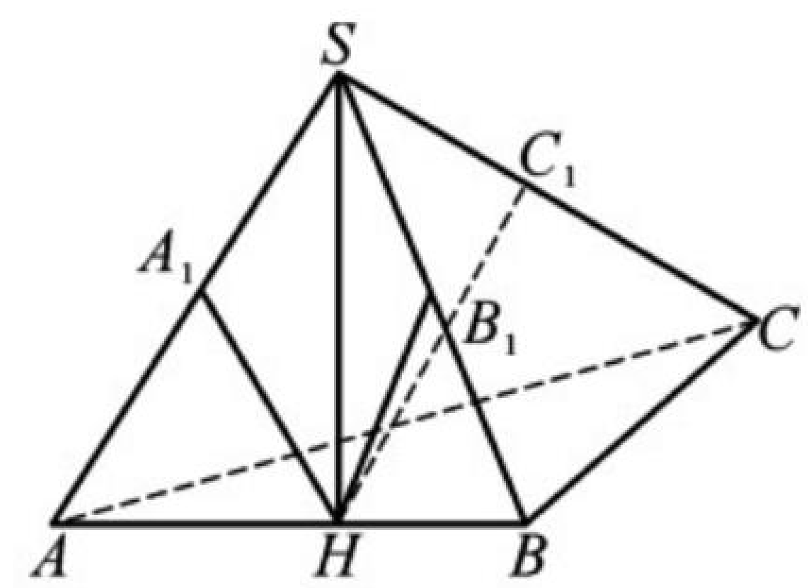


图 19－8

【例 7】 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1，在 AC 上取一点 P，过 P、A'、B' 三点作平面与底面所成的二面角为 α，过 P、B'、C' 三点作平面与底面所成的二面角为 β，求 $\alpha+\beta$ 的最小值.

分析 可先确定两个二面角的平面角，然后把两平面角转化到同一个三角形中.

解 如图 19－9，作 $PP'\perp A'C'$ 于 P'，易知，$PP'\perp$ 底面 $A'B'C'D'$. 作 $P'N\perp A'B'$，则 $PN\perp A'B'$. 同理，可作 $P'M\perp B'C'$ 得 $PM\perp B'C'$. 将$\triangle PP'N$ 绕 PP' 旋转使之落到平面$PA'P'$ 中，将$\triangle PP'M$ 绕 PP' 旋转到平面 $PA'P'$ 上，从而得到以 α、β 为两底角的新三角形 $PN'M'$.

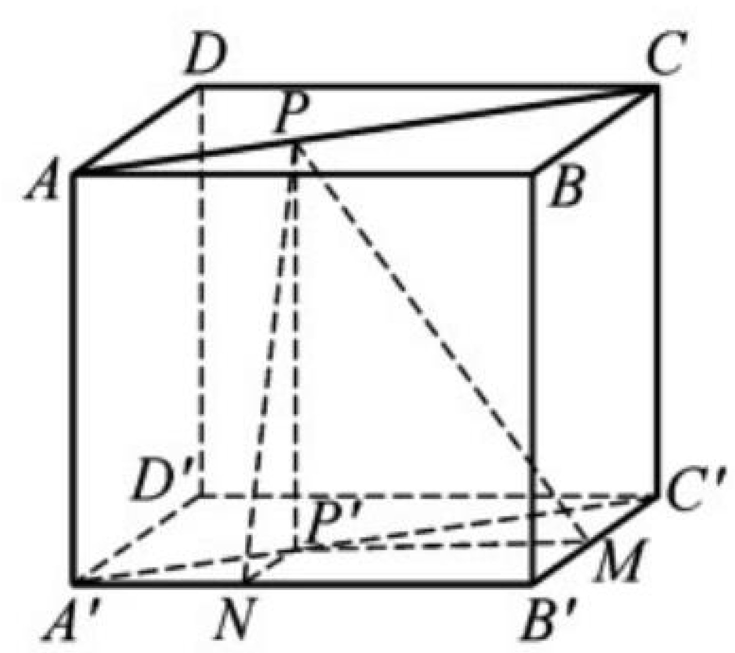


图 19－9

设 $AP=x$，则 $N'P'=NP'=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，$P'M'=P'M=\dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$，

所以，$N'M'=N'P'+P'M'=1$.

由 $\begin{cases} S_\triangle=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha, \\ \cos\alpha=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$ 知，当$\triangle PM'N'$ 底边长、高一定，其余两边相等时，

$\angle N'PM'$ 最大，$\alpha+\beta=\pi-\angle N'PM'$ 为最小. 此时，$N'P'=\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=2$. 又 P 在

AC 中点，$\alpha=\beta$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\tan 2\alpha=-\dfrac{4}{3}$，即 $(\alpha+\beta)_{\min}=\pi-\arctan\dfrac{4}{3}$.

说明 本题利用旋转将空间问题转化为平面问题，使问题得到简化.

【例 8】 是否存在一个平面 π 和一个正四面体 T，使得 π 截 T 所得截面是一个三角形，且该三角形有一个内角大于 $120°$？

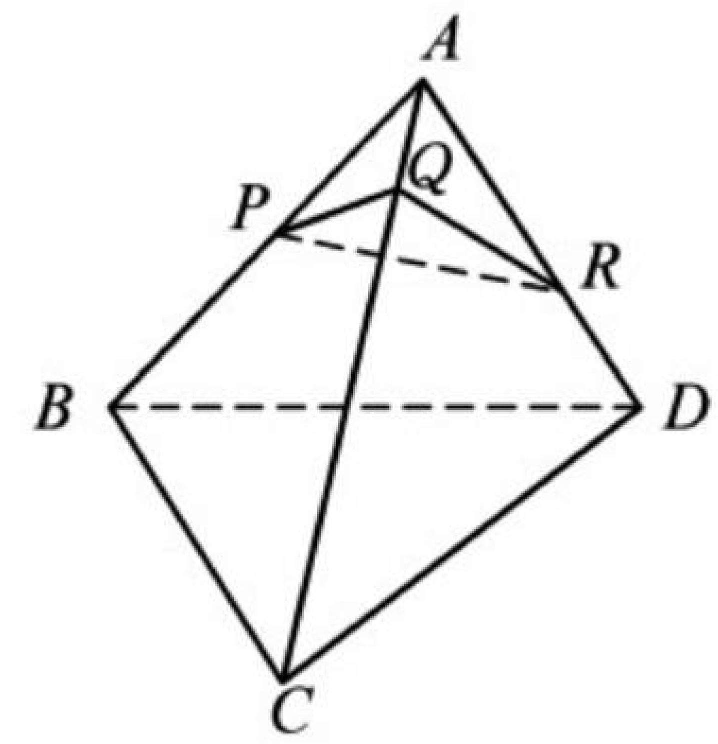


图 19－10

解 不妨设平面 π 交正四面体 T 的棱 AB，AC，AD 于点 P，Q，R，并使得 $\angle PQR>120°$.

为计算方便，我们设 $AP=x$，$AQ=1$，$AR=y$. 则由余弦定理可知

$$PQ^2=x^2-x+1,\ QR^2=y^2-y+1,\ RP^2=x^2+y^2-xy.$$

这里用到正四面体中的每一个面都为正三角形.

结合 $\angle PQR>120°$，我们有

$$\begin{aligned}RP^2&=PQ^2+QR^2-2PQ\cdot QR\cdot\cos\angle PQR\\&>PQ^2+QR^2+PQ\cdot QR.\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-xy>x^2+y^2-x-y+2+\sqrt{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}\\\Leftrightarrow&x+y-xy-2>\sqrt{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}\\\Leftrightarrow&(x+y-xy-2)^2>(x^2-x+1)(y^2-y+1)\\\Leftrightarrow&3+5xy>x^2y+y^2x+3(x+y)\\\Leftrightarrow&3+5xy>(x+y)(xy+3).\qquad①\end{aligned}$$

这里用到 $x+y>xy+2$（它由 $\triangle PQR$ 中，$\angle PQR>90°$ 可得），进一步，再用一次这个式子，由①可得

$$3+5xy>(xy+2)(xy+3)\Leftrightarrow(xy)^2+3<0.$$

矛盾.

所以，不存在这样的平面 π 和 T.

说明 平面去截多面体所得截面的内角是平面上的角，更多需要用到平面几何中的结论.

练习题

A组

一、填空题

1 正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等，如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点，则 EF 与 SA 所成的角等于________.

2 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=1$，则 P 到对角线 BD 的距离为________.

3 设异面直线 a、b 所成角为 80°，P 为空间中一点，一条过 P 的直线与 a、b 所成角都是 50°，则这样的直线有且仅有________条.

4 与空间不共面的 4 个点距离都相等的平面有________个.

5 $ABCD$ 是正方形，E 是 AB 的中点，如将 $\triangle DAE$ 和 $\triangle CBE$ 分别沿 DE 和 CE 折起，使 AE 和 BE 重合，设 A 与 B 重合的点为 P，则面 PCD 与面 ECD 所成的二面角的大小为__________.

6 把半径为 1 的 4 个小球叠成两层放在桌面上，使下层 3 个，上层 1 个，且两两相切，则上层小球最高点到桌面的高度为__________.

二、解答题

7 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 M、N 分别为 BB_1、B_1C_1 的中点，求直线 MN 与正方体的体对角线 AC_1 所在直线的距离.

8 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的九条棱全部都等于 1，且 $\angle A_1AB=\angle A_1AC=\angle BAC$. 点 P 是侧面 A_1ABB_1 的对角线 A_1B 上一点，$A_1P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，连结 PC_1，求直线 PC_1 与 AC 所成的角的大小.

9 点 E 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC 的中点，F 为 AA_1 上的点，并且 $\dfrac{A_1F}{FA}=\dfrac{1}{2}$. 求面 B_1EF 与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角的大小.

10 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是一个边长为 $4\sqrt{2}$ 的正三角形，侧棱 $SC\perp$ 面 ABC，且 $SC=2$，E、D 分别为 BC 与 BA 的中点. 求异面直线 CD 与 SE 之间的距离.

11 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=6$，$CC_1=8$，D 为 AC 的中点，求异面直线 BD 与 AC_1 的距离.

B组

12 在棱长都相等的四面体 $A-BCD$ 中，E、F 分别为棱 AD、BC 的中点，连结 AF、CE.

(1) 求异面直线 AF、CE 所成的角的大小；

（2）求 CE 与底面 BCD 所成角的大小.

13 设 l、m 是两条异面直线，在 l 上有 A、B、C 三点，且 $AB = BC$，过 A、B、C 分别作 m 的垂线 AD、BE、CF，垂足依次为 D、E、F，已知 $AD = \sqrt{15}$，$BE = \frac{7}{2}$，$CF = \sqrt{10}$，求 l 与 m 的距离.

14 设 P 为一个单位球上的一点，过 P 作三条两两垂直的弦 PA，PB，PC.

（1）求四面体 $P-ABC$ 的体积的最大值；

（2）求点 P 到面 ABC 的距离的最大值.

15 设 α 是一个给定的平面，A，B 是平面 α 外的两个确定的点. 在 α 上求一点 P，使得 $\angle APB$ 最大.

第20讲　截面、折叠和展开

一、知识要点和基本方法

截面、折叠和展开是立体几何中的三类问题，解决过程中需要有较强的空间想象力.

1. 截面问题

截面问题经常涉及立几中的作图和计算两个方面. 需要指出的是：空间中画出的每一条直线、圆等都必须在平面上才能实现，正确地作出符合要求的截面是求解截面问题的关键.

2. 平面折叠问题

折叠问题应把握的关键是：哪些量是不变的？哪些量经过翻折后产生了变化？

3. 立几图形的展开

有些问题的解决过程中，需要将立几图形的表面展开在一个平面上，然后将空间几何体不同表面上的两个点之间沿表面行走产生的距离等问题转化到平面上去解决. 这也是解决立几问题时的常见思路：将三维空间上的问题化归至平面上去处理.

二、例题精讲

【例1】 能否用一个平面去截一个正方体，使得截面为五边形？进一步，截面能否为正五边形呢？

解 如图 20－1，点 I 是 B_1B 延长线上一点，使得 $IB=\dfrac{1}{2}BB_1$，E 为 A_1D_1 的中点，F 为 A_1A 上的点，使得 $\dfrac{AF}{A_1F}=\dfrac{1}{3}$. 则截面 C_1EFGH 为过直线 EF 与 C_1I（这里 $EF\parallel C_1I$）的平面与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 相截所得的凸五边形截面.

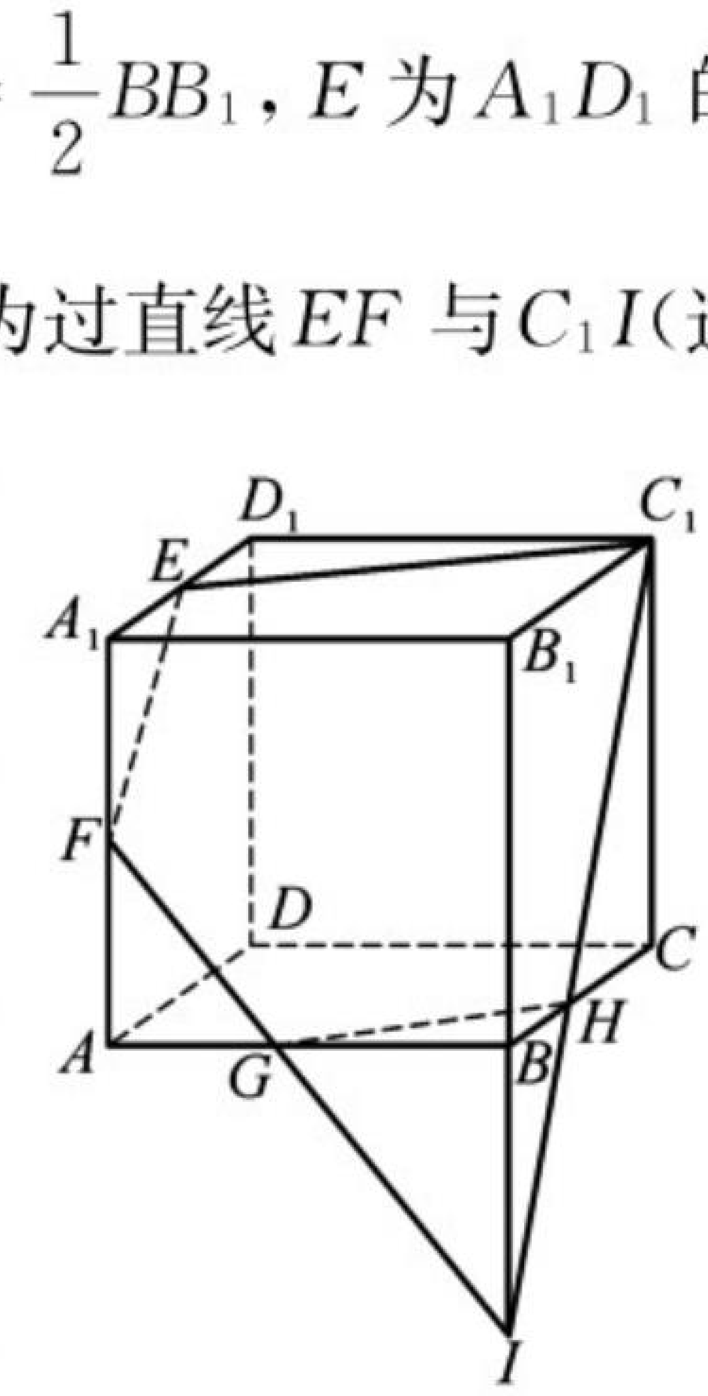


图 20－1

用一个平面去截一个正方体所得截面不能是一个正五边形.

事实上，若截面可以为一个正五边形，则此五边形的五条边分属于此正方体的五个不同的面.

我们将正方体的每两个相对的面作为一个抽屉，则上述包含正五边形的边的五个面中，必有两个面为相对的平面，它们是平行的，利用平行平面的性质，可知此五边形中

有两条边是平行的.但是正五边形的五条边是彼此不平行的,矛盾.

说明 事实上,我们很容易用平面截正方体得到正三角形、正方形和正六边形截面,对此问题的进一步思考就得到了例 1 提出的问题.正所谓俯拾皆学问,希望读者不断思考,努力进取.

【例 2】 已知图 20-1 所示的正方体的棱长为 1,点 I、E、F 如例 1 中所述,求截面 C_1EFGH 的周长.

分析 可利用比例线段分别求出各边长.

解 由例 1 中所述条件,$\dfrac{AF}{AA_1}=\dfrac{1}{4}$,$\dfrac{BI}{BB_1}=\dfrac{1}{2}$,结合 $AF \parallel BI$,$BH \parallel B_1C_1$,可知

$$\frac{AG}{GB}=\frac{AF}{BI}=\frac{1}{2},\ \frac{BH}{B_1C_1}=\frac{BI}{B_1I}=\frac{1}{3},$$

于是 $BG=\dfrac{2}{3}$,$BH=\dfrac{1}{3}$,所以

$$GH=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$C_1H=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3},$$

$$FG=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{5}{12},$$

$$EF=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4},$$

$$C_1E=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

从而,截面 C_1EFGH 的周长为 $\dfrac{5}{12}+\dfrac{5\sqrt{5}}{6}+\dfrac{7\sqrt{13}}{12}$.

说明 例 1 中要截出一个五边形不必要对 I、E、F 的选取作定量上的要求,只是为了给出例 2 条件,此外,若将 C_1E 和 IF 延长交于点 J,则利用相似形和海伦公式可以求出截面 C_1EFGH 的面积.

【例 3】 将长与宽各为 4 和 3 的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角 B_1-AC-D,$AD=4$.

(1) 求二面角 B_1-CD-A 的大小;

(2) 求异面直线 AB_1 与 CD 的距离.

分析 (1) 利用面面垂直的性质构造垂线,从而借助于三垂线定理确定二面角的平面角.

(2) 线线距离可转化为 CD 与面 ABB_1 间的距离,再由体积法求解.

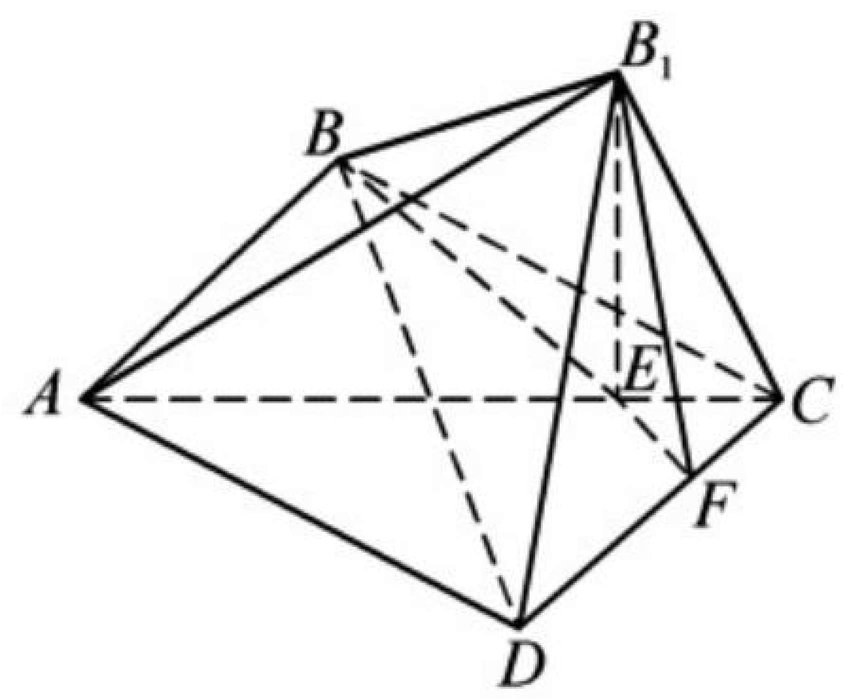


图 20-2

解 (1) 过 B_1 作 $B_1E\perp AC$ 于 E,过 E 作 $EF\perp CD$ 于 F,连结 B_1F,则由二面角 B_1-AC-D 为直二面角可知 $B_1E\perp$ 面 ACD,利用三垂线定理可知 $B_1F\perp CD$,所以$\angle B_1FE$ 为二面角 B_1-CD-A 的平面角.

由三角形的面积公式可知,

$$\frac{1}{2}B_1E\cdot AC=\frac{1}{2}AB_1\cdot B_1C.$$

于是,$B_1E=\frac{12}{5}$,进而

$$CE=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}.$$

注意到,$EF\mathbin{/\mkern-4mu/}AD$,故$\triangle CEF\backsim\triangle CAD$,从而

$$\frac{EF}{AD}=\frac{CE}{CA}=\frac{16}{25},$$

进而,$EF=\frac{64}{25}$. 所以

$$\tan\angle B_1FE=\frac{B_1E}{EF}=\frac{12}{5}\times\frac{25}{64}=\frac{15}{16},$$

所以,所求二面角 $B_1-CD-A=\arctan\frac{15}{16}$.

(2) 注意到 $AB\mathbin{/\mkern-4mu/}CD$,故异面直线 AB_1 与 CD 的距离等于点 D 到平面 AB_1B 的距离 h.

注意到,

$$\begin{aligned}V_{B_1\text{-}ABD}&=\frac{1}{3}\times B_1E\times\frac{1}{2}AB\times AD\\&=\frac{1}{3}\times\frac{12}{5}\times\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{24}{5}.\end{aligned}$$

又由于 $BB_1^2=BE^2+B_1E^2=AB^2+AE^2-2AB\times AE\times\cos\angle BAC+B_1E^2=$

$9+\left(5-\frac{16}{5}\right)^{2}-2\times3\times\left(5-\frac{16}{5}\right)\times\frac{3}{5}+\left(\frac{12}{5}\right)^{2}$，所以，$BB_1=\frac{12\sqrt{2}}{5}$，从而点 A 到 BB_1 的距离 h_1 为

$$h_1=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BB_1}{2}\right)^2}=\sqrt{9-\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{17}}{5}.$$

这样，我们有

$$V_{D\text{-}AB_1B}=\frac{1}{3}h\times\frac{1}{2}\times h_1\times BB_1=\frac{6\sqrt{34}}{25}h.$$

结合 $V_{D\text{-}AB_1B}=V_{B_1\text{-}ABD}$，可知 $h=\frac{10\sqrt{34}}{17}$.

所以，异面直线 AB_1 与 CD 的距离为$\frac{10\sqrt{34}}{17}$.

说明 求两异面直线间的距离上一讲已经涉及，常以以下途径转化：线线距离$\xrightarrow{\text{线面平行}}$线面距离$\xrightarrow{\qquad}$点面距离(然后利用体积法等方法去处理).

【例 4】 如图 20－3 所示，一个圆台的上底半径为 5，下底半径为 10，母线 $A_1A_2=20$. 一只蚂蚁从 A_1A_2 的中点 M 绕圆台侧面转到下底面圆周上的点 A_2.

(1) 求蚂蚁爬行的最短距离；

(2) 求蚂蚁在爬行过程中(沿最短距离爬行)，蚂蚁与上底面圆周上的点的最短距离.

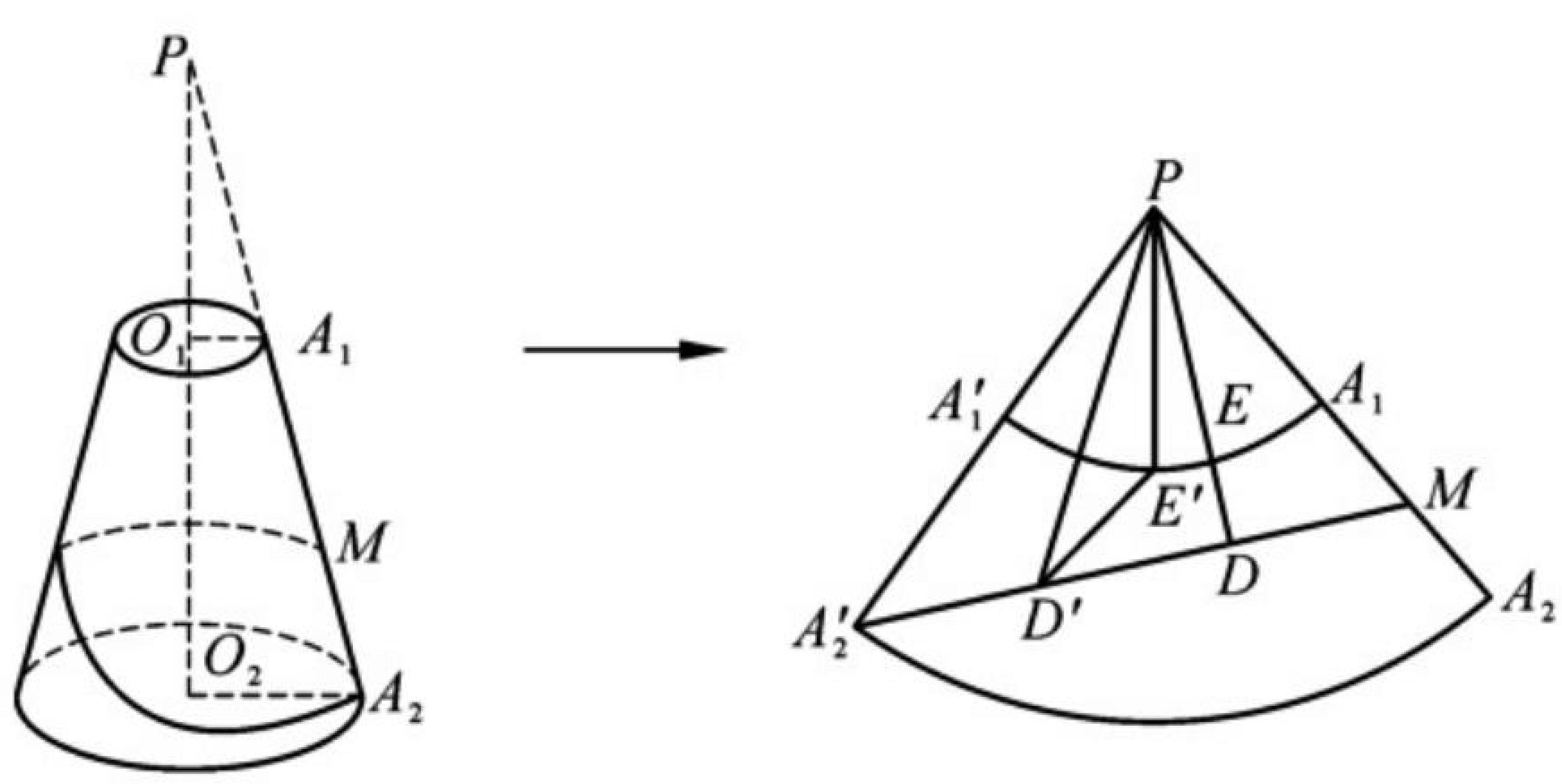


图 20－3

解 我们将圆台的侧面沿母线 A_1A_2 剪开，并展开为一个扇环.

设 A_2A_1 与 $A_2'A_1'$的延长线交于点 P. 利用 $\triangle PA_1O_1\backsim\triangle PA_2O_2$，可知

$$\frac{PA_1}{PA_2}=\frac{O_1A_1}{O_2A_2}=\frac{1}{2},$$

于是 $PA_1=\frac{1}{2}PA_2=\frac{1}{2}(PA_1+A_1A_2)=\frac{1}{2}(PA_1+20)$，故 $PA_1=20$. 所以，

$\angle A_1'PA_1=\frac{10\pi}{20}=\frac{\pi}{2}$.

（1）连结 $A_2'M$，如果 $A_2'M$ 与扇形 $A_1'PA_1$ 没有交点，则线段 $A_2'M$ 的长度即为蚂蚁爬行的最短距离.

利用 $\angle A_2'PM$ 为直角，可知

$$A_2'M^2=A_2'P^2+PM^2=40^2+30^2=50^2,$$

故 $A_2'M=50$. 这时，我们过 P 作 $PD\perp A_2'M$ 于 D，则

$$PD=\frac{PA_2'\cdot PM}{A_2'M}=\frac{30\times 40}{50}=24>PA_1,$$

这表明 $A_2'M$ 与扇形 $A_1'PA_1$ 没有交点，所以，蚂蚁爬行的距离最小为 50.

（2）设 PD 交弧 $A_1'A_1$ 于点 E，我们证明 ED 即为蚂蚁在沿最短距离爬行时，与上底圆周上的点的最小距离.

事实上，设 $D'E'$ 为所求的最小距离，则

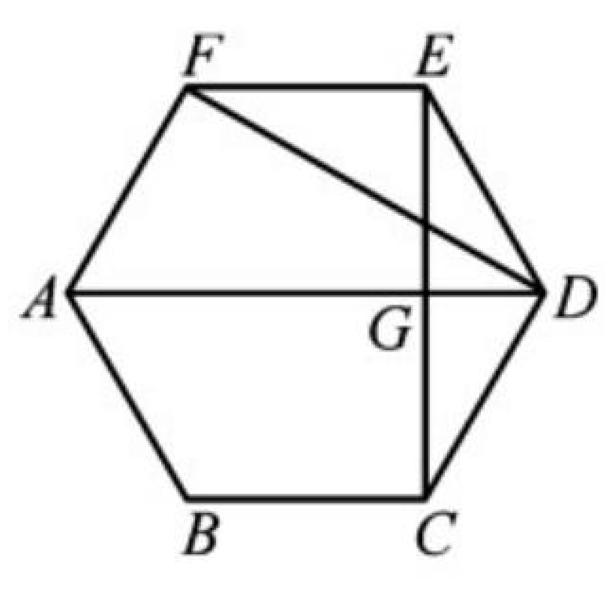
$$PE'+E'D'\geqslant PD'\geqslant PD=PE+ED=PE'+ED,$$

所以 $E'D'\geqslant ED$，这表明，所求的最小距离等于 $ED=4$.

说明　上式中第一个不等号是利用三角形两边之和大于第三边，第二个不等号是利用点到直线的距离以垂线段最短.

【例 5】　$ABCDEF$ 是边长为 a 的正六边形. 将此正六边形沿对角线 AD 折成二面角 $M-AD-N$，问二面角 $M-AD-N$ 多大时，FC 与 AD 所成的角为 $45°$？并求此时三棱锥 $F-ECD$ 的体积.

分析　如图 20－4，将立体图形与平面图形对照，折叠后仍有 $EG\perp AD$，$CG\perp AD$. 所以 $\angle EGC$ 是二面角 $M-AD-N$ 的平面角. 因 $EF\parallel AD$，故问题转化为求当 $\angle CFE=45°$ 时，$\angle EGC=$？$V_{F\text{-}ECD}=$？



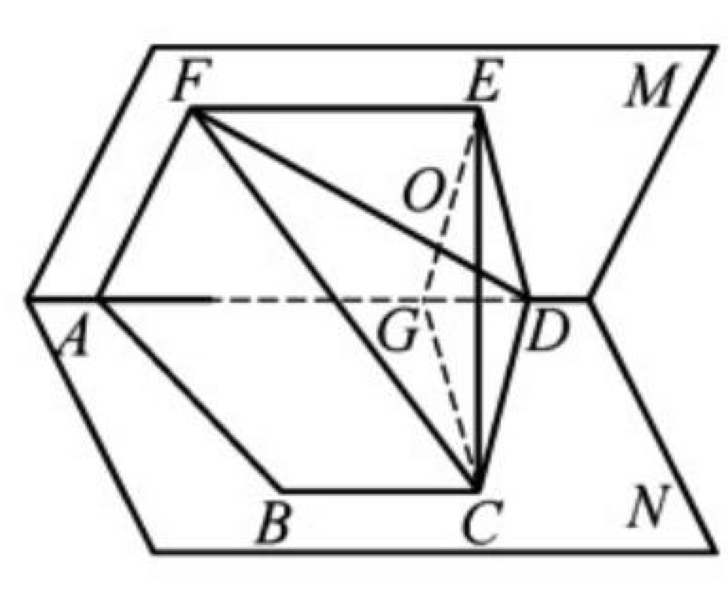


图 20－4

解　因 $EG\perp AD$，$CG\perp AD$，所以 $AD\perp$ 平面 EGC. $\angle EGC$ 为二面角 $M-AD-N$ 的平面角，又 $FE\parallel AD$，所以 $FE\perp$ 平面 EGC. 故

$$FE \perp EC,\ \angle EFC = 45^\circ,\ EC = EF = a.$$

易知 $EG = CG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

在$\triangle EGC$中,由余弦定理,得

$$\cos\angle EGC = \frac{EG^2 + CG^2 - EC^2}{2EG \cdot CG} = \frac{1}{3}.$$

所以 $\angle EGC = \arccos\dfrac{1}{3}$.

又 $FE = ED = a$, $\angle FED = 120^\circ$,求得 $FD = \sqrt{3}a$. 而 $FC = \sqrt{2}a$, $CD = a$,故$\triangle FDC$为直角三角形. 从 E 点作 $EO \perp$平面 FDC 于 O.

又 $EF = ED = EC = a$,所以 O 为$\triangle FDC$的外心,即 O 为斜边 FD 的中点.

$EO = \sqrt{EF^2 - FO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \dfrac{a}{2}$. 故

$$V_{F\text{-}EDC} = V_{E\text{-}FDC} = \frac{1}{3}EO \cdot S_{\triangle FDC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}a \cdot \sqrt{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

说明 折叠前后 $EG \perp AD$、$CG \perp AD$ 这两个垂直关系不变,从而确定平面角,从而转化为平面内的解三角形问题.

【例 6】 已知四面体 $ABCD$ 四个面的面积都为 1,点 E、F、G 分别为棱 AB、AC、AD 上的点,求证: $S_{\triangle EFG} \leqslant 1$.

证明 即证截面面积不大于任一侧面面积(当四面体的四个面的面积相同时). 如图 20 - 5 所示,设$\triangle EFG$所在平面为π,并设在 B、C、D 三点中,点 C 到π的距离最短,过 C 作π 的平行平面,交 AB、AD 于点 E'、G',则 $S_{\triangle EFG} \leqslant S_{\triangle CE'G'}$.

设 A、G'、D 到直线 CE' 的距离分别为 d_1、d_2、d_3. 我们先证明: $d_2 \leqslant \max\{d_1, d_3\}$.

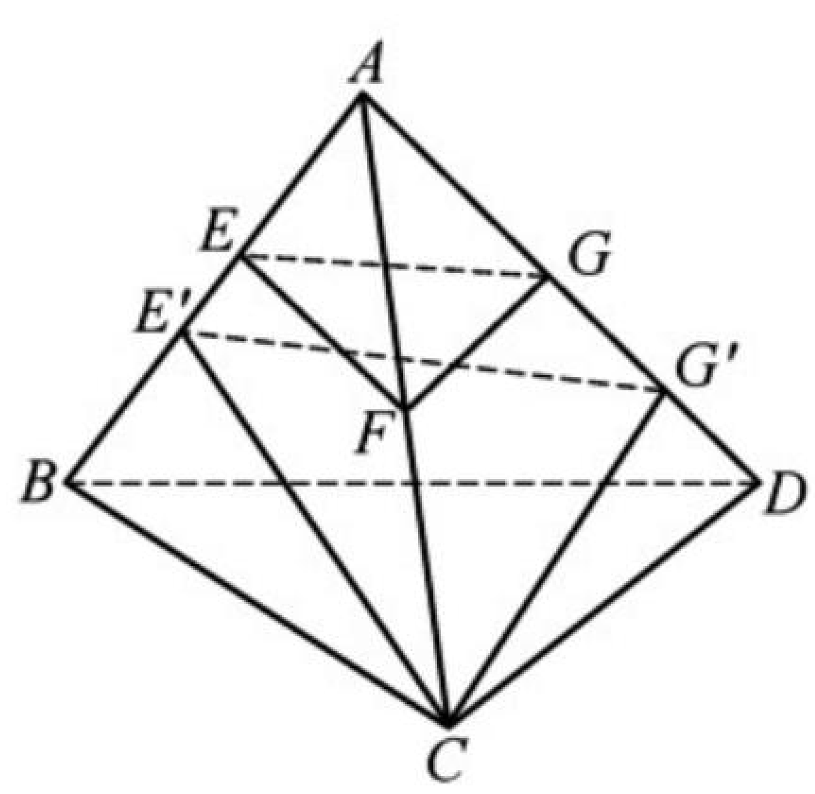


图 20 - 5

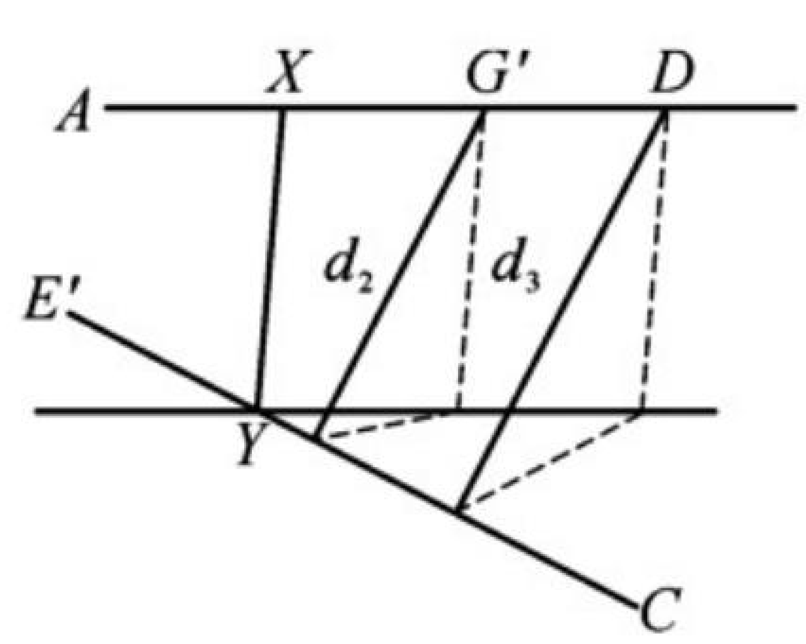


图 20 - 6

利用图 20 - 6,不妨设 G'、D 在点 X 的同侧(这里 XY 为 AD 与 CE'的公垂线

段),利用勾股定理可以证明:$d_2 \leqslant d_3$. 于是,$d_2 \leqslant \max\{d_1, d_3\}$.

由上述结论,可知 $S_{\triangle CE'G'} \leqslant \max\{S_{\triangle ACE'}, S_{\triangle DCE'}\}$,又 $S_{\triangle ACE'} \leqslant S_{\triangle ABC}$,类似于前面的做法,还有 $S_{\triangle DCE'} \leqslant \max\{S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}\}$.

所以,有 $S_{\triangle EFG} \leqslant \max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}\}$.

注意到,我们做了点 C 到 π 的距离最短之假定,所以,一般的结论是 $S_{\triangle EFG} \leqslant \max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}, S_{\triangle ABD}\}$. 结合题中的条件,可知 $S_{\triangle EFG} \leqslant 1$.

说明 题中的结论 $d_2 \leqslant \max\{d_1, d_3\}$ 经常用到,请推广到一般的情况. 本题本质上是证明了:四面体被任一平面所截,所得三角形面积不能超过四个面中的最大面积.

【例7】 如图 20－7,H 为$\triangle ABC$ 的垂心. D、E、F 分别是 BC、CA、AB 边的中点,一个以 H 为中心的圆交 DE 于 P、Q,交 EF 于 R、S,交 FD 于 T、V. 求证:$CP = CQ = AR = AS = BT = BV$.

分析 本题是一个平面几何问题,用平几方法直接证明,困难很大. 注意到 D、E、F 分别为 BC、CA、AB 中点的条件,若把$\triangle ABC$ 以 EF、DE、DF 为折线折起来,会发现造成一个三棱锥和一个圆锥,这样 AS、AR、CQ、CP、BV、BT 就是这个圆锥的母线,因此,它们彼此相等.

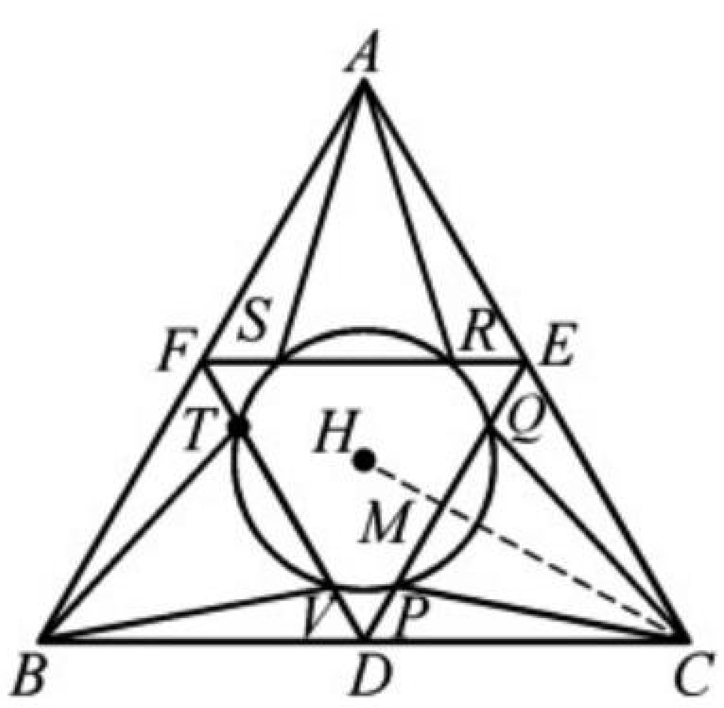


图 20－7

证明 在图 20－7 中,由于垂心 H 在$\triangle ABC$ 内,故知三角形 ABC 为锐角三角形,这时将$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CED$ 分别沿中位线 EF、FD、DE 折叠起来,得到四面体 $S'-EFD$,如图 20－8 所示,其中 S'就是$\triangle ABC$ 的三个顶点的汇集点.

在图 20－7 中,连结 CH 交 DE 于 M,则 $CH \perp DE$.

在折叠后的图 20－8 中,即 $S'M \perp DE$, $HM \perp DE$. 因此,$DE \perp$ 平面 $S'MH$,从而 $S'H \perp DE$.

同理可证 $DF \perp S'H$.

所以 $S'H \perp$ 底面 DEF.

因此 S' 和圆 H 是一个直圆锥的顶点和底面.

由于母线长相等,得

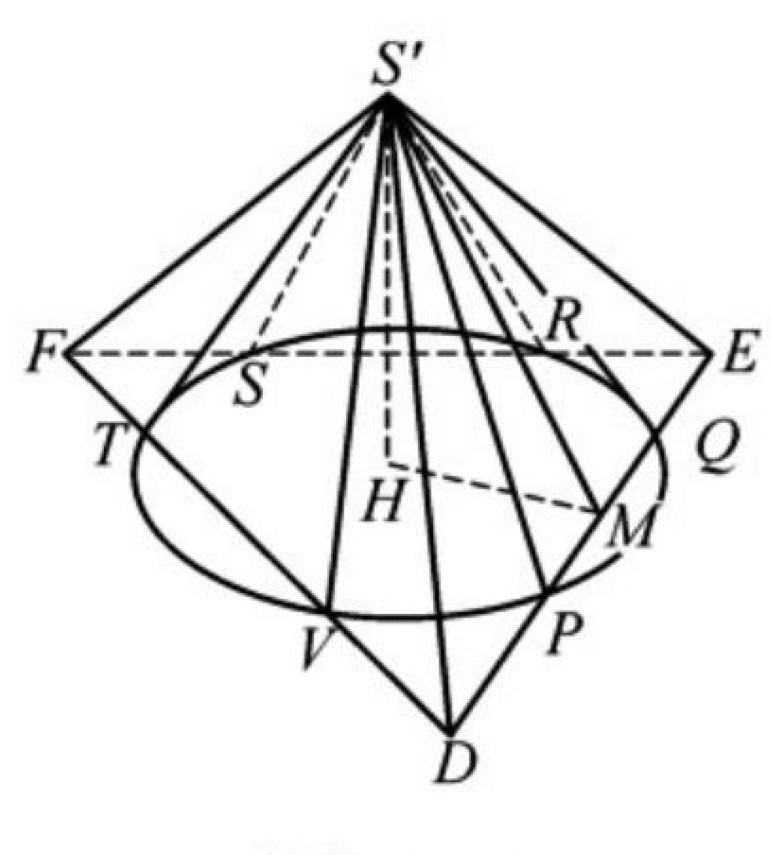


图 20－8

$$S'P = S'Q = S'R = S'S = S'T = S'V.$$

在折叠过程中,$S'P = CP$, $S'Q = CQ$, $S'R = AR$, $S'S = AS$, $S'T = BT$, $S'V = BV$, 即 $CP = CQ = AR = AS = BT = BV$.

说明 这里将平面问题立体化是问题获解的关键点,折叠在此处变为了一种手段.

【例 8】 设 O、A、B、C 是同一个平面上的四个点，使得 $OA=4$，$OB=2\sqrt{3}$，$OC=\sqrt{22}$. 求△ABC 的面积的最大可能值.

解 考虑一个四面体 $M-NPQ$(其存在性在后面证明)，使得 MN，MP，MQ 两两垂直，并设 H 为 M 在面 NPQ 上的射影，使得 $HN=4$，$HP=2\sqrt{3}$，$HQ=\sqrt{22}$.

我们不妨设 O、A、B、C 所在的平面就是面 NPQ，并且点 O 与 H 重合. 则

$$\begin{aligned}MA&=\sqrt{MO^2+OA^2}=\sqrt{MH^2+HN^2}\\&=MN.\end{aligned}$$

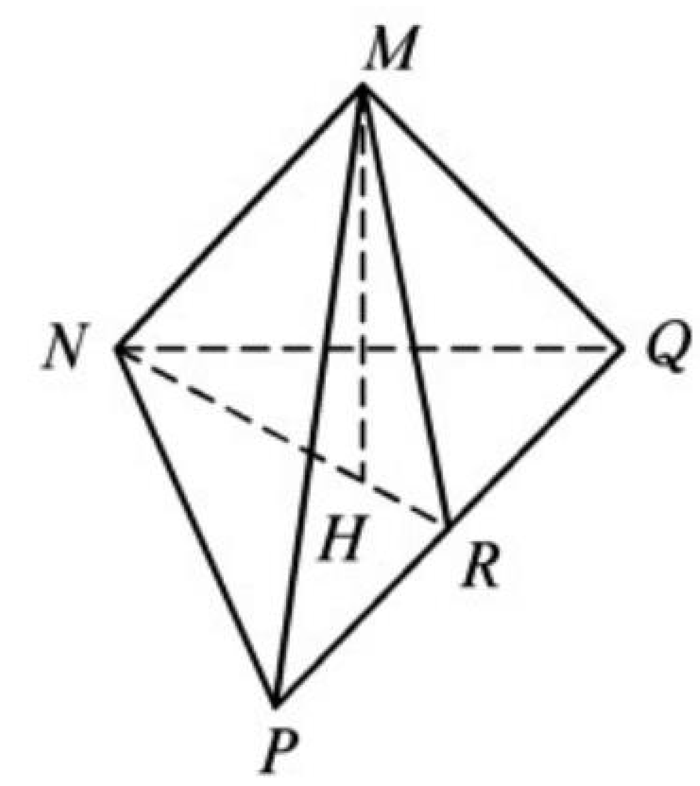


图 20-9

同理可证：$MB=MP$，$MC=MQ$. 于是，我们有

$$\begin{aligned}V_{M\text{-}ABC}&\leqslant\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABM}\cdot CM\\&\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}AM\cdot BM\right)\cdot CM\\&=\frac{1}{6}MN\cdot MP\cdot MQ=V_{M\text{-}NPQ}.\end{aligned}$$

依此可知，$S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle NPQ}$(注意，这里的推导过程中对同一个四面体从两个方向上去计算了体积，它是体积法处理立几问题的常用方法). 因此，问题转为去证四面体 $M-NPQ$ 的存在性，然后去求△NPQ 的面积.

下证：符合上述条件的四面体 $M-NPQ$ 是存在的.

证明的突破口是去确定 MH 的长度应满足的必要条件，为此，设 $MH=x$，直线 NH 交 PQ 于 R(如图 20-9). 则 $MN=\sqrt{x^2+16}$，$MP=\sqrt{x^2+12}$，$MQ=\sqrt{x^2+22}$.

注意到，两个直角三角形中，$\triangle NMR\backsim\triangle NHM$，故 $MR=HM\cdot\dfrac{NM}{NH}=\dfrac{x}{4}\cdot\sqrt{x^2+6}$. 进一步，由四面体 $M-NPQ$ 的结构，有 $MN\perp$ 面 MPQ，故 $MN\perp PQ$. 而 $MH\perp$ 面 NPQ，故 $MH\perp PQ$，从而 $PQ\perp$ 面 NMR，得 $PQ\perp MR$. 在△PMQ 中，利用两个方向去算其面积，就有 $MR\cdot PQ=MP\cdot MQ$，即

$$\frac{x}{4}\cdot\sqrt{x^2+16}\cdot\sqrt{(x^2+12)+(x^2+22)}=\sqrt{x^2+12}\cdot\sqrt{x^2+22}.$$

上式两边平方，整理可得

$$x^6+25x^4-3\times11\times64=0.$$

视其为 x^2 的一个三次方程，只有唯一的正实根，解得 $x^2=8$，即 $x=2\sqrt{2}$.

现在 MN, MP, MQ 的长度都可确定,从而$\triangle NPQ$ 的三边长亦可确定,而可先作出$\triangle NPQ$,然后确定其垂心 H,再过 H 作一直线垂直于面 NPQ,在该直线上取点 M,使 $MH=2\sqrt{2}$,即可得出四面体 $M-NPQ$ 的存在性.

最后,

$$S_{\triangle NPQ}=\frac{3\cdot V_{M-NPQ}}{MH}=\frac{MN\cdot MP\cdot MQ}{2MH}$$
$$=\frac{\sqrt{(x^2+16)(x^2+12)(x^2+22)}}{2x}=15\sqrt{2}.$$

综上可知,$\triangle ABC$ 的面积的最大可能值为 $15\sqrt{2}$.

说明 这里采用"拧起来"(将 O 拧到 M)的做法将一个平几问题转为一个立几问题,解法有趣而富有创造性(比直接去证 O 为$\triangle ABC$ 的垂心时 $S_{\triangle ABC}$ 最大要简洁便当).

练习题

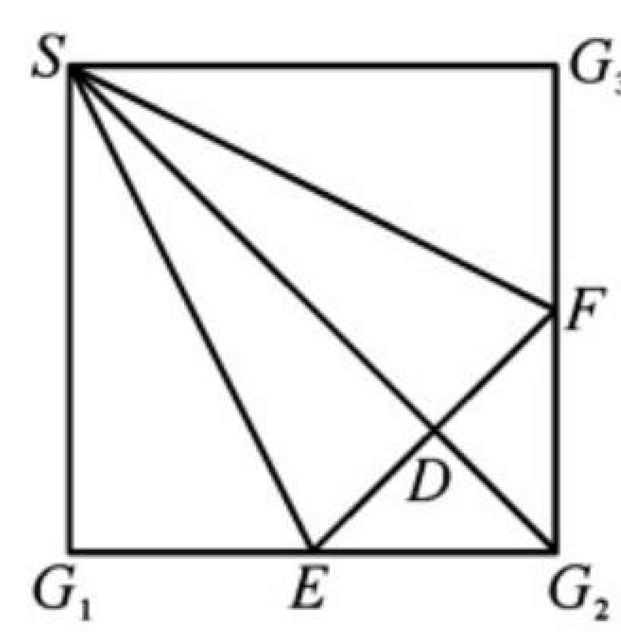
A组

一、填空题

1 过单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一条对角线 BD_1 作截面,则截面面积的最小值为________.

2 在矩形 $EFGH$ 中,已知 $EF=2\sqrt{3}$, $FG=2$,现沿对角线 EG 将它折成直二面角,则此时 F、H 两点间距离等于________.

3 如图,在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中,E、F 分别是 G_1G_2 及 G_2G_3 的中点,D 是 EF 的中点.现在沿 SE、SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体.使 G_1、G_2、G_3 三点重合,重合后的点记为 G,那么,在四面体 $S-EFG$ 中直线 SG 与$\triangle EFG$ 所在平面的位置关系是________.



(第3题)

4 用一个平面去截棱长为 a 的正方体,得到截面是一个四边形,这个四边形面积的取值范围是________.

5 若圆锥母线长为 l,顶角为 α,则过圆锥顶点的截面面积 S 最大为________.

6 四边形 $ABCD$ 是边长 a 的菱形,$\angle BAD=60^\circ$,沿对角线BD 折成 120° 的二面角 $A-BD-C$ 后,AC 与 BD 的距离为________.

二、解答题

7 三棱锥 $P-ABC$ 中,已知 $PA\perp$面 ABC, $AB\perp AC$,且 $AC=a$, $AB=2a$, $PA=3a$.过 AB 作截面交 PC 于点 D,求截面 ABD 的最小面积.

8 已知一个三棱台 $ABC-DEF$ 中，上底面$\triangle DEF$ 的面积为 a^2，下底面$\triangle ABC$ 的面积为$b^2(0<a<b)$. 且棱 BC 到截面AEF 的距离等于棱台的高h，求截面$\triangle AEF$ 的面积.

9 将一张正方形纸片折成一正四棱柱的侧面，试求一条体对角线与折成的四侧面两两所成的角的大小.

10 设 n 为正整数，存在一个圆锥，其表面积等于其内切球的表面积的 n 倍.求 n 的所有可能值.

B 组

11 在三维空间中，球面 S 和凸多面体 P 之间具有如下性质：S 截 P 的每一条棱 AB 所得的线段 XY 满足：$|AX|=|XY|=|YB|=\dfrac{1}{3}|AB|$. 求证：存在一个球面与 P 的每条边都相切.

12 设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 PO，M 为 PO 中点，过 AM 作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥分为上、下两部分，试求此两部分体积比.

13 将边长分别是 $2a$、$2b$、$2c$ 的锐角三角形的各边中点连结起来，形成四个三角形，它是一个四面体的展开图，求这个四面体的体积.

14 在一个边长为 a 的正三角形 ABC 中，直线 EF 与 BC 平行(直线 EF 与 AB、AC 分别相交于 E、F)，将$\triangle AEF$ 沿 EF 折起至 $A'EF$，使面 $A'EF\perp$ 面 $BCFE$. 求当 EF 离 BC 多远时，$A'B$ 的长为最小?

第21讲 射影与面积射影定理

一、知识要点和基本方法

在直角三角形 ABC 中，若 $\angle C = 90°$，则 $AC = AB \cdot \cos\angle A$，这里 AC 可理解为线段 AB 在直线 AC 上的射影，上述公式可以视为连结线段长度与其在某条直线上的射影长度之间的桥梁.

射影是几何中一个重要的概念，作为前述结论的一个空间推广有如下结论：

空间一条线段在平面 π 上的射影长度为 d，原线段长度为 l，那么 $d = l\cos\alpha$，这里 α 表示原线段所在直线与平面 π 所成的角.

进一步，三角形、四边形、凸多边形、圆等平面凸图形与它们在某个平面 π 上的射影之间有何关系呢？这一讲要阐述的面积射影定理正是对这一问题的思考而得到的一个重要结果.

面积射影定理 在二面角的一个半平面上的任意凸多边形的面积 S 与这个二面角的度数 α 的余弦之乘积，等于这个凸多边形在此二面角的另一个半平面上射影多边形的面积 S'，即

$$S' = S \cdot \cos\alpha.$$

注意，当 $\alpha > 90°$ 时，上述投影已不属于另一个半平面，而在另一个半平面所在平面上，这时，上述公式右边应加上绝对值(或者可以理解为“有向面积”).

进一步，上述面积射影定理并非仅对凸多边形成立，对圆也成立，事实上，只要是平面凸图形均成立.

二、例题精讲

【例 1】 已知四面体 $ABCD$ 四个面的面积都相等，求证：此四面体的三对对棱的长度相等.

分析 利用面积射影定理可把已知条件转化为二面角间的关系，进而可以由角及边.

证明 如图 21-1，设二面角 $A-DC-B$、$A-DB-C$、$A-BC-D$ 的大小分别为 α、β、γ. 而二面角 $C-AB-D$、$B-AC-D$、$C-AD-B$ 的大小分别为 x、y、z，利用面积射影定理可知 $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ACD} \cdot \cos\alpha + S_{\triangle ADB} \cdot \cos\beta + S_{\triangle ABC} \cdot \cos\gamma$，结合题目的条件，有 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

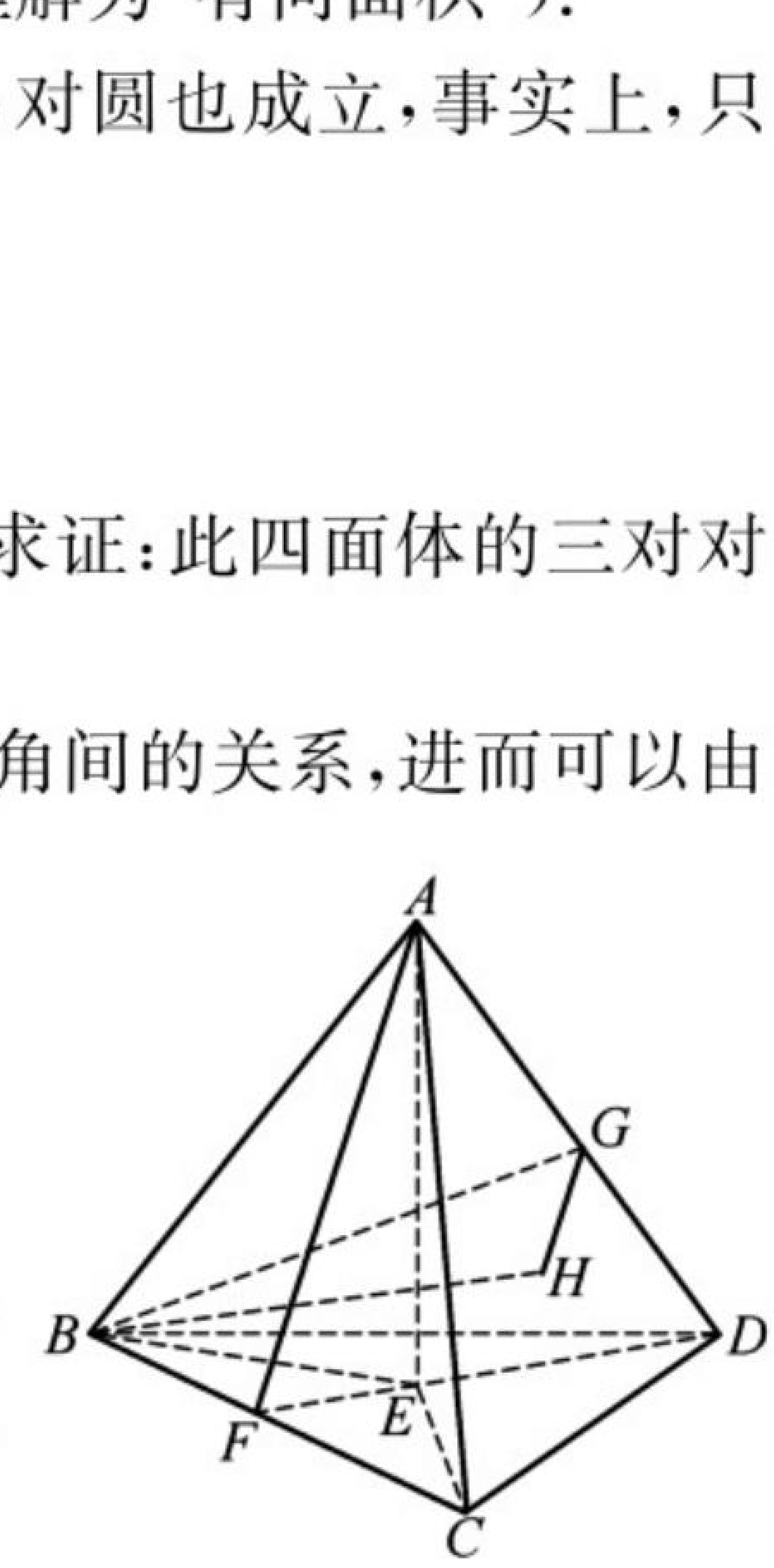


图 21-1

同理可证如下等式：

$$\cos x+\cos y+\cos\gamma=1,$$
$$\cos x+\cos\beta+\cos z=1,$$
$$\cos\alpha+\cos y+\cos z=1.$$

注意到 α、β、γ、x、y、z 都属于区间$(0, \pi)$,由上述等式可得 $\cos\alpha=\cos x$, $\cos\beta=\cos y$, $\cos\gamma=\cos z$, 从而 $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$.

利用 $\gamma=z$, 我们过 A 作 $AE\perp$面 BCD 于 E,过 E 作 $EF\perp AC$ 于 F,则 $\angle AFE=\gamma$, 类似地作出 $\angle BGH=z$.

由于
$$V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times AE\times S_{\triangle BCD},$$
$$V_{B\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\times BH\times S_{\triangle ACD},$$

结合 $V_{A\text{-}BCD}=V_{B\text{-}ACD}$ 以及 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}$ 可知, $AE=BH$. 而 $AE=AF\cdot\sin\gamma$, $BH=BG\sin z$, $\gamma=z$, 故 $AF=BG$. 再由

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AF\cdot BC,$$
$$S_{\triangle BAD}=\frac{1}{2}BG\cdot AD,$$
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD},$$

可得
$$BC=AD.$$

类似地,可以证明 $AB=CD$, $AC=BD$.

综上可知,命题成立.

说明 运用面积射影定理时,往往和面积公式及二面角结合在一起.

【例 2】 设 $A-BCD$ 是一个正四面体,π 是空间中的一个动平面. 证明:正四面体 $ABCD$ 各棱在平面 π 上的射影的平方和是一个常数.

证明 如图 21-2 所示,我们过正四面体 $ABCD$ 的每条棱作其对棱的平行平面,构成一个正方体.

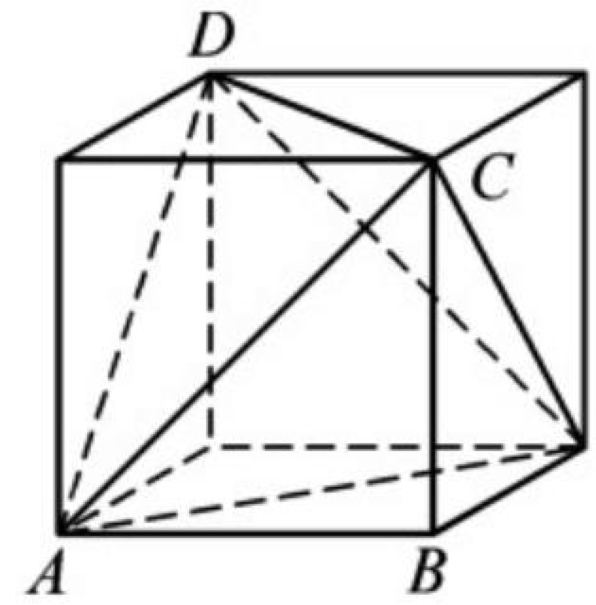


图 21-2

设由 A 引出的正方体的三条棱所在直线与平面 π 的法线所成的角分别为 α、β、γ,则有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2. \quad ①$$

这里①是一个熟知的结论,它的成立可依如下方法去证明:设 A 到平面 π 的射影为 E,则以 AE 为体对角线,从 A 出发的三条棱与从 A 出发的正方体的三条棱重合的长方体中(如图 21-3), $\angle XAE=$

α, $\angle YAE=\beta$, $\angle ZAE=\gamma$. 如果设 $AX=x$, $AY=y$, $AZ=\pi$, $AE=1$, 那么,

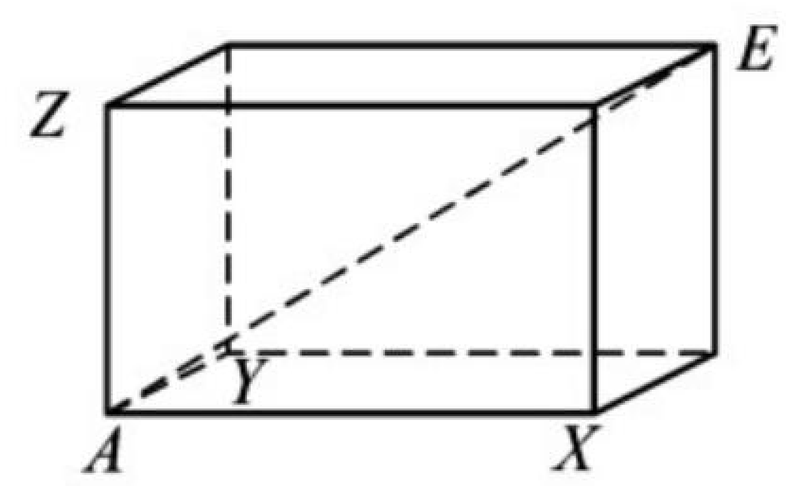


图 21－3

$$\cos\alpha=\sqrt{y^2+z^2},$$
$$\cos\beta=\sqrt{z^2+x^2},$$
$$\cos\gamma=\sqrt{x^2+y^2}.$$

而 $AE^2=AX^2+XE^2=x^2+y^2+z^2$, 由这些关系式即可得①成立.

利用上述结论可知,正方体的 12 条棱到平面 π 的射影的平方和为 $4b^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=4b^2$ 是一个常数. 这里 b 为正四面体 $ABCD$ 所补出的正方体的边长,记 $ABCD$ 的棱长为 a,则 $a^2=2b^2$.

注意到,正方形的每个面到平面 π 的射影是一个平行四边形,因此这个面的对角线的射影的平方和等于该面上四条边的射影的平方和(这里用到平面几何中的一个结论:平行四边形四边的平方和等于两对角线的平方和),从而正方体各面上所有对角线(共 12 条)在平面 π 上的射影的平方和等于正方体各条边在平面 π 上的射影的平方和的 2 倍,由对称性,可知正四面体 $ABCD$ 各棱到平面 π 上的射影的平方和等于正方体各边在平面 π 上的射影的平方和($=4b^2$),即为 $2a^2$,是一个常数.

命题获证.

说明 这里将一个四面体的问题补成一个正方体(或长方体),然后去处理的思路值得借鉴.

【例 3】 如图 21－4 所示,在三棱锥 $S-ABC$ 中,$SA\perp$面 ABC, $AB\perp BC$,点 E 为 SC 的中点,D 为 AC 上的点,且 $DE\perp SC$. 又 $SA=AB$, $SB=BC$. 求以 BD 为棱、以 BDE 和 BDC 为面的二面角的大小.

分析 利用面积射影定理直接求二面角的大小.

解 由条件知,E 为 SC 的中点, $SB=BC$, 可知 $BE\perp SC$, 再结合 $DE\perp SC$, 可知 $SC\perp$面 BDE,这表明$\triangle BDE$ 是$\triangle BDC$ 在平面 BDE 上的投影. 设所求二面角的度数为 α,则由面积射影定理,可知

$$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BDC}\cdot\cos\alpha.$$

下面通过求出 $S_{\triangle BDE}$ 和 $S_{\triangle BDC}$ 的比值来确定 α 的值.

由 $SC\perp$面 BDE, 及 $SE=EC$, 可知

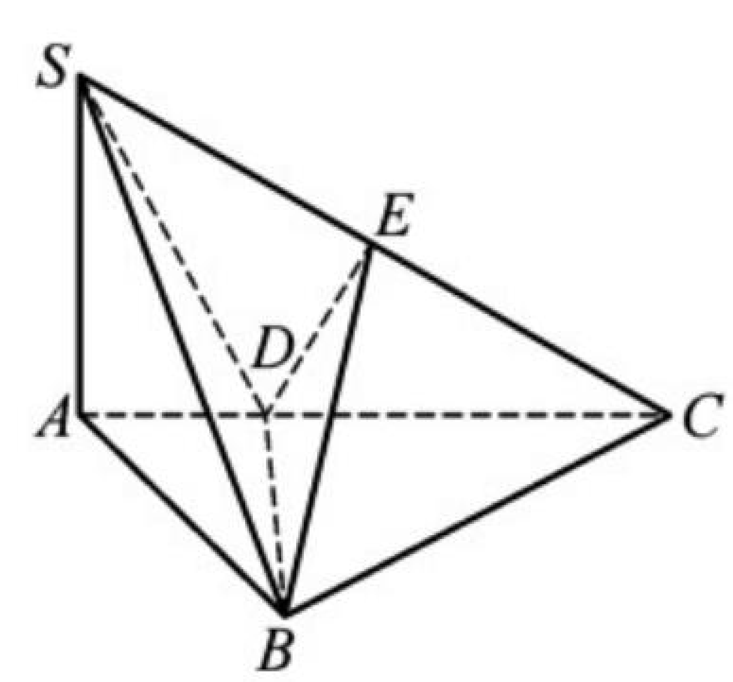


图 21－4

$$V_{S\text{-}BDE}=V_{C\text{-}BDE},$$

即 $$V_{C\text{-}BDE}=\frac{1}{3}\times SE\times S_{\triangle BDE}.$$

注意到，$SA\perp$面 ABC，E 为 SC 的中点，可知点 E 到面 BCD 的高等于$\frac{1}{2}SA$. 于是

$$V_{E\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}SA\right)\times S_{\triangle BDC}.$$

由于 $V_{C\text{-}BDE}=V_{E\text{-}BCD}$，所以

$$\frac{1}{3}\times SE\times S_{\triangle BDE}=\frac{1}{6}\times SA\times S_{\triangle BDC},$$

故
$$\cos\alpha=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BDC}}=\frac{SA}{2SE}=\frac{SA}{SC}.$$

由条件，$SA\perp$面 ABC，故 $SA\perp BC$，结合 $BC\perp AB$，可知$BC\perp$面 SAB，从而 $BC\perp AB$. 于是

$$SC=\sqrt{2}SB=\sqrt{2}(\sqrt{2}SA)=2SA.$$

所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$，综上可知，所求二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

说明 面积射影定理经常被用来求二面角的大小，相比较常规方法而言，我们这时不需作出二面角的平面角，从而不会使立几图形过于复杂.

【例 4】 设点 A、B 分别属于一个度数为 θ 的二面角的两个半平面 π_1 和 π_2，且 AB 与平面 π_1 所成的角为 α，与平面 π_2 所成的角为 β，点 A、B 到这个二面角的棱的距离分别为 b 和 a，且 $AB=c$，求证：

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\theta}.$$

分析 这是正弦定理在空间的一种推广，可构造直角三角形运用射影定理解决.

解 如图 21 - 5 所示，设 AC 垂直于此二面角的棱. $AO\perp\pi_2$，则由于 CO 为 AC 在 π_2 上的射影，利用三垂线定理的逆定理可知 $\angle ACO=\theta$，又 BO 为 AB 在 π_2 上的射影，所以 $\angle ABO=\beta$. 注意到

$$AO=AC\cdot\sin\theta=b\sin\theta,$$
$$AO=AB\sin\beta=c\sin\beta,$$

故有$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\theta}$.

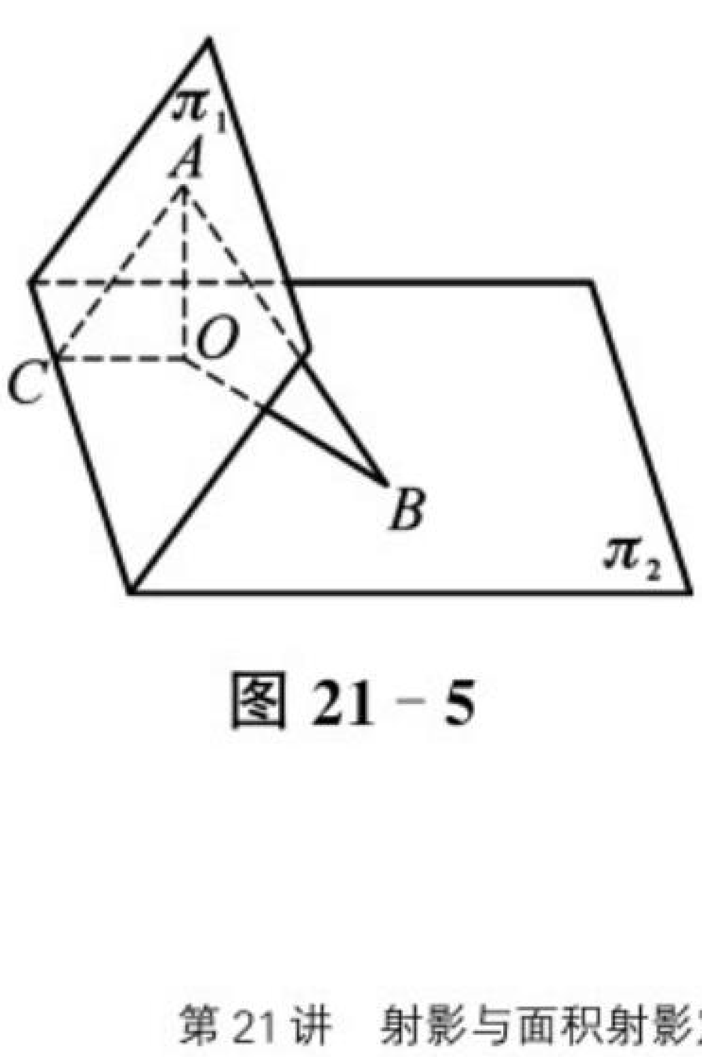


图 21 - 5

同理可证 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\theta}$. 所以命题成立.

说明 当图 21－5 所示中 BC 也垂直于那条棱时,就是正弦定理的结果.

【例 5】 平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的棱 MN 上,点 B、C、D 都在 α 上,且 $AB=2AD$, $\angle DAN=45°$, $\angle BAD=60°$(如图 21－6 所示),当平行四边形在半平面 β 上的射影是:(1)菱形;(2)矩形时,分别求二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的平面角 θ 的余弦值.

分析 利用线段射影定理可知 AD、BC 在 β 上的射影长度相等,AB、CD 在 β 上的射影长度也相等,从而,平行四边形 $ABCD$ 在 β 上的射影为平行四边形(或一线段).

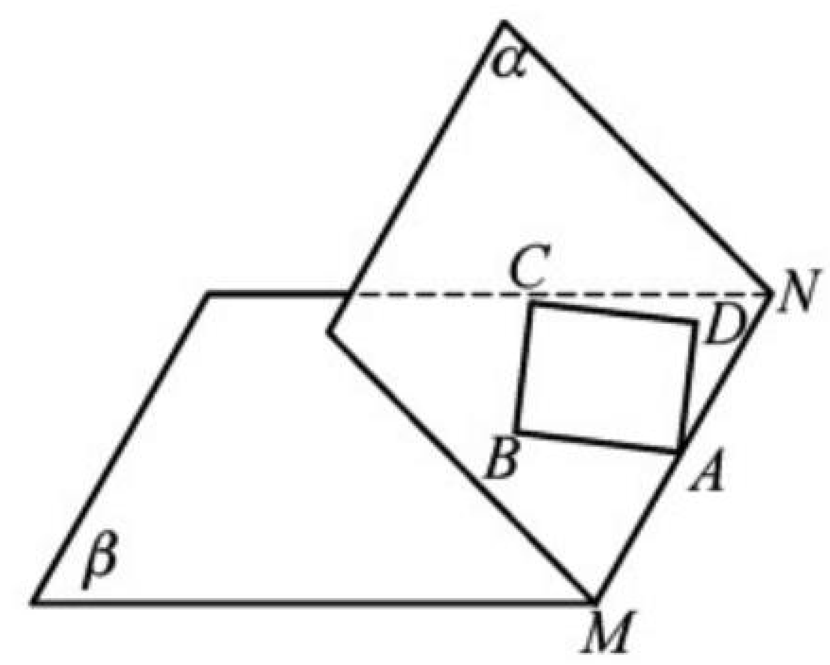


图 21－6

解 设 AD 与平面 β 所成的角为 x,则

$$\frac{AD}{\sin\theta}=\frac{AD\sin 45°}{\sin x},\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta.$$

这里用到 AD 与 MN 的夹角为 $45°$(从而 D 到 MN 的距离为 $AD\cdot\sin 45°$).

于是,设 B、C、D 在平面 β 上的射影为 B'、C'、D',则由上讨论可知

$$AD'=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\cdot AD.$$

同理,
$$AB'=\sqrt{1-\sin^2 75°\sin^2\theta}\cdot AB.$$

(1) 如果 $AB'C'D'$ 为菱形,那么 $AB'=AD'$, 即

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\cdot AD=\sqrt{1-\sin^2 75°\cdot\sin^2\theta}\cdot AB,$$

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}\sin^2\theta&=4(1-\sin^2 75°\sin^2\theta)\\&=4-2(1-\cos 150°)\sin^2\theta,\end{aligned}$$

于是, $\sin^2\theta=4\sqrt{3}-6$, 故

$$\cos\theta=\sqrt{1-(4\sqrt{3}-6)}=2-\sqrt{3}.$$

(2) 如果 $AB'C'D'$ 为矩形,那么应有

$$S_{AB'C'D'}=AB'\times AD',$$

于是, $S_{ABCD}\cdot\cos\theta=AB'\times AD'$, 即

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cdot AB\cdot AD=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\cdot\sqrt{1-\sin^2 75^\circ\sin^2\theta}\cdot AB\cdot AD,$$

进而有

$$\frac{3}{4}\cos^2\theta=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\left(1-\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\sin^2\theta\right).$$

令 $t=\sin^2\theta$，则

$$(2+\sqrt{3})t^2-2(1+\sqrt{3})t+2=0,$$

故 $t=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}=\sqrt{3}-1$，于是

$$\cos\theta=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

综上所述，当 $ABCD$ 在平面 β 上的投影为菱形时，$\cos\theta=2-\sqrt{3}$；投影为矩形时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

说明 由正弦定理的推广得到 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$.

【例 6】 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面与底面所成的二面角的大小为 α，相邻两个侧面所成二面角的大小为 β. 求证：

$$\cos\beta=-\cos^2\alpha.$$

分析 直接用面积射影定理.

证明 如图 21－7 所示，过 P 作 $PO\perp$ 面 $ABCD$，过 C 作 $CF\perp DP$，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，侧棱长 $PC=b$.

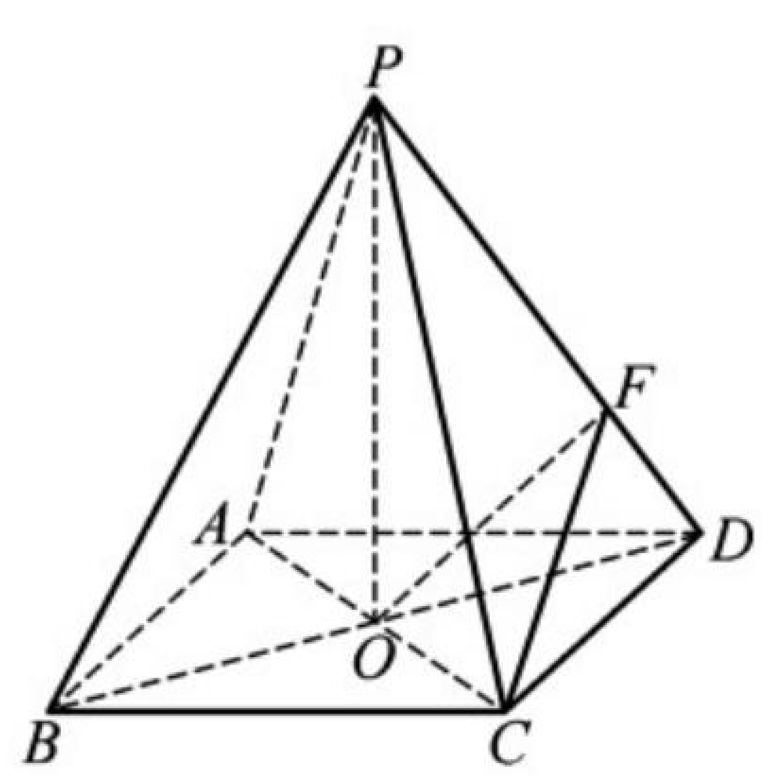


图 21－7

注意到，$\triangle CPF$ 与 $\triangle APF$ 中，$PC=PA$，$PF=PF$，$\angle FPA=\angle CPF$，故 $\triangle CPF\cong\triangle APF$，结合 $CF\perp PD$，可知 $AF\perp DP$，故 $\angle AFC=\beta$. 从而

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{AF^2+CF^2-AC^2}{2AF\times CF}\\&=1-\frac{2OC^2}{CF^2}=1-\frac{a^2}{CF^2}.\end{aligned}\quad①$$

另一方面，由面积射影定理

$$\cos\alpha=\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{a^2}{4S_{\triangle PCD}}=\frac{a^2}{2b\cdot CF}. \qquad ②$$

由于$\triangle PCD$中，$\frac{1}{2}b\times CF=\frac{1}{2}a\times\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，故有

$$CF=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}.$$

利用①和②可知

$$\cos\beta=1-\frac{4b^2}{4b^2-a^2}=\frac{-a^2}{4b^2-a^2},$$

$$-\cos^2\alpha=\frac{-a^2}{4b^2-a^2}.$$

于是，$\cos\beta=-\cos^2\alpha$.

【例 7】 已知 P 点是$\triangle ABC$所在平面外一点，PA、PB、PC两两垂直，$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$的面积分别为S_1、S_2、S_3，$\triangle ABC$的面积为S，求证：$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

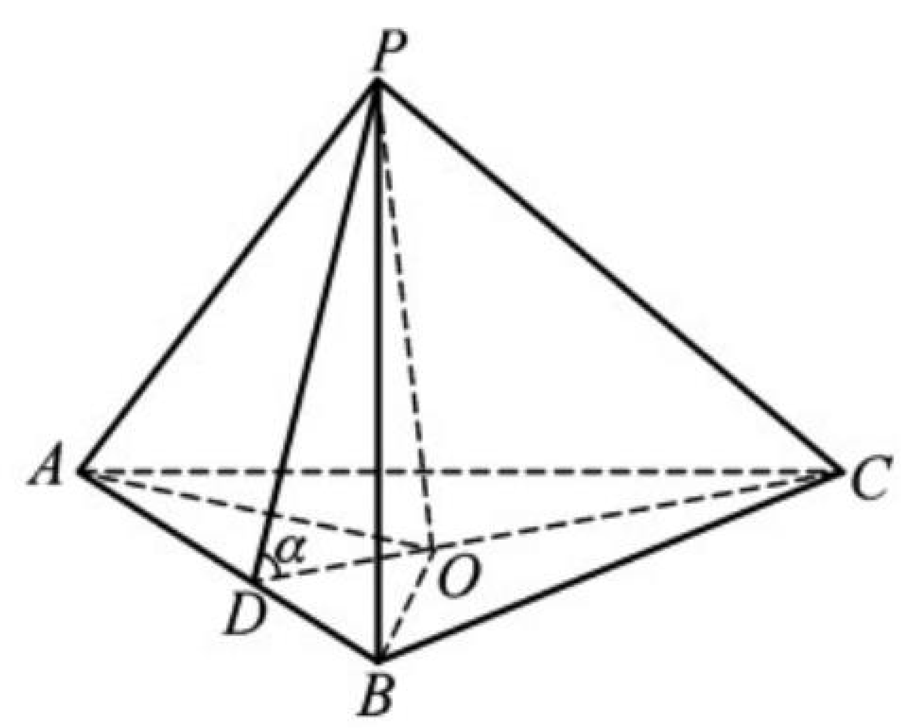


图 21－8

分析 本例实际是平面上勾股定理类比推广到空间的情形.

证明 设二面角 $P-AB-C$、$P-BC-A$、$P-AC-B$ 分别为α、β、γ，作$PO\perp$面ABC于O，连结CO并延长交AB于D，连结PD.

由$PC\perp PA$，$PC\perp PB$，得$PC\perp$面PAB，则$PC\perp AB$，$CD\perp AB$，$PD\perp AB$. 于是$\angle PDC=\alpha$，且$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{AB\cdot PD}{2\cos\alpha}=\frac{S_1}{\cos\alpha}$，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot DO=\frac{1}{2}AB\cdot PD\cdot\cos\alpha=S_1\cdot\cos\alpha$，从而推知$S\cdot S_{\triangle AOB}=S_1^2$.

同理可得$S\cdot S_{\triangle BOC}=S_2^2$，$S\cdot S_{\triangle COA}=S_3^2$.

故$S(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA})=S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

说明 平面中一些问题都可以利用适当的类比推广到空间，但结论未必正确，必须加以论证.

【例 8】 若一个四面体的 6 个二面角（即每两个面之间的夹角）都相等，则此四面体必为正四面体吗？如果其中有 5 个二面角相等，结论如何呢？

解 设四面体 $ABCD$ 的 6 个二面角都相等，记为 θ，则由例 1 中的推导可知

$$S_{\triangle BCD}=(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB})\cos\theta$$

循环求和后，可得 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.

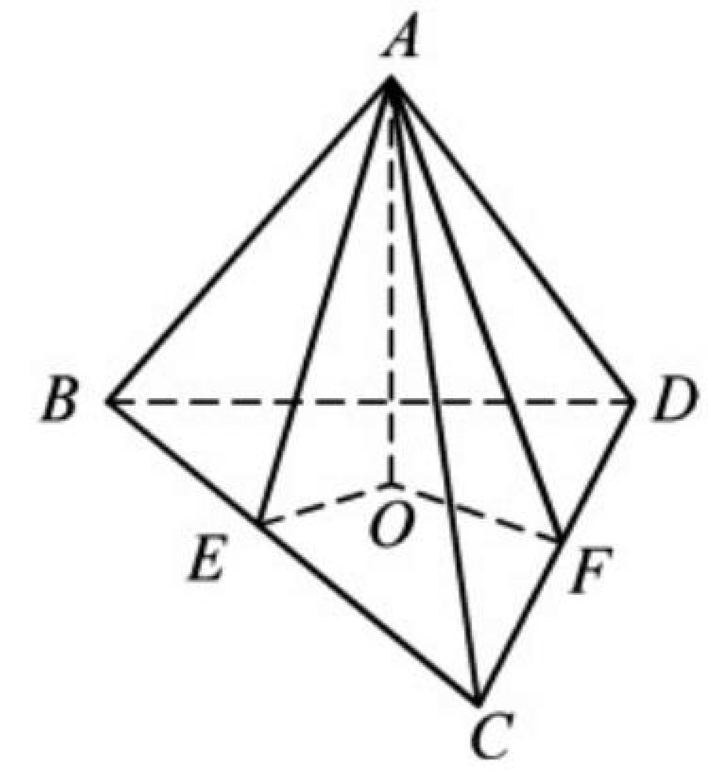


图 21－9

现在过 A 作底面的射影 O，然后作 $OE\perp BC$，$OF\perp CD$(如图 21－9)，则 $\angle AEO=\angle AFO=\theta$，知 $AE=AF(=AO\cdot\csc\theta)$，于是有 $\mathrm{Rt}\triangle AEC\cong\mathrm{Rt}\triangle AFC$，得

$$\angle ACB=\angle ACD.$$

类似地，过 D 作对面的射影(围绕点 C)同上可证：$\angle BCD=\angle ACD$.

所以，$\angle ACD=\angle ACB=\angle BCD$，即过点 C 的三个面角相等. 同理，过其余三个顶点的三个面角也都相等. 分别将过 A、B、C、D 的相等的各面角的大小记为 α、β、γ、δ，则在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，有

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\delta=180^\circ,$$

知 $\gamma=\delta$. 换一对三角形后会得另两个角相等，因此，$\alpha=\beta=\gamma=\delta$. 进而可知四面体 $ABCD$ 的每一个面都为正三角形，知它必为正四面体.

若 6 个二面角中只有 5 个相等，则它还未必是正四面体，例如我们可以作出四面体 $ABCD$，使得(作出 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 后，将 $\triangle ABC$ 向上翻即可)

$$\angle ABC=\angle CBD=\angle DBA=\angle ACB=\angle BCD=\angle DCA=40^\circ,$$
$$\angle BAD=\angle CAD=\angle CDA=\angle BDA=70^\circ,$$
$$\angle BAC=\angle BDC=100^\circ.$$

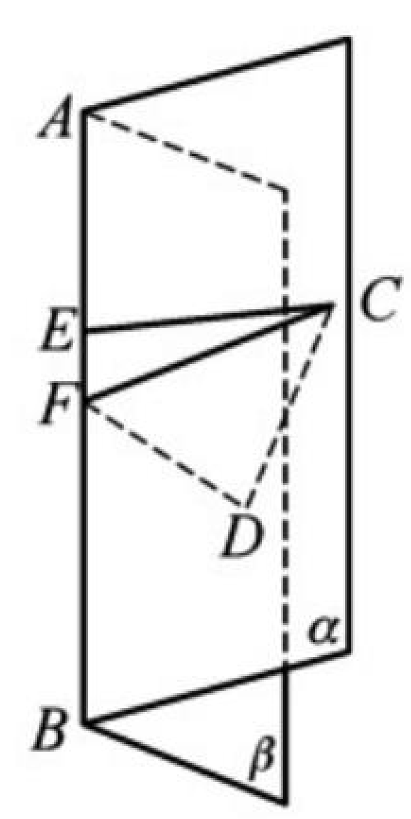
此四面体中除二面角 $B-AD-C$ 外，其余 5 个二面角相等，它不是正面体.

说明 对一个正四面体而言，它的 6 个二面角当然相等，此例说明反过来也成立，因此，6 个二面角是否相等可以作为判定四面体是否为正四面体的条件.

练习题

A 组

一、填空题



(第 1 题)

1 如图，二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角是锐角，C 是平面 α 内一点(它不在棱 AB 上)，点 D 是点 C 在面 β 上的射影，点 E 是棱 AB 上满足 $\angle CEB$ 为锐角的任一点，那么 $\angle CEB$ 与 $\angle DEB$ 的大小关系是________.

2 三棱锥的各侧棱分别垂直于底面中它的对棱，则此三棱锥顶点在底面上的射影是底面三角形的________心.

3 直角$\triangle ABC$的斜边BC在平面α上，A在α上的射影为D，若$\angle ABD = 30°$，$\angle ACD = 45°$，则$\triangle ABC$所在半平面与α所成二面角为________.

4 在直二面角$\alpha - l - \beta$中，$A \in \alpha$，$B \in \beta$，A、B都不在l上，AB与α所成角为x，AB与β所成角为y，AB与棱l所成角为z，则$\cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z$的值为________.

5 一个正方体的棱长为1，它在任一平面α上的射影图形面积最大为________.

6 Rt$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，其顶点在平面α同侧，点A、B、C在α上的射影分别为A'、B'、C'，已知$AA' = a$，$BB' = b$，$CC' = c$. 且$\triangle A'B'C'$为正三角形，则a、b、c的大小关系为________.

二、解答题

7 三棱锥$P - ABC$的各侧面与底面所成的二面角的大小相等. 求证：P在面ABC上的射影为$\triangle ABC$的内心或旁心.

8 已知正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的棱长是a，M、N、P分别是AB、AD、CC_1的中点，求过M、N、P三点的截面面积.

9 已知正三棱台的上下底面边长分别是6、10，侧面与底面成45°角，求它的全面积.

10 点P是棱长为1的正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的面对角线AC上一点，平面PA_1B_1、PB_1C_1与面$A_1B_1C_1D_1$所成的二面角（锐角）分别为α、β. 求$\tan(\alpha + \beta)$取最小值时，点P的位置.

B组

11 四面体$ABCD$中，$BD \perp CD$，D到平面ABC的射影为$\triangle ABC$的垂心. 求证：

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

12 已知三棱锥$P - ABC$的各侧面都与底面成45°角，且底面是一个钝角三角形，三边长为三个连续偶数. 求此三棱锥的体积.

13 正四棱锥$S - ABCD$的底面边长为2，高为h. 平面π平行于正方形$ABCD$的对角线AC，且π与底面所成的二面角为α. 作$S - ABCD$到平面π的射影，问α为何值时，该射影所成图形的面积最大？最大值是多少？

14 设一个正n一棱锥的侧面与底面所成二面角的大小为α，侧棱与底面所成角的大小为β. 证明：$\sin^2\alpha - \sin^2\beta \leqslant \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

第22讲　集合的分划

一、知识要点和基本方法

这一讲主要讨论与集合的分划有关的问题，涉及的方法主要有映射方法、构造法、数学归纳法、递推方法等.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 X 的一族非空子集，并且满足

(1) 对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，均有 $A_i \cap A_j = \varnothing$；

(2) $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 X 的一个 n—分划. 特别地，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 仅满足条件(2)，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 X 的一个覆盖.

二、例题精讲

【例1】 求最小的和次小的正整数 n，使集合 $\{1, 2, \cdots, 3n-1, 3n\}$ 可以分为 n 个互不相交的三元组 $\{x, y, z\}$，其中 $x+y=3z$.

解 这 n 个三元组 $\{x_i, y_i, z_i\}(i=1, 2, \cdots, n)$ 的元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i+z_i)=4(z_1+z_2+\cdots+z_n)=\frac{3n(3n+1)}{2}.$$

若 n 为偶数，则必须 $8 \mid n$；

若 n 为奇数，则必须 $8 \mid 3n+1$，从而 $n=5, 13, \cdots$；

当 $n=5$ 时，可分为5组：$\{4, 1, 11\}$，$\{5, 2, 13\}$，$\{6, 3, 15\}$，$\{7, 9, 12\}$，$\{8, 10, 14\}$；

当 $n=8$ 时，可分为8组：$\{5, 1, 14\}$，$\{7, 2, 19\}$，$\{8, 3, 21\}$，$\{9, 4, 23\}$，$\{10, 6, 24\}$，$\{11, 15, 18\}$，$\{12, 16, 20\}$，$\{13, 17, 22\}$.

【例2】 试确定所有的正整数 n，使得集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 可以分成5个互不相交的子集，且每个子集中元素之和相等.

解 我们先找一个必要条件，若 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 能分成5个互不相交的子集，且每个子集的元素和相等，则

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

能被5整除，所以 $n=5k$ 或 $n=5k-1$.

显然，当 $k=1$ 时，上述条件不是充分的. 下面用数学归纳法证明，当 $k \geqslant 2$ 时，条件是充分的.

当 $k=2$，即 $n=9$、10 时，我们作如下分拆：

$$\{1,\ 8\},\ \{2,\ 7\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\},\ \{9\};$$
$$\{1,\ 10\},\ \{2,\ 9\},\ \{3,\ 8\},\ \{4,\ 7\},\ \{5,\ 6\}.$$

当 $k=3$，即 $n=14$，15 时，我们有

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ \{7,\ 14\},\ \{8,\ 13\},\ \{9,\ 12\},\ \{10,\ 11\};$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\},\ \{4,\ 8,\ 12\},\ \{9,\ 15\},\ \{10,\ 14\},\ \{11,\ 13\}.$$

若集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 能分成 5 个互不相交的子集，且它们各自的元素和相等，则 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots,\ n+10\}$（或 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots,\ n+9\}$）也能分成 5 个互不相交的子集，且它们的元素和相等. 事实上，若

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5,$$

其中 A_i、$A_j(i\neq j)$ 互不相交，A_i 的元素和与 A_j 的元素和相等，则令 $B_1=A_1\cup\{n+1,\ n+10\}$，$B_2=A_2\cup\{n+2,\ n+9\}$，$B_3=A_3\cup\{n+3,\ n+8\}$，$B_4=A_4\cup\{n+4,\ n+7\}$，$B_5=A_5\cup\{n+5,\ n+6\}$，于是

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+10\}=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5,$$

且 B_i 与 B_j $(i\neq j)$ 互不相交，每个子集 B_i 的元素和相等.

假设对于 $n=5k-1$、$5k$，命题正确，由上面的讨论知，对于 $n=5(k+2)-1$、$5(k+2)$ 命题也成立，从而证得了当 $k\geqslant 2$，$n=5k-1$ 或 $n=5k$ 时，集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 可以分成 5 个互不相交的子集，且它们各自元素的和相等.

【例 3】 (1) 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以表示为三个彼此不相交的集合的并，且使得：若 m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $|m-n|=2$ 或 5，则 m、n 属于不同的集合；

(2) 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以表示为 4 个彼此不相交的集合的并，且使得：若 m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $|m-n|=2$、3 或 5，则 m、n 属于不同的集合. 并说明：此时将 $\mathbf{N}^*$ 拆分为三个彼此不相交的集合的并集时，命题不成立.

证明 (1) 令 $A=\{3k\mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{3k-2\mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{3k-1\mid k\in\mathbf{N}^*\}$，则 A、B、C 彼此的交为空集，且 $A\cup B\cup C=\mathbf{N}^*$，并且此时属于同一集合的两个元素之差为 3 的倍数，不等于 2 或 5. 这是一种满足题设条件的取法.

(2) 令 $A=\{4k\mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{4k-1\mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{4k-2\mid k\in\mathbf{N}^*\}$，$D=\{4k-3\mid k\in\mathbf{N}^*\}$. 同上讨论，可知命题成立.

假设可以将 $\mathbf{N}^*$ 表示为三个集合 A、B、C（彼此不相交）的并集，使得：对任意的 m，$n\in\mathbf{N}^*$，当 $|m-n|=2$、3 或 5 时，m、n 属于不同的集合. 不妨设 $1\in A$，则 $3\overline{\in}A$，从而 $3\in B$ 或 $3\in C$. 不妨设 $3\in B$，则 $6\overline{\in}A$ 且 $6\overline{\in}B$，故 $6\in C$. 依此类推，可知 $4\in B$，$8\in A$，$5\in C$，$7\in A$. 这时，9 属于 A、B、C 中任何一个集合

均导致矛盾.

【例4】 设 S 为 n 个正实数组成的集合,对 S 的每个非空子集 A,记 A 中各元素之和为 $f(A)$. 证明:集合 $\{f(A) \mid A \subseteq S, A \neq \varnothing\}$ 可以分为 n 个不交的非空子集的并集,并且每个子集中,最大数与最小数的比小于 2.

证明 设 S 中的 n 个元素为 $(0<)u_1<u_2<\cdots<u_n$, 我们令

$T_1=\{f(A) \mid A=\{u_1\}\}$,

$T_k=\{f(A) \mid u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}<f(A) \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_k, A \subseteq S, A \neq \varnothing\}$, $k=2, 3, \cdots, n$,

则对 $1 \leqslant i<j \leqslant n$, $T_i \cap T_j=\varnothing$, 且 $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n=\{f(A) \mid A \subseteq S, A \neq \varnothing\}$, 即 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 为 $\{f(A) \mid A \subseteq S, A \neq \varnothing\}$ 的一个 n—分划.

在 T_1 中,最大数与最小数相等(都为 u_1),故其比值为 $1(<2)$.

当 $k \geqslant 2$, T_k 中的最大数为 $u_1+u_2+\cdots+u_k$, 现分两种情况证明 T_k 中的最大数与最小数之比小于 2.

如果 $u_k \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$, 则 T_k 中的最大数与最小数之比 M_k 满足

$$M_k<\frac{u_1+u_2+\cdots+u_k}{u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}}=1+\frac{u_k}{u_1+\cdots+u_{k-1}} \leqslant 2;$$

如果 $u_k>u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$, 这时,由于 T_k 中的元素 $f(A)>u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}$, 故 A 中必含有某个 u_i, $i \geqslant k$, 所以 u_k 是 T_k 中的最小元,于是

$$M_k=\frac{u_1+\cdots+u_k}{u_k}=\frac{u_1+\cdots+u_{k-1}}{u_k}+1<2.$$

综上所述,T_1, T_2, $\cdots$, T_n 为满足条件的分划.

说明 构造法是处理存在性问题的常见手法. 此题中通过比较 u_k 与 $u_1+\cdots+u_{k-1}$ 的大小关系,恰当地处理了 T_k 中最大元与最小元的关系,从而顺利完成了证明. 这里通过不等式方法定义集合 T_k 的方法也是巧妙的.

【例5】 求出所有的正实数 a,使得存在正整数 n 及 n 个互不相交的无限集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 满足 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=\mathbf{N}^*$,而且对于每个 A_i 中的任意两数 $b>c$, 都有 $b-c \geqslant a^i$.

解 若 $0<a<2$, n 充分大时, $2^{n-1}>a^n$, 令

$$A_i=\{2^{i-1}m \mid m \text{ 为奇数}\}, i=1, 2, \cdots, n-1,$$
$$A_n=\{2^{n-1} \text{ 的倍数}\},$$

则该分拆满足要求.

若 $a\geqslant 2$, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足要求, 令 $M=\{1, 2, \cdots, 2^n\}$, 下证 $|A_i\cap M|\leqslant 2^{n-i}$. 设 $A_i\cap M=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, $x_1<x_2<\cdots<x_m$, 则

$$\begin{aligned}2^n &> x_m-x_1=(x_m-x_{m-1})+(x_{m-1}-x_{m-2})+\cdots+(x_2-x_1)\\ &\geqslant (m-1)2^i.\end{aligned}$$

所以, $m-1<2^{n-i}$, 即 $m<2^{n-i}+1$, 故 $m\leqslant 2^{n-i}$.

$A_i\cap M$, $i=1, 2, \cdots, n$ 为 M 的一个分拆, 故

$$2^n=|M|=\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap M|\leqslant \sum_{i=1}^{n}2^{n-i}=2^n-1,$$

矛盾.

所以, 所求的 a 为所有小于 2 的正实数.

【例 6】 求所有的正整数 n, 使得存在一个集合 S, 满足如下条件:

(1) S 由都小于 2^{n-1} 的 n 个正整数组成;

(2) 对 S 的任意两个不同的非空子集 A、B, 集合 A 中所有元素之和不等于 B 中所有元素之和.

解 首先, 易知, 当 $n=2$、3 时, 满足条件的 S 不存在; 当 $n=4$ 时, 取 $S=\{3, 5, 6, 7\}$, 则 S 满足条件.

其次, 当 $n\geqslant 5$, 令

$$S=\{3, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{n-2}, 2^{n-1}-3, 2^{n-1}-2, 2^{n-1}-1\},$$

我们证明这样定义的 S 满足条件.

事实上, 设 A、B 为 S 的两个不同子集, 由于要证的目标是 $f(A)\neq f(B)$, 这里 $f(x)$ 表示 x 中所有元素之和, 所以, 不妨设 $A\cap B=\varnothing$.

注意到, 对任何正整数 m, 均有 $1+2+\cdots+2^{m-1}=2^m-1<2^m$, 所以, 当 a、b、c 都不属于 $A\cup B$ 时, 均有 $f(A)\neq f(B)$. 这里 $a=2^{n-1}-3$, $b=2^{n-1}-2$, $c=2^{n-1}-1$.

进一步, 由于 $3+2^3+2^4+\cdots+2^{n-2}=2^{n-1}-5$, 所以, 当 a、b、c 中恰有一个属于 $A\cup B$ 时, 例如 $a\in A$, 将有 $f(A)>f(B)$, 此时, 总有 $f(A)\neq f(B)$; 类似地, 讨论 a、b、c 中恰有 2、3 个同时属于 $A\cup B$ 时, 均可得出 $f(A)\neq f(B)$.

所以, 当 $n\geqslant 4$ 时, 满足条件的 S 都存在.

【例 7】 盒中装有红色和蓝色纸牌各 100 张, 每色纸牌都含标数为 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^{99}$ 的牌各一张, 两色纸牌的标数总和记为 S;

对于给定的正整数 n, 若能从盒中取出若干张牌, 使其标数之和恰为 n, 便称

为一种取牌 n_方案,不同的 n_方案种数记为 $f(n)$;试求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(S)$ 之值.

(2013 年山西省高中数学联赛预赛)

解法一 将盒中的纸牌按标数自小到大的顺序排成一列:$1, 1, 3, 3, 3^2, 3^2, \cdots, 3^{99}, 3^{99}$,值相等的两个项不同色,对于每个 $k(1\leqslant k\leqslant 100)$,数列前 $2k$ 项之和小于 3^k,故形如 3^n 的项必须从两个 3^n 中选出,(任何其它项的和不等于 3^n),于是选出一个 3^n 有两种方法,同时选出两个 3^n 只有一种方法.

对于集合 $A=\{0, 1, 2, \cdots, S\}$ 中的每个数 m,可将其表为含有一百个数位的三进制形式:

$$m=\overline{a_{99}a_{98}\cdots a_1a_0},$$

即 $m=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_{99}\cdot 3^{99}$,其中 $a_i\in\{0, 1, 2\}$, $i=0, 1, 2, \cdots, 99$;

若在 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{99}$ 中恰有 k 个为 1(其余 $100-k$ 个数为 0 或 2),则 $f(m)=2^k$(这是由于,每个 1 有红蓝两种选取方案).

现将集 A 分解为

$$A=A_0\cup A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100},$$

其中 A_k 中的每个数 m 在表成上述三进制形式后,其系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{99}$ 恰有 k 个为 1(其余 $100-k$ 个数为 0 或 2),因此集 A_k 中,共有 $C_{100}^k\cdot 2^{100-k}$ 个数,(这是由于,从 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{99}$ 中选取 k 个为 1,有 C_{100}^k 种选法,其余 $100-k$ 个数,每个可取作 0 或 2,有 2^{100-k} 种方法);

这样,A_k 中各数的 f 值之和为

$$\sum_{m\in A_k}f(m)=2^k\cdot C_{100}^k\cdot 2^{100-k}=2^{100}\cdot C_{100}^k,$$

由于集合 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 两两不相交,从而

$$\begin{aligned}\sum_{m\in A}f(m)&=\sum_{m\in A_0}f(m)+\sum_{m\in A_1}f(m)+\sum_{m\in A_2}f(m)+\cdots+\sum_{m\in A_{100}}f(m)\\&=2^{100}(C_{100}^0+C_{100}^1+\cdots+C_{100}^{100})=2^{100}\cdot 2^{100}=2^{200},\end{aligned}$$

注意到

$$0=0+0.3+0.3^2+\cdots+0.3^{99},$$

即数列中的每个数都不选,其方案数 $f(0)=1$,所以

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(S)=2^{200}-1.$$

解法二 采用数学归纳法,为此,将问题一般化,将具体数 99 改为非负整数 k,考虑数列 $1, 1, 3, 3, 3^2, 3^2, \cdots, 3^k, 3^k$,其和为 S_k,今计算 $F_k=f(0)+$

$f(1)+\cdots+f(S_k)$ 的值.

对 k 归纳，$k=0$ 时数列有两项：1，1，则 $S_0=1+1=2$；

由于 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f(2)=1$，所以

$$F_0=f(0)+f(1)+f(2)=4;$$

$k=1$ 时数列有四项：1，1，3，3，则 $S_1=8$，而

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=2,$$
$$f(4)=4,\ f(5)=2,\ f(6)=1,\ f(7)=2,\ f(8)=1,$$

于是 $F_1=f(0)+f(1)+\cdots+f(8)=16=4^2$；

据此猜想，对于数列 $1, 1, 3, 3, 3^2, 3^2, \cdots, 3^k, 3^k$（其和为 S_k），有

$$F_k=f(0)+f(1)+\cdots+f(S_k)=4^{k+1} \tag{①}$$

此式在 $k=0$，1 时已验证，今假定对于 k 成立，考虑 $k+1$ 情况，数列 $1, 1, 3, 3, 3^2, 3^2, \cdots, 3^k, 3^k, 3^{k+1}, 3^{k+1}$ 的和为 S_{k+1}，将集合 $A=\{0, 1, 2, \cdots, S_{k+1}\}$ 中的每个数 n 表成三进制形式：

$$n=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_k\cdot 3^k+a_{k+1}\cdot 3^{k+1}=n_1+a_{k+1}\cdot 3^{k+1} \tag{②}$$

其中 $n_1=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_k\cdot 3^k$，$a_j\in\{0, 1, 2\}$.

若 $a_{k+1}=0$，这时 $n=n_1$，利用归纳假设，有 $F_k=4^{k+1}$ 种选法；

若 $a_{k+1}=1$ 时，$n=n_1+3^{k+1}$ 从两个 3^{k+1} 中取其一，有两种取法，对前段表达式 n_1 用归纳假设，有 $2F_k=2\cdot 4^{k+1}$ 种选法；

当 $a_{k+1}=1$ 时，$n=n_1+2\cdot 3^{k+1}$ 两个 3^{k+1} 全取，有一种取法，对前段表达式 n_1 用归纳假设，有 $F_k=4^{k+1}$ 种选法；

所以 $F_{k+1}=F_k+2F_k+F_k=4F_k=4^{k+2}$，即

$$F_{k+1}=f(0)+f(1)+\cdots+f(S_{k+1})=4^{k+2},$$

即①式对于任何非负整数 k 成立；

$$f(1)+\cdots+f(S_k)=4^{k+1}-f(0)=4^{k+1}-1;$$

取 $k=99$，得

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(S)=2^{200}-1.$$

【例 8】 设集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是集合 M 的两个 n-分划，已知对任意两个不交的集合 A_i、B_j（$1\leqslant i, j\leqslant n$），均有 $|A_i\cup B_j|\geqslant n$. 求证：$|M|\geqslant\dfrac{n^2}{2}$.

证明 设 $k=\min\{|A_i|, |B_j|, 1\leqslant i, j\leqslant n\}$,不失一般性设 $|A_1|=k$.

如果 $k\geqslant\frac{n}{2}$,那么由

$$|M|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|\geqslant nk\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

如果 $k<\frac{n}{2}$,由于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不交,故 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中至多有 k 个集合与 A_1 的交集不空,从而另外的 $n-k$ 个集合均与 A_1 的交为空集,故这些集合的元素个数不小于 $n-k$,结合 $n>2k$,故 $n-k>k$,我们有

$$\begin{aligned}|M|&=\sum_{i=1}^{n}|B_i|\geqslant k\cdot k+(n-k)\cdot(n-k)\\&=k^2+(n-k)^2\geqslant 2\left(\frac{k+(n-k)}{2}\right)^2=\frac{n^2}{2}.\end{aligned}$$

所以命题成立.

说明 这里从 A_i、B_j 中元素个数最少的集合出发,很好地把握了其他集合的元素个数,从而求出 $|M|$ 的一个下界,完成证明.

【例 9】 对实数集 A,定义 $d(A)=\{|x-y|\,|\,x, y\in A, x\neq y\}$. 是否存在正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的一个由有限个集合组成的分划 $A_1, \cdots, A_m(m\geqslant 2)$,使得每个 $|A_i|\geqslant 2$,且对任意 $1\leqslant i<j\leqslant m$,都有 $d(A_i)\cap d(A_j)=\varnothing$?

解 不存在满足条件的分划.

事实上,若存在符合条件的 $A_1, \cdots, A_m$,则其中必有一个是无限集,不妨设 A_1 是一个无限集. 在 $d(A_2)$ 中取一个元素 n,对 A_1 中的 m 个不同元素 $a_1, \cdots, a_m$,考查下面的数:

$$a_1+n, a_2+n, \cdots, a_m+n. \qquad ①$$

由 $d(A_1)\cap d(A_2)=\varnothing$,可知 $n\notin d(A_1)$,所以,① 中的每个数都不在 A_1 中,它们都属于 $A_2\cup\cdots\cup A_m$. 因此,由抽屉原则可知 ① 中必有两个数同时属于某个 $A_k(2\leqslant k\leqslant m)$. 现设 $a_i+n, a_j+n\in A_k$,则 $|a_i-a_j|\in d(A_k)$,又 a_i, a_j 同属于 A_1,从而 $|a_i-a_j|\in d(A_1)$,这与 $d(A_1)\cap d(A_k)=\varnothing$ 矛盾.

所以,不存在符合要求的分划.

说明 集合分划本质上属于组合数学的范畴,最小数原理与抽屉原则等组合中经常用到的结论和方法,在处理集合分划问题时也经常用到.

练习题

A组

1 设 p 是一个奇质数，n 为正整数，$T=\{1, 2, \cdots, n\}$. 称数 n 为"p-可分的"，如果存在 p 个 T 的非空子集 $T_1, T_2, \cdots, T_p$ 使得：

(1) $T=T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_p$；

(2) $T_1, T_2, \cdots, T_p$ 两两的交集为空集；

(3) $T_i(1 \leqslant i \leqslant p)$ 中各元素之和相同.

证明下述结论：

(1) 设 n 是"p-可分的"，则 p 是 n 或 $n+1$ 的约数.

(2) 设 $2p$ 是 n 的约数，则 n 是"p-可分的".

2 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以分划为无穷多个无穷集 $A_1, A_2, \cdots$，使得"若 x、y、z、w 同属于某个 A_i，则数 $x-y$ 和 $z-w$ 同属于某个 A_k(i、k 不必不同) 的充要条件是 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{z}{w}$".

3 对任意正整数 n，求(并予以证明)具有下述性质的最小正整数 $h(n)$：对集合$\{1, 2, \cdots, h(n)\}$的任意一个 n 分划，均存在非负整数 a，及满足 $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant h(n)$ 的整数 x、y，使得 $a+x$、$a+y$ 和 $a+x+y$ 同时属于该分划的某个部分.

4 求具有下述性质的最小正整数 n：将集合$\{1, 2, \cdots, n\}$任意分划为两个不交的子集的并时，有一个子集中含有 3 个不同的数，其中两个数的乘积等于第 3 个数.

5 能否将正整数集 $\mathbf{N}^*$ 分划为两个集合 A 和 B？使得

(1) A 中任何三个数不成等差数列；

(2) 不能由 B 中的元素组成一个非常数的无穷等差数列.

6 任给整数 a、b. 定义集合 $S_{a, b}=\{n^2+an+b \mid n \in \mathbf{Z}\}$. 问：从这样的集合组中，最多可以取出多少个集合，使得它们两两不交？

7 将正整数集 $\mathbf{N}^*$ 分为两个集合使得

(1) $1 \in A$；

(2) A 中任意两个不同元素之和都不具有 $2^k+2(k=0, 1, \cdots)$的形式；

(3) B 也具有性质(2).

证明：这样的分划是唯一的.

B组

8 设 r、s、n 都是正整数，$r>1$，$s>1$，$r+s=n$. 集合 A、B 定义如下：

$$A=\left\{\left[\frac{in}{r}\right] \middle| i=1, 2, \cdots, r-1\right\};$$

$$B = \left\{ \left[\frac{in}{s} \right] \middle| i = 1, 2, \cdots, s-1 \right\}.$$

证明：A、B 为$\{1, 2, \cdots, n-2\}$的 2－分划的充要条件是：$(r, n) = 1$.

9 设 n 为给定的正整数，考虑$\{1, 2, \cdots, n\}$的具有下述性质的3－分划A、B、C(允许出现空集)：

(1) 将每个子集的元素从小到大排列，则相邻两个数的奇偶性不同；

(2) 若 A、B、C 都不是空集，则其中恰有一个集合的最小元是偶数.

求这样的分划的个数.

10 已知一个长方形 R 可以分割为 n 个(n 为给定的正整数)两两不重叠的长方形 R_1, R_2, $\cdots$, R_n 的并. 这里 R_1, R_2, $\cdots$, R_n 中每一个的边都与 R 的边平行，且 R_1, R_2, $\cdots$, R_n 中每一个都有一条边的长度为整数. 证明：R 有一条边的长度为整数.

第23讲　二次函数综合题

一、例题精讲

【例1】 已知 $f(x)=x^2+(a^2+b^2-1)x+a^2+2ab-b^2$ 是偶函数，求函数 $f(x)$ 的图象与 y 轴交点的纵坐标的最大值.

解　由已知条件可知

$$a^2+b^2-1=0,$$

函数图象与 y 轴交点的纵坐标为 $a^2+2ab-b^2$.

令 $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}a^2+2ab-b^2&=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\\&=\cos 2\theta+\sin 2\theta\\&\leqslant\sqrt{2},\end{aligned}$$

当 $a=\cos\dfrac{\pi}{8}$, $b=\sin\dfrac{\pi}{8}$ 时等号成立. 故函数图象与 y 轴交点的纵坐标的最大值为 $\sqrt{2}$.

【例2】 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象的顶点为 D，与 x 轴正方向从左至右依次交于 A, B 两点，与 y 轴正方向交于 C 点，若 $\triangle ABD$ 和 $\triangle OBC$ 均为等腰直角三角形(O 为坐标原点)，求 $b+2c$ 的值.

解　由已知，得 $C(0, c)$, $A\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}, 0\right)$, $B\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}, 0\right)$, $D\left(-\dfrac{b}{2}, -\dfrac{b^2-4c}{4}\right)$.

过 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，则 $2DE=AB$，即 $2\times\dfrac{b^2-4c}{4}=\sqrt{b^2-4c}$，得 $b^2-4c=2\sqrt{b^2-4c}$，所以 $\sqrt{b^2-4c}=0$ 或 $\sqrt{b^2-4c}=2$. 又 $b^2-4c>0$，所以 $\sqrt{b^2-4c}=2$.

又 $OC=OB$，即 $c=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$，得 $b+2c=\sqrt{b^2-4c}=2$.

【例3】 设 a、b 是实常数，当 k 取任意实数时，函数 $y=(k^2+k+1)x^2-2(a+k)^2x+(k^2+3ak+b)$ 的图象都与 x 轴交于点 $A(1, 0)$.

(1) 求 a、b 的值；

(2) 若函数图象与 x 轴的另一交点为 B，当 k 变化时，求 $|AB|$ 的最大值.

解 (1) 由题设,抛物线经过点 $A(1, 0)$,所以

$$(k^2+k+1)-2(a+k)^2+(k^2+3ak+b)=0,$$

即
$$(1-a)k+(b+1-2a^2)=0,$$

对任意实数 k 恒成立,所以

$$\begin{cases}1-a=0,\\ b+1-2a^2=0,\end{cases}$$

解得 $a=1,\ b=1$,函数为

$$y=(k^2+k+1)x^2-2(k+1)^2x+(k^2+3k+1).$$

(2) 设 $B(x_2, 0)$,则 $|AB|=|x_2-1|$. 由于 1、x_2 是一元二次方程

$$(k^2+k+1)x^2-2(k+1)^2x+k^2+3k+1=0$$

的两个根,由根与系数的关系得

$$1\cdot x_2=\frac{k^2+3k+1}{k^2+k+1},$$

所以
$$(1-x_2)k^2+(3-x_2)k+(1-x_2)=0.$$

于是
$$\Delta=(3-x_2)^2-4(1-x_2)^2\geqslant 0,$$

$$3x_2^2-2x_2-5\leqslant 0,$$

因此
$$-1\leqslant x_2\leqslant\frac{5}{3},$$

$$-2\leqslant x_2-1\leqslant\frac{2}{3}.$$

故 $|AB|=|x_2-1|\leqslant 2$. 当 $k=-1$ 时等号成立,所以 $|AB|$ 的最大值为 2.

【例 4】 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,当 $x\in[-1, 1]$ 时,$|f(x)|\leqslant 1$,求证:当 $x\in[-1, 1]$ 时,有

$$|ax+b|+|c|\leqslant 3.$$

证明 由
$$f(-1)=a-b+c,$$
$$f(1)=a+b+c,$$
$$f(0)=c,$$

可得
$$a=\frac{1}{2}f(-1)+\frac{1}{2}f(1)-f(0),$$

$$b=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1),$$

$$c=f(0),$$

所以 $|c|=|f(0)|\leqslant 1$，且

$$\begin{aligned}|ax+b|&=\left|\frac{1}{2}f(-1)x+\frac{1}{2}f(1)x-f(0)x+\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)\right|\\&=\left|\frac{1}{2}(x-1)f(-1)+\frac{1}{2}(x+1)f(1)-f(0)x\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}|x-1|+\frac{1}{2}|x+1|+|f(0)|\cdot|x|\\&\leqslant\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}(x+1)+1\\&=2,\end{aligned}$$

从而 $$|ax+b|+|c|\leqslant 3.$$

说明 对于条件："当 $x\in[-1,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$"，我们常常用 $f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$来表示 a、b、c，再利用 $|f(-1)|\leqslant 1$，$|f(0)|\leqslant 1$，$|f(1)|\leqslant 1$ 来解题. 对于条件"当 $x\in[0,1]$时，$|f(x)|\leqslant 1$"，我们常常用 $f(0)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f(1)$来表示 a、b、c，再利用 $|f(0)|\leqslant 1$，$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 1$，$|f(1)|\leqslant 1$ 来解题.

【例 5】 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbf{R})$，已知 $|f(-1)|\leqslant 1$，$|f(0)|\leqslant 1$，$|f(1)|\leqslant 1$，求证：当 $x\in[-1,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}$.

证明 因为

$$\begin{cases}f(0)=c,\\f(-1)=a-b+c,\\f(1)=a+b+c,\end{cases}$$

所以 $$\begin{cases}a=\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))-f(0),\\b=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1)),\\c=f(0),\end{cases}$$

于是

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\left[\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))-f(0)\right]x^2+\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))x+f(0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(x^2+x)f(1)+(1-x^2)f(0)+\frac{1}{2}(x^2-x)f(-1)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}|x|\cdot|x+1|\cdot|f(1)|+|1-x^2|\cdot|f(0)|+ \\
&\quad \frac{1}{2}|x|\cdot|x-1|\cdot|f(-1)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}|x|(1+x)+1-x^2+\frac{1}{2}|x|(1-x) \\
&= -x^2+|x|+1=-\left(|x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \\
&\leqslant \frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

【例 6】 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”；若 $f(f(x))=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”. 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x \mid f(x)=x\}$, $B=\{x \mid f(f(x))=x\}$.

(1) 求证：$A\subseteq B$；

(2) 若 $f(x)=ax^2-1$ ($a\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$)，且 $A=B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解 (1) 若 $A=\varnothing$，显然成立. 若 $A\neq\varnothing$，则对任意 $x_0\in A$, $f(x_0)=x_0$, $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，所以 $x_0\in B$，故 $A\subseteq B$.

(2)
$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &= af^2(x)-1=af^2(x)-ax^2+ax^2-1 \\
&= a(f(x)+x)(f(x)-x)+f(x)=x,
\end{aligned}
$$

$(f(x)-x)[a(f(x)+x)+1]=0\Rightarrow(ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)=0$.

由 $A\neq\varnothing$，知 $a=0$ 或 $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta_1=1+4a\geqslant 0\end{cases}$ 可得 $a\geqslant-\dfrac{1}{4}$；

又因 $A=B$，故方程

$$a^2x^2+ax-a+1=0 \qquad ①$$

要么没有实根，要么实根是方程

$$ax^2-x-1=0 \qquad ②$$

的根.

由①无实根，则

$$\Delta_2=a^2-4a^2(1-a)<0\Rightarrow a<\frac{3}{4}.$$

若①有实根，且①的实根是②的根，则由②知 $a^2x^2=ax+a$.

代入①中有

$$2ax+1=0,\ x=-\frac{1}{2a},$$

再代入②中，

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}-1=0,\ a=\frac{3}{4}.$$

综上，$a\in\left[-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right]$.

【例 7】 对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)\ (a\neq 0)$.

(1) 当 $a=1,\ b=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的不动点；

(2) 若对任意实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

(3) 在(2) 的条件下，若 $y=f(x)$ 图象上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点，且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$ 对称，求 b 的最小值.

解 (1) 当 $a=1,\ b=-2$ 时，$f(x)=x^2-x-3$，由 $x^2-x-3=x$，解得 $x_1=-1,\ x_2=3$. 故此时 $f(x)$ 的两个不动点为 -1、3.

(2) 对任意实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，即关于 x 的方程 $ax^2+(b+1)x+(b-1)=x$ 恒有两个不相等的实根，故关于 x 的一元二次方程

$$ax^2+bx+(b-1)=0$$

的判别式

$$\Delta=b^2-4a(b-1)>0,$$

对任意实数 b 恒成立，即关于 b 的一元二次不等式 $b^2-4ab+4a>0$ 恒成立，所以

$$\Delta'=(4a)^2-16a<0,$$

解得 $0<a<1$.

所以，a 的取值范围为 $0<a<1$.

(3) 由题设知，A、B 两点应在直线 $y=x$ 上，设 $A(x_1,\ x_1)$，$B(x_2,\ x_2)$，因为点 A、B 关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$ 对称，所以 $k=-1$.

设 AB 的中点为 $M(x',\ y')$，因为 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+b-1=0$ 的两个根，所以 $x'=y'=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$.

由于点 M 在直线 $y=-x+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 上，所以

$$-\frac{b}{2a}=\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1},$$

$$b=-\frac{a}{2a^2+1},$$

$$2ba^2+a+b=0,$$

由
$$\Delta=1-8b^2\geqslant 0,$$

解得
$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\leqslant b\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$ 时，$b=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，所以，b 的最小值为 $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

【例 8】 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在$[0,1]$上的函数值的绝对值不超过 1，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值.

分析 首先利用 $f(0)$、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f(1)$来表示 a、b、c，然后利用 $|f(0)|\leqslant 1$，$\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|\leqslant 1$，$|f(1)|\leqslant 1$ 来估计 $|a|+|b|+|c|$ 的上界，进而构造例子说明能达到这个上界.

解 因为

$$\begin{cases} f(0)=c, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c, \\ f(1)=a+b+c, \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} a=2f(1)+2f(0)-4f\left(\dfrac{1}{2}\right), \\ b=4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0), \\ c=f(0), \end{cases}$$

因此
$$|a|=\left|2f(1)+2f(0)-4f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$
$$\leqslant 2|f(1)|+2|f(0)|+4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 8,$$
$$|b|=\left|4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0)\right|$$

$$\leqslant 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|+3|f(0)|\leqslant 8,$$

$$|c|=|f(0)|\leqslant 1,$$

$$|a|+|b|+|c|\leqslant 8+8+1=17.$$

对于二次函数 $f(x)=8x^2-8x+1$，当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，且 $|a|+|b|+|c|=17$，所以，$|a|+|b|+|c|$ 的最大值为 17.

【例 9】 求函数 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间$[-1,1]$上的最大值$M(a)$的最小值.

解法 1 由于 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间$[-1,1]$上是偶函数，故只需考虑 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值 $M(a)$即可.

若$a\leqslant 0$，则 $f(x)=x^2-a$，它在$[0,1]$上是增函数，故 $M(a)=1-a$.

若 $a>0$，如图 21-1 所示，当 $\sqrt{2a}\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$M(a)=a$；当 $\sqrt{2a}<1$，即 $a<\frac{1}{2}$ 时，$M(a)=\max\{a,f(1)\}=\max\{a,1-a\}=1-a$(其中 $\max\{u,v\}$ 表示 u、v 中的大的一个). 所以

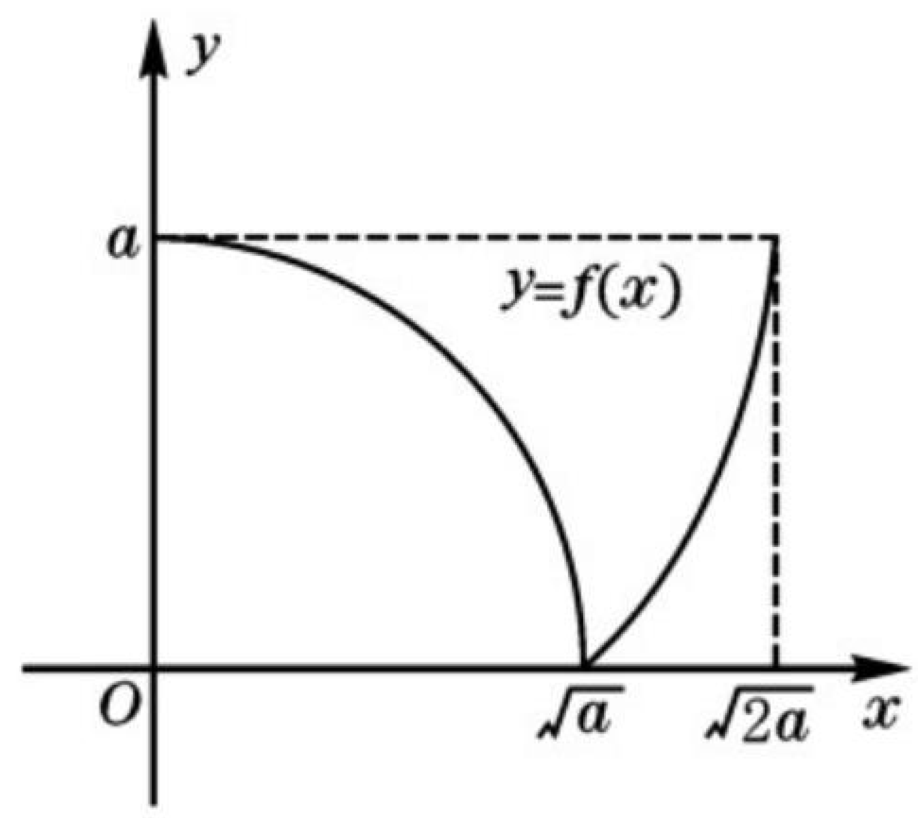


图 23-1

$$M(a)=\begin{cases}1-a, & a<\frac{1}{2},\\ a, & a\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

由于当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$M(a)$是递减的，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$M(a)$是递增的，故当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$M(a)$最小，最小值为$\frac{1}{2}$.

解法 2 考虑 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值 $M(a)$.

$$M(a)=\max\{|a|,|1-a|\},$$

所以 $$M(a)\geqslant\frac{1}{2}(|a|+|1-a|)\geqslant\frac{1}{2}|a+1-a|=\frac{1}{2}.$$

又当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$M(a)=\max\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$，所以 $M(a)$的最小值为$\frac{1}{2}$.

【例 10】 是否存在一个二次函数 $f(x)$，使得对任意的正整数 k，当 $x=\underbrace{55\cdots5}_{k\text{个}5}$ 时，都有 $f(x)=\underbrace{55\cdots5}_{2k\text{个}5}$成立？请给出结论，并加以证明.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则当 $k=1$、2、3 时有

$$f(5)=25a+5b+c=55, \qquad ①$$

$$f(55)=3025a+55b+c=5555, \qquad ②$$

$$f(555)=308\,025a+555b+c=555\,555. \qquad ③$$

联立①、②、③,解得 $a=\frac{9}{5}$, $b=2$, $c=0$. 于是,$f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$.

下面证明:二次函数 $f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$ 符合条件. 因为

$$\underbrace{55\cdots5}_{k个5}=5(1+10+100+\cdots+10^{k-1})=\frac{5}{9}(10^k-1),$$

同理

$$\underbrace{55\cdots5}_{2k个5}=\frac{5}{9}(10^{2k}-1),$$

$$\begin{aligned}f(\underbrace{55\cdots5}_{k个5})&=f\left(\frac{5}{9}(10^k-1)\right)\\&=\frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(10^k-1)\right]^2+2\times\frac{5}{9}(10^k-1)\\&=\frac{5}{9}(10^k-1)^2+2\times\frac{5}{9}(10^k-1)\\&=\frac{5}{9}(10^k-1)(10^k+1)\\&=\frac{5}{9}(10^{2k}-1)\\&=\underbrace{55\cdots5}_{2k个5},\end{aligned}$$

所以所求的二次函数 $f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$ 符合条件.

【例 11】 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>b>c)$ 的图象上有两点 $A(m_1, f(m_1))$、$B(m_2, f(m_2))$满足

$$a^2+[f(m_1)+f(m_2)]a+f(m_1)f(m_2)=0,$$
$$f(1)=0.$$

(1) 求证:$b\geqslant0$;

(2) 求证:$f(x)$的图象被 x 轴截得线段长的取值范围是$[2, 3)$;

(3) 问能否得出 $f(m_1+3)$、$f(m_2+3)$ 中至少有一个数为正数？证明你的结论.

解 (1) 因为 $f(m_1)$、$f(m_2)$满足

$$a^2+[f(m_1)+f(m_2)]a+f(m_1)f(m_2)=0,$$

即
$$[a+f(m_1)][a+f(m_2)]=0,$$

所以 $f(m_1)=-a$ 或 $f(m_2)=-a$，即 m_1 或 m_2 是方程 $f(x)=-a$ 的一个实根.

故 $\Delta\geqslant 0$,即 $b^2\geqslant 4a(a+c)$,而由 $f(1)=0$ 知,$b=-(a+c)$，则

$$(a+c)^2-4a(a+c)=-3a^2-2ac+c^2\geqslant 0,$$

即 $(3a-c)(a+c)\leqslant 0$.

又因为 $f(1)=0$，所以 $a+b+c=0$.

而 $a>b>c$,可知 $a>0$，$c<0$，$3a-c>0$,因此 $a+c\leqslant 0$,即 $b\geqslant 0$.

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 两根为 x_1、x_2,因为

$$f(1)=a+b+c=0,$$

所以方程 $f(x)=0$ 的一个根为 1,另一个根为$\frac{c}{a}$.

又因为 $a>0$，$c<0$,所以$\frac{c}{a}<0$. 由于 $a>b>c$ 且 $b=-a-c\geqslant 0$,则 $a>-a-c\geqslant 0$,可知 $-z<\frac{c}{a}\leqslant -1$, 因此 $2\leqslant|x_1-x_2|<3$.

(3) 设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-1)\left(x-\frac{c}{a}\right)$.

由 $f(m_1)=-a$ 或 $f(m_2)=-a$,不妨设 $f(m_1)=-a$,则

$$a(m_1-1)\left(m_1-\frac{c}{a}\right)=-a<0,$$

因此 $\frac{c}{a}<m_1<1$, $m_1+3>\frac{c}{a}+3>1$.

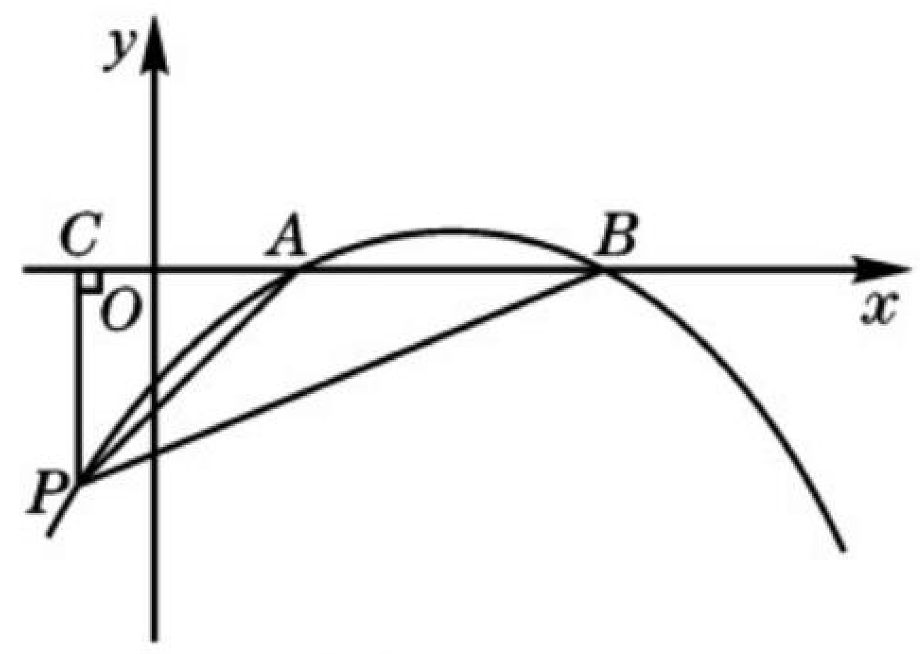
因为 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的对称轴为$x=-\frac{b}{2a}$, $a>b\geqslant 0$,所以$-\frac{1}{2}<-\frac{b}{2a}\leqslant 0$,则 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上为增函数,$f(m_1+3)>f(1)=0$,因此 $f(m_1+3)>0$. 同理当 $f(m_2)=-a$ 时,有 $f(m_2+3)>0$.

因此 $f(m_1+3)$、$f(m_2+3)$ 中至少有一个为正数.

练习题

A 组

1 如图所示,抛物线 $y=-\frac{1}{7}x^2+bx+c$ 和 x 轴交于两点 A 和 B,$AB=4$,P 为该抛物线上一点,$PC\perp x$ 轴于 C 点,C 点的横坐标为 -1,$\angle PAC=45°$,$\tan\angle PBC=\frac{3}{7}$,求抛物线的解析式.



(第 1 题)

2 已知函数 $y=x^2-|x|-12$ 的图象与 x 轴交于相异两点 A、B,另一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 A、B,顶点为 P,且 $\triangle APB$ 是等腰直角三角形,求 a、b、c 的值.

3 证明:无论 p 取什么实数值时,抛物线 $y=x^2+(p+1)x+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}$ 恒通过一个定点,而且这些抛物线的顶点都在一条确定的抛物线上.

4 设 x_1、x_2 分别是关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $-ax^2+bx+c=0$ 的一个非零实根,且 $x_1\neq x_2$. 求证:方程 $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$ 必有一根在 x_1 与 x_2 之间.

5 方程 $4\cos^2x+(a-5)\cos x+1=0\left(\text{其中 } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 有两个不等的实数解,求实数 a 的取值范围.

6 设实数 a、b、c 满足

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0,\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0.\end{cases}$$

求 a 的取值范围.

7 a、b 是实常数,$f(x)=x^2+2bx+1$,$g(x)=2a(x+b)$. 对每一对实数 (a,b),把它看成是 a-b 平面上的一点,令 S 是使得 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 不相交的 (a,b) 的集合,求 S 的面积.

8 已知方程 $x^2+(2m-1)x+(m-6)=0$ 有一根不大于 -1,另一根不小于 1.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 求方程两根平方和的最大值与最小值.

9 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,当 $x\in[-1,1]$,总有 $f(x)\in[-1,1]$. 求证:当 $x\in[-2,2]$ 时,有 $f(x)\in[-7,7]$.

B 组

10 已知抛物线 $y=mx^2-\left(3m+\frac{4}{3}\right)x+4$ 与 x 轴交于两点 A、B,与 y 轴交

于点 C. 若$\triangle ABC$是等腰三角形,求抛物线的解析式.

11 在坐标平面上,纵、横坐标都是整数的点称为整点. 在二次函数 $y=\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5}$ 的图象上找出满足 $y\leqslant|x|$ 的所有整点(x, y),并说明理由.

12 设 $f(x)$是定义在区间$(-\infty, +\infty)$上以 2 为周期的函数. 对 $k\in\mathbf{Z}$, 用 I_k 表示区间$(2k-1, 2k+1]$. 已知当 $x\in I_0$ 时, $f(x)=x^2$.

(1) 求 $f(x)$在 I_k 上的解析式;

(2) 对正整数 k,求集合 $M_k=\{a \mid$ 方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等实根$\}$.

13 已知 a、b、c 都是正整数,且抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个不同的交点 A、B,若 A、B 到原点的距离都小于 1,求 $a+b+c$ 的最小值.

14 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数a、b、c 都是整数, $f(0)>0$, 并且 $f(x)$在$(0, 1)$中有两个不同的根. 求 a 的最小值.

15 设 $f(x)=ax^2+bx+c$. 当 $|x|\leqslant 1$ 时, $|f(x)|\leqslant 1$. 求证:当 $|x|\leqslant 1$ 时, $|2ax+b|\leqslant 4$.

16 设 $x\in[-1, 1]$ 时, 恒有 $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$. 求证:对一切 $x\in[-1, 1]$, 有 $|cx^2\pm bx+a|\leqslant 2$.

第24讲　离散量的最大值和最小值

一、知识要点和基本方法

最值问题是数学竞赛中的热门话题，前面，已经讨论了与函数有关的最值问题，研究了函数在自变量取遍定义域内的所有实数时，函数值所能取到的最大值和最小值等问题.

有一类最值问题，涉及的自变量是正整数、整数、集合与子集等离散量，要求对自变量在某些限制条件下变化时，求出目标函数的最大值或最小值. 这类问题称为离散量的最值问题.

解决离散量的最值问题，往往包含“论证”与“构造”两个方面：一方面需要论证（或求出）目标函数在离散量的变化过程中的精确上界或下界；另一方面，还需构造出一个实例，用以说明在所给限制条件下，目标函数可以达到这个上界或下界. 正是由于这种在处理一个问题时需要两方面考虑，或者需要从一个思路跳跃到另一个思路（注意，论证和构造的处理手法和出发点可能相距甚远），因而，更能反映出解题者驾驭全局、周密思考的能力.

二、例题精讲

【例1】　平面上整点集 $S=\{(a, b) \mid 1\leqslant a, b\leqslant 5, a, b\in \mathbf{Z}\}$，$T$ 为平面上一整点集，对 S 中任一点 P，总存在 T 中不同于 P 的一点 Q，使得线段 PQ 上除点 P、Q 外无其他的整点. 问 T 的元素最少有多少个？

解　最少个数为 2.

先证 T 不可能只包含一个点.

若不然，设 $T=\{Q(x_0, y_0)\}$. 在 S 中可以取出一点 $P(x_1, y_1)$ 满足 $(x_1, y_1)\neq(x_0, y_0)$ 且 x_1 与 x_0 同奇偶，y_1 与 y_0 同奇偶，则线段 PQ 的中点为一整点，矛盾.

T 含两个点的情形如下图所示：

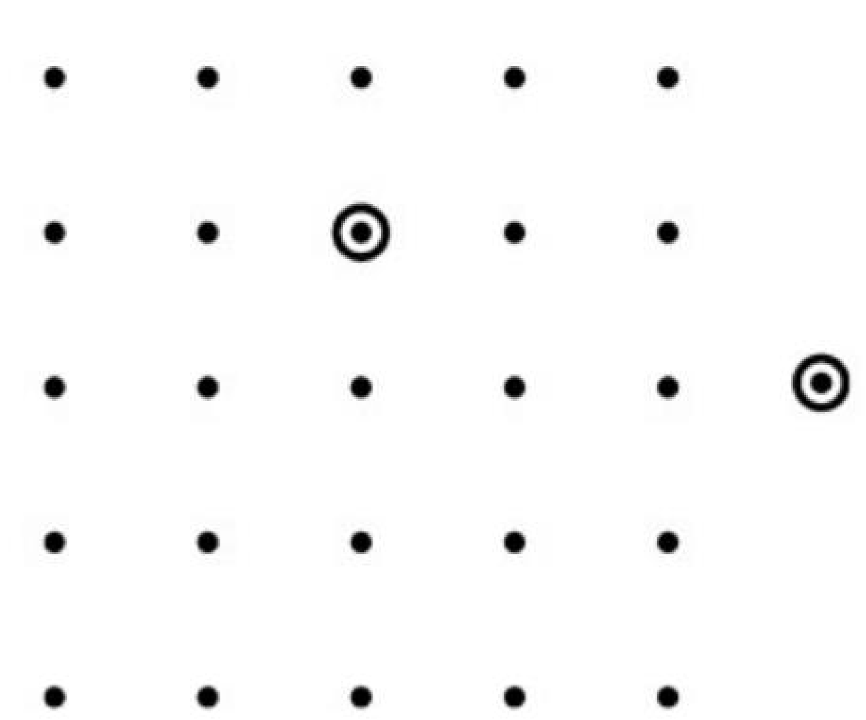


图 24－1

综上所述，$|T|$的最小值为 2.

【例 2】 设 n 为给定的正整数，集合 A 是$\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$的一个子集，满足：A 中任意两个不同的正整数之和都不等于 $2n-1$ 和 $2n$. 求$|A|$的最大值.

解 注意到，当 $A=\{n, n+1, \cdots, 2n-1\}$时，$A$ 中最小的两个数之和都不小于 $2n+1$，故 A 中任意两个不同正整数之和不等于$2n-1$ 或 $2n$. 因此，$|A|$的最大值不小于 n.

另一方面，考察下面的数列(它是 $1, 2, \cdots, 2n-1$ 的一个排列)

$$2n-1, 1; 2n-2, 2; \cdots; n+1, n-1; n.$$

其中任意两个相邻数之和都为 $2n-1$ 或 $2n$. 而由抽屉原则可知：当 $|A| \geqslant n+1$ 时，A 中必有两个数在上述数列中相邻，所以，符合条件的 A 的元素个数不大于 n.

综上可知，$|A|$的最大值为 n.

说明 上述推导过程中实质上还说明了当 $|A|=n$时，A 必为$\{n, n+1, \cdots, 2n-1\}$.

【例 3】 设 n 为正整数，求最小的正整数 k，使得存在 k 个长度为 $2n+2$ 的 0，1 数列满足：对任意一个长度为 $2n+2$ 的 0、1 数列 A，在上述 k 个数列中，都有一个数列 B，使得数列 A、B 在至少 $n+2$ 个相应位置上的数码相同.

解 所求最小正整数 $k=4$(找到这个答案是解决本题的关键，当然也是此题的难点).

一方面，考察下面的四个数列：

$$A=(0, 0, \cdots, 0), B=(1, 1, \cdots, 1),$$
$$C=(1, 0, \cdots, 0), D=(0, 1, \cdots, 1).$$

对每一个长度为 $2n+2$ 的 0、1 数列 X 而言，如果 X 中 0(或 1) 的个数 $\geqslant n+2$，那么 X 与 A(或 B) 在至少 $n+2$ 个相应位置上的数码相同. 在 X 中 0 的个数与 1 的个数都为 $n+1$ 时，看数列 X 的第一项，当 X 的第一项为 0(或 1) 时，X 与 D(或 C) 在至少 $n+2$ 个相应位置上的数码相同. 所以，$k \leqslant 4$.

另一方面，对任意三个数列

$$A=(a_1, a_2; a_3, a_4; \cdots; a_{2n+1}, a_{2n+2}),$$
$$B=(b_1, b_2; b_3, b_4; \cdots; b_{2n+1}, b_{2n+2}),$$
$$C=(c_1, c_2; c_3, c_4; \cdots; c_{2n+1}, c_{2n+2}).$$

当 $m=1, 2, \cdots, n+1$ 时，存在数对(d_{2m-1}, d_{2m})不同于(a_{2m-1}, a_{2m})，(b_{2m-1}, b_{2m})和(c_{2m-1}, c_{2m})中的任何一个(因为 0，1 的两元数对共有 4 个)，因此，取 $D=(d_1,$

d_2; d_3, d_4; …; d_{2n+1}, d_{2n+2}),则 D 与 A, B, C 中任何一个都至少在 $n+1$ 个相应位置上不同. 这表明只有三个数列作为“模板”是不够的.

综上可知,所求最小正整数 $k=4$.

【例 4】 一个国家有 $n(n\geqslant 3)$ 个城市和两家航空公司,每两个城市之间均恰有一条双向航线,该双向航线由某家航空公司独家运营. 一位女数学家想从某个城市出发,经过至少 2 个其它城市(每个途经城市仅经过一次),最后回到出发城市. 她发现,无论如何选择出发城市与途经城市,她均无法仅乘坐一家航空公司的航班. 求 n 的最大值.

解法一 将每个城市看作一个顶点,每条航线看作一条边,每个航空公司对应一种颜色,则这个国家的航线网可以看成边被二染色的 n 个顶点的完全图. 由条件知,任意一个圈都包含两种颜色的边,即同一种颜色的边构成的子图没有圈. 由熟知的结论,没有圈的简单图的边数小于顶点数,因此每种颜色的边数都不超过 $n-1$,这说明总边数不超过 $2(n-1)$. 另一方面,n 个顶点的完全图的边数为 $\frac{n(n-1)}{2}$,因此 $\frac{n(n-1)}{2}\leqslant 2(n-1)$,化简得 $n\leqslant 4$.

当 $n=4$ 时,记四个城市分别为 A, B, C, D. 若 AB, BC, CD 这三条航线由第一家航空公司运营,AC, AD, BD 这三条航线由第二家航空公司运营,则容易看出每家航空公司运营的航线均为一个链,不包含圈,即这样的情况满足题目条件.

综上所述,n 的最大值为 4.

解法二 将每个城市看作一个顶点,每条航线看作一条边,每个航空公司对应一种颜色,则这个国家的航线网可以看成边被二染色的 n 个顶点的完全图. 由条件知,任意一个圈都包含两种颜色的边,即同一种颜色的边构成的子图没有圈. 由熟知的结论,6 个顶点的完全图二染色后一定有同色三角形,即有同色圈,因此 $n\leqslant 5$. 下面证明 n 不能为 5.

若不然,设五个顶点分别为 A, B, C, D, E,考虑从顶点 A 引出的 4 条边,如果至少有三条边同色,例如 AB, AC, AD 同色,则 BC, BD, CD 中有与前述三条边同色的边将导致出现同色三角形,矛盾,而 BC, BD, CD 均与 AB, AC, AD 同色将导致它们自身形成一个同色三角形,矛盾;如果顶点 A 引出的 4 条边恰有 2 条同色,另 2 条不同色,则换一个点考虑. 如果每个顶点引出的边都是两条两条同色,则易知图中存在一个哈密尔顿圈(即 K_5),矛盾.

因此 $n\leqslant 4$, 同解法一知 n 可以为 4,故 n 的最大值为 4.

【例 5】 设 M 是平面直角坐标系中 100 个点组成的集合. 求满足下述条件的长方形的个数的最大可能值:该长方形的顶点都是 M 中的点,且其边都与坐标轴

平行.

解 当$M=\{(x, y)\mid 1\leqslant x, y\leqslant 10, x, y\in \mathbf{N}^*\}$时,以$M$中的点为顶点的长方形个数为$(C_{10}^2)^2=45^2=2025$(这时$M$中的点恰构成一个$10\times 10$的正方形点阵,从这个正方形中取两条横线与两条竖线围出的长方形即为所有以M中的点为顶点的长方形),因此,所求长方形个数的最大可能值不小于2025.

另一方面,对M中的任意一点O,平移坐标系,使O为原点,并设新的坐标系中x轴上有M中x个点,y轴上有M中y个点(这里计算坐标轴上的点时不计入点O),则以O为一个顶点的长方形(该长方形的顶点都在M中)的个数T满足:

(1) $T\leqslant xy$,这是因为该长方形必有一个点在x轴上,也必有一个点在y轴上,第四个点的位置由x轴上的点所作x轴的垂线与y轴上的点所作y轴的垂线交出(它不一定在M中).

(2) $T\leqslant 100-(x+y+1)$,这是因为该长方形与O相对的顶点不在坐标轴上,此点与O决定该长方形.

所以,$T\leqslant \min\{xy, 99-x-y\}$. 若$x+y\leqslant 18$,则$T\leqslant xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$;若$x+y>18$,则$T\leqslant 99-x-y<81$. 因此,总有$T\leqslant 81$,即$M$中的每个点都至多是81个长方形的顶点,这表明符合条件的长方形的个数不超过$\frac{81\times 100}{4}=2025$(除以4是因为每个长方形都有4个顶点,被计算过4次).

综上可知,所求长方形个数的最大值为2025.

说明 这个问题的论证过程中采用了"局部到整体"的思想,在每个局部具有一定的对称性和协调性时经常采用此思想.

【例6】 16名学生参加一次数学竞赛,考题全是选择题. 每个选择题有4个选择支,考生从每个题中选择一个选择支作为答案. 考后发现任何两名学生的答案至多有一道题相同. 问这次竞赛最多有多少道考题?说明理由.

解 先估计考题数的上界.

设共有k道题,四个选择支是1、2、3、4,有a_i个学生对问题S的答案为i,$i=1、2、3、4$. 则$a_1+a_2+a_3+a_4=16$.

如果某两个人对某道题的答案相同,就称这两个人为一个"两人对".

下面考虑对问题S答案相同的"两人对"的个数A,则

$$A=\sum_{i=1}^{4}C_{a_i}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(a_i^2-a_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}a_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}a_i$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}a_i^2-8\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\right)^2-8=24.$$

所以，k 个问题至少产生 $24k$ 个不同的"两人对". 但是，由题意，任意两个人至多产生一个"两人对"，所以，$24k \leqslant C_{16}^2$，故 $k \leqslant 5$.

下面给出一张具体的答题表，说明 $k=5$ 是可能的.

$$
\begin{array}{llll}
P_1: 11\,111, & P_2: 12\,222, & P_3: 13\,333, & P_4: 14\,444, \\
P_5: 21\,234, & P_6: 22\,143, & P_7: 23\,412, & P_8: 24\,321, \\
P_9: 31\,342, & P_{10}: 32\,431, & P_{11}: 33\,124, & P_{12}: 34\,213, \\
P_{13}: 41\,423, & P_{14}: 42\,314, & P_{15}: 43\,241, & P_{16}: 44\,132,
\end{array}
$$

其中 $P_1, P_2, \cdots, P_{16}$ 表示这 16 名学生.

综上，最多有 5 道考题.

【例 7】 试求满足下列条件的大于 5 的最小奇数 a：存在正整数 m_1, n_1, m_2, n_2，使得

$$a = m_1^2 + n_1^2,\ a^2 = m_2^2 + n_2^2, \text{且 } m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

解 由

$$261 = 15^2 + 6^2,\ 261^2 = 189^2 + 180^2,\ 15 - 6 = 189 - 180$$

知 261 具有题目所述性质，下证 261 就是大于 5 且具有题目所述性质的最小奇数，即 5 和 261 之间不存在这样的奇数.

若不然，则存在介于 5 和 261 之间的奇数 a 及正整数 m_1, n_1, m_2, n_2，满足

$$a = m_1^2 + n_1^2,\ a^2 = m_2^2 + n_2^2,\ m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

设 $m_1 - n_1 = l$，由对称性不妨设 $l \geqslant 0$. 由 a 是奇数知 m_1, n_1 的奇偶性不同，故 l 是一个奇数，再由 $m_1 < \sqrt{261} < 17$ 知 $l \leqslant 15$. 因此 l 为 $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ 之一.

若 $l=1$，则 $m_2 - n_2 = 1$，结合 $a^2 = m_2^2 + n_2^2$ 得 $(2n_2+1)^2 - 2a^2 = -1$，即 $(2n_2+1, a)$ 是 Pell 方程 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的一组解，易知此方程解的 y 值由小到大依次为 $5, 29, 169, 985, \cdots$，其中满足 $5 < a < 261$ 的只有 $a = 29$ 或 $a = 169$，但这两个数均无法表示成 $m_1^2 + n_1^2$ 的形式 $(m_1 - n_1 = 1)$，矛盾.

若 $3 \mid l$，则 $a^2 \equiv 2n_2^2 \pmod 3$，由 2 不是 3 的平方剩余知 $3 \mid a$，因此 $3 \mid m_1$，$3 \mid n_1$. 由此可推得 $9 \mid a$，故 $81 \mid m_2^2 + n_2^2$，即 $9 \mid \left(\frac{m_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{3}\right)^2$. 由 -1 不是 3 的平方剩余知 $3 \mid \frac{m_2}{3}$，$3 \mid \frac{n_2}{3}$，因此 $9 \mid m_2, n_2$，故 $9 \mid l$，即 $l = 9$. 由于 $a < 261 = 15^2 + 6^2$，故 $n_1 < 6$，只能有 $n_1 = 3$，$a = 12^2 + 3^2 = 153$. 但由 $153^2 = (n_2+9)^2 + n_2^2$ 得 $(2n_2+9)^2 = 9^2 \times 577$，矛盾.

若 $l=11$ 或 $l=13$，则 $a^2\equiv 2n_2^2 \pmod l$，由 2 不是 l 的平方剩余知 $l\mid a$，再由 $0\equiv a\equiv 2n_1^2 \pmod l$ 知 $l\mid n_1$，因此 $n_1\geqslant l$，即 $m_1\geqslant 2l$，故 $a\geqslant 5l^2>500>261$，矛盾.

若 $l=5$，则 $a^2\equiv 2n_2^2 \pmod 5$，由 2 不是 5 的平方剩余知 $5\mid a$，再由 $0\equiv a\equiv 2n_1^2 \pmod 5$ 知 $5\mid n_1$. 若 $n_1\geqslant 10$，则 $m_1\geqslant 15$，故 $a\geqslant 15^2+10^2=325>261$，矛盾；若 $n_1=5$，则 $m_1=10$，$a=10^2+5^2=125$，但由 $125^2=(n_2+5)^2+n_2^2$ 得 $(2n_2+5)^2=5^2\times 1249$，矛盾.

若 $l=7$，则由 $a<261<16^2+9^2$ 知 $n_1\leqslant 8$. 对 n_1 穷举知 a 只能为 65, 85, 109, 137, 169, 205, 245 之一. 由 $a^2=(n_2+7)^2+n_2^2$ 得 $(2n_2+7)^2=2a^2-49$，因此 $2a^2-49$ 必须是一个完全平方数. 但对 $a=65$, 85, 109, 137, 169, 205, 245 逐一验证知这些 a 值均不满足条件.

综上所述，大于 5 的具有题目所述性质的最小奇数 a 为 261.

【例 8】 在一次由 n 个是非题构成的竞赛中，有 8 名选手参加，已知对任意两个是非题 (A, B) 而言（视 (A, B) 为有序对），恰有两个人的答案为（对，对）；恰有两个人的答案是（对，错）；恰有两个人的答案是（错，对）；恰有两个人的答案是（错，错）. 求 n 的最大值，并说明理由.

解 考虑一个由 8 行、n 列组成的表格. 在此表格的第 i 行、第 j 列处的格子上写上数 0(1)，如果第 i 个人对第 j 个题的答案是对（错）.

由条件，在表格的任意两列中，与各行相交形成的 8 个有序对恰好是两个 00，两个 01，两个 10 和两个 11.

如果 $n\geqslant 8$，我们只考虑表格的前 8 列组成的 8×8 的子表格，注意到，将任何一列中的 0 全部换为 1；而将 1 全部换为 0，此表格中的各数仍具有题中的性质. 所以，我们不妨设此 8×8 的子表格的第一行全部为 0. 记这个 8×8 的子表格中第 i 行中 0 的个数为 a_i，通过对每两列予以考虑，可知 $\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$，而由各行形成的 00 对的个数为 $\sum\limits_{i=1}^{8}\mathrm{C}_{a_i}^2$.

一方面，由于 $a_1=8$，从而 $\sum\limits_{i=2}^{8}a_i=24$，故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}\mathrm{C}_{a_i}^2&=\mathrm{C}_8^2+\sum_{i=2}^{8}\mathrm{C}_{a_i}^2=28+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{8}a_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{8}a_i\\&=28-12+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{8}a_i^2\\&\geqslant 16+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\times\Big(\sum_{i=2}^{8}a_i\Big)^2=57\frac{1}{7},\end{aligned}$$

所以,由各行形成的 00 对的个数不小于 58.

另一方面,依每两列进行计算,由各行形成的 00 对的个数应为 $2C_8^2=56$ 对.

这表明,应有 $56\geqslant 58$,矛盾.所以 $n\leqslant 7$.

下面的例子表明 n 可以为 7.

$$
\begin{array}{ccccccc}
0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&0&0\\
0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1\\
1&0&1&0&1&0&1\\
1&0&1&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&1&0\\
1&1&0&1&0&0&1
\end{array}
$$

综上可知,所求的最大值为 7.

说明 例 6 与例 8 在处理上有许多相似之处,论证过程中都用到了"算两次"的思想,通过对某一个特殊量从两个方面计算估计出要求的离散最值,最后,通过实例说明此最值是可以达到的.希望同学们细细体会这一处理方法.

【例 9】 10 个学生参加 n 个课外小组,每一个小组至多 5 个人,每两个学生至少参加某一个小组,而任意两个课外小组,至少可以找到两个学生,他们都不在这两个课外小组中.证明:n 的最小值为 6.

证明 设 10 个学生为 $S_1, S_2, \cdots, S_{10}$,n 个课外小组为 $G_1, G_2, \cdots, G_n$.

首先,每个学生至少参加两个课外小组.否则,若有一个学生只参加一个课外小组,设这个学生为 S_1,由于每两个学生都至少在某一小组内出现过,所以其他 9 个学生都与他在同一组出现,于是这一组就有 10 个人了,矛盾.

若有一学生恰好参加两个课外小组,不妨设 S_1 恰好参加 G_1, G_2,由题设,对于这两组,至少有两个学生,他们没有参加这两组,于是他们与 S_1 没有同过组,矛盾.

所以,每一个学生至少参加三个课外小组.于是 n 个课外小组 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的人数之和不小于 $3\times 10=30$.

另一方面,每一课外小组的人数不超过 5,所以 n 个课外小组 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的人数不超过 $5n$,故

$$5n\geqslant 30,$$

所以 $n\geqslant 6$.

下面构造一个例子说明 $n=6$ 是可以的.

$$G_1=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\},\ G_2=\{S_1, S_2, S_6, S_7, S_8\},$$
$$G_3=\{S_1, S_3, S_6, S_9, S_{10}\},\ G_4=\{S_2, S_4, S_7, S_9, S_{10}\},$$
$$G_5=\{S_3, S_5, S_7, S_8, S_9\},\ G_6=\{S_4, S_5, S_6, S_8, S_{10}\}.$$

容易验证,这样的 6 个课外小组满足题设条件. 所以,n 的最小值为 6.

练习题

A 组

1 已知正数 a, b, c 满足 $4a+b=abc$,则 $a+b+c$ 的最小值为________.

2 从 1, 2, …, 100 中任取 k 个数,其中一定有两个数互质,求 k 的最小值.

3 若干个互不相同的正整数的和为 200,则它们乘积的最大值是多少?

4 对任意集合 X,用 $|X|$ 表示 X 中的元素个数,$n(X)$ 表示 X 的子集的个数(包括空集与 X 本身). 已知集合 A、B、C 满足

$$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C),$$
$$|A|=|B|=100.$$

求 $|A\cap B\cap C|$ 的最小可能值.

5 a, b, c 是不同的正整数,若集合 $\{a+b, b+c, c+a\}=\{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\}$, n 为正整数,则 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是________.

6 将 9 个 1, 9 个 2, …, 9 个2000共 18 000 个数填入一个 9 行、2000 列的表格(每格一个数),使得任何一列中的任意两数之差的绝对值不超过 3. 求这个表格的每列中各数之和(共 2000 个列和)的最小值的最大值.

7 设 $M=\{1, 2, \cdots, 19\}$,集合 $A=\{a_1, \cdots, a_k\}$为 M 的子集. 求最小的 k,使得对任意 $b\in M$,都存在 a_i, $a_j\in A$,使得 $b\in\{a_i, a_i+a_j, a_i-a_j\}$(这里 a_i 和 a_j 可以相同).

8 在一个由有限项构成的实数数列中,任何连续 7 项之和都为负数,而任何连续 11 项之和都是正数. 试问:该数列至多有多少项?

9 某市有 n 所中学,第 i 所中学派出 C_i 名学生 ($1\leqslant C_i\leqslant 40$, $1\leqslant i\leqslant n$) 到体育馆观看球赛,全部学生总数为 $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i=2000$, 每一横排有 200 个座位,要求同一学校的学生必须坐在同一横排. 问:体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能坐下?

10 设 M 为$\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$ 的子集,且 M 中任意 3 个元素之积不是完全平方数. 求 M 的元素个数的最大值.

B 组

⑪ 我从 1, 2, …, 144 中任取一个数,你每次取一个 $\{1, 2, \cdots, 144\}$ 的子集,问我取的数是否在该子集中,最终确定我取的数. 若每次回答,答案是 Yes,则你需付出 2 元,答案是 No,则你需付出 1 元. 为保证能找出我取的数,你需要付出的钱的最小值为多少?

⑫ 黑板上写着 128 个 1,进行如下操作:每次擦去黑板上的任意两数 a 和 b. 并写上数 $ab+1$,这样,经 127 步操作后,黑板上剩下一个数. 设最后剩下的那个数的最大值为 A,求 A 的末位数字.

⑬ 设 A 是一个 3×9 的方格表,在每一个小方格内各填一个正整数. 称 A 中的一个 $m\times n(1\leqslant m\leqslant 3,\ 1\leqslant n\leqslant 9)$ 方格表为"好矩形",若它的所有数的和为 10 的倍数. 称 A 中的一个 1×1 的小方格为"坏格",若它不包含于任何一个"好矩形". 求 A 中"坏格"个数的最大值.

⑭ 设 $n\geqslant 5$,且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正整数,对任意 $1\leqslant i\leqslant n$,均有 $a_i\leqslant 2n$. 证明:

$$\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}[a_i,\ a_j]\leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

这里 $[x,\ y]$ 表示 x、y 的最小公倍数,而 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分.

⑮ 正整数集的子集 $M=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 具有如下性质:M 中任意两个不相交的非空子集中的元素之和不相等. 求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值,这里 n 为给定的正整数.

⑯ 设 n 是给定的正整数 $(n\geqslant 2)$,四个正整数 a、b、c、d 满足 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}<1$, $b+d\leqslant n$. 求 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ 的最大值.

⑰ 设 n 为给定的正整数,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正整数,且 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1$. 求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值.

第25讲 简单的函数迭代和函数方程

一、知识要点和基本方法

设 $f:D\to D$ 是一个函数，对任意 $x\in D$，记 $f^{(0)}(x)=x$，$f^{(1)}(x)=f(x)$，$f^{(2)}(x)=f(f(x))$，…，$f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x))$，$n\in\mathbf{N}$. 我们称由此定义的函数 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次迭代.

函数迭代的理论与方法在计算数学等领域有着很重要的应用，然而，由于它的一些方法和结果是初等的，因而在中学数学竞赛中也屡有出现.

含有未知函数的方程称为函数方程，例如

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

和

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

等等都是函数方程，其中 $f(x)$ 为未知函数.

如果一个函数 $f(x)$ 对其定义域内自变量的一切值都满足所给的方程，那么称 $f(x)$ 为这个函数方程的一个解. 寻求函数方程的解或证明函数方程无解的过程就是解函数方程.

对一般的函数迭代与函数方程的问题没有统一的方法来处理，只能具体问题具体分析. 常见的一些特殊的方法有：不动点方法（称满足 $f(x)=x$ 的点为函数 $f(x)$ 的不动点）、桥函数相似法、特殊值方法、换元法、递推方法、Cauchy 方法、不等式估计、先猜后证等.

二、例题精讲

【例1】 设 $f(x)$ 的定义域是所有非零实数组成的集合，且满足对任意 x，都有

$$3f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=4x, \qquad ①$$

求 $f(x)$.

解 用 $\frac{1}{x}$ 代换①中的 x，得

$$3f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{4}{x}, \qquad ②$$

从①、②中消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$$f(x)=\frac{4}{5}\left(3x-\frac{2}{x}\right),$$

代入①检验，可知 $f(x)=\frac{4}{5}\left(3x-\frac{2}{x}\right)$ 满足题设. 故所求函数为

$$f(x)=\frac{4}{5}\left(3x-\frac{2}{x}\right)(x\neq 0).$$

说明 利用方程组消元的思想是处理简单函数方程问题最常见的方法，此题中“检验”是解函数方程问题的一个重要组成部分，它体现出思维的完备性. 一般而言，我们总是从题给条件出发得到所求函数 $f(x)$ 应具有的必要条件，然后代入检验(尽管这可能是容易的，但不可或缺)去得到 $f(x)$ 的充分性.

【例 2】 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得：对任意 $x, y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x)+f(y)=f(f(x)f(y)). \quad ①$$

解 我们从计算 $f(0)$ 的值来寻求突破口.

设 $f(0)=a$，在①中，令 $x=y=0$，就有

$$f(a^2)=2a, \quad ②$$

进一步，在①中，令 $x=y=a^2$，利用②式，有

$$f(4a^2)=2f(a^2)=4a.$$

换一角度来看 $f(4a^2)$，在①中，令 $x=4a^2$，$y=0$，就有

$$f(4a^2)+f(0)=f(4a^2),$$

于是 $f(0)=0$，这时，在①中令 $y=0$，就有

$$f(x)+f(0)=f(0),$$

从而，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=0$.

直接验证可知该函数符合，故 $f(x)=0\ (x\in\mathbf{R})$.

说明 此题的一个关键点是确定 $f(0)$ 的值，一旦突破问题即迎刃而解.

【例 3】 设 $n(\geqslant 2)$ 是一个给定的正整数. 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足对任意 $x, y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x+y^n)=f(x)+f(y)^n. \quad ①$$

证明：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x^2)=f(1)^{n-2}f(x)^2$.

证明 在①中令 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$. 于是，对任意 $y\in\mathbf{R}$，有 $f(y^n)=f(y)^n$. 因此，若 $z>0$，取 $y=\sqrt[n]{z}$，则

$$f(x+z)=f(x+y^n)=f(x)+f(y)^n=f(x)+f(y^n)=f(x)+f(z),$$

此式中取 $x=-z$，得 $f(-z)=-f(z)$，知 f 是一个奇函数. 进而，对 $x, y\in \mathbf{R}$，都有

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{②}$$

满足②的函数方程称为 Cauchy 方程，利用数学归纳法易证：对任意 $k\in \mathbf{N}^*$，有 $f(kx)=kf(x)$；再由 $f(-x)=-f(x)$，可知对任意 $k\in \mathbf{Z}$，有 $f(kx)=kf(x)$；进一步，对 $k\in \mathbf{Q}$，设 $k=\frac{p}{q}$，$p, q\in \mathbf{Z}$，则 $f(q(kx))=qf(kx)$，而 $q(kx)=px$，故 $f(q(kx))=f(px)=px$，于是，$f(kx)=\frac{p}{q}x=kx$. 因此，对任意 $x\in \mathbf{R}$ 及 $k\in \mathbf{Q}$，都有 $f(kx)=kf(x)$.

现在，对任意给定的 $x\in \mathbf{R}$，可知对任意 $k\in \mathbf{Q}$，都有

$$f((x+k)^n)=f(x^n+\mathrm{C}_n^1x^{n-1}k+\cdots+\mathrm{C}_n^n\cdot k^n),$$

由②结合 $f(kx)=kf(x)$，$k\in \mathbf{Q}$ 可得

$$\begin{aligned} f((x+k)^n) &= f(x^n)+f(\mathrm{C}_n^1x^{n-1}\cdot k)+\cdots+f(\mathrm{C}_n^n\cdot k^n) \\ &= f(x^n)+k\mathrm{C}_n^1f(x^{n-1})+k^2\mathrm{C}_n^2f(x^{n-2})+\cdots+\mathrm{C}_n^n\cdot k^nf(1). \end{aligned}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned} f((x+k)^n) &= f(x+k)^n=(f(x)+f(k))^n=(f(x)+kf(1))^n \\ &= f(x)^n+\mathrm{C}_n^1f(x)^{n-1}\cdot k\cdot f(1)+\cdots+\mathrm{C}_n^nk^n\cdot f(1)^n. \end{aligned}$$

对比上述两式可知

$$\begin{aligned} & f(x^n)+k\mathrm{C}_n^1f(x^{n-1})+\cdots+k^n\mathrm{C}_n^nf(1) \\ = & f(x)^n+k\mathrm{C}_n^1f(1)f(x)^{n-1}+\cdots+k^n\mathrm{C}_n^n\cdot f(1)^n. \end{aligned}$$

视 x 为常数，上式两边都是关于 k 的多项式，由于此式对所有 $k\in \mathbf{Q}$ 都成立，因此上式两边恒等，进而关于 k 的相同幂次对应的系数相同，对比两边 k^{n-2} 项系数，就有

$$\mathrm{C}_n^{n-2}f(x^2)=\mathrm{C}_n^{n-2}f(1)^{n-2}f(x)^2.$$

故 $f(x^2)=f(1)^{n-2}f(x)^2$. 命题获证.

说明 对于②的处理所采用的方法是著名的 Cauchy 方法，它体现的是从正整数到整数再到有理数逐步推进的思想.

【例 4】 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意 $x, y\in \mathbf{R}$，都有

$$f(x^2+y+f(y))=2y+f(x)^2. \tag{①}$$

解 首先,函数 $f(x)=x$ 是一个符合条件的函数.下面我们证明这是唯一一个符合条件的函数,采用建立一系列结论的方式去处理.

结论 1 $f(a)=0$ 的充要条件是 $a=0$.

在①中取 $y=-\frac{1}{2}f(x)^2$,可知存在 $a\in\mathbf{R}$,使得 $f(a)=0$.对这个 a,在①中取 $(x, y)=(0, a)$,得 $0=2a+f(0)^2$;而在①中令 $y=0$,得 $f(x)^2=f(x^2+f(0))$,此式中用 $-x$ 代替 x,知 $f(-x)^2=f((-x)^2+f(0))=f(x^2+f(0))=f(x)^2$,故 $f(-a)=0$.于是在①中取 $(x, y)=(0, -a)$,得 $0=-2a+f(0)^2$,结合前面所得 $0=2a+f(0)^2$,可知 $4a=0$,即 $a=0$,进而 $f(0)^2=0$,得 $f(0)=0$.结论 1 获证.

结论 2 $f(x)$ 是一个奇函数,并且当 $x>0$ 时,有 $f(x)>0$.

事实上,在①中令 $y=0$,结合结论 1 可知 $f(x^2)=f(x)^2$,故当 $x>0$ 时,有 $f(x)>0$.现在①中取 $(x, y)=\left(\sqrt{\alpha}, -\frac{1}{2}f(\alpha)\right)$(这里 α 为任意正实数),就有

$$f\left(\alpha-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)\right)=-f(\alpha)+f(\sqrt{\alpha})^2=-f(\alpha)+f((\sqrt{\alpha})^2)=0.$$

再由结论 1 得 $\alpha=\frac{f(\alpha)}{2}-f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)$.因此,

$$f(-\alpha)=f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)\right). \qquad ②$$

在①中再取 $(x, y)=\left(0, -\frac{f(\alpha)}{2}\right)$,得

$$f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)\right)=-f(\alpha).$$

对比此式与②就可知 $f(x)$ 为奇函数,结论 2 获证.

结论 3 当 $x>0$ 时,有 $f(x)=x$.

对任意 $\alpha>0$,在①中取 $(x, y)=(\sqrt{\alpha}, -\alpha)$,得

$$f(f(-\alpha))=-2\alpha+f(\sqrt{\alpha})^2=-2\alpha+f(\alpha).$$

知 $2\alpha=f(\alpha)-f(f(-\alpha))=f(\alpha)+f(f(\alpha))$(用到 f 为奇函数),故

$$\begin{aligned}f(2\alpha)&=f(f(\alpha)+f(f(\alpha)))=f(0^2+f(\alpha)+f(f(\alpha)))\\&=2f(\alpha)+f(0)^2=2f(\alpha).\end{aligned}$$

另一方面,在①中取 $(x, y)=(\sqrt{2\alpha}, -\alpha)$,得

$$f(2\alpha-\alpha+f(-\alpha))=-2\alpha+f(\sqrt{2\alpha})^2=-2\alpha+f(2\alpha),$$

知 $f(\alpha-f(\alpha))=-2\alpha+2f(\alpha)=-2(\alpha-f(\alpha))$.

记 $\beta=\alpha-f(\alpha)$，则 $f(\beta)=-2\beta$. 如果 $\beta>0$，那么 $-2\beta<0$，但是 $f(\beta)>0$（结论 2），矛盾；如果 $\beta<0$，那么 $-2\beta>0$，但是 $f(\beta)=-f(-\beta)<0$，亦矛盾. 所以，只能是 $\beta=0$，结论 3 获证.

综上可知，满足条件的函数恰有一个：$f(x)=x(x\in\mathbf{R})$.

【例 5】 是否存在函数 $f:\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}^{+}$，使得对任意 $x, y\in\mathbf{R}^{+}$，都有

$$f(x+y)\geqslant f(x)+yf(f(x)) \quad ? \tag{①}$$

解 我们证明：满足条件的函数不存在.

事实上，若存在这样的函数 $f(x)$，则由①可知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^{+}$ 上的递增函数，并且无上界（这一点只需令 $x=1$，让 $y\to+\infty$ 即可知）.

现在对 $x>y>0$，在①中用 (x, y) 代替 $(x+y, x)$，可得

$$f(x)\geqslant f(y)+(x-y)f(f(x)),$$

即有

$$f(x)-f(y)\geqslant(x-y)f(f(x)). \tag{②}$$

如果 $f(y)>y$，那么在 ② 中取 $x=f(y)$，得

$$f(f(y))-f(y)\geqslant(f(y)-y)f(f(y)),$$

进而，有

$$1+y-f(y)\geqslant\frac{f(y)}{f(f(y))}>0,$$

知 $f(y)<y+1$.

这表明，对任意 $x\in\mathbf{R}^{+}$，都有 $f(x)<x+1$. 于是，对任意 $x, y\in\mathbf{R}^{+}$，都有

$$1+x+y>f(x+y)\geqslant f(x)+yf(f(x)).$$

此时中，固定 x，让 $y\to+\infty$，可知 $f(f(x))\leqslant 1$.

注意到，$f(x)$ 是一个无上界的递增函数，因此，存在一个无上界的正实数数列 $\{C_n\}$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^{*}$，都有 $f(C_{n+1})\geqslant C_n$，进而

$$1\geqslant f(f(C_{n+2}))\geqslant f(C_{n+1})>C_n.$$

这与 $\{C_n\}$ 无上界矛盾.

所以，不存在符合要求的函数.

【例 6】 求所有的实数 a，使得存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足对任意 $x, y\in\mathbf{R}$，都有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+a \mid x-y \mid . \qquad ①$$

解 当 $a \leqslant 0$ 时，取 $f(x)=x^2$，利用 $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 可知存在符合要求的函数.

下证：当 $a>0$ 时，不存在符合要求的函数.

事实上，若对某个 $a>0$，存在符合条件的函数 f，则对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 及 $i \in \mathbf{N}$，由①可得

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{i+2}{n}\right)+f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \geqslant f\left(\frac{i+1}{n}\right)+\frac{2a}{n}.$$

进而，

$$f\left(\frac{i+2}{n}\right)-f\left(\frac{i+1}{n}\right) \geqslant f\left(\frac{i+1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)+\frac{4a}{n}. \qquad ②$$

将②对 $i=0,1,2,\cdots,n-1$ 求和，可得

$$f\left(\frac{n+1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant f(1)-f(0)+4a,$$

将②对 $i=1,2,\cdots,n$ 求和，可得

$$f\left(\frac{n+2}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right) \geqslant f\left(\frac{n+1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)+4a,$$

……

将②对 $i=n-1,n,\cdots,2n-2$ 求和，可得

$$f(2)-f(1) \geqslant f\left(\frac{2n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)+4a.$$

对所得到的 n 个不等式求和，就有

$$f(2)-f(1) \geqslant f(1)-f(0)+4na.$$

在 $a>0$ 时，令 $n \to +\infty$，上式不能成立.

所以，当且仅当 $a \leqslant 0$ 时，存在符合要求的函数.

说明 不等式方法在数学的各个分支中都有应用，这被认为一种分析功夫，我们总是在等与不等之间串行.

下面我们来讨论一些与函数迭代有关的问题.

【例 7】 设 $n \in \mathbf{N}^*$，分别求下述函数的 n 次迭代函数 $f^{(n)}(x)$.

(1) $f(x)=ax+b$，这里 a、b 为实常数.

(2) $f(x)=2x^2-1$，$|x|\leqslant 1$.

解 (1) 如果 $a=1$，易得 $f^{(n)}(x)=x+nb$.

如果 $a\neq 1$，我们写 $f(x)=a\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{b}{1-a}$，这里 $\dfrac{b}{1-a}$ 是满足 $f(x)=x$，即 $ax+b=x$ 的根，也就是 $f(x)$ 的不动点. 现在可得 $f^{(2)}(x)=a\left(f(x)-\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{b}{1-a}=a\left(a\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)\right)+\dfrac{b}{1-a}=a^2\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{b}{1-a}$，依次递推可得 $f^{(n)}(x)=a^n\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{b}{1-a}$.

综上可知，$f^{(n)}(x)=\begin{cases}x+nb, & \text{若 } a=1; \\ a^n\left(x-\dfrac{b}{1-a}\right)+\dfrac{b}{1-a}, & \text{若 } a\neq 1.\end{cases}$

(2) 为求 $f^{(n)}(x)$，我们引入"桥函数"的概念. 若存在一个函数 $\varphi(x)$ 及它的反函数 $\varphi^{-1}(x)$，使得 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$，则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相似，其中 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的桥函数. 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相似，即存在 $\varphi(x)$，使得 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$，那么 $f^{(2)}(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(f(x))))=\varphi^{-1}(g(\varphi(\varphi^{-1}(g(\varphi(x))))))=\varphi^{-1}(g^{(2)}(\varphi(x)))$. 依次递推，就有 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

回到原题，取 $g(x)=2x$，$\varphi(x)=\arccos x$，则 $\varphi^{-1}(x)=\cos x$. 于是 $f(x)=2x^2-1=2\cos^2(\arccos x)-1=\cos(2\arccos x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 通过"桥函数" $\varphi(x)=\arccos x$ 相似. 从而结合 $g^{(n)}(x)=2^n x$（这利用(1)的结果可得），知 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))=\cos(2^n\arccos x)$.

说明 这两个函数迭代分别利用了不动点方法和桥函数相似法，它们是处理函数迭代问题的常见方法.

对比(2)的结果，利用三角函数的性质可知 $f(x)=\cos(n\arccos x)$ 是关于 x 的一个 n 次多项式，这个多项式是著名的切比雪夫多项式，它有很多应用.

【例 8】 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$x\in\mathbf{R}^+$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，定义

$$g_n(x)=x+f^{(1)}(x)+f^{(2)}(x)+\cdots+f^{(n)}(x).$$

证明：(1) 对任意 $x>y>0$，都有 $g_n(x)>g_n(y)$；

(2) $g_n(1)=\dfrac{F_1}{F_2}+\dfrac{F_2}{F_3}+\cdots+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，其中 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$，$n=1$，2，…（这是著名的 Fibonaccia 数列）.

证明 熟知函数 $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x>1$ 时单调递增，所以 $x+f(x)=\dfrac{1}{x+1}+(x+1)-1$ 单调递增（因为 $x>0$，故 $x+1>1$）. 注意到 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，故 $f^{(2)}(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，进而 $f^{(2)}(x)+f^{(3)}(x)$ 单调递增（在 $x+f(x)$

中，用 $f^{(2)}(x)$ 代替 x)。依此类推可知 $f^{(2m)}(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，而且 $f^{(2m)}(x)+f^{(2m+1)}(x)$ 在 $x>0$ 时也单调递增。所以当 $n=2m$ 时，$g_n(x)=(x+f(x))+(f^{(2)}(x)+f^{(3)}(x))+\cdots+(f^{(2m-2)}(x)+f^{(2m-1)}(x))+f^{(2m)}(x)$ 单调递增；当 $n=2m+1$ 时，$g_n(x)=\sum_{k=0}^{m}(f^{(2k)}(x)+f^{(2k+1)}(x))$ 单调递增，所以(1)成立。

对于(2)，由于 $f\left(\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}+1}=\dfrac{F_{n+1}}{F_n+F_{n+1}}=\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，所以

$$f^{(j)}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=f^{(j-1)}\left(\frac{F_2}{F_3}\right)=\cdots=\frac{F_{j+1}}{F_{j+2}}.$$

故

$$g_n(1)=g_n\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\sum_{j=0}^{n}f^{(j)}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\sum_{j=0}^{n}\frac{F_{j+1}}{F_{j+2}}.$$

故(2)成立。

【例 9】 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足下述条件：

(1) 对任意 x，$y\in\mathbf{R}$，都有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$；

(2) 存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $f^{(k)}(0)=0$，这里 $f^{(1)}(x)=f(x)$，$f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x))$。

求证：$f(0)=0$ 或者 $f(f(0))=0$。

证明 由条件(2)，我们设 k 是最小的满足 $f^{(k)}(0)=0$ 的正整数。如果 $k\geqslant 3$，那么

$$\begin{aligned}|f(0)|&=|f(0)-0|\\&\geqslant|f^{(2)}(0)-f(0)|\\&\geqslant\cdots\\&\geqslant|f^{(k)}(0)-f^{(k-1)}(0)|\\&=|f^{(k-1)}(0)|,\\|f^{(k-1)}(0)|&=|f^{(k-1)}(0)-0|\\&\geqslant|f^{(k)}(0)-f(0)|\\&=|f(0)|.\end{aligned}$$

所以，$|f^{(k-1)}(0)|=|f(0)|$。

若 $f^{(k-1)}(0)=f(0)$，则 $f(f(0))=f^{(k)}(0)=0$，矛盾。

若 $f^{(k-1)}(0)=-f(0)$，则

$$\begin{aligned}|f(0)|&=|f(0)+0|\\&=|f^{(k)}(0)-f^{(k-1)}(0)|\\&\leqslant|f^{(k-1)}(0)-f^{(k-2)}(0)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \cdots\\&\leqslant |f^{(2)}(0)-f(0)|\\&\leqslant |f(0)-0|\\&=|f(0)|.\end{aligned}$$

因此，上述不等式全部取等号. 从而，对 $2\leqslant j\leqslant k-1$，都有

$$|f^{(j)}(0)-f^{(j-1)}(0)|=|f(0)|,$$

即
$$f^{(j)}(0)-f^{(j-1)}(0)=\pm f(0).$$

由 k 的最小性，可知 $f(0)$, $f^{(2)}(0)$, $\cdots$, $f^{(k-1)}(0)$ 都不等于零，结合上式，可得 $f^{(2)}(0)=2f(0)$, $f^{(3)}(0)\in\{f(0), 3f(0)\}$, $f^{(4)}(0)\in\{2f(0), 4f(0)\}$，依次递推，可知 $f^{(k-1)}(0)$ 是 $f(0)$ 的正整数倍，与 $f^{(k-1)}(0)=-f(0)$ 矛盾.

综上可知，命题成立.

练习题

A组

1 设 $f(x)=x^2+ax+b\cos x$，求所有的实数对 (a, b)，使得方程 $f(x)=0$ 与 $f(f(x))=0$ 的实数解构成的集合相同(都是非空集合).

2 设 $f(x)=3x+2$. 证明：存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $f^{(100)}(m)$ 能被2000整除.

3 已知 $f(x)=\sqrt{20x^2+10}$，求 $f^{(n)}(x)$ 的表达式.

4 求一个函数 $g(x)$，使得 $g^{(8)}(x)=x^2+2x$.

5 多项式函数 $P_n(x, y)$，满足：$P_1(x, y)=1$，而对 $n=1, 2, \cdots$ 都有

$$P_{n+1}(x, y)=(x+y-1)(y+1)P_n(x, y+2)+(y-y^2)P_n(x, y).$$

证明：对任意 x、y 及正整数 n，都有 $P_n(x, y)=P_n(y, x)$.

6 设对实数 $x(\neq 0, 1)$，都有 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$. 求函数 $f(x)$.

7 求所有的函数 $f:\mathbf{N}^*\rightarrow\mathbf{N}^*$，使得对任意 $x, y\in\mathbf{N}^*$，都有

$$f(x+f(y))=f(x)+y. \qquad ①$$

8 求所有的非零函数 $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$，使得对任意 x、y，都有

$$f(x)f(y)=f(x-y).$$

9 求所有定义在非零实数上的函数 $f(x)$，使得：

(1) 对所有 $x\neq 0$, $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(2) 对任意 $x\neq -y$, x, $y\in\mathbf{R}$. 都有

$$f(x)+f(y)=1+f(x+y).$$

B组

10 设 $S=\{1,2,3,4,5\}$. 问:有多少个函数 $f:S\to S$,使得对任意 $x\in S$,都有 $f^{(50)}(x)=x$?

11 求所有的函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,使得对任意 $x\in\mathbf{Z}$,都有

$$3f(x)-2f(f(x))=x.$$

12 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得对任意 $x, y\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1.$$

13 求所有的函数 $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$,使得

(1) $f(x+1)=\dfrac{f(x)^2-1}{x}$, $x\in[1,+\infty)$;

(2) 函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 是一个有界函数.

14 求所有的函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$,使得对任意 $x, y\in\mathbf{R}^+$,都有

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y).$$

15 证明:不存在函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$,使得对 $x, y\in\mathbf{R}^+$,都有

$$f(x)-f(x+y)\geqslant\frac{f(x)y}{f(x)+y}.$$

第26讲　构造函数解题

一、知识要点和基本方法

在处理某些方程、不等式等问题时，我们常常构造一个函数，利用函数的图象和性质来解决问题."构造"体现你的创造能力.

二、例题精讲

1. 构造一次函数

【例1】 设 a、b、c 是绝对值小于1的实数，证明：

$$ab+bc+ca+1>0.$$

证明　构造一次函数

$$f(x)=(b+c)x+bc+1,\ -1<x<1,$$

它的图象是一条线段，但不包括两个端点 $(-1,\ f(-1))$，$(1,\ f(1))$，若能证明其两个端点的函数值 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 均大于0，则对定义域内的每一点 x，$f(x)$ 恒大于0.

因为　$f(-1)=-(b+c)+bc+1=(b-1)(c-1)>0,$

$$f(1)=(b+c)+bc+1=(b+1)(c+1)>0,$$

所以，当 $-1<x<1$ 时，$f(x)$ 恒大于0，故

$$f(a)=a(b+c)+bc+1=ab+bc+ca+1>0.$$

【例2】 设 $x,\ y,\ z\in(0,\ 1)$，求证：

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

证明　设

$$f(x)=(1-y-z)x+y+z-yz-1,\ 0<x<1,$$

把 y、z 看作常数，则 $f(x)$ 是关于 x 的一次函数.

因为　$f(0)=y+z-yz-1=-(y-1)(z-1)<0,$

$$f(1)=(1-y-z)+y+z-yz-1=-yz<0,$$

所以，对于 $0<x<1$，都有 $f(x)<0$，即

$$(1-y-z)x+y+z-yz-1<0,$$

所以 $$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

说明 利用一次函数的单调性来证明不等式是一种常用的方法. 关键是如何"构造"好这个一次函数.

【例 3】 若不等式 $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{ax^2+7x-1}<\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2x+5}$ 对 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 恒成立,求 x 的取值范围.

解 由题意知,不等式 $ax^2+7x-1>2x+5$ 对 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 恒成立. 即关于 a 的不等式 $x^2a+5x-6>0$ 对 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 恒成立. 令

$$g(a)=x^2a+5x-6,$$

则 $$\begin{cases}g(-1)=-x^2+5x-6>0,\\ g(1)=x^2+5x-6>0.\end{cases}$$

所以, $2<x<3$.

2. 构造二次函数

【例 4】 已知当 $x\in[0, 1]$ 时,不等式

$$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$$

恒成立,其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 求 θ 的取值范围.

解 设

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta\\&=(1+\sin\theta+\cos\theta)x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta.\end{aligned}$$

因为 $f(0)=\sin\theta>0$, $f(1)=\cos\theta>0$, 所以 $\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

由于 $f(x)$的对称轴 $x=\frac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}>0$, 且

$$\frac{1+2\sin\theta}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}=\frac{1+2\sin\theta}{1+2\sin\theta+1+2\cos\theta}<1,$$

所以 $f(x)$在$[0, 1]$上的最小值就是 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值,它大于 0. 故

$$\frac{4\sin\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)-(1+2\sin\theta)^2}{4(1+\sin\theta+\cos\theta)}>0,$$

即 $$4\sin\theta\cos\theta-1>0,\ \sin 2\theta>\frac{1}{2},$$

所以 $$\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5\pi}{12}.$$

θ 的取值范围是 $\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5\pi}{12}$.

【例 5】 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数，证明：

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$.

证明 若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$，则 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，此时命题显然成立.

若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\neq 0$，构造一个二次函数

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\\&=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2.\end{aligned}$$

这是一条开口向上的抛物线，而且 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以

$$\begin{aligned}\Delta=\ &4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-\\&4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0,\end{aligned}$$

即 $\quad(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$,

其中等号当且仅当 $a_i=kb_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, k 是某个常数时成立.

说明 上面的这个不等式就是著名的柯西不等式. 从柯西不等式的证明过程来看，对于要证明 $AC\leqslant$（或 $\geqslant$）B^2，这类不等式，我们先把不等式变形为 $4AC\leqslant$（或 $\geqslant$）$(2B)^2$，然后构造一个二次函数

$$f(x)=Ax^2-(2B)x+C,$$

再设法证明其判别式 $\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）.

【例 6】 设 a、b、c、d 是实数，且满足

$$(a+b+c)^2\geqslant 2(a^2+b^2+c^2)+4d.$$

求证：$ab+bc+ca\geqslant 3d$.

分析 若能证明 $ab\geqslant d$，则同理可证 $bc\geqslant d$, $ca\geqslant d$，从而命题得证. 题设不等式可变形为

$$c^2-2(a+b)c+[(a^2+b^2)-2ab+4d]\leqslant 0,$$

于是可构造函数 $f(x)=x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-2ab+4d$.

证明 构造函数

$$f(x)=x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-2ab+4d.$$

$f(x)$ 是开口向上的抛物线，且 $f(c)\leqslant 0$，从而抛物线与 x 轴有交点，于是

$$\Delta=4(a+b)^2-4(a^2+b^2-2ab+4d)\geqslant 0,$$

所以 $$ab\geqslant d.$$

同理可证 $bc\geqslant d$，$ca\geqslant d$. 所以 $ab+bc+ca\geqslant 3d$.

3. 构造其他函数

【例 7】 已知 $x,\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且

$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\ 4y^3+\dfrac{1}{2}\sin 2y+a=0.\end{cases}$$

求 $\cos(x+2y)$ 的值.

解 原方程组可化为 $\begin{cases}x^3+\sin x=2a,\\ (-2y)^3+\sin(-2y)=2a.\end{cases}$

设 $f(t)=t^3+\sin t$，则 $f(t)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的，又 $x,\ -2y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，且 $f(x)=f(-2y)$，所以 $x=-2y$，$x+2y=0$，所以 $\cos(x+2y)=1$.

【例 8】 设 $f(x)$ 是一个 98 次的多项式，使得

$$f(k)=\frac{1}{k},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 99.$$

求 $f(100)$ 的值.

解 构造一个函数 $g(x)=xf(x)-1$，则

$$g(1)=g(2)=\cdots=g(99)=0,$$

并且 $g(x)$ 是 99 次多项式，所以

$$g(x)=a(x-1)(x-2)\cdots(x-99),$$

其中 $g(x)$ 的首项系数 a 是一个待定常数. 由于

$$f(x)=\frac{g(x)+1}{x}=\frac{a(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+1}{x}$$

是一个 98 次多项式，故 $a(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+1$ 的常数项必须为 0，即

$-99!a+1=0$,所以 $a=\frac{1}{99!}$.

因此
$$f(x)=\frac{\frac{1}{99!}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+1}{x},$$

所以
$$f(100)=\frac{1+1}{100}=\frac{1}{50}.$$

说明 对于二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$,若 $f(x)=0$ 有两个根 x_1、x_2,则 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. 一般地,一个 $n\,(\geqslant 2)$ 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,若它的 n 个根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则
$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

【例 9】 $\triangle ABC$ 的三边长 a、b、c 满足 $a+b+c=1$,求证:
$$5(a^2+b^2+c^2)+18abc\geqslant\frac{7}{3}.$$

证明 由题设得
$$a^2+b^2+c^2=1-2(ab+bc+ca),$$
所以原不等式等价于
$$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant\frac{4}{27}.$$

构造一个三次函数
$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)(x-b)(x-c)\\&=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\\&=x^3-x^2+(ab+bc+ca)x-abc.\end{aligned}$$

由于 $a+b+c=1$,且 a、b、c 是三角形的三条边长,故 $0<a, b, c<\frac{1}{2}$,从而 $0<a, b, c<\frac{5}{9}$.

一方面,$f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc$.

另一方面,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{9}\right) &= \left(\frac{5}{9}-a\right)\left(\frac{5}{9}-b\right)\left(\frac{5}{9}-c\right) \\ &\leqslant \left[\frac{\left(\frac{5}{9}-a\right)+\left(\frac{5}{9}-b\right)+\left(\frac{5}{9}-c\right)}{3}\right]^3 \\ &= \frac{8}{729}, \end{aligned}$$

故 $$\frac{125}{729}-\frac{25}{81}+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc \leqslant \frac{8}{729},$$

所以 $$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc \leqslant \frac{4}{27}.$$

从而命题得证.

练习题

A组

1 已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根，求证：方程 $ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$（此处 k 是不等于 0 的常数）至少有一个根在前一方程的两根之间.

2 已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证：

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

3 设 a、b 是实数，二次方程 $x^2-ax+b=0$ 的一个根属于区间 $[-1, 1]$，另一个根属于区间 $[1, 2]$. 求 $a-2b$ 的取值范围.

4 已知 a、b、c 为实数，满足关系式：

$$a+b+c=2,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}.$$

证明：a、b、c 中必有一个为 2.

5 设 a、b、c 是三个实数，且 $a<b<c$，求证方程

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

有两个实根，并且一根介于 $\frac{2a+b}{3}$ 与 $\frac{a+2b}{3}$ 之间，另一根介于 $\frac{2b+c}{3}$ 与 $\frac{b+2c}{3}$ 之间.

6 已知实数 x、y 满足

$$(3x+y)^5+x^5+4x+y=0,$$

求 $4x+y$ 的值.

7 已知关于 x 的方程

$$(ax+1)^2=a^2(1-x^2),\ a>1.$$

证明:方程的正根比 1 小,负根比 -1 大.

8 求证:在区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内只存在的两个数 $c<d$,使得

$$\sin(\cos c)=c,\ \cos(\sin d)=d.$$

9 设 x_1、x_2、x_3、y_1、y_2、y_3 是实数,且满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1$,求证:

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2\geqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1).$$

10 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c,周长为 2,求证:

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2.$$

B 组

11 是否存在一个 **R** 到 **R** 上的函数 f,使得 $f(x)\not\equiv x$,且 $f(f(f(x)))=x$.

12 已知 a、b、c 为实数,且 $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$. 求证: $a>0$, $b>0$, $c>0$.

13 已知 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为正实数,满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1,$$

又 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n 为实数,并且 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

求证:
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

14 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$,且 $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$. 求证:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4x_1x_2x_3x_4.$$

15 已知
$$\begin{cases}a^2+b^2-kab=1,\\ c^2+d^2-kcd=1.\end{cases}$$

其中 a、b、c、d、k 都是实数,且 $|k|<2$. 求证:

$$|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

第 27 讲　向量与几何

一、知识要点和基本方法

向量既反映数量关系、又体现位置关系，从而能数形相辅地用代数方法研究几何问题，即把几何问题恰当地代数化，从而用代数运算解几何问题. 作为处理几何问题的一种工具，向量方法兼有几何的直观性、表述的简洁性和方法的一般性.

1. 使用向量的第一步，是要在图中指定基础向量，这些基础向量一般选线性无关的. 一旦确定了基础向量，在整个问题的解决过程中都将以此为依据而进行计算.

2. 在确定点的位置时，经常用向量的线性关系（这是向量的重要性质，贯穿在整个向量法中）来解决.

3. 在处理垂直关系、长度关系及交角等问题时，一般用向量的内积来解决.

4. 几何中的旋转变换问题在向量法中对应的是向量的外积表示，由向量的外积可以表示平面上一个向量旋转以后的向量.

二、例题精讲

【例 1】　O 为 $\triangle ABC$ 的外心，H 为垂心. 求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

证明　如图 27－1，作直径 BD，连结 DA、DC，有

$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$，$DA\perp AB$，$DC\perp BC$，$AH\perp BC$，$CH\perp AB$，

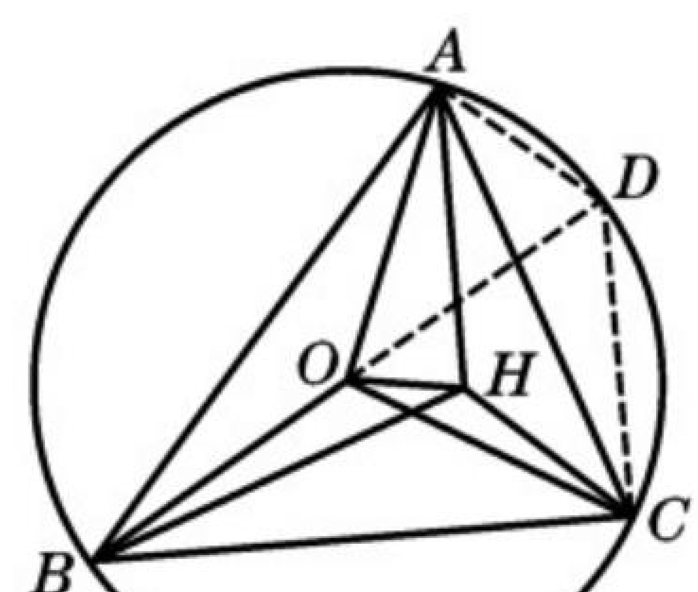


图 27－1

故　$CH\parallel DA$，$AH\parallel DC$，得 $AHCD$ 是平行四边形，进而有 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}$，又 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

【例 2】　求证：$\triangle ABC$ 的外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，且 $OG:GH=1:2$.

证明　由例 1 知 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，由第 18 讲例 2 的说明知 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. 所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH})$，得 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$，这表明 O、G、H 共线，且 $|\overrightarrow{OG}|:|\overrightarrow{GH}|=1:2$.

说明　点 O、G、H 是著名的 Euler 线，本题的结论在用向量处理时显得简

洁、明了.

【例3】 如图 27-2,$\triangle ABC$ 与 $\triangle AD_0E_0$ 都是等腰直角三角形,$\angle B=\angle D_0=\frac{\pi}{2}$,$E_0$ 在 AC 上,且 $AE_0\neq AC$. 将 $\triangle AD_0E_0$ 绕 A 点旋转任一角度 θ,得 $\triangle ADE$.

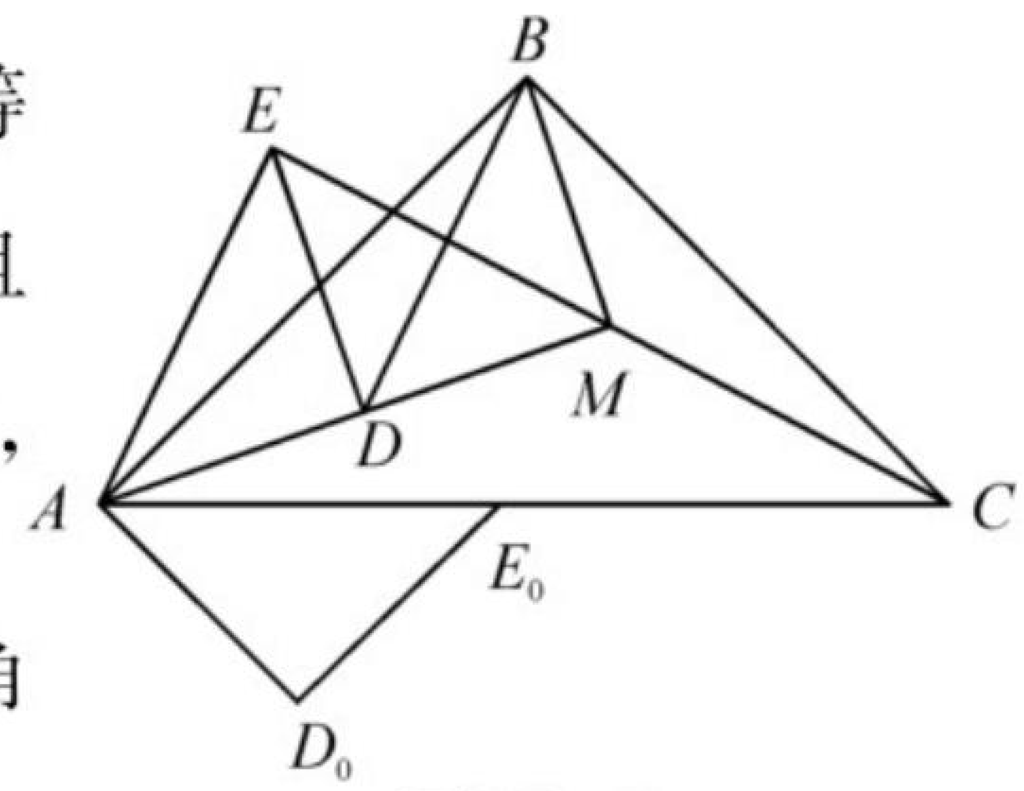


图 27-2

求证:EC 上存在点 M,使 $\triangle BMD$ 也是等腰直角三角形.

证明 取基础向量 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$, 且 $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$, $\overrightarrow{AB}$是由$\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$ 逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$角得到的. 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{a}\cos\frac{\pi}{4}+\vec{k}\times\vec{a}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{k}\times\vec{a}),\end{aligned}$$

其中 $\vec{k}\times\vec{u}$ 表示$\vec{u}$ 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$ 角所得的向量.

同理 $$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{k}\times\vec{b}).$$

在 CE 上取点 M,把$\overrightarrow{AM}$表示成

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=m\overrightarrow{AC}+(1-m)\overrightarrow{AE}\\&=m\vec{a}+(1-m)\vec{b},\end{aligned}\qquad ①$$

且 $0\leqslant m\leqslant 1$. 如果能找到这样的 m 适合①,那么点 M 存在. 此时

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\\&=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{k}\times\vec{a})-m\vec{a}-(1-m)\vec{b}\\&=\left(\frac{1}{2}-m\right)\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{k}\times\vec{a}+(m-1)\vec{b},\end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=-m\vec{a}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{k}\times\vec{b}$, 欲使$\triangle BMD$ 适合条件,则 $\overrightarrow{MD}=\vec{k}\times\overrightarrow{MB}$. 所以

$$-m\vec{a}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{k}\times\vec{b}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-m\right)\vec{k}\times\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+(m-1)\vec{k}\times\vec{b},$$

其中关系式 $\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{a})=-\vec{a}$，表示 $\vec{a}$ 连续逆时针旋转两个 $\frac{\pi}{2}$ 角，则得 $-\vec{a}$. 整理得

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)[(\vec{a}-\vec{b})-\vec{k}\times(\vec{a}-\vec{b})]=0.$$

但在 $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$ 的情况下，$\vec{a}-\vec{b}\neq 0$，而 $\vec{k}\times(\vec{a}-\vec{b})$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，所以只有 $m=\frac{1}{2}$. 这表明 M 是 EC 的中点，故 M 点存在.

【例 4】 如图 27－3，$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 与 AC 交于 N.

求证：(1) $OB\perp DF$，$OC\perp DE$；(2) $OH\perp MN$.

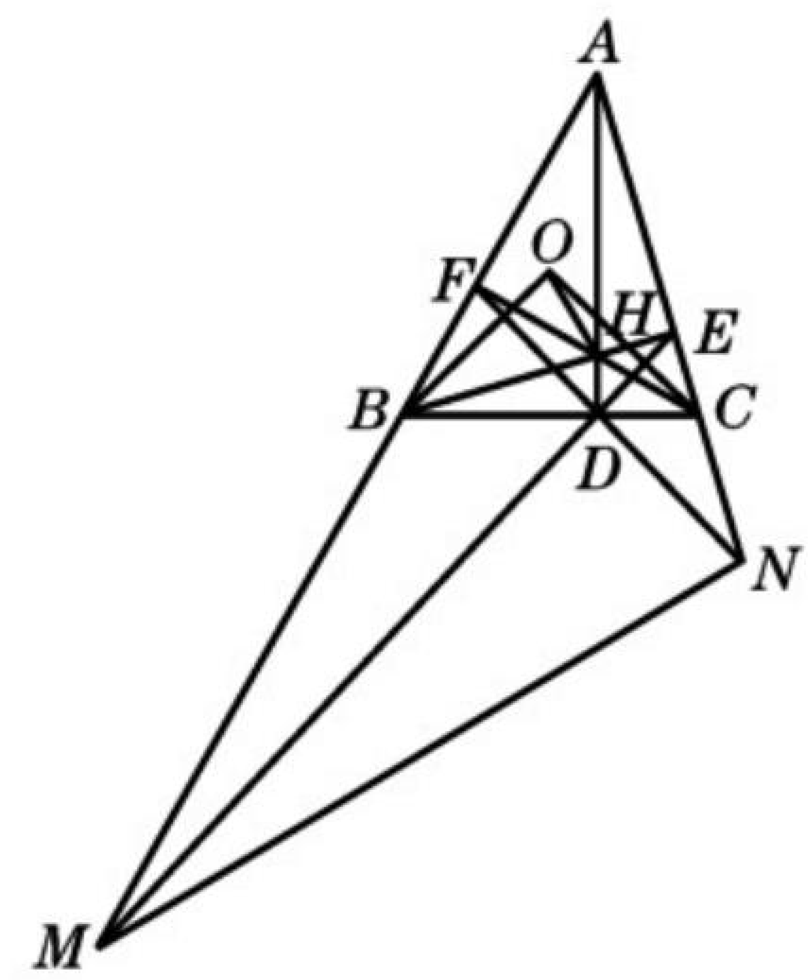


图 27－3

证明 (1) 由题意，A、F、C、D 共圆，所以 $\angle BDF=\angle BAC$. 又因为 O 为外心，

$$\angle BOC=2\angle BAC,\ \angle OBC=\angle OCB,$$

故
$$\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)$$
$$=90^\circ-\angle BAC,$$
$$\angle OBC+\angle BDF=90^\circ,$$

所以，$OB\perp DF$.

同理 $OC\perp DE$.

(2) 因为 $MF\perp CH$，$FN\perp OB$，$MD\perp OC$，$AN\perp BH$，$DF\perp OB$，$FA\perp CH$，$DA\perp BC$，所以

$$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{CH}=0,\ \overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{OB}=0,$$
$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BH}=0,$$
$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{CH}=0,$$
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,$$

于是

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OH} &= (\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FN})\cdot\overrightarrow{OH}\\
&= \overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{OH}\\
&= \overrightarrow{MF}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH})+\overrightarrow{FN}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH})\\
&= \overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{BH}\\
&= (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{BH}\\
&= \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{BH}\\
&= \overrightarrow{DF}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{FA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH})\\
&= \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0.
\end{aligned}
$$

所以 $MN\perp OH$.

【例 5】 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD$，点 O 为其外接球球心，G 为 $\triangle ACD$ 的重心，E 为 BG 的中点，F 为 AE 的中点. 证明：$OF\perp BG$ 的充要条件是 $OD\perp AC$.

证明 尽管此题中出现一些立体几何的知识，但它也是向量运用的重要阵地，通过本例可以看出向量在处理垂直关系中的力量.

以 O 为原点，利用位置向量来处理. 由条件，可知

$$
\begin{cases}
|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|, & ①\\
\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OD}^2. & ②
\end{cases}
$$

结合 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$ 等式子，对①平方后，利用②可知

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}. \qquad ③$$

现在，我们有

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{GB} &= \left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}}{2}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})\\
&= \frac{1}{4}(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OG})\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right)\\
&= \frac{1}{36}(18\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-6\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+9\overrightarrow{OB}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\\
&\quad+\overrightarrow{OD})^2),
\end{aligned}
$$

利用②、③的结论，可得

$$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{1}{36}(2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD})=\frac{1}{18}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OD}.$$

依此可知，$OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

命题获证.

【例 6】 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是内接于一个单位圆 Γ 的正 n 边形，P 为 Γ 所在平面上一点. 证明：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} PA_i \geqslant n$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} PA_i^2 \geqslant n$.

证明 设 O 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆 Γ 的圆心，则 $|\overrightarrow{OA_i}|=1$，$1 \leqslant i \leqslant n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$.

(1) 由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} PA_i &= \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PA_i}|\cdot|\overrightarrow{OA_i}| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}| = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_i}-1| \\ &\geqslant \left|\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA_i}-1)\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)\cdot\overrightarrow{OP}-n\right| \\ &= |-n| = n.\end{aligned}$$

故(1)成立.

(2) 利用 $PA_i^2=\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_i}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_i})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_i})=\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA_i}^2=\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OP}+1$. 可知

$$\begin{aligned}\sum PA_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OP}+1) \\ &= n\overrightarrow{OP}^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)\cdot\overrightarrow{OP}+n \\ &= n+n\overrightarrow{OP}^2 \geqslant n.\end{aligned}$$

所以，(2)亦成立.

【例 7】 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，使得 $PA=6$，$PB=7$，$PC=10$. 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

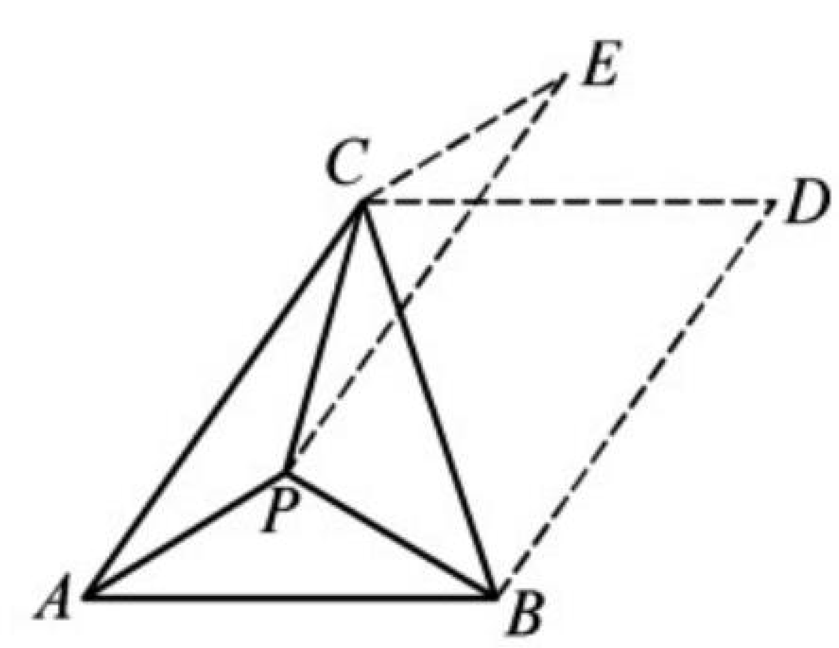


图 27－4

解 如图 27－4 所示，作平行四边形 $APEC$ 和平行四边形 $ABDC$，则 $BPED$ 为平行四边形.

由于

$$\begin{aligned}
&PD^2-PC^2+PA^2-PB^2\\
=&|\overrightarrow{PD}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2\\
=&|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}|^2\\
=&|\overrightarrow{AD}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AD}-|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB},
\end{aligned}$$

注意到，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$，所以，

$$\begin{aligned}
\text{上式}&=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2\\
&=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{CD}|^2\\
&=-2\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos\angle ACD\\
&=2AB\cdot AC\cos A=AB\cdot AC=CD\cdot PE,
\end{aligned}$$

于是，我们有

$$PD^2-100+36-49=CD\cdot PE.$$

利用托勒密定理知 $CD\cdot PE\leqslant PD\cdot CE+PC\cdot ED=PD\cdot PA+PC\cdot PB=6PD+70$，从而，$PD^2-113\leqslant 6PD+70$，解得 $PD\leqslant 3+8\sqrt{3}$（等号成立当且仅当 P、C、E、D 四点共圆）. 所以，

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}AB\cdot AC\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}CD\cdot PE\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(6PD+70)\leqslant 36+22\sqrt{3},
\end{aligned}$$

等号在 P、C、E、D 共圆时取到，这等价于 $\angle CPE=\angle CDE$，即 $\angle ACP=\angle ABP$ 时取等号，因此，$\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $36+22\sqrt{3}$.

练习题

A组

1 设 G 为$\triangle ABC$ 的重心. 证明：

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2).$$

2 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有外接圆，其重心为 G，直线 GA_i 交该 n 边形的外接圆于另一点 $G_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{A_iG}{GB_i}=n.$$

3 设 A_1、B_1、C_1 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点，G 为$\triangle ABC$ 的

重心，G_a、G_b、G_c 分别是$\triangle AB_1C_1$、$\triangle BC_1A_1$ 和$\triangle CA_1B_1$ 的重心. 现设 G_1、G_2 分别是$\triangle A_1B_1C_1$ 和$\triangle G_aG_bG_c$ 的重心. 证明：G、G_1、G_2 三点共线.

4 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为$\odot O$ 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，并定出该圆的圆心.

5 用 R 表示$\triangle ABC$ 的外接圆半径，设 P 为$\triangle ABC$ 内部或边界上一点. 证明：$|PA|+|PB|+|PC|\leqslant 4R$.

6 设 O、G 分别为$\triangle ABC$ 的外心和重心，R、r 分别为$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆半径. 证明：$OG\leqslant\sqrt{R(R-2r)}$.

7 证明：任意一个凸五边形的边长的平方和的 3 倍大于该五边形的对角线的平方和.

B 组

8 平面上是否存在 4 个两两不共线的向量，使得其中任意两个向量之和都与另两个向量之和垂直？

9 设 M、N、P、Q、R 分别是凸五边形 $ABCDE$ 的边 AB、BC、CD、DE、EA 的中点. 证明：若 AP，BQ，CR，DM 共点，则 EN 也过该点.

10 设 O 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外心，实数 $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_n>0$. 证明：$\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}\neq\vec{0}$.

11 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个内接于圆 Γ 的正 n 边形，P 为圆 Γ 内一点，直线 PA_i 交圆 Γ 于另一点 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$. 证明：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}PA_i^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}PB_i^2$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}PA_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}PB_i$.

第28讲 四面体

一、知识要点和基本方法

四面体是立体几何中最基本的也是最重要的几何体，它的地位相当于平面几何中三角形所处的地位. 四面体与三角形有着类似的性质. 例如：

连结四面体对棱中点的线段交于一点，且在这点平分所连出这些线段.

连结四面体任一顶点与它对面重心的线段交于一点 G，且这点将所在线段分成的比为 $3:1$，称 G 为四面体的重心.

每个四面体都有外接球，球心 O 是各条棱的中垂面的交点，此点到各个顶点距离等于球半径.

每个四面体都有内切球，球心 I 是四面体的各个二面角的平分面的交点，它到各面的距离等于球半径.

二、例题精讲

【例 1】 证明：对任意一个四面体，存在一个顶点，使得从该点出发的三条棱可以作为边长构成一个三角形.

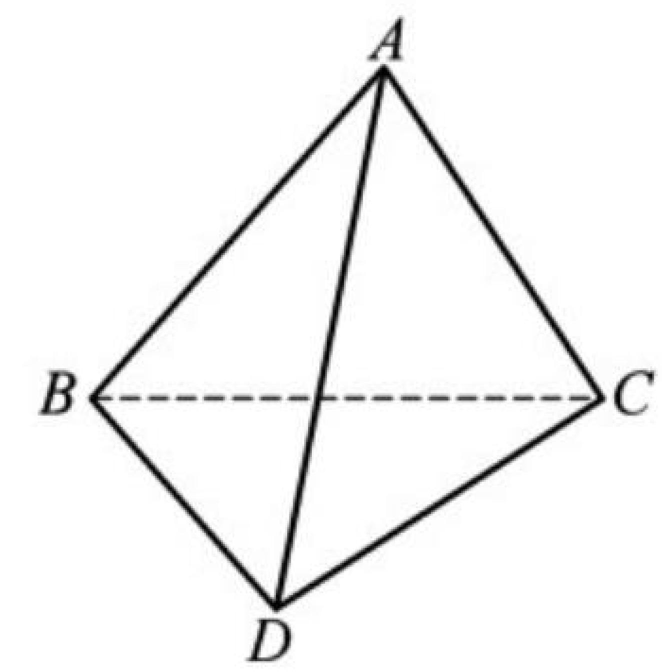


图 28 - 1

分析 我们从最长的棱出发来证明原题.

证明 不失一般性，设最长的棱为 AD，则由三角形两边之和大于第三边可知

$$AC + CD > AD,\ AB + BD > AD.$$

于是，有

$$(AB + AC) + (CD + BD) > 2AD.$$

这表明 $AB + AC$ 和 $CD + BD$ 中必有一个大于 AD. 从而，从 A 或 D 出发的三条棱中，必有一组可构成一个三角形.

说明 这里我们采用极端原理和抽屉原则，使问题迎刃而解，表达上也非常简洁.

【例 2】 设 R 为四面体 $ABCD$ 的外接球半径，r 为此四面体的内切球的半径. 求证：$R \geqslant 3r$.

分析 可借助于相似形，由体积比等于相似比的立方证之.

证明 设四面体的四个面 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 的重心依次为 D'、A'、B'、C'，则四面体 $A'B'C'D'$ 的外接球半径 R_1 满足 $R = 3R_1$（这是因为四

面体 $A'B'C'D'$ 与四面体 $ABCD$ 是相似的，且相似比为$\frac{1}{3}$).

另一方面，四面体 $A'B'C'D'$ 的外接球与四面体 $ABCD$ 的每个面都至少有一个交点，这表明 $R_1 \geqslant r$(四面体 $ABCD$ 的内切球与各面恰有一个交点，可以作出一个以 $A'B'C'D'$ 为内切球的包住 $ABCD$ 且与四面体 $ABCD$ 相似的四面体).

所以，$R \geqslant 3r$.

说明 以此方法类似可证$\triangle ABC$ 中，$R \geqslant 2r$，这里 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径，r 为其内切圆半径. 这是著名的欧拉定理.

【例 3】 已知一个四面体的棱长中恰有一条的长度大于 1. 证明：此四面体的体积不超过$\frac{1}{8}$.

证明 设 $ABCD$ 是一个这样的四面体，不妨设 $ABCD$ 中，棱 $AB > 1$，而其余每条棱长都$\leqslant 1$，进一步，设 A 到底面的高为 h，而$\triangle ACD$ 中，A 到 CD 的距离为 h_1，则 $h_1 \geqslant h$.

若 AE 是$\triangle ACD$ 的高，则 CE、DE 中有一条的长度$\geqslant \frac{1}{2}a$，这里 CD 的长为 a. 于是，$h_1 \leqslant \sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，从而 $h \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$.

类似地，在$\triangle BCD$ 中，点 B 到 CD 的距离 $\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$. 于是

$$S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}.$$

所以，

$$\begin{aligned} V_{A\text{-}BCD} &= \frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{24}a(4-a^2) \\ &= \frac{1}{24}a(2-a)(2+a) \leqslant \frac{1}{24}\left(\frac{a+2-a}{2}\right)^2(2+a) \\ &= \frac{1}{24}(2+a) \leqslant \frac{1}{24}(2+1) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

注意，此四面体的体积可以等于$\frac{1}{8}$，例如，当$\triangle ACD$ 与$\triangle BCD$ 都为边长为 1 的正三角形，并且面$ACD \perp$ 面BCD 时，等号成立(也只有这种情况).

【例 4】 任给一个四面体，证明：任意一组对棱的乘积小于另外两组对棱的乘积之和.

分析 不失一般性，我们只需证明如下不等式

$$AB \times CD < BC \times AD + AC \times BD.$$

证明 如图 28-2 所示，将三角形 ACD 翻转到$\triangle BCD$所在的平面，使得 $AD=DP$，$AC=CP$. 连结 BP，交 CD 于点 O，再连结 AO.

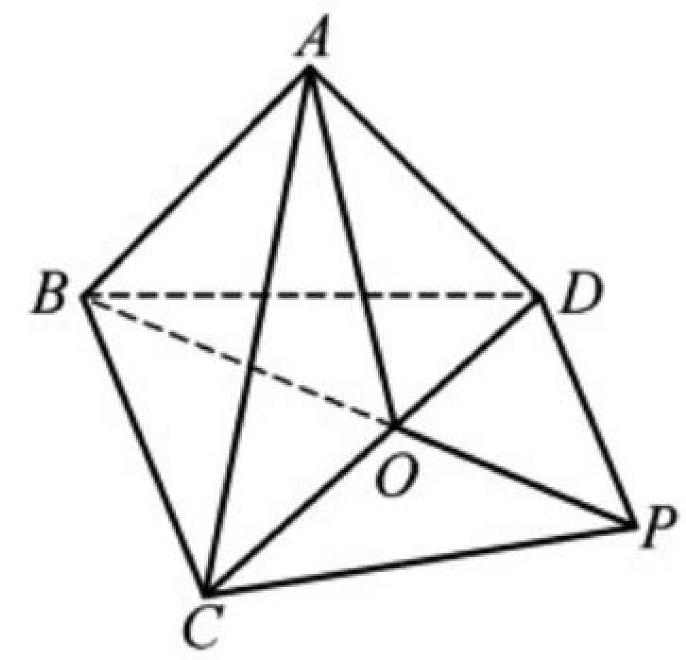


图 28-2

由于 $\triangle ACD \cong \triangle PCD$，所以，$AO=OP$. 进而，$BP=BO+OA>AB$.

利用托勒密定理，可知

$$\begin{aligned} BP\times CD &\leqslant DP\times BC+BD\times CP \\ &= AD\times BC+BD\times AC. \end{aligned} \quad ①$$

注意到，$AB\times CD<BP\times CD$，可知

$$AB\times CD<AD\times BC+BD\times AC.$$

说明 经上述翻折后，尽管不能保证四边形 $BDPC$ 为凸四边形，我们仍可以利用推广的托勒密定理得到①式成立.

【例5】 若 O 为四面体 $ABCD$ 内一点，AO、BO、CO、DO 各交对面于点 A'、B'、C'、D'. 求证：

(1) $\dfrac{OA'}{AA'}+\dfrac{OB'}{BB'}+\dfrac{OC'}{CC'}+\dfrac{OD'}{DD'}=1$；

(2) $\dfrac{AO}{AA'}+\dfrac{BO}{BB'}+\dfrac{CO}{CC'}+\dfrac{DO}{DD'}=3$.

证明 如图 28-3 所示，设 H 为 A 在底面 BCD 上的射影，连结 $A'H$，在以 AH 和 AA' 所决定的面上作 $OH'\perp A'H$，垂足为 H'. 现在，我们有

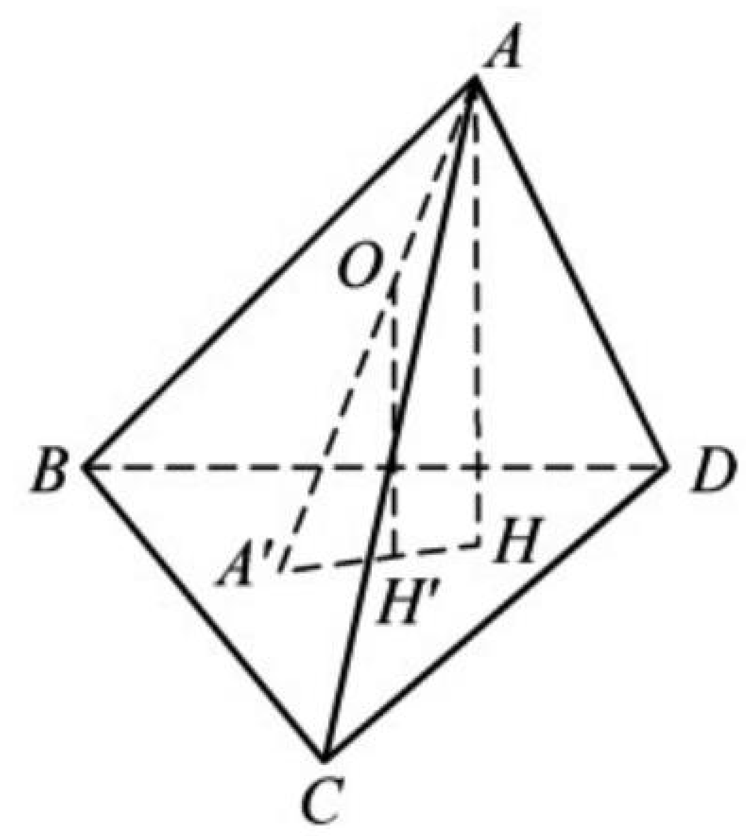


图 28-3

$$\frac{A'O}{A'A}=\frac{OH'}{AH}.$$

而 OH'，AH 分别是三棱锥 $O-BCD$，$A-BCD$ 的高，故(底面相同)

$$\frac{OA'}{AA'}=\frac{OH'}{AH}=\frac{V_{O\text{-}BCD}}{V_{A\text{-}BCD}}.$$

类似可得

$$\frac{OB'}{BB'}=\frac{V_{O\text{-}ACD}}{V_{B\text{-}ACD}},\ \frac{OC'}{CC'}=\frac{V_{O\text{-}ABD}}{V_{C\text{-}ABD}},\ \frac{OD'}{DD'}=\frac{V_{O\text{-}ABC}}{V_{D\text{-}ABC}}.$$

上式四式分母相同，求和后，即可得

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

这里用到 $V_{O\text{-}ABC}+V_{O\text{-}BCD}+V_{O\text{-}CDA}+V_{O\text{-}DAB}=V_{A\text{-}BCD}$. 从而,(1) 成立.

进一步,利用$\frac{AO}{AA'}=1-\frac{OA'}{AA'}$等式子及结论(1)即可知(2)成立.

综上可知,命题成立.

说明 在三角形中有完全类似的结论,那里的证明用到"面积法",这里是"体积法".

【例 6】 四面体 $ABCD$ 中,E、F 分别为 AB、CD 中点,过 E、F 任作一平面 M,证明:平面 M 将四面体分成两个体积相等的部分.

分析 利用等积变换解决,采用分割法.

证明 设平面 M 与 BC 交于 G,与 AD 交于 H,且 $EH\cap GF=O$,连结 ED、EF、EC,如图 28-4,由于 O 即是 M 与面 ABD 的交线上的点,又是 M 与面 BCD 的交线上的点,故 O 在面 ABD 与面 BCD 的交线上,即有 $O\in BD$.

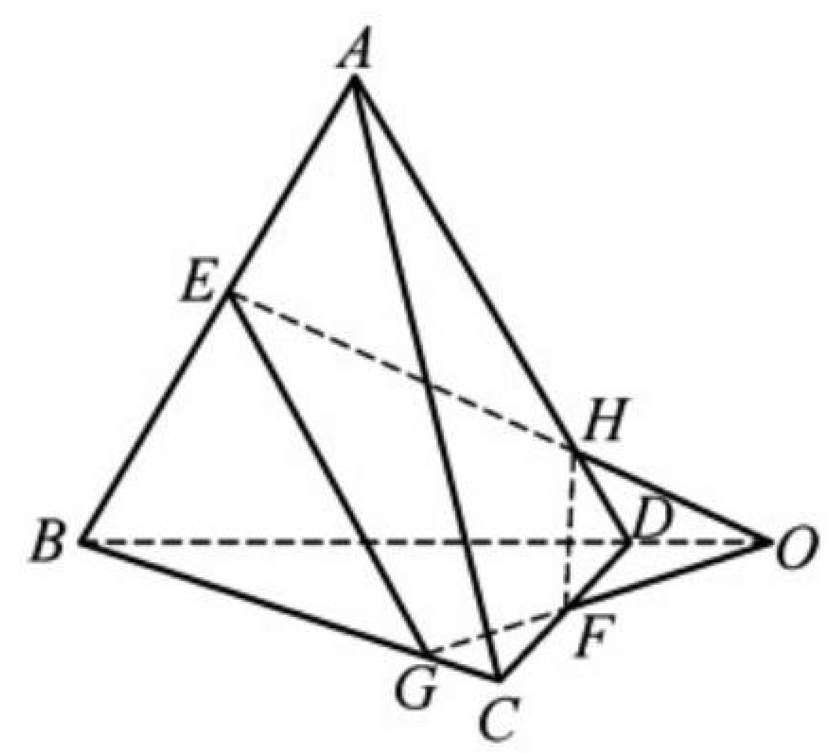


图 28-4

由 E 为 AB 中点得

$$V_{A\text{-}ECD}=V_{B\text{-}ECD}=\frac{1}{2}V_{ABCD}.$$

又 F 为 CD 中点,故

$$\frac{V_{E\text{-}GCF}}{V_{ABCD}}=\frac{EB\cdot GC\cdot CF}{AB\cdot BC\cdot CD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{CG}{BC}.$$

同理可得 $$V_{E\text{-}FDH}=\frac{1}{4}\frac{DH}{AD}\cdot V_{ABCD}.$$

由梅涅劳斯定理可知,在平面 ABO 上

$$\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BO}{OD}=1,$$

知 $\frac{DH}{AH}=\frac{OD}{OB}$.

在平面 BCO 上,$\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DO}{OB}\cdot\frac{BG}{GC}=1$,知 $\frac{CG}{BG}=\frac{OD}{OB}$,故

$$\frac{DH}{AH}=\frac{OD}{OB}=\frac{CG}{BG}.$$

于是 $\frac{DH}{AH+DH}=\frac{CG}{BG+CG}$,得 $\frac{DH}{AD}=\frac{CG}{BC}$.

所以 $V_{E\text{-}GCF}=\frac{1}{4}\frac{CG}{BC}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{4}\frac{DH}{AD}\cdot V_{ABCD}=V_{E\text{-}FDH}$. 从而

$$V_{AEGCFH}=V_{EBGFDH}.$$

若 $EH\parallel GF$，则 EH，GF，BD 两两平行. 如图 28－5，由于 $V_{E\text{-}GCF}=\frac{1}{4}\frac{CG}{BC}\cdot V_{ABCD}$，$V_{E\text{-}FDH}=\frac{1}{4}\frac{DH}{AD}\cdot V_{ABCD}$. 而

$$\frac{CG}{BC}=\frac{1}{2}=\frac{DH}{AD}.$$

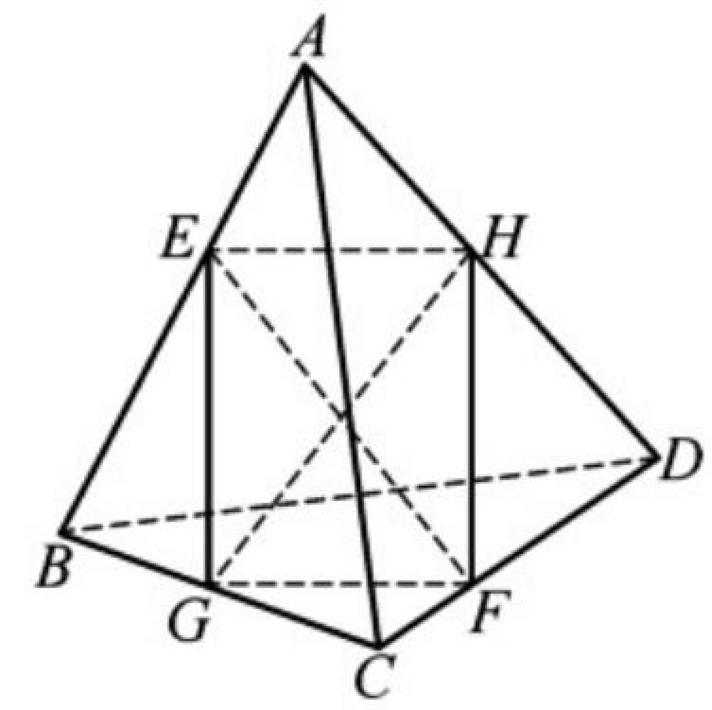


图 28－5

故 $V_{E\text{-}GCF}=V_{E\text{-}FOH}$，因此，$V_{AEGCFH}=V_{EBGFDH}$.

说明　寻找一个参照几何体，将欲求的几何体等积或倍积地转化为这个参照几何体的体积，这是解决几何体体积问题的常用方法.

【例 7】　设 O 是四面体 $ABCD$ 的棱 AB 上一点，四面体 $AOCD$ 的外接球分别与棱 BC，BD 所在直线交于另一点 M 和 N，四面体 $BOCD$ 的外接球分别与棱 AC，AD 所在直线交于另一点 P 和 Q. 证明：$\triangle OMN\backsim\triangle OQP$.

分析　要紧紧抓住球与平面的交线是一个圆（切西瓜）.

证明　如图 28－6 所示，可知下面的四点组

$CDNM$，$CDPQ$，$CPOB$，$CAOM$，$DBOQ$，$DAON$

都是四点共圆的，因此

$\angle AOQ=\angle ADB=\angle BON$，$\angle AQO=\angle ABD$.

所以，$\triangle AOQ\backsim\triangle NOB$，得

$$\frac{OQ}{OB}=\frac{AO}{NO}=\frac{AQ}{BN}. \qquad ①$$

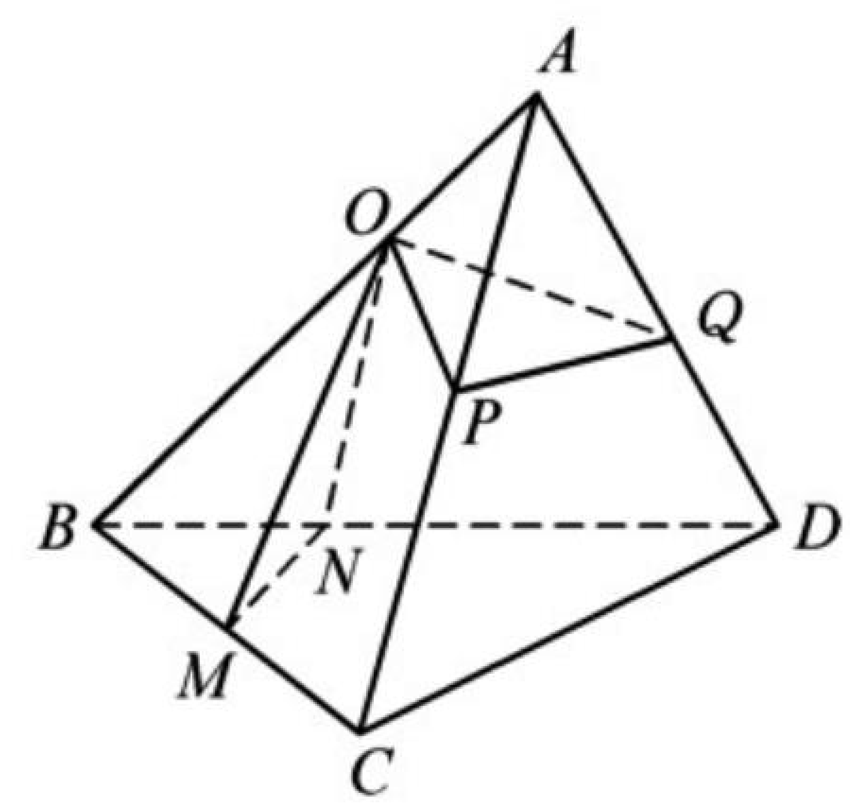


图 28－6

同理可证：$\triangle AOP\backsim\triangle MOB$，得

$$\frac{OP}{OB}=\frac{AO}{MO}=\frac{AP}{BM}. \qquad ②$$

对比①与②，知

$$\frac{OQ}{OB}\cdot\frac{AO}{MO}=\frac{AO}{NO}\cdot\frac{OP}{OB}=\frac{AQ\cdot AP}{BN\cdot BM}.$$

于是，我们有

$$\frac{OQ}{OM}=\frac{OP}{ON}=\frac{BO\cdot AP\cdot AQ}{AO\cdot BM\cdot BN}. \qquad ③$$

另一方面，从 $CDMN$ 共圆与 $CDQP$ 共圆可推得 $\triangle BMN\backsim\triangle BDC$，$\triangle APQ\backsim\triangle ADC$，知

$$\frac{MN}{CD}=\frac{BM}{BD},\ \frac{PQ}{CD}=\frac{AP}{AD}.$$

两式相除得

$$\frac{PQ}{MN}=\frac{AP\cdot BD}{BM\cdot AD}. \qquad ④$$

从 $BDQO$ 共圆与 $ADNO$ 共圆可推得$\triangle AOQ\backsim\triangle ADB$，$\triangle BON\backsim\triangle BDA$，知

$$\frac{AO}{AQ}=\frac{AD}{AB},\ \frac{BO}{BN}=\frac{BD}{BA}.$$

两式相除得

$$\frac{BD}{AD}=\frac{BO\cdot AQ}{AO\cdot BN}, \qquad ⑤$$

对比③，④，⑤式可知

$$\frac{OQ}{OM}=\frac{OP}{ON}=\frac{PQ}{MN}.$$

所以，$\triangle OMN\backsim\triangle OQP$，命题获证.

说明 正如与三角形相关的平面几何问题总是会涉及到圆，四面体与球结合的问题亦十分常见.

【例 8】 一个球与一个四面体的三个面相切，所得切点分别是这三个面的内心、垂心和重心. 证明：此四面体是一个正四面体.

分析 去证该四面体的每一个面都是正三角形.

证明 如图 28－7 所示，设球 O 切四面体 $ABCD$ 的面 ABC 于其内心 I，切面 BCD 于其垂心 H，切面 ACD 于其重心 G，则 $OI=OG=OH$，并且 $OI\perp$ 面 ABC，$OH\perp$ 面 BCD，$OG\perp$ 面 CDA.

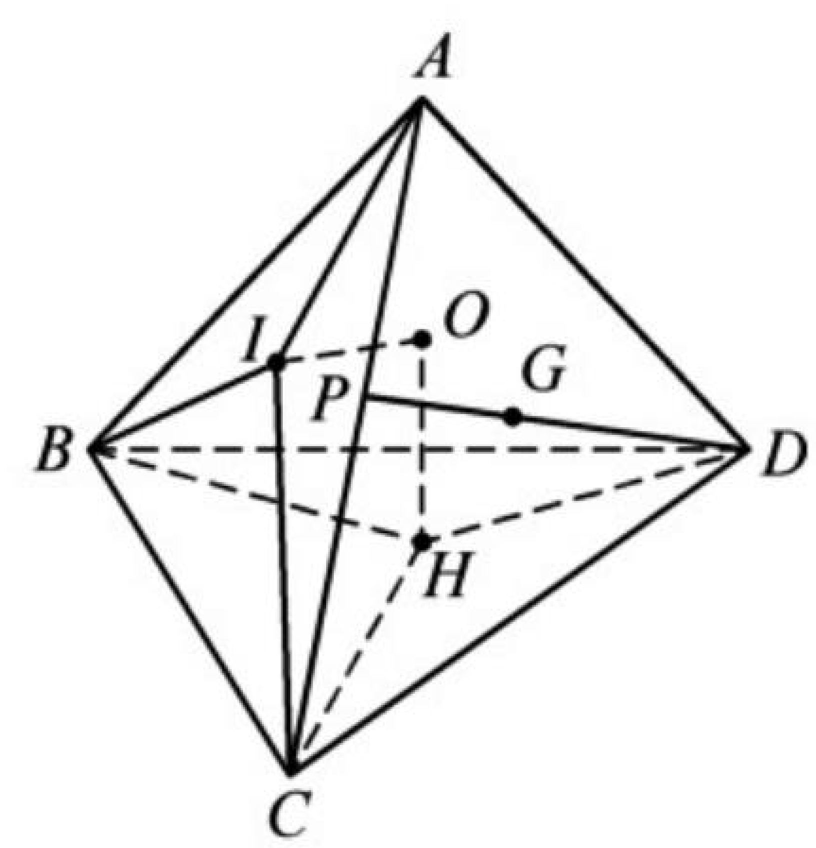


图 28－7

记 $\angle IAB=\angle IAC=\alpha$，$\angle IBA=\angle IBC=\beta$，$\angle ICB=\angle ICA=\gamma$，由前可知，$\mathrm{Rt}\triangle OIA\cong\mathrm{Rt}\triangle OGA$，知 $AI=AG$.

同理可证：$CI=CG$，于是，$\triangle AIC\cong\triangle AGC$. 因此，$\angle GAC=\angle IAC=\alpha$，$\angle GCA=\angle ICA=\gamma$. 类似地，我们有 $\triangle BIC\cong\triangle BHC$，故 $\angle HBC=\angle IBC=\beta$，$\angle HCB=\angle ICB=\gamma$，并有 $\triangle CHD\cong\triangle CGD$.

现在由 H 为 $\triangle BCD$ 的垂心结合 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，可知 $\angle HBD=\frac{\pi}{2}-\angle HCB-$

$\angle HBC=\alpha$,而$\angle HCD=\frac{\pi}{2}-\angle BDC=\angle HBD$,知$\angle HBD=\angle HCD=\alpha$.进而可得,$\angle HDC=\beta$, $\angle HDB=\gamma$. 结合前面所证:$\triangle CHD\cong\triangle CGD$,可得$\angle GCD=\alpha$, $\angle GDC=\beta$.

延长DG交AC于P,则P为AC的中点(因为G为$\triangle ACD$的重心),故$\angle DPC=\pi-\angle GDC-\angle GCD-\angle GCA=\pi-\beta-\alpha-\gamma=\frac{\pi}{2}$,即$DP\perp AC$,所以,$\triangle ADC$为等腰三角形,关于$DP$对称,进而,$\angle GAC=\angle GCA$,得$\alpha=\gamma$,于是,$CH$为$\angle BCD$的角平分线,结合$CH\perp BD$,知$\triangle BCD$为等腰三角形.

至此,我们已证得:$AD=CD$, $BC=CD$, $AB=BC$(因为$\alpha=\gamma$),所以,$AB=BC=CD=DA$. 因此,$\triangle BAC\cong\triangle DAC$,结合$\triangle AIC\cong\triangle AGC$可知$G$为$\triangle ADC$的内心,即$G$即为$\triangle ADC$的重心又为$\triangle ADC$的内心,从而,$\triangle ADC$为正三角形,进而有$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$, $\triangle ABC$为正三角形.进一步,还可知H为$\triangle BCD$的内心,导出$\triangle BCD$也为正三角形.最后再结合$\triangle ABC\cong\triangle ADC$可得$\triangle ABD$也是正三角形.

综上可得,$ABCD$是一个正四面体.

说明　正四面体是由四个全等的正三角形围成的空间封闭图形,它是特殊的正三棱锥.对比第21讲的例8,可知要断定一个四面体是否为正四面体(即哪些正四面体具有的性质组合起来是充分的)并不容易,需要在平面与空间之间跳来跳去.

练习题

A组

一、填空题

1. 正方体的八个顶点中,有四个恰好为一个正四面体的顶点,则正方体的表面积与正四面体的表面积之比为________.

2. 三棱台的两个底面面积分别为$S_{上}$、$S_{下}$,高为h,那么分别在两个底面内且不平行的两条棱的四个端点所确定的四面体的体积为________.

3. 已知O为正四面体$ABCD$的中心,则$\angle AOB=$________.

4. 点E、F为正四面体$ABCD$的棱AB、CD上的点,使得$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$,设$EF$与$BD$、$AC$所成的角为$\alpha$、$\beta$,则$\alpha+\beta=$________.

二、解答题

5. 已知四面体$ABCD$的内心I与棱AB、CD的中点E、F共线.证明:这个四面体的外心也在直线EF上.

6 设 O 是正三棱锥 $P-ABC$ 的底面$\triangle ABC$ 的中心，π 是一个过 O 的平面，与射线 PA、PB、PC 分别交于点 Q、R、S. 求证：和式 $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$ 为常数.

7 三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 两两垂直，M 为$\triangle ABC$ 的重心，D 为 AB 的中点，过 D 作 SC 的平行线 PD. 求证：PD 与 SM 相交，并且其交点为此三棱锥的外心.

8 O 为正四面体 $ABCD$ 的中心. 点 E 在面 ABC 上，E 在其他三个面上的射影分别为 F、G、H. 证明：OE 通过$\triangle FGH$ 的重心 Q.

9 设直角四面体 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是非直角三角形，且侧棱长 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$.

(1) 由顶点 P 作底面 ABC 的高 h，求证：

$$h^{-2}=a^{-2}+b^{-2}+c^{-2};$$

(2) 设 M 是$\triangle ABC$ 上一点，该点到三侧面 PBC、PCA、PAB 的距离分别是 x、y、z，求$\frac{xyz}{abc}$的最大值.

B 组

10 设 P 是四面体 $ABCD$ 内一点，对四面体表面上的一个动点 X，考虑 P 与 X 之间的距离. 设最大距离和最小距离分别为 H 和 h. 证明：$H\geqslant 3h$.

11 设 P、Q 是正四面体 $ABCD$ 内的两个不同的点. 证明：$\cos\angle PAQ>\frac{1}{2}$.

12 以棱长为 1 的一个正四面体的每条棱为直径分别作一个球，记 S 是所作 6 个球（包含球的内部）所得的交集. 证明：S 中任意两点之间的距离不超过$\frac{1}{\sqrt{6}}$.

第29讲 递推数列与递推方法

一、知识要点和基本方法

由初始值和下述形式的方程

$$a_{n+k}=F(a_{n+k-1},\cdots,a_n) \quad ①$$

确定的数列$\{a_n\}$称为k阶递推数列.

特别地,当①的形式为

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\cdots+c_ka_n+f(n) \quad ②$$

时,数列$\{a_n\}$称为k阶常系数线性递推数列.这里$c_1,c_2,\cdots,c_k$为常数,且$c_k\neq 0$.若函数$f(n)=0$,则称由②确定的数列$\{a_n\}$为k阶常系数齐次线性递推数列.

等差数列满足递推式$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$;等比数列满足$a_{n+1}=qa_n$(其中q为非零常数).它们是最简单的常系数齐次线性递推数列.

除常系数线性递推数列问题经常出现外,一些特殊的非线性递推数列问题在数学竞赛中也屡见不鲜.对一般的非线性递推方程确定的数列没有通用的求解方法,涉及的问题可能不是求通项公式(有时难以用显式表达出通项),而是确定通项的某些性质.

对于常系数齐次线性递推数列求通项公式却有利用特征方程结合其特征根特性所得的确定性结论.

定义1 方程

$$x^k=c_1x^{k-1}+\cdots+c_k$$

称为②的特征方程,该方程的根称为数列$\{a_n\}$的特征根,记它们为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$.

定理1 在②中,若$f(n)=0$,且$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$两两不同,则数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=A_1\lambda_1^n+A_2\lambda_2^n+\cdots+A_k\lambda_k^n,$$

其中$A_1,A_2,\cdots,A_k$为常数,它们由初始值由$a_1,\cdots,a_k$确定.

定理2 条件同定理1,但$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$中有重根,设特征根中不同的根为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s(s<k)$,且$\lambda_i$的重数为$t_i$,$1\leqslant i\leqslant s$.则数列$\{a_n\}$的通项为

$$a_n=A_1(n)\lambda_1^n+A_2(n)\lambda_2^n+\cdots+A_s(n)\lambda_s^n,$$

其中$A_i(n)=B_1^{(i)}+B_2^{(i)}n+\cdots+B_{t_i}^{(i)}n^{t_i-1}$,$1\leqslant i\leqslant s$.这里$B_j^{(i)}$都是常数,它们由初始值可以确定.

除了处理常系数齐次线性递推数列有上述"通法"外,针对其它形式的递推数

列问题尽管设没有“通法”，但经常用到的方法还是比较多的，例如换元思想（化归至齐次线性等）、不动点方法、先猜后证（结合数学归纳法）等等.

相比较求解递推数列的问题而言，更重要的是“递推”的数学思想及由此引出的一些递推方法，说管有时“递推”是一种不完全的归纳，但它是数学发现的一个重要方法.

二、例题精讲

【例 1】 假定一对大兔子每隔一个月生一对一雌一雄的小兔子，而每对小兔在两个月以后也开始生一对一雌一雄的小兔子，隔月一次. 年初时兔房里放一对小兔，问一年以后，兔房里有多少对兔子?

解 用 f_n 记第 n 个月初时兔房里兔子的对数，易知 $f_1=1$，$f_2=1$，$f_3=2$. 第 $n+2$ 个月初时，兔房里的兔子可以分为两部分：一部分是第 $n+1$ 个月初时已经在兔房中的兔子，共有 f_{n+1} 对，另一部分是第 $n+2$ 个月初时新出生的小兔子，共有 f_n 对（因为第 $n+1$ 个月初出生的小兔子还不生新兔子），于是

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,$$

结合初始条件，依次计算即可算出 f_{12} 的值. 这里我们给出它的通项公式，注意到，此递推式对应的特征方程为 $x^2=x+1$，特征根为 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 所以

$$f_n=A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

利用初始条件 $f_1=1$，$f(2)=1$，得

$$\begin{cases}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)A_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)A_2=1,\\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2A_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2A_2=1,\end{cases}$$

解得 $A_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$A_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

说明 上述的这个数列便称为**斐波那契（Fibonaccia）数列**. 斐波那契数列有许多重要而有趣的性质. 它在数论、运筹学和组合优化理论中有着许多应用. 美国数学协会从 1963 年起，每三个月出版一期《斐波那契季刊》，每期刊出该数列的新

性质或应用.

【例 2】 对一个边长互不相等的凸 $n(n\geqslant 3)$ 边形的边染色,每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种,但是不允许相邻的边有相同的颜色. 问:共有多少种不同的染色方法?

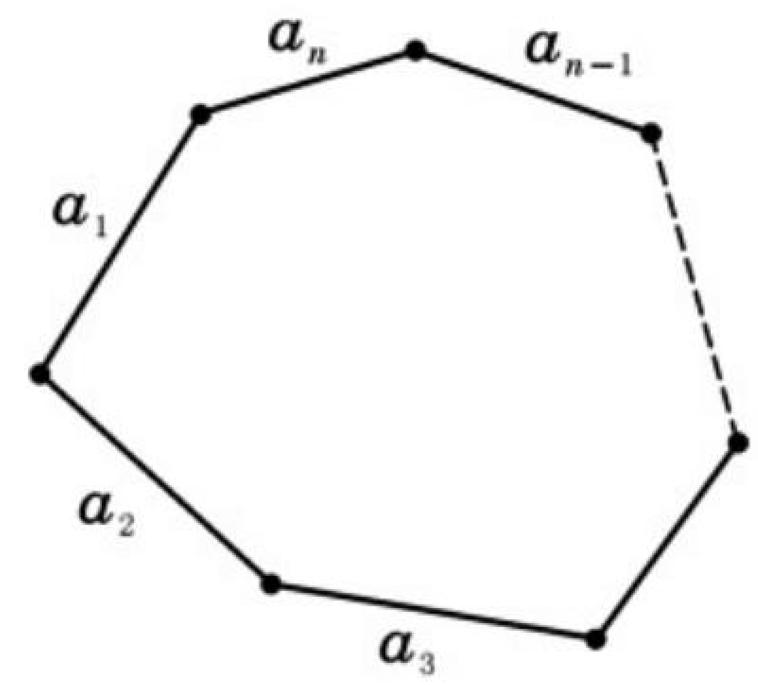


图 29-1

解 设不同的染色法有 p_n 种. 易知

$$p_3=6.$$

当 $n\geqslant 4$ 时,首先,对于边 a_1,有 3 种不同的染法,由于边 a_2 的颜色与边 a_1 的颜色不同,所以,对边 a_2 有 2 种不同的染法,类似地,对边 a_3, …,边 a_{n-1} 均有 2 种染法. 对于边 a_n,用与边 a_{n-1} 不同的 2 种颜色染色,但是,这样也包括了它与边 a_1 颜色相同的情况,而边 a_1 与边 a_n 颜色相同的不同染色方法数就是凸 $n-1$ 边形的不同染色方法数的种数 p_{n-1},于是可得

$$p_n=3\times 2^{n-1}-p_{n-1},$$
$$p_n-2^n=-(p_{n-1}-2^{n-1}),$$

于是
$$p_n-2^n=(-1)^{n-3}(p_3-2^3)=(-1)^{n-2}\cdot 2,$$
$$p_n=2^n+(-1)^n\cdot 2,\ n\geqslant 3.$$

综上所述,不同的染色方法数为 $p_n=2^n+(-1)^n\cdot 2$.

【例 3】 设 n 是大于 1 的正整数,求 $1, 2, \cdots, n$ 的满足下列性质的排列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的个数:存在唯一一个 $i\in\{1, 2, \cdots, n-1\}$,使得 $a_i>a_{i+1}$.

解 用 p_n 表示具有题设性质的排列的个数. 易知,$p_1=0$, $p_2=1$. 对于 $n\geqslant 2$,若 $a_n=n$,则这样的排列个数有 p_{n-1} 个;若 $a_i=n$, $1\leqslant i\leqslant n-1$,考虑所有这样的排列,可以从 $n-1$ 个数 $1, 2, \cdots, n-1$ 中选 $i-1$ 数按从小到大的顺序排列成 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$,其余的按从小到大的顺序排列在剩下的位置,于是有 C_{n-1}^{i-1} 种排法,所以

$$p_n=p_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{i-1}=p_{n-1}+2^{n-1}-1,$$

即
$$p_n-p_{n-1}=2^{n-1}-1,$$
$$p_{n-1}-p_{n-2}=2^{n-2}-1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_2-p_1=2-1,$$

把上面这些式子相加,得

$$\begin{aligned} p_n &= (2^{n-1}-1)+(2^{n-2}-1)+\cdots+(2-1) \\ &= 2^n-n-1. \end{aligned}$$

说明 上面的例子展示了利用递推方法处理问题的常用思路,通过题给条件建立递推关系式后再处理的过程也表现出求数列通项所需要的灵活性和方法的多样性.

【例 4】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$, $a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$ $(n\geqslant 3)$. 求通项公式.

解 由已知条件可得 $a_3=3$ 及

$$a_na_{n-2}=a_{n-1}^2+2,\ a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+2,$$

将上面两式相减,消去常数 2,得 $a_{n+1}a_{n-1}-a_na_{n-2}=a_n^2-a_{n-1}^2$, 即

$$a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1})=a_n(a_n+a_{n-2}),$$

所以 $\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n+a_{n-2}}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. 于是

$$\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-3}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}},\ \cdots,\ \frac{a_4+a_2}{a_3+a_1}=\frac{a_3}{a_2},$$

把上面这些式子相乘,便得 $\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_3+a_1}=\dfrac{a_n}{a_2}$, 即

$$a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n, \qquad ①$$

①的特征方程为 $x^2-4x+1=0$, 特征根为 $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$. 于是

$$a_n=A_1(2+\sqrt{3})^n+A_2(2-\sqrt{3})^n,$$

用初始条件 $a_1=a_2=1$ 代入,得

$$\begin{cases}(2+\sqrt{3})A_1+(2-\sqrt{3})A_2=1, \\ (7+4\sqrt{3})A_1+(7-4\sqrt{3})A_2=1,\end{cases}$$

解得 $A_1=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{3}}$, $A_2=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$. 所以,数列 $\{a_n\}$ 的通项为

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{3})^n+(5+3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n\right].$$

说明 有些递推数列在形式上是非线性的,而本质上是线性递推,这要求我们具有"去伪存真"的本领.

【例 5】 数列$\{a_n\}$定义如下：$a=1$，而

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4a_n},\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

证明：当$n\geqslant 2$时，数$\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$都为正整数.

证明 因为结论中涉及到根号及a_n^2项，因而令$b_n=\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$，并对已给递推关系两边平方就容易找到解题思路.

令$b_n=\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$，则$b_n^2=\frac{2}{2a_n^2-1}$，$a_n^2=\frac{1}{b_n^2}+\frac{1}{2}$，因为$a_{n+1}^2=\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{16a_n^2}+\frac{1}{4}$，于是

$$\frac{1}{b_{n+1}^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b_n^2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16\left(\frac{1}{b_n^2}+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{4},$$

即
$$b_{n+1}^2=2b_n^2(b_n^2+2),$$

所以
$$b_{n+1}^2=2b_n^2[2b_{n-1}^2(b_{n-1}^2+2)+2]=4b_n^2(b_{n-1}^2+1)^2. \qquad ①$$

因为$b_2=\sqrt{\frac{2}{2a_2^2-1}}=4$，$b_3=\sqrt{\frac{2}{2a_3^2-1}}=24$，由①式及$b_2$，$b_3\in\mathbf{N}^*$知，当$n>1$时，$b_n\in\mathbf{N}^*$.

说明 通过换元，将关于a_n的问题转化为关于b_n的问题，可使问题得到顺利解决.

【例 6】 设n为给定的正整数，数列a_0，a_1，$\cdots$，a_n定义为：$a_0=\frac{1}{2}$，$a_k=a_{k-1}+\frac{a_{k-1}^2}{n}$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 证明：$1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

证明 由递推式可知

$$\frac{1}{a_k}=\frac{n}{a_{k-1}(a_{k-1}+n)}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_{k-1}+n},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

于是，我们有

$$\frac{1}{a_{k-1}+n}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k},$$

对$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$求和，得

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1,$$

所以,我们有 $a_n<1$(这里用到对 $k=1,2,\cdots,n$,$a_{k-1}>0$,而这一点由递推式易知).

另一方面,由递推式易知 $a_k>a_{k-1}$,$k=1,2,\cdots,n$. 从而,对任意 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$,都有 $a_{k-1}<a_n<1$. 这样,我们得到

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

故
$$a_n>\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}>1-\frac{1}{n}.$$

综上可知,命题成立.

说明 许多递推数列问题不需要确定通项,只要求证明通项的一些性质. 这时应根据递推式的特点,具体问题具体分析. 此题考虑取倒数,然后裂项求和就是从递推式的特点出发的.

【例 7】 设 a 是一个大于 1 的无理数,n 是一个大于 1 的整数. 证明:数 $(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}+(a-\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}$ 是一个无理数.

证明 记 $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}$,则 $(a-\sqrt{a^2-1})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{x}$. 并设 $a_k=x^k+\frac{1}{x^k}$,$k=0,1,2,\cdots$. 那么数列 $\{a_k\}$ 满足下述递推式

$$a_{k+2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)a_{k+1}-a_k,\ k=0,1,2,\cdots.$$

如果 $x+\frac{1}{x}$ 为有理数,那么结合 $a_0=2$,$a_1=x+\frac{1}{x}$,可知对任意正整数 k,数 a_k 都为有理数,特别地,应有 $a_n=x^n+\frac{1}{x^n}=2a$ 为有理数,这与 a 为无理数矛盾,所以 $x+\frac{1}{x}$ 为无理数,命题获证.

【例 8】 证明:数列 $a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的每一项都是整数,并求所有使 a_n 能被 3 整除的正整数 n.

证明 $a_1=1$,$a_2=4$. 令 $A_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}$,$A_2=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$,$x_1=2+\sqrt{3}$,$x_2=2-\sqrt{3}$,则

$$a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n,$$

易知 x_1、x_2 是方程 $x^2 = 4x - 1$ 的根，从而知

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots, \qquad ①$$

因为 a_1、a_2 是整数，从而由递推关系①式及数学归纳法易知 a_n（$n \in \mathbf{N}^*$）是整数. 由①式得

$$a_{n+2} \equiv a_{n+1} - a_n \pmod 3,$$

而数列$\{a_n\}$的前 n 项模 3 依次为 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, …，所以

$$a_{n+6} \equiv a_n \pmod 3,$$

于是当 $n \equiv 0 \pmod 3$ 时，a_n 能被 3 整除.

说明　在这两个例子中，已知$\{a_n\}$的通项公式，我们反过来去导出$\{a_n\}$应满足的递推关系. 然后直接利用递推式来推导数列的性质，这在很多时候反而方便些.

【例 9】　整数数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $-\dfrac{1}{2} < a_{n+1} - \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, $n = 2,\ 3,\ \cdots$.

求该数列的通项 a_n.

解　题设递推式难以确定 a_n，能否由条件得出我们熟悉的常系数线性递推式呢？大胆猜测：$a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$，$p$、$q$ 为待定的常数.

试算该数列的前面几项，可知 $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_3 = 25$, $a_4 = 89$, …. 确定猜测中的 p、q 的值，猜想：$a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1}$, $n \geqslant 2$.

下面用数学归纳法证明上述猜想.

当 $n = 2$, 3 时，上述猜想成立.

设对 $k \leqslant n$ 时，都有 $a_{k+1} = 3a_k + 2a_{k-1}$ 成立. 则对 $k = n+1$ 的情形，我们有

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n} = \frac{a_{n+1}(3a_n + 2a_{n-1})}{a_n} = 3a_{n+1} + 2a_n + 2\left(\frac{a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2}{a_n}\right),$$

注意到

$$\left|2\left(\frac{a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2}{a_n}\right)\right| = \left|\frac{2a_{n-1}}{a_n}\right| \left|a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{2a_{n-1}}{a_n}\right|.$$

由前面的归纳假设，易知 $a_n > 2a_{n-1}$. 所以

$$\left|3a_{n+1} + 2a_n - \frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right| < \frac{1}{2}.$$

利用 a_{n+2} 为整数，且 $\left|a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，可知

$$\left|a_{n+2}-(3a_{n+1}+2a_n)\right|\leqslant\left|a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|+\left|\frac{a_{n+1}^2}{a_n}-(3a_{n+1}+2a_n)\right|$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

所以 $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$. 于是猜想对 $k=n+1$ 的情形成立.

综上可知，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_2=7$，$a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}$，$n=3, 4, \cdots$. 利用特征方程求解这个常系数齐次线性递推式，可得

$$a_n=\frac{17+5\sqrt{17}}{68}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\frac{17-5\sqrt{17}}{68}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

说明 数学问题在有结论后，往往会容易很多，而得到结论经常需要猜测，与数列有关的问题更是如此，在积累一定经验后，经常能一猜就中，这也是一种数学直感.

练习题

A组

1 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\frac{2010^n}{n!}(n=1, 2, \cdots)$，问：$n$ 为何值时，a_n 取最大值？

2 已知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，数 a_n 都为正实数，并且 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\right)^2$. 证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=n$.

3 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_1=1,\ a_{n+1}a_n-2n^2(a_{n+1}-a_n)+1=0,$$

求此数列的通项 a_n.

4 设 $a_0=2$，$a_1=3$，$a_2=6$，且对 $n\geqslant 3$，有 $a_n=(n+4)a_{n-1}-4na_{n-2}+(4n-8)a_{n-3}$. 求通项 a_n.

5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_{n+1}a_n-2n^2(a_{n+1}-a_n)+1=0$. 求此数列的通项 a_n.

6 求最小的正整数 k，使得至少存在两个由正整数组成的数列 $\{a_n\}$ 满足下述条件：

(1) 对任意正整数 n，都有 $a_n\leqslant a_{n+1}$；

(2) 对任意正整数 n，都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$；

(3) $a_9=k$.

7 给定一个正整数数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，使得每个正整数在此数列中恰好各

出现一次. 证明:存在整数 n、m,使得 $1<n<m$,且$a_1+a_m=2a_n$.

8 整数数列 a_1, a_2, $\cdots$ 定义如下:$a_1=1$, $a_2=2$,且对 $n\geqslant 1$,

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & \text{若 } a_na_{n+1} \text{ 为偶数},\\ a_{n+1}-a_n, & \text{若 } a_na_{n+1} \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

证明:对任意正整数 n,都有 $a_n\neq 0$.

9 数列$\{x_n\}$ 定义如下:$x_1=2$, $nx_n=2(2n-1)x_{n-1}$, $n=2$, 3, $\cdots$. 证明:对每个正整数 n, x_n 为整数.

10 已知数列$\{x_n\}$ 满足:$x_0=0$, $x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}$ $(n\geqslant 1)$,求此数列的通项 x_n.

11 数列$\{x_n\}$定义如下:$x_1=2$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n^4+1}{5x_n}$, $n=1$, 2, $\cdots$. 证明:当 $n\geqslant 2$ 时,都有$\dfrac{1}{5}\leqslant x_n<2$.

12 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足 $a_0=1$, $b_0=0$, 且

$$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3,\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4,\end{cases}\quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

证明:$a_n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是完全平方数.

13 数列$\{a_n\}$满足:$a_0=1$, $a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$, $n\in\mathbf{N}$.

证明:(1) 对任意 $n\in\mathbf{N}$, a_n 为正整数;

(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$, $a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.

B 组

14 数列$\{a_n\}$满足:$a_0=0$, $2a_{n-1}\leqslant a_n+a_{n-2}$, $n=2$, 3, $\cdots$. 证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 及 $k\in\mathbf{N}$,只要 $0\leqslant k\leqslant n$,就有 $na_k\leqslant ka_n$.

15 证明:存在唯一一个由正整数组成的无穷项数列$\{a_n\}$,使得 $a_1=1$, $a_2>1$,并且 $a_{n+1}^3+1=a_na_{n+2}$, $n=1$, 2, $\cdots$.

16 设整数 k, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足:$0<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_1<k$,并且对 $1\leqslant i<j\leqslant k$,都有$[a_i, a_j]\leqslant k$. 证明:对 $1\leqslant i\leqslant n$,都有 $ia_i\leqslant k$.

17 设 a、b 为大于 2 的整数. 证明:存在正整数 k,及一个由正整数组成的有限数列 n_1, n_2, $\cdots$, n_k,使得 $n_1=a$, $n_k=b$,且对任意 $1\leqslant i<k$,数 n_in_{i+1} 是 n_i+n_{i+1} 的倍数.

18 数列$\{a_n\}$定义如下:$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{n}{a_n}$, $n=1$, 2, $\cdots$. 证明:当 $n\geqslant 4$ 时,$[a_n^2]=n$. 这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

19 正整数数列 $c_1, c_2, \cdots$满足:对任意正整数 m、n,若 $1 \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$,则存在正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,使得 $m = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i}$. 对每一个正整数 i,求 c_i 的最大值.

20 数列 $a_0, a_1, \cdots$是一个由实数组成的无穷项数列,其中 a_0、a_1 是两个不同的正实数,并且 $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 问:该数列是否可能为有界数列?证明你的结论.

第30讲　周期数列

一、知识要点和基本方法

1. 周期数列的概念

(1) 对于数列$\{a_n\}$，如果存在确定的正整数T及n_0，使对一切$n \geqslant n_0$，恒有$a_{n+T} = a_n$成立，那么称$\{a_n\}$是从第n_0项起的周期为T的周期数列. 当$n_0 = 1$时，称$\{a_n\}$为纯周期数列；当$n_0 \geqslant 2$时，称$\{a_n\}$为混周期数列.

(2) 设$\{a_n\}$是整数数列，m是某个取定的大于1的正整数，若b_n是a_n除以m后的余数，即$b_n \equiv a_n \pmod m$，且$b_n \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$，则称数列$\{b_n\}$是$\{a_n\}$关于$m$的模数列，记作$\{a_n \pmod m\}$.

若模数列$\{a_n \pmod m\}$是周期的，则称$\{a_n\}$是关于模m的周期数列.

2. 关于周期数列的一些重要性质与结论

(1) 周期数列的值域是有限集.

(2) 若T是$\{a_n\}$的周期，则对任何$k \in \mathbf{N}^*$，kT也是$\{a_n\}$的周期.

(3) 周期数列必有最小正周期.

(4) 若T是周期数列$\{a_n\}$的最小正周期，T'是$\{a_n\}$的任一周期，则$T \mid T'$.

(5) 任一满足常系数齐次线性递推关系

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n (n \in \mathbf{N}^*, c_k \neq 0)$$

的k阶线性递归数列关于任意正整数$m(\geqslant 2)$都是模周期数列.

3. 与周期数列相关的问题及解法

(1) 给出通项表达式，求数列的前n项和：先计算其若干项，观察其周期，把问题转化成求一个周期上的若干项之和；或根据通项公式作代数变换导出其周期，再根据周期性解决问题.

(2) 给出递推式，求某个特定的项，求某些项之和，或者确定项的某些特性(如整除性、有理性等)：由递推式作适当变换导出周期或通过计算若干项，经观察、猜想、归纳证明其周期性，然后用周期性解决问题.

(3) 模周期数列涉及的问题通常是判断项的整除性，确定项的某位数字，判断某一项是合数还是素数等等. 模周期数列中“模”是解题的关键，找到了恰当的模，问题就可以得到了简化，解决起来就较为容易. 找模没有统一的方法，需根据题意进行分析、尝试，有时需要多次尝试才能成功.

二、例题精讲

【例1】 已知数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1} = x_n - x_{n-1} (n \geqslant 2)$，$x_1 = a$，$x_2 = b$，记

$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$. 求 x_{100} 及 S_{100}.

解 经过计算得数列的前几项为:

$$a,\ b,\ b-a,\ -a,\ -b,\ a-b,\ a,\ b,\ b-a,\ -a,\ -b,\ a-b,\ \cdots$$

由此及 $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ 直接计算,可知此数列是周期为 6 的纯周期数列. 所以

$$x_{100}=x_{6\times16+4}=x_4=-a,$$

$$\begin{aligned}&x_{6k+1}+x_{6k+2}+x_{6k+3}+\cdots+x_{6k+6}\\=&\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\\=&\ a+b+(b-a)+(-a)+(-b)+(a-b)=0,\end{aligned}$$

所以 $\qquad S_{100}=S_{6\times16+4}=S_4=a+b+(b-a)+(-a)=2b-a.$

【例 2】 数列 $\{a_n\}$ 是实数列,满足 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$. 求证:存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$,使当 $n\geqslant N_0$ 时,恒有 $a_{n+9}=a_n$ 成立.

证明 当 a_n 恒为 0 时,结论显然成立. 下设 a_n 不恒为 0,那么必存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$,当 $n\geqslant N_0$ 时,a_n 不恒为正,也不恒为负. 否则,若 a_n 恒正,则 $a_{n+3}=-a_n<0$,矛盾;若 a_n 恒负,则 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n>0$,矛盾. 因此可以假设 $a_{N_0}=-a$,$a_{N_0+1}=b$ ($a,\ b\geqslant0$,a、b 不全为 0),从而有

$$a_{N_0+2}=|a_{N_0+1}|-a_{N_0}=b+a,$$

$$a_{N_0+3}=|a_{N_0+2}|-a_{N_0+1}=a,$$

$$a_{N_0+4}=|a_{N_0+3}|-a_{N_0+2}=-b,$$

$$a_{N_0+5}=|a_{N_0+4}|-a_{N_0+3}=b-a.$$

(1) 若 $b\geqslant a$,则有

$$a_{N_0+6}=|a_{N_0+5}|-a_{N_0+4}=2b-a,$$

$$a_{N_0+7}=|a_{N_0+6}|-a_{N_0+5}=(2b-a)-(b-a)=b,$$

$$a_{N_0+8}=|a_{N_0+7}|-a_{N_0+6}=b-(2b-a)=a-b\leqslant0,$$

$$a_{N_0+9}=|a_{N_0+8}|-a_{N_0+7}=b-a-b=-a,$$

$$a_{N_0+10}=a-(a-b)=b.$$

(2) 若 $b<a$,同样可计算

$$a_{N_0+6}=a,\ a_{N_0+7}=2a-b>0,\ a_{N_0+8}=a-b>0,$$
$$a_{N_0+9}=-a,\ a_{N_0+10}=b.$$

因此总有 $a_{N_0+9}=a_{N_0}$，$a_{N_0+10}=a_{N_0+1}$. 接下来可用递归式 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$ 及数学归纳法证明：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant N_0$，恒有 $a_{n+9}=a_n$.

【例 3】 定义数列 $\{a_n\}$：$a_n=\dfrac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ $(n\geqslant 2,\ a_1\in\mathbf{R},\ a_1\neq 0$ 且 $a_1\neq\pm 1)$. 判断数列 $\{a_n\}$ 的周期性.

解 作三角代换，令 $a_1=\tan\theta_1$，$a_n=\tan\theta_n$，$(n=1,2,3,\cdots)$. 则

$$a_{n+1}=\frac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\theta_n}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta_n}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta_n\right),$$

所以
$$\begin{aligned}\tan\theta_{n+1}&=\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta_n\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta_{n-1}\right)\\&=\tan\left(\frac{\pi}{4}\pi+\theta_{n-2}\right)=\cdots=\tan\left(\frac{\pi}{4}n+\theta_1\right),\end{aligned}$$

因此
$$\tan\theta_n=\tan\left[\frac{\pi}{4}(n-1)+\theta_1\right],$$

而 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的纯周期数列.

【例 4】 对非负整数 m、n，我们用 $a_{m,n}$ 表示多项式 $(1+x+x^2)^m$ 的展开式中 x^n 项的系数. 证明：对任意非负整数 k，都有

$$0\leqslant\sum_{i=0}^{\left[\frac{2k}{3}\right]}(-1)^i a_{k-i,i}\leqslant 1.$$

证明 注意到

$(1+x+x^2)^{m+1}=(1+x+x^2)(a_{m,0}+a_{m,1}x+\cdots+a_{m,n}x^n+\cdots)$，

故 $a_{m+1,n}=a_{m,n}+a_{m,n-1}+a_{m,n-2}$.

现在，记 $S_k=\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{2k}{3}\right]}(-1)^i a_{k-i,i}$，则由上述递推式可知

$$\begin{aligned}S_k-S_{k+1}+S_{k+2}&=\sum_{i=-2}^{\left[\frac{2k}{3}\right]}(-1)^i(a_{k-i,i}+a_{k-i,i+1}+a_{k-i,i+2})\\&=\sum_{i=-2}^{\left[\frac{2k}{3}\right]}(-1)^i a_{k+1-i,i+2}\\&=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2(k+3)}{3}\right]}(-1)^i a_{k+3-i,i}=S_{k+3}.\end{aligned}$$

上述计算中，规定：当 $j<0$ 时，$a_{m,j}=0$，而 $j>2(m+1)$ 时，亦有 $a_{m,j}=0$.

于是，我们有

$$\begin{aligned}S_{k+4}&=S_{k+1}-S_{k+2}+S_{k+3}\\&=(S_{k+1}-S_{k+2})+(S_k-S_{k+1}+S_{k+2})\\&=S_k.\end{aligned}$$

即数列$\{S_k\}$是一个以 4 为周期的纯周期数列.

直接计算数$\{S_k\}$的初始值，可知 $S_0=S_1=1$, $S_2=S_3=0$. 依此结合$\{S_k\}$的周期性，可知命题成立.

【例 5】 对正整数 n，若 n 的正约数个数（记为 $d(n)$）为偶数，则令 $a_n=0$，否则令 $a_n=1$. 依此定义得到一个无穷数到$\{a_n\}$. 问：数 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$是一个有理数，还是一个无理数？

解 数 x 是一个无理数.

事实上，若 x 为有理数，则存在 k_0, $T\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $k\geqslant k_0$，都有

$$a_{k+T}=a_k, \qquad ①$$

即数列$\{a_n\}$是一个以 T 为周期的数列.

现在取 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $mT\geqslant k_0$，并且 mT 是一个完全平方数（注意，此时 $d(mT)$ 为奇数），然后再取一个素数 P，使得 $p\nmid mT$，则 $d(pmT)=2d(mT)$ 为偶数. 故 $a_{pmT}=0$，而 $a_{mT}=1$，但是，$T\mid pmT-mT$，与 ① 矛盾（由 ① 应有 $a_{pmT}=a_{mT}$）.

所以，数 x 是一个无理数.

【例 6】 设数列$\{a_n\}$满足 $a_0=1$, $a_1=3$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$. 试对非负整数 n，确定 $2a_n^3-a_n$ 末两位数字.

解 因为 $a_{n+2}\equiv -a_n \pmod 4$, $a_0=1$, $a_1=3$，从而

$$a_n=\begin{cases}1 \pmod 4, & n\equiv 0 \text{ 或 } 3 \pmod 4;\\ 3 \pmod 4, & n\equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod 4.\end{cases}$$

所以 $2a_n^3-a_n\equiv 1$ 或 $3 \pmod 4$.

另外，a_n 除以 25 后的余数构成周期为 15 的数列：1, 3, 11, 16, 3, 21, 6, 3, 6, 21, 3, 16, 11, 3, 1; 1, 3, 11, 16, 3, …，所以 $a_n\equiv 1$、3、6、11、16 或 $21 \pmod{25}$. 直接计算，可知 $2a_n^3-a_n\equiv 1 \pmod{25}$，由此可得

$$2a_n^3-a_n=\begin{cases}1 \pmod{100}, & \text{当 } n\equiv 0 \text{ 或 } 3 \pmod 4;\\ 5 \pmod{100}, & \text{当 } n\equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod 4.\end{cases}$$

因此，在 $n=4k$ 或 $4k+3$ 时，$2a_n^3-a_n$ 的末两位数字为 01；在 $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 时，$2a_n^3-a_n$ 的末两位数字为 51.

【例 7】 设 m 为给定的正整数,数列$\{x_n\}$满足:

$$x_k = k,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m+1;\ x_{k+1} = x_k + x_{k-m},\ k = m+2,\ \cdots.$$

证明:$\{x_n\}$中存在连续的 m 项,它们都是 $m+1$ 的倍数.

证明 考察数列 $\{x_n(\bmod(m+1))\}_{n=1}^{+\infty}$,这里 $x_n(\bmod(m+1))$ 是指 x_n 除以 $m+1$ 所得的余数,记它为 y_n. 则由于 $y_1,\ y_2,\ \cdots$ 中每一个数都只有有限种不同取值(至多 $m+1$ 个不同值),可知,存在 $k<n,\ k,\ n\in\mathbf{N}^*$,使得

$$(y_k,\ y_{k+1},\ \cdots,\ y_{k+m}) = (y_n,\ y_{n+1},\ \cdots,\ y_{n+m}). \qquad ①$$

上述结论由抽屉原则得到.

由递推式,可知 $y_{k-1} = y_{k+m} - y_{k+m-1},\ y_{n-1} = y_{n+m} - y_{n+m-1}$,结合 ① 就有 $y_{k-1} = y_{n-1}$. 依次倒推,可知对任意 $l\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$,都有 $y_l = y_{l+(n-k)}$,进一步,将数列依递推式倒推至负整数,可知,对任意$l\leqslant m,\ l\in\mathbf{Z}$,亦有 $y_l = y_{l+(n-k)}$.

利用$\{x_l\}$的递推式及初始条件倒推,可知 $x_0 = x_{-1} = \cdots = x_{-(m-1)} = 1,\ x_m = x_{-(m+1)} = \cdots = x_{-(2m-1)} = 0$. 于是,我们有

$$(y_{n-k-(2m-1)},\ \cdots,\ y_{n-k-m}) = (y_{-(2m-1)},\ \cdots,\ y_{-m}) = (0,\ 0,\ \cdots,\ 0),$$

又 $y_{-(m-1)} = \cdots = y_0 = 1$,所以,下标 $n-k-(2m-1)\geqslant 1$.

综上可知,数列$\{x_n\}$中有连续 m 项都是$m+1$ 的倍数.

【例 8】 设 m 为给定的正整数,对正整数 n,用 $S_m(n)$为 n 的十进制表示中各数码的 m 次方之和,例如 $S_3(172) = 1^3 + 7^3 + 2^3 = 352$. 定义数列$\{n_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 如下:$n_0\in\mathbf{N}^*,\ n_k = S_m(n_{k-1}),\ k = 1,\ 2,\ \cdots$.

证明:(1) 对任意 $n_0\in\mathbf{N}^*$,数列$\{n_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 都是周期数列;

(2) 当 n_0 变化时,(1)中数列的最小正周期构成的集合是一个有限集.

证明 如果 $n\geqslant 10^{m+1}$,那么存在正整数 $p\geqslant m+1$,使得 $10^p\leqslant n<10^{p+1}$,此时,

$$S_m(n)\leqslant(p+1)\times 9^m < 9^p + \mathrm{C}_p^1\cdot 9^{p-1} < (9+1)^p\leqslant n.$$

因此,当 $n_k\geqslant 10^{m+1}$ 时,有 $n_{k+1}<n_k$.

如果 $n<10^{m+1}$,那么

$$S_m(n)\leqslant(m+1)\times 9^m < (9+1)^{m+1} = 10^{m+1}.$$

上述讨论表明:对任意 $n_0\in\mathbf{N}^*$,当 k 充分大时,都有 $n_k<10^{m+1}$,所以,从某一项开始,数列的每一项都属于$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10^{m+1}-1\}$.

结合 $\{n_k\}$ 的定义可知,对任意$n_0\in\mathbf{N}^*$,数列$\{n_k\}_{k=0}^{+\infty}$是周期数列,故(1) 成立.

进一步可知,当 n_0 变化时,在 n_k 缩至集合$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10^{m+1}-1\}$后,由抽屉原则知其后的 10^{m+1} 个数中必有两个相同,因而,数列$\{n_k\}$的最小正周期都小于

10^{m+1},故(2)亦成立.

练习题

A组

1 数列$\{a_n\}$满足:$a_1=2$, $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$, $n=1, 2, \cdots$. 求$\sum_{k=1}^{2014}a_k$的值.

2 数列$\{x_n\}$的任意连续三项之和为20,且$x_4=9$, $x_{11}=7$. 求x_{2014}的值.

3 数列$\{x_n\}$满足:$x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2-5}{x_n}$, $n=1, 2, \cdots$. 求$\sum_{k=0}^{2014}x_k$的值.

4 判断数列$\{a_n\}$:$a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{5a_n-13}{3a_n-7}$的周期性.

5 数列$\{a_n\}$以下列方式给出:当$n\geqslant 1$时$a_{2n}=a_n$;当$n\geqslant 0$时$a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$. 求证:该数列不是周期数列.

6 设有4个周期数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、$\{d_n\}$满足:$a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=b_n+c_n$, $c_{n+1}=c_n+d_n$, $d_{n+1}=d_n+a_n$, $n=1, 2, \cdots$. 求证:$a_2=b_2=c_2=d_2=0$.

7 对任意正整数k,令$f_1(k)$为k的各位数字的和的平方. 对于$n\geqslant 2$,令$f_n(k)=f_1(f_{n-1}(k))$. 求$f_{100}(11)$.

8 圆周上依逆时针方向顺次写了4个整数a、b、c、d,每次允许将此4个数变为$a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$. 问:是否存在a、b、c、d,使经过2014次操作后,所得4个数x、y、z、w满足:$|xy-zw|$, $|yz-wx|$, $|xz-yw|$都为素数?

B组

9 已知$U_0=0$, $U_1=1$, $U_{n+1}=8U_n-U_{n-1}$, $n=1, 2, \cdots$. 求证:在数列$\{U_n\}$中没有形如$3^\alpha\cdot 5^\beta$的项,这里$\alpha\in\mathbf{N}^*$, $\beta\in\mathbf{N}^*$.

10 设S_0是一个由有限个正整数组成的集合,定义集合列S_0, S_1, S_2, $\cdots$如下:当且仅当$a-1\in S_n$与$a\in S_n$恰有一个成立时,$a\in S_{n+1}$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 证明:存在无穷多个正整数N,使得$S_N=S_0\cup\{N+a\mid a\in S_0\}$.

11 设X为整数集$\mathbf{Z}$的一个子集,记$X+a=\{x+a\mid x\in X\}$. 证明:若存在整数a_1, a_2, $\cdots$, a_n,使得$X+a_1$, $X+a_2$, $\cdots$, $X+a_n$构成$\mathbf{Z}$的一个分划,则存在一个整数N,使得$X+N=X$.

12 设a, c为给定的正整数,b为任意整数. 证明:存在正整数x,使得

$$a^x+x\equiv b \pmod c.$$

参考答案

第 1 讲　集合的概念与运算

1 983　2 $\{-3, 0, 2, 6\}$　3 $\{-3, -1, 1, 5\}$　4 不存在　5 $(p, q)=(-8, 16)$、$(-20, 100)$、$(-14, 40)$或(p, q)为满足$p^2<4q$的实数对　6 $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$　7 $A\subsetneqq B$　8 0　9 $A\cap B=B$，$\complement_I A\cup B=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbf{R}$,且$(x, y)\neq(2, 4)\}$　10 44　11 $2^{2006}-1$　12 略　13 (1) $a=0$或1 (2) $a=-1\pm\sqrt{2}$　14 $\{1, 3, 4, 9, 10\}$　15 1667　16 871　17 910　18 按照T中元素的个数进行如下讨论：$|T|=2$时,这样的T只有1个；$|T|=3$时,这样的T有6个；$|T|=4$时,这样的T有9个；$|T|=5$时,这样的T有6个；$|T|=6$时,这样的T有6个；$|T|=7$时,不存在；$|T|=8$时,只有1个.　19 (1) 证明略 (2) 0

第 2 讲　有限集元素的数目

1 (1) f: $a_1\mapsto b_1$, $a_2\mapsto b_2$, $a_3\mapsto b_3$,个数为$4\times3\times2=24$　(2) f: $a_1\mapsto b_1$, $a_2\mapsto b_1$, $a_3\mapsto b_1$,个数为$4^3-4\times3\times2=40$　(3) 不存在A到B上的满射　2 $3^3=27$　3 1006　4 $a=\sqrt{2}$或$2+\sqrt{2}$　5 1895　6 76　7 448　8 5　9 $|A\cap B|=167$　10 $5050\cdot2^{99}$　11 1870　12 14　13 略　14 4　15 175　16 75　17 13

第 3 讲　二次函数

1 (1) $y=2x^2-2x-\dfrac{3}{2}$　(2) 13　(3) $[5, 10]$　(4) 0　(5) 7　2 $y=x^2-4x+2$或$y=-\dfrac{9}{7}x^2-\dfrac{12}{7}x+2$　3 (1) 略 (2) 8　4 $(4, 33)$　5 $1\leqslant a\leqslant2$　6 $a=2$, $b=3$　7 $[1, 3]$或$\left[-2-\sqrt{17}, \dfrac{13}{4}\right]$　8 (1) $a>\dfrac{3}{2}$　(2) $(1, +\infty)$　9 $4+2\sqrt{3}$　10 $(-2, -1)\cup(3, 4)$　11 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$　12 (1) $x=-1$　(2) $\dfrac{128\sqrt{3}}{9}$　13 (1) 略 (2) 略　14 $-1\leqslant a-2b\leqslant5$　15 略　16 (1) $A\left(\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$、$B\left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$、$C\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$、$D$

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ (2) $\sqrt{65}$ **17** $m \leqslant 2-\sqrt{2}$ 或 $m \geqslant 2+\sqrt{2}$

第4讲 函数的图象和性质

1 (1) $x=\frac{1}{2}$ (2) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ $(x \neq \pm 1)$ (3) $y=-\varphi(-x)$ (4) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

2 $[35, +\infty)$ **3** $999\frac{1}{2}$ **4** $0<m<1$ **5** 561 **6** $\left[15, 15\frac{2}{3}\right]$

7 $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, +\infty\right)$ **8** $0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$ **9** 18 **10** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ **11** $k<1$ **12** (1) $(0, 1]$ (2) $[2, 3]$ **13** (1) 略

(2) $f(1997)=\sqrt{3}-2$, $f(2001)=2+\sqrt{3}$ **14** $y=\pm x$, $y=-x-\frac{b}{a}$, $y=\frac{ax+b}{cx-a}$

15 略 **16** $(-\infty, -9] \cup [4\sqrt{3}-3, +\infty)$ **17** (1) $f_{2004}\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{14}{15}$ (2) 略

18 略

第5讲 幂函数、指数函数、对数函数

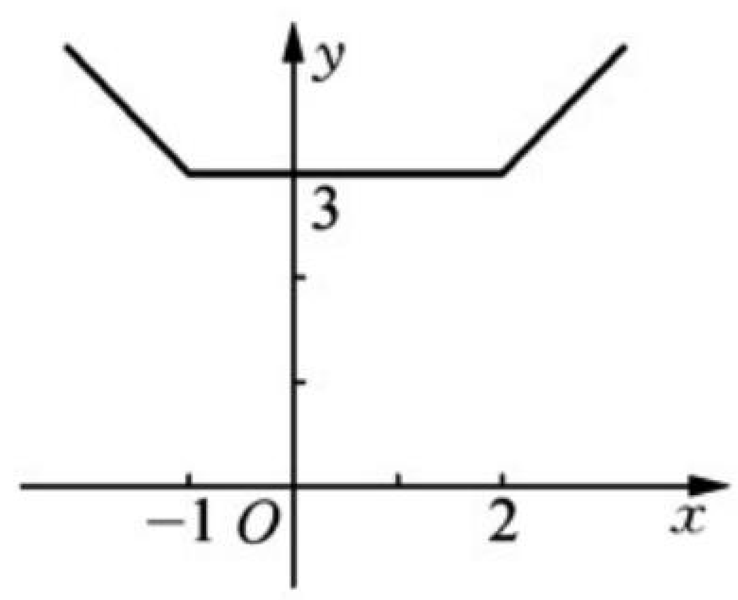
1 (1) 10 (2) 2 (3) $x=2$ (4) $2^{90}-1$ (5) 3 (6) $-3 \leqslant m<0$ **2** $[0, 1]$

3 $0<a<1$ **4** $1-a$ **5** $\frac{1}{2}\log_a t=\log_a \sqrt{t}$. 当 $t=1$ 时, $\frac{1}{2}\log_a t=\log_a \frac{t+1}{2}$. 当 $t \neq 1$ 时, $\frac{t+1}{2}>\sqrt{t}$. 若 $0<a<1$, 则 $\frac{1}{2}\log_a t>\log_a \frac{t+1}{2}$, 若 $a>1$, 则 $\frac{1}{2}\log_a t<\log_a \frac{t+1}{2}$. **6** 2^{10} **7** $1-\sqrt{\log_2 6}<x<1+\sqrt{\log_2 6}$ **8** $-6\sqrt[4]{3}+\frac{\sqrt{3}}{9} \leqslant m<0$

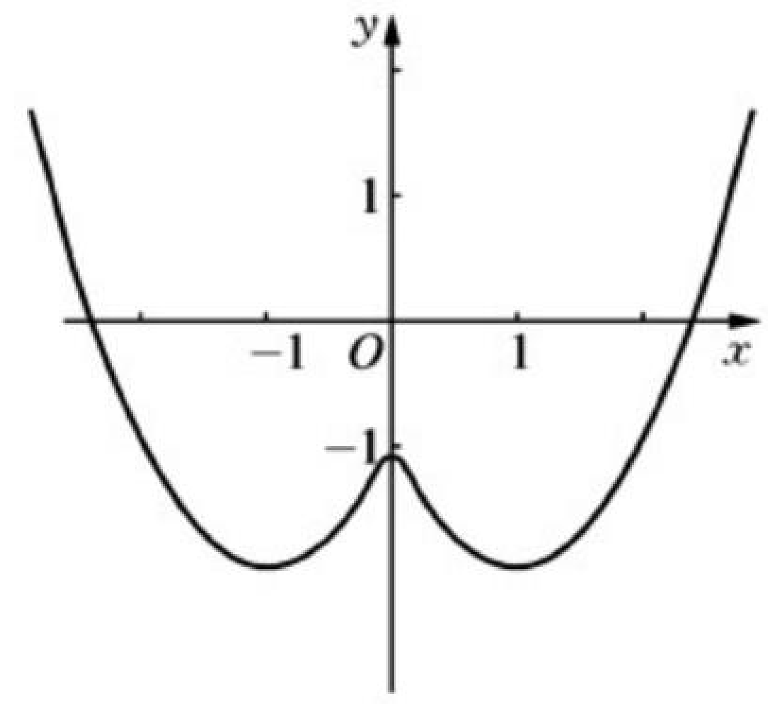
9 最大值为2,最小值为$-\frac{1}{4}$ **10** $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ **11** $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ **12** 当 n 是奇数时, $\sqrt{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; 当 n 是偶数时, $x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ **13** $a=2$ **14** $\lg 2$ **15** 证明略 **16** (1) $a=1$ (2) $(-\infty, 1]$ (3) 略

第6讲 含绝对值的函数

1 图象如图所示 **2** C **3** C **4** 函数的图象如图所示 **5** 两个

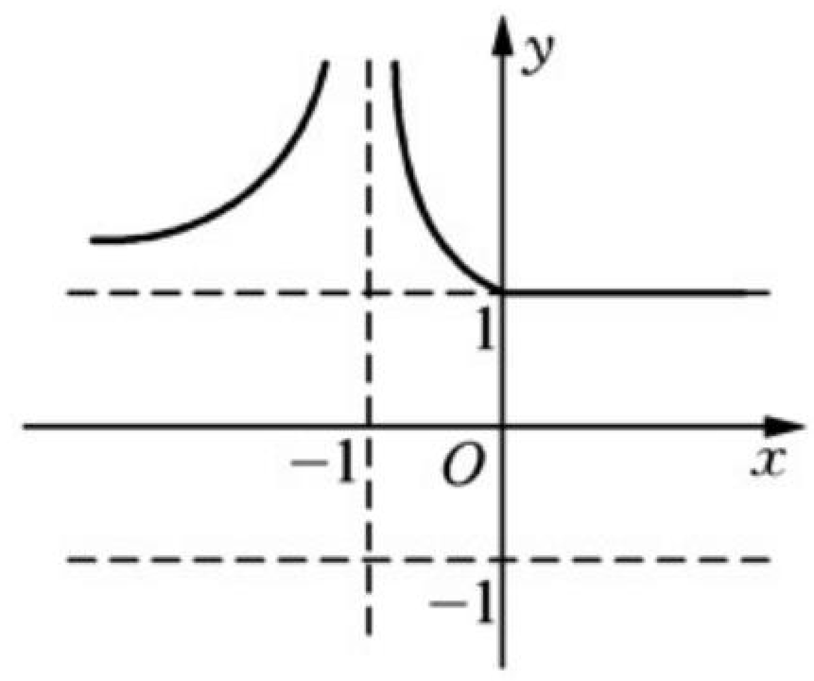


（第 1 题）



（第 4 题）

6 (1) $F(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 2-\sqrt{3},\\(x-1)^2; & 2-\sqrt{3}<x\leqslant 1\end{cases}$ (2) $4-2\sqrt{3}$ (3) $x=\dfrac{1}{6}$ 或 $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **7** (1) 图象如图所示 (2) 当 $a<0$ 时，方程无解；当 $a=0$ 或 $1<a<3$ 时，方程有四个解；当 $0<a<1$ 时，方程有八个解；当 $a=1$ 时，方程有六个解；当 $a=3$ 时，方程有三个解；当 $a>3$ 时，方程有两个解 **8** $f(x)$的最小值为 0. 当 $a\in(-2,0]$ 时，$f(x)$的最大值为$\dfrac{1}{2+a}$；当 $a\in(0,2)$ 时，$f(x)$的最大值为$\dfrac{1}{2-a}$ **9** $a=10$ **10** M 的最小值是$\dfrac{1}{2}$



（第 7 题）

第 7 讲 函数的最大值和最小值

1 (1) 211 (2) 10 (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 16 (5) $\dfrac{41}{8}$ (6) $\dfrac{4}{9}$ **2** $y_{\min}=1$ **3** 2 **4** 2 **5** $-\dfrac{1}{3}$ **6** $y_{\min}=4$，$y_{\max}=5045$ **7** 当 $x=\pm 3$ 时，y 取最小值$\dfrac{19}{20}$；当 $x=0$ 时，y 取最大值 5 **8** $3\sqrt{2}$ **9** 最小值为$\dfrac{50}{9}$，最大值为 18 **10** 18 **11** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **12** 2 **13** $a=\pm 4$，$b=3$ **14** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **15** 2 **16** $a=-\sqrt{2}$ 或 $2+\sqrt{6}$ **17** $\dfrac{1}{2}$ **18** $\sqrt{10}$ **19** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ **20** $a=-8$ 时，$l(a)$取到最大值$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ **21** 最大值为$\dfrac{3}{2}$，最小值为 1 **22** S 的最大值为 1；S 的最小值为$\dfrac{13-5\sqrt{5}}{2}$ **23** (1) 略 (2) $g(t)$的最小值为 4

第 8 讲　等差数列与等比数列

1 C　2 C　3 C　4 B　5 C　6 $M=N$　7 6　8 2　9 $a_n=1$ 或 $a_n=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n$　10 略　11 略　12 $a_n \leqslant b_n$　13 由 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 形成的质数为 3、5、11、61、67、73、79 共7 个　14 略　15 略　16 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$　17 证明略

第 9 讲　高阶等差数列

1 D　2 C　3 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$　4 $\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$　5 $a_n=\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}n^2-n+2$　6 $a_n=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n+12)$　7 $S_n=\frac{1}{5}n^5$　8 $a_n=n^3$　9 略　10 $S_n=2\cdot\frac{a-a^{n+1}}{(1-a)^3}-\frac{(2n-1)a^{n+1}+a}{(1-a)^2}-\frac{n^2a^{n+1}}{1-a}$　11 $a_{1m}=m^2+m-1$，$a_{1n}=n^2-n+1$　12 $\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+24)$　13 $a_1=\frac{1}{2}(1-19)(1-92)=819$

第 10 讲　数列求和

1 C　2 D　3 B　4 B　5 D　6 $(n+1)!-1$　7 $\frac{2n}{n+1}$

8 $\frac{(-1)^{n-1}na^{n+1}}{1+a}+\frac{a[1-(-a)^n]}{(1+a)^2}$　9 $\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$　10 $\frac{9}{2}$　11 173

12 $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{n+1}$　13 $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}}{n+2}+\frac{3n}{n+1}-\frac{5}{2}\right)$　14 $[x]=1998$

15 401　16 $\frac{(n+1)!}{2}-1$　17 证明略　18 证明略　19 (1) $a_n=2^n-3a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$　(2) $a_0=\frac{2}{5}$

第 11 讲　数列综合题

1 (1) $a_n=n$　(2) $T_n=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}, & p=1,\\ \frac{p(1-p^n)}{1-p}-np^{n+1}, & p\neq 1\end{cases}$　2 (1) $a_n=22-2n$，$n=$

1，2，3，…　(2) $a_n=12-n$ 和 $a_n=13-n$，$n=1,2,3,\cdots$　**3** (1) $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$　(2) 略　**4** (1) $a_n=6n-5(n\in\mathbf{N}^*)$　(2) 10　**5** (1) $a_n=10-2n$　(2) m的最大整数值是 7　**6** 2　**7** (1) 略　(2) $T_n=3^{2^n-1}$，$a_n=3^{2^{n-1}}-1$　(3) $S_n=1-\dfrac{2}{3^{2^n}-1}$　**8** (1) $a_n=4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$　(2) $\begin{cases}m=1,\\n=1\end{cases}$或$\begin{cases}m=2,\\n=1\end{cases}$或$\begin{cases}m=3,\\n=2\end{cases}$

9 证明略　**10** 略　**11** 略　**12** (1) $b_n=-3^n$　(2) $T_n=\dfrac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{4}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$

第 12 讲　三角函数的概念与性质

1 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　**2** $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$　**3** $m>-\dfrac{1}{2}$　**4** 略　**5** 略　**6** $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$　**7** (1) 略　(2) $c>a>b$　**8** 略　**9** 略　**10** 略　**11** $2k\pi+\dfrac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\dfrac{5}{12}\pi, k\in\mathbf{Z}$　**12** r 的最小值为$\dfrac{5}{4}$　**13** 最小值为$\dfrac{3}{4}$，在 $b=-\dfrac{3}{4}$ 时取到

14 略　**15** 略

第 13 讲　三角恒等变形

1 (1) 1　(2) 0　(3) 0　**2** (1) 1　(2) $\dfrac{3}{4}$　(3) $2-\sqrt{3}$　(4) 2^{22}　**3** $\dfrac{11}{16}$　**4** $\dfrac{7}{3}$

5 $\dfrac{24}{25}$　**6** -3　**7** $\alpha=5^\circ$或者10°　**8** 证明略　**9** 证明略　**10** 略　**11** 略

12 略　**13** 略　**14** 记 $A_n=\prod\limits_{k=0}^{2^{n-1}}\left(4\sin^2\dfrac{k\pi}{2^n}-3\right)$，$A_n=\begin{cases}-3, & 若 n 为奇数,\\ 3, & 若 n 为偶数\end{cases}$

第 14 讲　三角不等式

1 $f\left(\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)\leqslant f\left(\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$　**2** 略　**3** $\alpha>\beta$　**4** 略　**5** 略

6 略　**7** 略　**8** 略　**9** 略　**10** 略　**11** 略　**12** $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=2k\pi\pm\dfrac{2}{3}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

13 略　**14** 略　**15** 略

第 15 讲　三角函数的最大值和最小值问题

1 $2+2\sqrt{2}$　**2** 9　**3** 1　**4** $\cos x+\cos y$ 的最大值和最小值分别为$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$

⑤ 1 ⑥ $\sqrt{3}$ ⑦ $4+4\sqrt{2}$ ⑧ 最大值和最小值分别为$\frac{38}{3}$和$\frac{38}{13}$ ⑨ $f(x)$的最大值为$2\sqrt{10}$(当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时取到),最小值为$\sqrt{10}$(当$\alpha=\pi$时取到) ⑩ $2^{-\frac{n}{2}}$ ⑪ 当且仅当$A=B=0$时,$F(x)$的最大值M取得最小值$\sqrt{2}$ ⑫ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}\right]$ ⑬ $\frac{3}{2}$ ⑭ $2^n-2^{\frac{n}{2}+1}+1$

第 16 讲 反三角函数

① $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ ② $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$或$2k\pi+\frac{5}{6}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ ③ $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ ④ $\frac{180\pi}{180+\pi}$ ⑤ $\frac{1}{2}$ ⑥ a 的符号是负号,而 b 的符号为正号 ⑦ $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{16}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ⑧ $\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin 4\alpha\in\{0, \pm 1\}$ ⑨ $\frac{\pi}{4}$ ⑩ $x=\frac{7\pi}{6}$或$\frac{11\pi}{6}$ ⑪ $\frac{3\pi}{4}-2$ ⑫ $\frac{\pi}{2}$ ⑬ 反函数为 $y=\ln(\tan x+|\sec x|)$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ⑭ 证明略 ⑮ 6 ⑯ 略 ⑰ $2^{n-2}+1$ ⑱ $x=2k\pi+\alpha$ 这里 $\alpha\in\left\{\pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{13}, \pm\frac{3\pi}{13}, \pm\frac{5\pi}{13}, \pm\frac{7}{13}\pi, \pm\frac{9}{13}\pi, \pm\frac{11\pi}{13}\right\}$, $k\in\mathbf{Z}$

第 17 讲 正弦定理与余弦定理

① 观察者在离墙距离为$\sqrt{ab}$米时,视角最大 ② $8\sqrt{2}$ ③ $A=60^\circ$ ④ $A=120^\circ$ ⑤ $\sin\frac{C-A}{2}=\frac{1}{2}$ ⑥ 1 ⑦ 略 ⑧ 略 ⑨ 略 ⑩ 略 ⑪ 略 ⑫ 略 ⑬ 略 ⑭ 略 ⑮ 略 ⑯ 略

第 18 讲 向量的概念与运算

① 120° ② 60° ③ 19 ④ 0 ⑤ 略 ⑥ $ABCD$ 为矩形 ⑦ $\frac{11}{6}$ ⑧ 略 ⑨ 略 ⑩ 略 ⑪ 略 ⑫ 略

第 19 讲 空间的“角”和“距离”

① 45° ② $\frac{13}{5}$ ③ 3 ④ 7 ⑤ 30° ⑥ $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑦ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑧ 30°

9 $\arccos\frac{3\sqrt{46}}{46}$　**10** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**11** $\frac{24}{5}$　**12** (1) $\arccos\frac{2}{3}$　(2) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$　**13** $\sqrt{6}$

14 (1) $\frac{4\sqrt{3}}{27}$　(2) $\frac{2}{3}$　**15** (1) 当 $AB\perp\alpha$ 时，点 P 的轨迹为以 O 为圆心，以 $\sqrt{OA\cdot OB}$ 为半径的圆　(2) 当 AB 不垂直于 α 时，则过 AB 有唯一平面 $\beta\perp\alpha$. 设交线为 l，那么以 O 为圆心，$\sqrt{OA\cdot OB}$ 为半径的圆和 l 有两个交点 M、N，若 $\angle AOM$ 为锐角，则 M 为 P 点；反之，则 N 为 P 点

第 20 讲　截面、折叠和展开

1 $\frac{\sqrt{6}}{2}$　**2** $\sqrt{10}$　**3** 垂直　**4** $[a^2, \sqrt{2}a^2]$　**5** 当 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，$S_{\max}=\frac{1}{2}l^2$；当 $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$S_{\max}=\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$　**6** $\frac{\sqrt{3}}{4}a$　**7** $\frac{3}{10}\sqrt{10}a^2$　**8** $S_{\triangle EFA}=ab$

9 $120°$ 或 $90°$　**10** n 为不小于 2 的一切正整数　**11** 略　**12** 平面将三棱锥分成的上、下两部分之比为 $4:21$　**13** $\frac{1}{12}\sqrt{2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$

14 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线时，$A'B$ 最小，最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}a$

第 21 讲　射影与面积射影定理

1 $\angle CEB>\angle DEB$　**2** 垂　**3** $\frac{\pi}{3}$　**4** 1　**5** $\sqrt{3}$　**6** $a>c>b$ 或 $b>c>a$

7 略　**8** $\frac{7\sqrt{11}}{24}a^2$　**9** $34\sqrt{3}+16\sqrt{6}$　**10** P 为 AC 的中点　**11** 略　**12** $V_{P\text{-}ABC}=5$

13 当 $0<h<\sqrt{6}$ 时，$\alpha=0$ 时图形面积最大值为 4；当 $h=\sqrt{6}$ 时，$\alpha=0$ 或 $\frac{\pi}{6}$ 时，面积最大值为 4；当 $h>\sqrt{6}$ 时，$\alpha=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{2}}{h}$ 时，面积最大值为 $\sqrt{2h^2+4}$　**14** 略

第 22 讲　集合的分划

1 略　**2** 略　**3** 所求最小正整数 $h(n)=2n$　**4** $n=96$　**5** 存在　**6** 最多可以选出两个集合　**7** 略　**8** 略　**9** 所有符合要求的分划数为 2^{n-1} 种

10 略

第 23 讲　二次函数综合题

1 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{8}{7}x-\frac{12}{7}$　2 $a=-\frac{1}{4}$，$b=0$，$c=4$ 或 $a=\frac{1}{4}$，$b=0$，$c=-4$

3 略　4 略　5 $0<a<1$　6 $1\leqslant a\leqslant 9$　7 π　8 (1) $-4\leqslant m\leqslant 2$ (2) 最小值是 $10\frac{3}{4}$，最大值为 101　9 略　10 若 $AC=BC$，则 $y=-\frac{4}{9}x^2+4$；若 $AC=AB$，则 $y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+4$ 或 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$；若 $AB=BC$，则 $y=-\frac{8}{7}x^2+\frac{44}{21}x+4$　11 整点为 $(-6,6)$、$(-3,3)$、$(2,2)$、$(4,3)$、$(7,6)$、$(9,9)$

12 (1) $f(x)=(x-2k)^2$　(2) $M_k=\{a\mid 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\}$　13 11　14 $a_{\min}=5$

15 略　16 略

第 24 讲　离散量的最大值与最小值

1 6　2 k 的最小值为 51　3 $(2\times3\times\cdots\times8)\times(10\times11\times\cdots\times20)$　4 97

5 1297　6 24　7 最小的 $k=5$　8 16　9 体育馆最少要安排 12 个横排

10 M 最多有 10 个元素　11 11 元　12 2　13 25　14 略　15 $1-\frac{1}{2^{n-1}}$　16 $1-\frac{1}{a[a(n-a+1)+1]}$，其中 $a=\left[\frac{2n}{3}\right]$　17 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}=1-\frac{1}{r_1r_2\cdots r_n}$，这里 $r_1=2$，$r_2=3$，$r_i=r_1r_2\cdots r_{i-1}+1$，$i=2,3,\cdots,n$

第 25 讲　简单的函数迭代和函数方程

1 符合要求的 (a,b) 对构成的集合为 $\{(a,b)\mid 0\leqslant a\leqslant 4,b=0\}$　2 略

3 $f^{(n)}(x)=\sqrt{20^n\left(x^2+\frac{10}{19}\right)-\frac{10}{19}}$　4 $g(x)=\varphi^{-1}(u(\varphi(x)))=(x+1)^{\sqrt[3]{2}}-1$

5 略　6 $f(x)=\frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}$　7 $f(x)=x$　8 $f(x)=1$，$x\in\mathbf{R}$　9 $f(x)=x+1$　10 50　11 $f(x)=x$　12 $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$　13 $f(x)=x+1$　14 $f(x)=2$ 和 $f(x)=x$　15 略

第 26 讲　构造函数解题

1 略　2 略　3 $[-1,5]$　4 略　5 略　6 0　7 略　8 略　9 略
10 略　11 存在　12 略　13 略　14 略　15 略

第 27 讲　向量与几何

1 略　2 略　3 略　4 略　5 略　6 略　7 略　8 存在　9 略
10 略　11 略

第 28 讲　四面体

1 $\sqrt{3}$　2 $\frac{h}{3}\sqrt{S_{上} S_{下}}$　3 $\pi-\arccos\frac{1}{3}$　4 90°　5 略　6 略　7 略
8 略　9 (1) 略　(2) $\frac{1}{27}$　10 略　11 略　12 略

第 29 讲　递推数列与递推方法

1 当 $n=2009$ 或 2010 时，a_n 取最大值　2 略　3 $a_n=2n-1$　4 $a_n=2^n+n!$
5 $a_n=2n-1$　6 748　7 略　8 略　9 略　10 $x_n=\frac{\sqrt{2}}{8}(3+2\sqrt{2})^n-\frac{\sqrt{2}}{8}(3-2\sqrt{2})^n$　11 略　12 略　13 略　14 略　15 略　16 略　17 略
18 略　19 对每个正整数 $i>2$，C_i 的最大值为 $4\times3^{i-1}$，而 C_1 的最大值为 2　20 不是有界数列，证明略

第 30 讲　周期数列

1 $\frac{2017}{2}$　2 9　3 -1　4 以 3 为周期的数列　5 不是周期数列　6 略
7 169　8 不存在　9 略　10 略　11 略　12 略